انجینئری ریاضیات

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔سوالات کے جوابات wxMaxima کی مدد سے حاصل کیے گئے ہیں۔درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے ہوئے اس کو لکھا گیا ہے

Advanced Engineering Mathematics by Erwin Kreyszig

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

5 نومبر 2018

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

یک رتبی سادہ تفرقی مساوات

عموماً طبعی تعلقات کو تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح عموماً انجنیئر نگ مسائل تفرقی مساوات کی صورت میں پیش آتے ہیں۔اسی لئے اس کتاب کی ابتدا تفرقی مساوات اور ان کے حل سے کی جاتی ہے۔

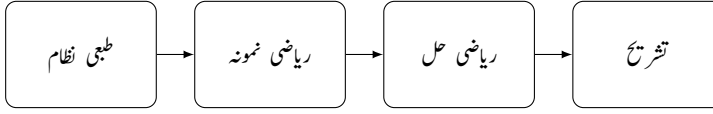
سادہ تفرقی مساوات[1] سے مراد ایسی تفرقی مساوات ہے جس میں ایک عدد آزاد متغیرہ پایا جاتا ہو۔اس کے برعکس جزوی تفرقی مساوات[2] ایک سے زائد آزاد متغیرات پر منحصر ہوتی ہے۔جزوی تفرقی مساوات کا حل نسبتاً مشکل ثابت ہوتا ہے۔

کسی بھی حقیقی صورت حال یا مشاہدے کی نقشہ کشی کرتے ہوئے اس کا ریاضی نمونہ[3] حاصل کیا جا سکتا ہے۔سائنس کے مختلف میدان مثلاً انجنیئر نگ، طبیعیات، علم کیمیا، حیاتیات، کمپیوٹر وغیرہ میں درپیش مسائل کی صحیح تفرقی مساوات کا حصول اور ان کے حل پر تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

سادہ تفرقی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر کو علیحدہ باب میں پیش کیا جائے گا۔یہ باب بقایا کتاب سے مکمل طور پر علیحدہ رکھا گیا ہے۔ یوں کتاب کے پہلے دو باب کے بعد اس باب کو پڑھا جا سکتا ہے۔

پہلی باب کا آغاز یک رتبی سادہ تفرقی مساوات کے حصول، مساوات کے حل اور حل کی تشریح سے کیا جاتا ہے۔رتبہ اول سادہ تفرقی مساوات میں صرف ایک عدد نا معلوم تفاعل کا ایک رتبی تفرق پایا جاتا ہے۔ایسی مساوات میں ایک

[1] ordinary differential equation
[2] partial differential equation
[3] mathematical model

طبعی نظام → ریاضی نمونہ → ریاضی حل → تشریح

شکل 1.1: نمونہ کشی، حل اور تشریح۔

سے زیادہ رتبے کا تفرق نہیں پایا جاتا۔نا معلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیرہ t وقت کو ظاہر کرتی ہے۔باب کے اختتام میں تفرقی مساوات کے حل کی وجودیت[4] اور یکتائی[5] پر غور کیا جائے گا۔

تفرقی مساوات سمجھنے کی خاطر ضروری ہے کہ انہیں کاغذ اور قلم سے حل کیا جائے البتہ کمپیوٹر کی مدد سے آپ حاصل جواب کی درستگی دیکھنا چاہیں تو اس میں کوئی حرج نہیں ہے۔

1.1 نمونہ کشی

شکل 1.1 کو دیکھیے۔ انجنیئرنگ مسئلے کا حل تلاش کرنے میں پہلا قدم مسئلے کو مساوات کی صورت میں بیان کرنا ہے۔مسئلے کو مختلف متغیرات اور تفاعل کے تعلقات کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔اس مساوات کو ریاضی نمونہ[6] کہا جاتا ہے۔ریاضی نمونے کا حصول، نمونے کا ریاضیاتی حل اور حل کی تشریح کے عمل کو نمونہ کشی[7] کہا جاتا ہے۔ نمونہ کشی کی صلاحیت تجربے سے حاصل ہوتی ہے۔کسی بھی نمونہ کے حل میں کمپیوٹر مدد کر سکتا ہے البتہ نمونہ کشی میں کمپیوٹر عموماً کوئی مدد فراہم نہیں کر پاتا۔

عموماً طبعی مقدار مثلاً اسراع اور رفتار درحقیقت میں تفرق کو ظاہر کرتے ہیں لہٰذا بیشتر ریاضی نمونے مختلف متغیرات اور تفاعل کے تفرق پر مشتمل ہوتے ہیں جنہیں تفرقی مساوات[8] کہا جاتا ہے۔تفرقی مساوات کے حل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو اس تفرقی مساوات پر پورا اترتا ہو۔تفرقی مساوات کا حل جانتے ہوئے مساوات میں موجود متغیرات اور تفاعل کے ترسیم کھینچے جا سکتا ہے اور ان پر غور کیا جا سکتا ہے۔تفرقی مساوات پر غور سے پہلے چند بنیادی تصورات تشکیل دیتے ہیں جو اس باب میں استعمال کیے جائیں گے۔

---

existence[4]
uniqueness[5]
mathematical model[6]
modeling[7]
differential equation[8]

سادہ تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم تفاعل کی ایک رتبی یا بلند رتبی تفرق پائے جاتے ہوں۔نا معلوم تفاعل کو $y(t)$ یا $y(x)$ سے ظاہر کیا جائے گا جہاں غیر تابع متغیر t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔اس مساوات میں نا معلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیرہ x (یا t) کے تفاعل بھی پائے جا سکتے ہیں۔درج ذیل چند سادہ تفرقی مساوات ہیں

$$y' = \sin x \tag{1.1}$$

$$y' + \frac{6}{7}y = 4e^{-\frac{3}{2}x} \tag{1.2}$$

$$y''' + 2y' - 11y'^2 = 0 \tag{1.3}$$

جہاں $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ، $y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ ، وغیرہ ہیں۔

دو یا دو سے زیادہ متغیرات کے تابع تفاعل کے تفرق پر مشتمل مساوات کو جزوی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔ان کا حل سادہ تفرقی مساوات سے زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔جزوی تفرقی مساوات پر بعد میں غور کیا جائے گا۔غیر تابع متغیرات x اور y پر منحصر تابع تفاعل $u(x,y)$ کی جزوی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \tag{1.4}$$

n رتبی تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم تفاعل y کی بلند تر تفرق کا رتبہ n ہو۔یوں مساوات 1.1 اول رتبہ (یک رتبی) کی مساوات ہے، مساوات 1.2 دوسرے رتبہ (دو رتبی) جبکہ مساوات 1.3 تیسرے رتبہ کی مساوات (سہ رتبی مساوات) ہے۔

اس باب میں یک رتبی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ایسی مساوات میں یک رتبی تفرق y' کے علاوہ نا معلوم تفاعل y اور غیر تابع متغیرہ کا کوئی بھی تفاعل پایا جا سکتا ہے۔یک رتبی سادہ تفرقی مساوات کو

$$F(y, y', x) = 0 \tag{1.5}$$

یا

$$y' = f(x, y) \tag{1.6}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 1.5 خفی[9] صورت کہلاتی ہے جبکہ مساوات 1.6 صریح[10] صورت کہلاتی ہے۔یوں خفی مساوات $x^2y' - 2y^3 = 0$ کی صریح صورت $y' = 2\frac{y^3}{x^2}$ ہے۔

---

[9] implicit
[10] explicit

حل کا تصور

ایک تفاعل

$$y=h(x) \tag{1.7}$$

جو کھلے وقفہ[11] $a \le x \le b$ پر معین[12] ہو اور پورے وقفے پر اس کا تفرق پایا جاتا ہو، اس صورت مساوات 1.5 کا حل ہو گا جب $h(x)$ اور $h'(x)$ کو مساوات 1.5 میں بالترتیب $y(x)$ اور $y'(x)$ کی جگہ پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر ہوں۔تفاعل $h(x)$ کا خط منحنی حل[13] کہلائے گا۔

یہاں کھلے وقفے سے مراد ایسا وقفہ ہے جس کے آخری سر a اور b وقفے کا حصہ نہ ہوں۔کھلا وقفہ لامتناہی ہو سکتا ہے مثلاً $-\infty \le x \le b$ یا $a \le x \le \infty$ اور یا $-\infty \le x \le \infty$ یعنی حقیقی محور۔

مثال 1.1: ثابت کریں کہ وقفہ $-\infty \le x \le \infty$ پر تفاعل $y=cx$ تفرقی مساوات $y=y'x$ کا حل ہے جہاں c ایک اختیاری مستقل[14] ہے۔

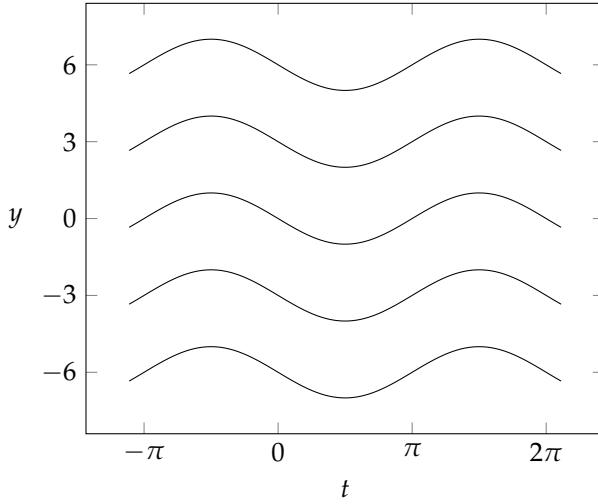
حل: پورے وقفے پر $y=cx$ معین ہے۔اسی طرح اس کا تفرق $y'=c$ بھی پورے وقفے پر پایا جاتا ہے۔ان بنیادی شرائط پر پورا اترنے کے بعد تفاعل اور تفاعل کے تفرق کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$y=cx \implies (cx)=(c)x$$

مساوات کے دونوں اطراف برابر ہیں لہٰذا $y=cx$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔ □

مثال 1.2: حل بذریعہ تکمل: مساوات $y'=\cos t$ کا حل بذریعہ تکمل حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی $y=\int \cos t$ جس سے $y=c-\sin t$ حاصل ہوتا ہے جو نسلی حل[15] ہے۔ حاصل حل میں c اختیاری مستقل ہے۔اختیاری مستقل کی ہر انفرادی قیمت تفرقی مساوات کا ایک منفرد حل دیتا ہے۔یوں $c=3.24$ پر کرتے ہوئے $y=3.24-\sin t$ حل حاصل ہوتا ہے۔شکل 1.2 میں $c=-6,-3,0,3,6$ سے حاصل حل دکھائے گئے ہیں۔ □

---

[11] open interval
[12] defined
[13] solution curve
[14] arbitrary constant
[15] solution family

شکل 1.2: مثال 1.2 کے خط۔

مثال 1.3: مساوات مالتھس

قوت نمائی تفاعل $y = ce^{kt}$ کے تفرق سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = kce^{kt} = ky \tag{1.8}$$

یوں $y' = ky$ تفرقی مساوات کا حل $y = ce^{kt}$ ہے۔ مثبت k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی اضافے کی نمونہ کشی کرتی ہے۔ جرسوموں کی تعداد اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے۔ وسیع رقبے کے ملک میں کم انسانی آبادی اسی کلیے کے تحت بڑھتی ہے جہاں اس کو **قانون مالتھس**[16] کہا[17] جاتا ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = 0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔

منفی k کی صورت میں $y = ce^{kt}$ قوت نمائی گھٹاو مثلاً **تابکاری تحلیل**[18] کو ظاہر کرتی ہے۔ مستقل c کے مختلف مثبت قیمتوں اور $k = -0.15$ کے خطوط کو شکل 1.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔ مثال 1.5 میں تابکاری تحلیل کے مسئلے پر مزید غور کیا گیا ہے۔ □

---

[16] Malthus' law

[17] یہ قانون انگلستانی ماہر معاشیات طامس روبرٹ مالتھس (1766-1834) کے نام ہے۔

[18] radioactive decay

(الف) قوت نمائی اضافہ۔ مساوات $y' = 0.15y$ کا حل۔

(الف) قوت نمائی گھٹاو۔ مساوات $y' = -0.15y$ کا حل۔

شکل 1.3: قوت نمائی تفرقی مساوات کی نسل حل۔

درج بالا مثالوں میں ہم نے دیکھا کہ یک رتبی سادہ تفرقی مساوات کے حل میں ایک عدد اختیاری مستقل c پایا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کا ایسا حل جس میں اختیاری مستقل c پایا جاتا ہو **عمومی حل**[19] کہلاتا ہے۔

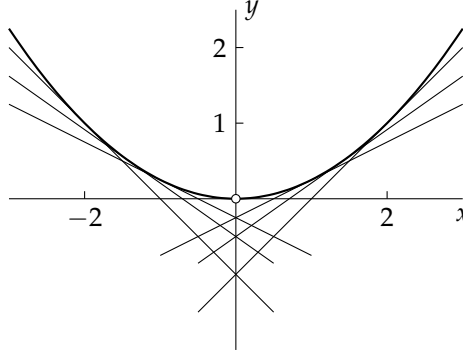
(بعض اوقات c مکمل طور اختیاری مستقل نہیں ہوتا بلکہ اس کی قیمت کو کسی وقفے پر محدود کرنا لازم ہوتا ہے۔)

ہم یکتا[20] عمومی حل حاصل کرنے کی تراکیب سیکھیں گے۔

جیومیٹریائی طور پر سادہ تفرقی مساوات کا عمومی حل لامتناہی حل کے خطوط پر مشتمل ہوتا ہے جہاں c کی ہر انفرادی قیمت منفرد خط دیتی ہے۔ عمومی حل میں c کی کوئی مخصوص قیمت مثلاً $c = -3.501$ یا $c = 0$ پر کرنے سے ہمیں **مخصوص حل**[21] ملتا ہے۔ مخصوص حل میں کوئی اختیاری مستقل نہیں پایا جاتا۔

عام طور عمومی حل قابل حصول ہوتا ہے جس میں c کی مخصوص قیمت پر کرتے ہوئے درکار مخصوص حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ بعض اوقات تفرقی مساوات ایسا حل بھی رکھتی ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ ایسے حل کو نادر[22] حل کہتے ہیں۔ مثلاً درج ذیل تفرقی مساوات

$$y'^2 - xy' + y = 0 \tag{1.9}$$

[19] general solution
[20] unique
[21] particular solution
[22] singular solution

شکل 1.4: نادر حل اور مخصوص حل (تفرقی مساوات 1.9)

کا عمومی حل

$$y = cx - c^2$$

ہے جو سیدھے خطوط کی نسل ظاہر کرتی ہے جہاں ہر خط c کی مخصوص قیمت پر کرنے سے حاصل ہو گا۔اسی تفرقی مساوات کا دوسرا حل

$$y = \frac{x^2}{4}$$

ہے جس کو c میں مستقل قیمت پر کرنے سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا یہ نادر حل ہے۔جیسا کہ شکل 1.4 میں دکھایا گیا ہے، ہر مخصوص حل، اس نادر حل کا مماس ہے۔

انجینئری مسائل میں نادر حل شاذ و نادر استعمال ہوتا ہے۔

ابتدائی قیمت مسائل

عام طور پر عمومی حل میں ابتدائی قیمتیں[23] x_0 اور y_0 پر کرنے سے مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے جہاں $y(x_0) = y_0$ ہے۔جیومیٹریائی طور پر اس کا مطلب ہے کہ خط حل نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہے۔سادہ تفرقی مساوات اور مساوات کی ابتدائی قیمتوں کو ابتدائی قیمت سوال[24] کہا جاتا ہے۔یوں صریح سادہ تفرقی مساوات کی صورت میں ابتدائی قیمت سوال درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1.10}$$

---

[23] initial values
[24] initial value problem

مثال 1.4: ابتدائی قیمت سوال: درج ذیل ابتدائی قیمت سوال کو حل کریں۔

$$y' = 5y, \qquad y(0) = 3.2$$

حل: تفرقی مساوات کو $\frac{dy}{y} = 5\,dx$ لکھتے ہوئے دونوں اطراف کا تکمل لینے سے $y = ce^{5x}$ عمومی حل حاصل ہوتا ہے جس میں $x = 0$ پر $y = 3.2$ پر کرنے سے $y(0) = ce^0 = 3.2$ لکھا جائے گا جس سے $c = 3.2$ ملتا ہے۔یوں ابتدائی قیمت سوال کا مخصوص حل $y = 3.2e^{5x}$ ہے۔ □

نمونہ کشی پر مزید بحث

نمونہ کشی کو مثال کی مدد سے بہتر سمجھا جا سکتا ہے لہٰذا ایسا ہی کرتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے پہلے قدم پر مسئلے کو تفرقی مساوات کا جامہ پہنایا جائے گا۔دوسرے قدم پر تفرقی مساوات کا عمومی حل حاصل کیا جائے گا۔تیسرے قدم پر ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مخصوص حل حاصل کیا جائے گا۔ آخر میں چوتھا قدم حاصل جواب کی تشریح ہو گا۔

مثال 1.5: تابکار مادے کی موجودہ کمیت $2\,\mathrm{mg}$ ہے۔اس کی کمیت مستقبل میں دریافت کریں۔

طبعی معلومات: تجربے سے معلوم کیا گیا ہے کہ کسی بھی لمحے پر تابکاری تحلیل کی شرح اس لمحے پر موجود تابکار مادے کی کمیت کے راست تناسب ہے۔

(الف) پہلا قدم: نمونہ کشی: کمیت کو y سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں کسی بھی لمحے پر تابکاری کی شرح سے مراد $y' = \frac{dy}{dt}$ ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کمیت گھٹتی ہے لہٰذا تجربے سے حاصل معلومات کو درج ذیل تفرقی مساوات کی صورت میں لکھا جائے گا جہاں تناسبی مستقل k مثبت قیمت ہے۔

$$\frac{dy}{dt} = -ky \tag{1.11}$$

مثال 1.3 میں آپ نے دیکھا کہ تفرقی مساوات میں منفی کی علامت سے تفرقی مساوات کا قوت نمائی گھٹتا ہوا حل حاصل ہوتا ہے۔چونکہ تابکاری سے تابکار مادے کی کمیت گھٹتی ہے لہٰذا درج بالا مساوات میں منفی کی

علامت استعمال کی گئی ہے۔تابکار اشیاء کے مستقل k کی قیمتیں تجربے سے حاصل کی جاتی ہیں مثلاً ریڈیم[25] یعنی $^{226}_{88}\text{Ra}$ کا $k = 1.4 \times 10^{-11}\,\text{s}^{-1}$ ہے۔

ابتدائی کمیت $2\,\text{mg}$ ہے۔ابتدائی وقت کو $t = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی معلومات $y(0) = 2\,\text{mg}$ لکھی جائے گی۔(غیر تابع متغیر وقت t کی بجائے کچھ اور مثلاً x ہونے کی صورت میں بھی (x_0, y_0) یا $y(x_0) = y_0$ کو ابتدائی معلومات ہی کہا جاتا ہے۔اسی طرح تابع متغیرہ y کی قیمت $t \neq 0$ پر معلوم ہو سکتی ہے مثلاً $y(x_n) = y_n$ اور ایسی صورت میں (x_n, y_n) ابتدائی معلومات کہلاتی ہے۔یوں دیے مسئلے سے درج ذیل ابتدائی قیمت سوال حاصل ہوتا ہے۔

$$y' = -ky, \qquad y(0) = 2\,\text{mg} \tag{1.12}$$

(ب) دوسرا قدم: عمومی حل: ابتدائی قیمت سوال کا عمومی حل درج ذیل ہے جہاں c اختیاری مستقل جبکہ k کی قیمت تابکار مادے پر منحصر ہے۔

$$y = c^{-kt} \tag{1.13}$$

ابتدائی معلومات کے تحت $t = 0$ پر $y = 2\,\text{mg}$ ہے جس کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے $c = 2$ حاصل ہوتا ہے۔یوں درج ذیل مخصوص حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = 2e^{-kt} \qquad (k > 0) \tag{1.14}$$

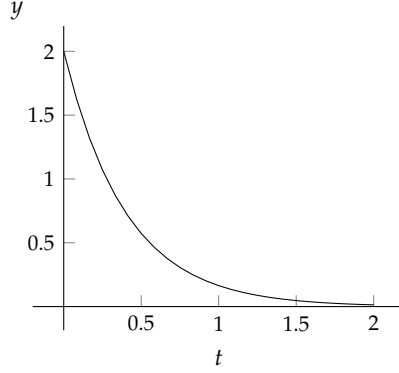
مخصوص حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ حاصل حل درست ہے۔اسی طرح مخصوص حل سے ابتدائی معلومات حاصل کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -kce^{-kt} = -ky, \quad y(0) = 2e^{-0} = 2$$

(پ) حاصل مخصوص حل کی تشریح: مساوات 1.14 کو شکل 1.5 میں دکھایا گیا ہے جہاں $k = 2.5$ لیا گیا ہے۔لمحہ $t = 0$ پر یہ مساوات تابکار مادے کی درست کمیت دیتا ہے۔لمحہ لامتناہی پر تابکار مادے کی کمیت $y(\infty) = 2e^{-k\infty} = 0$ حاصل ہوتی ہے۔

□

---

[25] radium

شکل 1.5: مثال 1.5 کی منحنی۔ تابکاری تحلیل $y=2e^{-kt}$ جہاں $k=2.5$ لیا گیا ہے۔

سوالات

سوالات 1.1 تا 1.8 کے جوابات بذریعہ تکمل حاصل کریں یا کسی تفاعل کی تفرق سے جواب حاصل کریں۔

سوال 1.1: $y'+3\sin 2\pi x=0$

جواب: $y=\frac{3}{2\pi}\cos 2\pi x+c$

سوال 1.2: $y'+xe^{-x^2}=0$

جواب: $y=\frac{e^{-x^2}}{2}+c$

سوال 1.3: $y'=4e^{-x}\cos x$

جواب: $y=2e^{-x}(\cos x-\sin x)+c$

سوال 1.4: $y'=y$

جواب: $y=ce^{x}$

سوال 1.5: $y'=-y$

جواب: $y=ce^{-x}$

سوال 1.6: $y' = 2.2y$

جواب: $y = ce^{2.2x}$

سوال 1.7: $y' = 1.5 \sinh 3.2x$

جواب: $y = \frac{15}{32} \cosh 3.2x + c$

سوال 1.8: $y'' = -y$

جواب: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

سوال 1.9 تا سوال 1.15 ابتدائی قیمت سوالات ہیں جن کے عمومی حل دیے گئے ہیں۔انہیں تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہی عمومی جوابات ہیں۔عمومی جواب سے مخصوص جواب حاصل کریں۔مخصوص جواب کا خط کھینچیں۔

سوال 1.9: $y' + 2y = 0.8, \quad y = ce^{-2x} + 0.4, \quad y(0) = 1.2$

جواب: $y = 0.8e^{-2x} + 0.4$

سوال 1.10: $y' + x + y = 0, \quad y = ce^{-x} - x + 1, \quad y(0) = \pi$

جواب: $y = \pi e^{-x} - e^{-x} - x + 1$

سوال 1.11: $y' = 2x + e^x, \quad y = e^x + x^2 + c, \quad y(0) = 1$

جواب: $y = e^x + x^2$

سوال 1.12: $y' + 4xy = 0, \quad y = ce^{-2x^2}, \quad y(0) = 2$

جواب: $y = 2e^{-2x^2}$

سوال 1.13: $yy' = 2x, \quad y^2 = 2x^2 + c, \quad y(1) = 6$

جواب: $y^2 = 2x^2 + 34$

سوال 1.14: $y' = y + y^2, \quad y = \frac{c}{e^{-x} - c}, \quad y(0) = 0.1$

جواب: $y = \frac{1}{e^{(-x+23.98)} - 1}$

سوال 1.15: $y' \tan x = y - 4, \quad y = c \sin x + 4, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$

جواب: $y = 4 - 4 \sin x$

سوال 1.16: نادر حل: بعض اوقات سادہ تفرقی مساوات کا ایسا حل بھی پایا جاتا ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ایسے حل کو نادر حل[26] کہا جاتا ہے۔مساوات $y'^2 - xy' + y = 0$ کا عمومی حل $y = cx - c^2$ ہے جبکہ اس کا نادر حل $y = \frac{x^2}{4}$ ہے۔ ان حل کا تفرق لیتے ہوئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

سوال 1.17 تا سوال 1.21 نقشہ کشی کے سوالات ہیں۔

سوال 1.17: تابکار مادے کی نصف زندگی $t_{\frac{1}{2}}$ سے مراد وہ دورانیہ ہے جس میں تابکار مادے کی کمیت نصف ہو جاتی ہے۔مثال 1.5 میں ریڈیم $^{266}_{88}\mathrm{Ra}$ کی نصف زندگی دریافت کریں۔

جواب: تابکاری تحلیل کی مساوات $y = y_0 e^{-kt}$ میں لمحہ $t = 0$ پر (ابتدائی) کمیت y_0 ہے جبکہ مستقبل میں لمحہ t پر کمیت y ہے۔ہم وہ دورانیہ جاننا چاہتے ہیں جس میں کمیت نصف رہ جائے یعنی جب $y = \frac{y_0}{2}$ رہ جائے۔تابکاری مساوات میں $y = \frac{y_0}{2}$ پر کرتے ہوئے $\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-kt}$ لکھا جائے گا جس سے $t_{\frac{1}{2}} = 4.95 \times 10^{10}\,\mathrm{s}$ یعنی 1569.6 سال حاصل ہوتا ہے۔یوں ریڈیم کی مقدار 1569.6 سالوں میں نصف رہ جائے گی۔

سوال 1.18: ریڈیم ہم جا[27] $^{224}_{88}\mathrm{Ra}$ کی نصف زندگی تقریباً 3.6 دن ہے۔دو گرام $(2\,\mathrm{g})$ ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک دن بعد کتنی رہ جائے گی۔دو گرام ریڈیم ہم جا کی کمیت ایک سال بعد کتنی رہ جائے گی۔

جوابات: $1.65\,\mathrm{g}$ ، $6 \times 10^{-31}\,\mathrm{g}$

---

[26] singular solution
[27] isotope

سوال 1.19: ایک جہاز کی رفتار مستقل اسراع a سے مسلسل بڑھ رہی ہے۔رفتار کی تبدیلی کی شرح $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ کو اسراع کہتے ہیں۔ان معلومات سے تفرقی مساوات لکھتے ہوئے لمحہ t پر رفتار v کی مساوات حاصل کریں۔اگر $t = 0$ پر ابتدائی رفتار u ہو تب v کی مساوات کیا ہو گی؟

جوابات: $v = at + c$ ، $v = u + at$

سوال 1.20: رفتار سے مراد وقت کے ساتھ فاصلے کی تبدیلی کی شرح $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ہے۔سوال 1.19 میں رفتار کی مساوات $v = u + at$ حاصل کی گئی جسے $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کے برابر پر کرنے سے تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی فاصلہ $x = 0$ لیتے ہوئے ابتدائی قیمت سوال کو حل کرتے ہوئے x کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $x = ut + \frac{1}{2}at^2$

سوال 1.21: آواز سے کم رفتار پر پرواز کرنے والے جہاز کی کارگزاری ہوا کے دباو پر منحصر ہوتی ہے۔ان کی کارگزاری $10\,500\,\mathrm{m}$ تا $12\,000\,\mathrm{m}$ کی اونچائی پر بہترین حاصل ہوتی ہے۔آپ سے گزارش ہے کہ $10\,500\,\mathrm{m}$ کی اونچائی پر ہوا کا دباو دریافت کریں۔طبعی معلومات:اونچائی کے ساتھ دباو میں تبدیلی کی شرح y' ہوا کے دباو y کے راست تناسب ہوتی ہے۔تقریباً $5500\,\mathrm{m}$ کی اونچائی پر ہوا کا دباو سمندر کی سطح پر ہوا کے دباو y_0 کا نصف ہوتا ہے۔

جواب: $0.27y_0$ یعنی تقریباً ایک چوتھائی

1.2 $y' = f(x, y)$ کا جیومیٹریائی مطلب۔میدان کی سمت اور ترکیب یولر۔

یک رتبی سادہ تفرقی مساوات

$$y' = f(x, y) \tag{1.15}$$

سادہ معنی رکھتی ہے۔آپ جانتے ہیں کہ y' سے مراد y کی ڈھلوان ہے۔یوں مساوات 1.15 کا وہ حل جو نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتا ہو کا اس نقطے پر ڈھلوان $y'(x_0)$ ہو گا کو درج بالا مساوات کے تحت اس نقطے پر f کی قیمت کے برابر ہو گا۔

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 1.15 کو حل کرنے کے **ترسیمی**[28] یا **اعدادی**[29] طریقے دریافت کر سکتے ہیں۔ تفرقی مساوات کو حل کرنے کے ترسیمی اور اعدادی طریقے اس لئے بھی اہم ہیں کہ کئی تفرقی مساوات کا کوئی **تحلیلی**[30] حل نہیں پایا جاتا جبکہ ہر قسم کے تفرقی مساوات کا ترسیمی اور اعدادی حل حاصل کرنا ممکن ہے۔

میدان کی سمت: ترسیمی طریقہ

ہم xy سطح پر جگہ جگہ مساوات 1.15 سے حاصل ڈھلوان کی چھوٹی لمبائی کی سیدھی لکیریں کھینچ سکتے ہیں۔ہر نقطے پر ایسی لکیر اس نقطے پر میدان کی سمت دیتی ہے۔اس **میدانِ سمت**[31] یا **میدانِ ڈھال**[32] میں تفرقی مساوات کا تخمینی **منحنی حل**[33] کھینچا جا سکتا ہے۔

منحنی حل کو کھینچنے کی ترکیب کچھ یوں ہے۔کسی بھی نقطے پر ڈھلوان کی سمت میں چھوٹی لکیر کھینچیں۔اس لکیر کو آہستہ آہستہ یوں موڑیں کہ لکیر کے اختتامی نقطے پر لکیر کی ڈھلوان عین اس نقطے کی ڈھلوان برابر ہو۔اسی طرح آگے بڑھتے رہیں۔ڈھال میدان میں نقطے جتنے قریب قریب ہوں تفرقی مساوات کا منحنی حل اتنا درست ہو گا۔

شکل 1.6 میں

$$y' = x - y \tag{1.16}$$

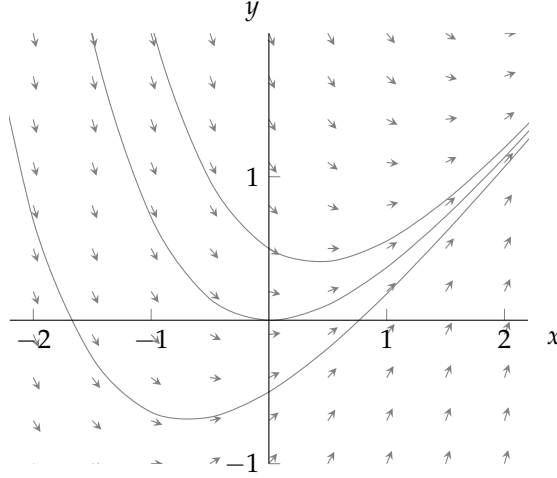
کا ڈھال میدان دکھایا گیا ہے۔ساتھ ہی ساتھ چند منحنی حل بھی دکھائے گئے ہیں۔

آئیں اب اعدادی طریقہ سیکھیں۔سادہ ترین اعدادی طریقہ **ترکیب یولر**[34] کہلاتا ہے۔پہلے اسی پر بحث کرتے ہیں۔

یولر کی اعدادی ترکیب

یک رتبی تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ کو استعمال کرتے ہوئے **ترکیب یولر**[35] ہم فاصلہ نقطوں x_0 ، $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، $\cdots$ پر تقریباً درست قیمتیں دیتا ہے

---

[28] graphical
[29] numerical
[30] analytic
[31] direction field
[32] slope field
[33] solution curve
[34] Euler's method
[35] Euler's method

شکل 1.6: یک رتبی سادہ تفرقی مساوات $y' = x - y$ کا ڈھال میدان اور منحنی حل۔

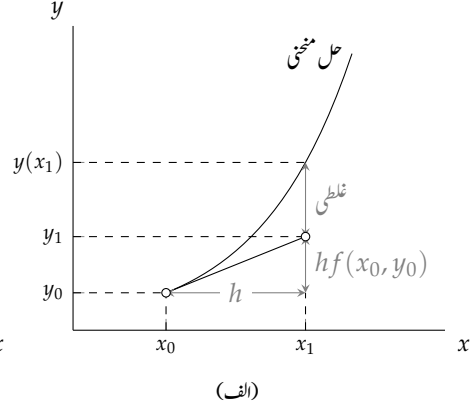
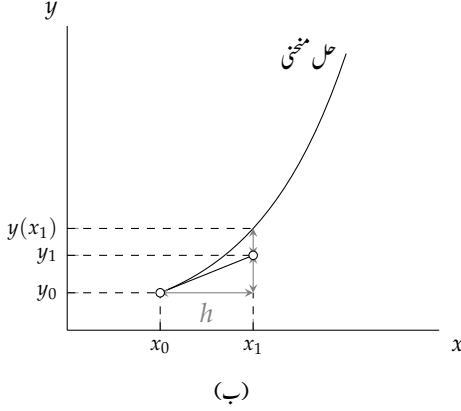
یعنی

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0)\\
y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1)\\
y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2)
\end{aligned}
$$

یا

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \tag{1.17}$$

h کو قدم کہتے ہیں۔شکل 1.7-الف میں y_1 کا حصول دکھایا گیا ہے جہاں ابتدائی نقطہ y_0 اور ترکیب یولر سے حاصل کردہ y_1 کو چھوٹے دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں h کی قیمت کم کرنے کا اثر دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ چھوٹا قدم لینے سے اصل حل $y(x_1)$ اور یولر سے حاصل y_1 میں فرق (غلطی) کم ہو جاتا ہے۔یوں قدم کو چھوٹا سے چھوٹا کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ درست حل دریافت کیا جا سکتا ہے۔

مساوات 1.16 کا عمومی حل $y = ce^{-x} + x - 1$ ہے جس سے نقطہ $(0,0)$ سے گزرتا حل $y = e^{-x} + x - 1$ ملتا ہے۔اس طرح کے حل ہم جلد حاصل کر پائیں گے۔اس وقت صرف اتنا ضروری ہے کہ آپ دیے گئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کر سکیں کہ یہی درست حل ہے۔

شکل 1.7: ترکیب یولر کا پہلا قدم۔

جدول 1.1 میں قدم $h = 0.1$ لیتے ہوئے نقطہ $(0,0)$ سے گزرتا ہوا مساوات 1.16 کا ترکیب یولر (مساوات 1.17) سے حل حاصل کیا گیا ہے۔آئیں اس جدول کو حاصل کریں۔

ابتدائی نقطہ $(x_0, y_0) = (0,0)$ ہے جس کا اندراج جدول 1.1 کے پہلے صف میں کیا گیا ہے۔ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے (x_1, y_1) حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1\\
y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - y_0) = 0 + 0.1(0 - 0) = 0
\end{aligned}
$$

جدول 1.1 کے دوسرے صف میں ان قیمتوں کا اندراج کیا گیا ہے جن سے (x_2, y_2) حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2\\
y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1 - y_1) = 0 + 0.1(0.1 - 0) = 0.01
\end{aligned}
$$

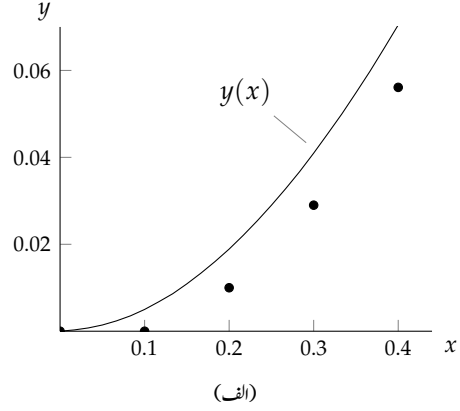
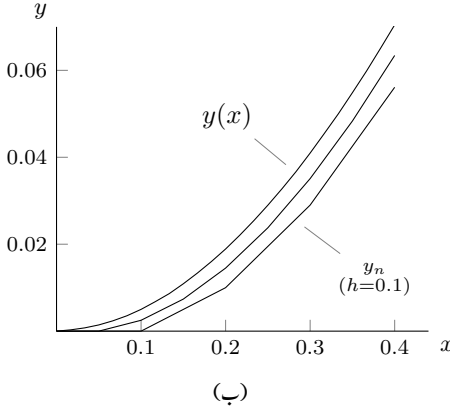
یہ قیمتیں بھی جدول میں درج ہیں۔اسی طرح (x_3, y_3) حاصل کرتے ہوئے جدول میں درج کئے گئے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3\\
y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) = y_2 + h(x_2 - y_2) = 0.01 + 0.1(0.2 - 0.01) = 0.029
\end{aligned}
$$

جدول کی آخری صف حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x_4 &= x_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4\\
y_4 &= y_3 + hf(x_3, y_3) = y_3 + h(x_3 - y_3) = 0.029 + 0.1(0.3 - 0.029) = 0.0561
\end{aligned}
$$

جدول 1.1: ترکیب یولر۔

غلطی	$y(x)$	y_n	x_n	n
0	0	0	0	0
0.00484	0.00484	0.0	0.1	1
0.00873	0.01873	0.01	0.2	2
0.01182	0.04082	0.029	0.3	3
0.01422	0.07032	0.0561	0.4	4

شکل 1.8: ترکیب یولر سے حاصل حل کا ریاضیاتی حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔

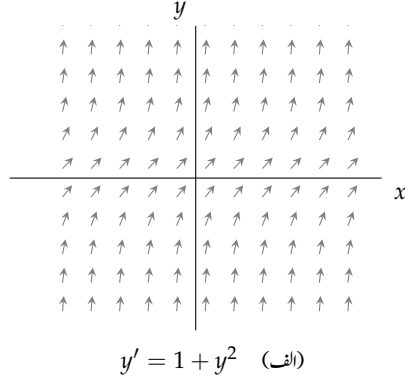
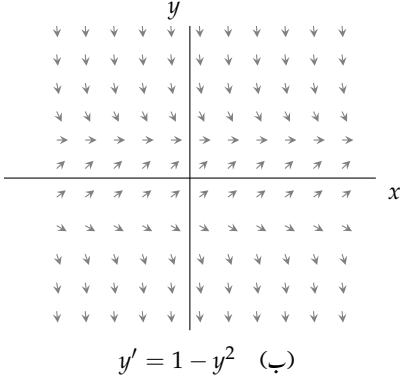
شکل 1.8-الف میں ترکیب یولر سے حاصل حل اور ریاضیاتی حل $y(x)$ کا موازنہ کیا گیا ہے۔شکل-الف میں یولر حل سے حاصل نقطوں کو سیدھی لکیروں سے ملاتے ہوئے مسلسل حل حاصل کیا جا سکتا ہے جسے شکل-ب میں y_n سے ظاہر کیا گیا ہے۔شکل-ب میں $y(x)$ بھی دکھایا گیا ہے۔ساتھ ہی ساتھ $h = 0.05$ استعمال کرتے ہوئے حاصل یولر حل کو بھی دکھایا گیا ہے جو $y(x)$ اور y_n کے بیچ میں پایا جاتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ h کی قیمت کم کرنے سے زیادہ درست جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 1.22 تا سوال 1.28 کے میدان ڈھال کو قلم و کاغذ سے کھینچتے ہوئے دیے ابتدائی نقطوں سے گزرتے منحنی حل حاصل کریں۔چند ڈھال میدان شکل 1.9 اور شکل 1.10 میں دیے گئے ہیں۔

سوالات

سوال 1.22: $y' = 1 + y^2, \quad (\frac{\pi}{4}, 1)$

$y' = 1 - y^2$ (ب)

$y' = 1 + y^2$ (الف)

شکل 1.9: سوال 1.22 اور سوال 1.23 کے ڈھال میدان۔

سوال 1.23: $y' = 1 - y^2, \quad (0,0)$

سوال 1.24: $yy' + 8x = 0, \quad (1,1)$

سوال 1.25: $y' = y - y^2, \quad (1,0)$

سوال 1.26: $y' = x + \frac{1}{y}, \quad (0,1)$

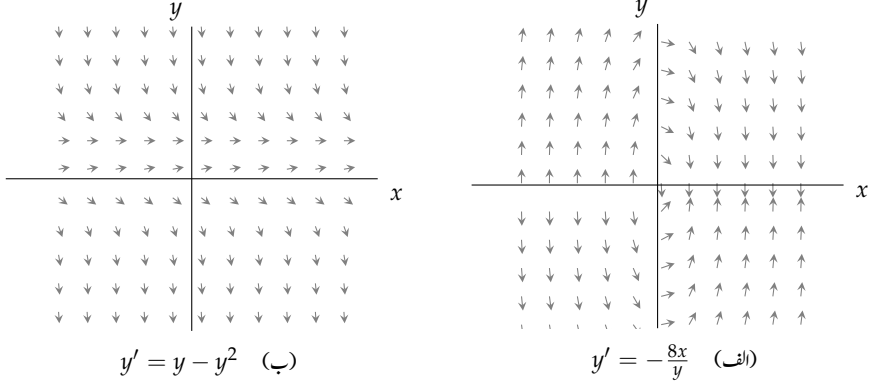
سوال 1.27: $y' = \sin^2 x, \quad (0,1)$

سوال 1.28: $y' = \sin^2 y, \quad (0,0)$

ڈھال میدان کے استعمال سے تفرقی مساوات کے تمام حل سامنے آ جاتے ہیں۔ بعض اوقات تفرقی مساوات کا تحلیلی حل حاصل کرنا ممکن ہی نہیں ہوتا۔ درج ذیل دو سوالات میں ڈھال میدان سے اخذ حل اور دیے گئے تحلیلی حل کا موازنہ کرتے ہوئے ڈھال میدان سے حاصل حل کی درستگی کا اندازہ لگایا جا سکتا ہے۔

سوال 1.29: $y' = \sin x, \quad (\frac{\pi}{2}, 0), \quad y = -\cos x$

سوال 1.30: $y' = 3x^2, \quad (0,0), \quad y = x^3$

(ب) $y' = y - y^2$ (الف) $y' = -\frac{8x}{y}$

شکل 1.10: سوال 1.24 اور سوال 1.25 کے ڈھال میدان۔

سوال 1.31: سوال 1.23، سوال 1.25 اور سوال 1.28 میں بے قابو متغیرہ x صریحاً ظاہر نہیں کیا گیا ہے۔ایسی مساوات جن میں بے قابو متغیرہ کو صریحاً ظاہر نہ کیا جائے **خود مختار**[36] سادہ تفرقی مساوات کہلاتے ہیں۔ خود مختار سادہ تفرقی مساوات کے **ہم میلان**[37] حل $f(x,y) = c$ کی شکل و صورت کیا ہو گی؟

جواب: چونکہ y' کا دارومدار x پر نہیں ہے لہٰذا x تبدیل کرنے سے y کا میلان تبدیل نہیں ہو گا اور $f(x,y) = c$ افقی محور کے متوازی خط ہوں گے۔

ایک جسم y محدد پر حرکت کرتا ہے۔لمحہ t پر نقطہ $y = 0$ سے جسم کا فاصلہ $y(t)$ ہے۔سوالات 1.32 تا سوال 1.34 میں دئے شرائط کے مطابق جسم کی رفتار کی نمونہ کشی کریں۔ریاضی نمونے کی ڈھال میدان بناتے ہوئے دیے گئے ابتدائی معلومات پر پورا اترتا منحنی خط کھینچیں۔

سوال 1.32: جسم کی رفتار ضرب فاصلہ $y(t)$ مستقل ہے جو 4 کے برابر ہے جبکہ $y(0) = 4$ کے برابر ہے۔

جوابات: $yy' = 4$ ، $y = 8t + 16$

---

[36] autonomous ordinary differential equations
[37] isoclines

سوال 1.33: رفتار ضرب وقت فاصلے کے برابر ہے۔لمحہ $t = 1$ پر فاصلہ $y(1) = 2$ ہے۔

جوابات: $y = y't$ ، $y = 2t$

سوال 1.34: مربع رفتار منفی مربع فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔ابتدائی فاصلہ اکائی کے برابر ہے۔

جوابات: $y' = \sqrt{1+y^2}$ ، $\sinh^{-1} y = t + \sinh^{-1} 1$

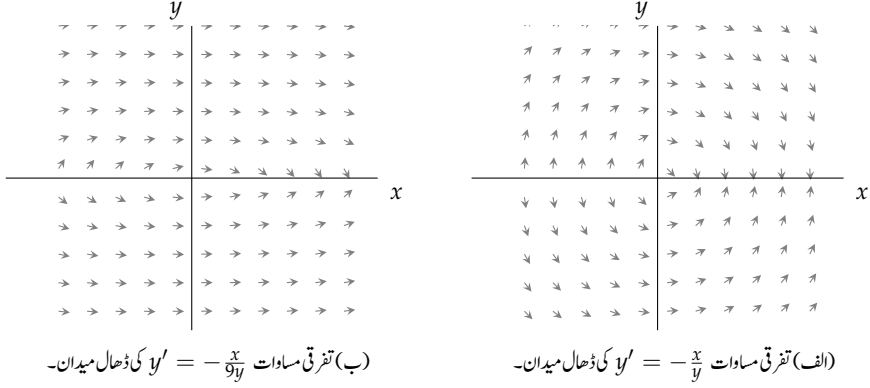
سوال 1.35: ہوائی جہاز سے چھلانگ لگا کر زمین تک خیریت سے بذریعہ چھتری اترا جا سکتا ہے۔ گرتے ہوئے شخص پر آپس میں الٹ، دو عدد قوتیں عمل کرتی ہیں۔پہلی قوت زمینی کشش $F_1 = mg$ ہے جہاں m اس شخص کی کمیت اور $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع ہے۔یہ قوت انسان کو زمین کی طرف اسراع دیتی ہے۔دوسری قوت چھتری پر ہوا کے رگڑ سے پیدا قوت ہے جو اس شخص کی رفتار کو بڑھنے سے روکتی ہے۔چھتری پر ہوا کے رگڑ سے رفتار کے مربع کے متناسب قوت $F_2 = cv^2$ پیدا ہوتی ہے۔نیوٹن کی مساوات حرکت کہتی ہے کہ کسی بھی جسم پر قوت، اس جسم کی کمیت ضرب اسراع کے برابر ہوتی ہے۔چھتری سے زمین پر اترتے شخص کی نمونہ کشی کرتے ہوئے رفتار v کی سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں۔کمیت کو $m = 1$ اور مستقل کو $c = 1$ لیتے ہوئے ڈھال میدان کھینچیں۔ تصور کریں کہ چھتری اس لمحہ کھلتی ہے جب شخص کی رفتار $v = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو۔ایسی صورت میں منحنی حل حاصل کریں۔اس شخص کی اختتامی رفتار کیا ہو گی؟ کیا چھتری پر قوت رفتار کے راست متناسب ہونے کی صورت میں بھی چھتری کے ذریعہ ہوائی جہاز سے زمین تک خیریت سے چھلانگ لگائی جا سکتی ہے؟

جوابات: $mg - cv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ؛ گرنے کی رفتار اس قیمت پر رہتی ہے جہاں نیچے جانب قوت mg اور چھتری کی رکاوٹی اوپر جانب قوت cv^2 برابر ہوں۔ایسی صورت میں گرتے شخص کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی یعنی $y' = 0$ ہوتا ہے۔تفرقی مساوات میں $y' = 0$ پر کرتے اور $m = c = 1$ لیتے ہوئے اختتامی رفتار $v(t = \infty) = 3.13\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ حاصل ہوتی ہے۔

سوال 1.36: گول دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ ہے۔رداس r کو مستقل تصور کرتے ہوئے دائرے کی مساوات کا تفرق لیتے ہوئے ڈھال میدان کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔ڈھال میدان کھینچیں۔کیا آپ ڈھال میدان کو دیکھ کر کہہ سکتے ہیں کہ منحنی حل گول دائرے ہیں؟ اسی طرح $x^2 + 9y^2 = c$ کا تفرق لیتے ہوئے سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ تفرقی مساوات کی ڈھال میدان کھینچیں۔ کیا ڈھال میدان کو دیکھ کر کہا جا سکتا ہے کہ منحنی حل بیضوی ہو گا؟

جوابات: $y' = -\frac{x}{y}$ ، $y' = -\frac{x}{9y}$

(الف) تفرقی مساوات $y' = -\frac{x}{y}$ کی ڈھال میدان۔

(ب) تفرقی مساوات $y' = -\frac{x}{9y}$ کی ڈھال میدان۔

شکل 1.11: سوال 1.36 کی ڈھال میدان۔

سوال 1.37 تا سوال 1.40 کو ترکیب یولر سے حل کریں۔کل پانچ ہم فاصلہ نقطوں پر حل حاصل کریں۔ایک ہی کارتیسی محدد پر حاصل y_1 تا y_5 اور سوال میں دئے گئے حل $y(x)$ کا خط کھینچیں۔ سوال 1.37:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1, \quad y(x) = e^{-x}$$

جوابات: $y_1 = 0.9$ ، $y_2 = 0.81$ ، $y_3 = 0.729$ ، $y_4 = 0.6561$ ، $y_5 = 0.59049$

سوال 1.38:

$$y' = -y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{-x}$$

جوابات: $y_1 = 0.99$ ، $y_2 = 0.9801$ ، $y_3 = 0.9703$ ، $y_4 = 0.9606$ ، $y_5 = 0.95099$

سوال 1.39:

$$y' = 1 + 3x^2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0.1, \quad y(x) = x^3 + x$$

جوابات: $y_1 = 2.1$ ، $y_2 = 2.203$ ، $y_3 = 2.315$ ، $y_4 = 2.442$ ، $y_5 = 2.59$

سوال 1.40:

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 2, \quad h = 0.01, \quad y(x) = e^{x^2-4}$$

جوابات: $y_1 = 1.04$ ، $y_2 = 1.0818$ ، $y_3 = 1.1255$ ، $y_4 = 1.1712$ ، $y_5 = 1.2190$

1.3 قابل علیحدگی سادہ تفرقی مساوات

متعدد اہم سادہ تفرقی مساوات کو الجبرائی ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$g(y)y' = f(x) \tag{1.18}$$

جس کو مزید یوں

$$g(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$$

یعنی

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کے بائیں جانب صرف y متغیرہ اور دائیں جانب صرف x متغیرہ پایا جاتا ہے لہٰذا اس کا تکمل لیا جا سکتا ہے۔

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + c \tag{1.19}$$

اگر $g(y)$ اور $f(x)$ قابل تکمل تفاعل ہوں تب مساوات 1.19 سے مساوات 1.18 کا حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس ترکیب کو **ترکیب علیحدگی متغیرات**[38] کہتے ہیں۔ مساوات 1.18 کو **قابل علیحدگی مساوات**[39] کہتے ہیں۔

مثال 1.6: مساوات $y' = 1 + y^2$ قابل علیحدگی مساوات ہے چونکہ اس کو

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \mathrm{d}x$$

لکھا جا سکتا ہے جس کے دونوں اطراف کا تکمل لیتے ہوئے

$$\tan^{-1} y = x + c$$

یعنی

$$y = \tan(x+c)$$

---

[38] variable separation technique
[39] separable equation

حاصل ہوتا ہے جو تفرقی مساوات کا درکار حل ہے۔حاصل حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے تسلی کر لیں کہ یہی صحیح حل ہے۔ □

مثال 1.7: قابل علیحدگی تفرقی مساوات $y' = xe^{-x}y^3$ کو علیحدہ کرتے ہوئے دونوں اطراف کا تکمل لے کر حل کرتے ہیں۔

$$y^{-3}\,\mathrm{d}y = xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{y^{-2}}{-2} = c - (x+1)e^{-x} \qquad \text{تکمل لیا گیا ہے}$$
$$y^2 = \frac{1}{2(x+1)e^{-x} - 2c}$$

□

مثال 1.8: درج ذیل ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1$$

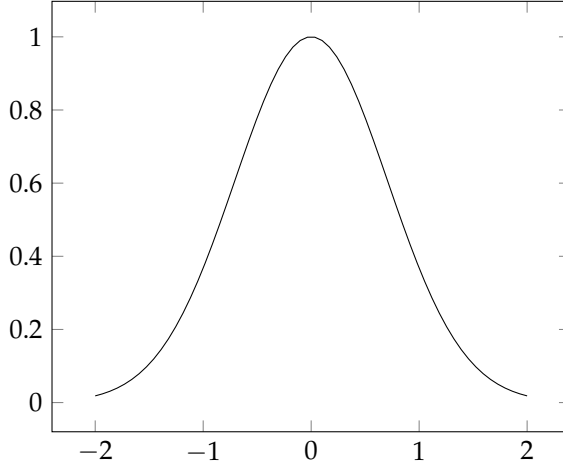
حل:مساوات کے متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے تکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int 2x\,\mathrm{d}x + c$$
$$\ln y = -x^2 + c_1$$
$$y = ce^{-x^2}$$

ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c = 0$ یعنی $c = e^{c_1} = 1$ ملتا ہے لہٰذا تفرقی مساوات کا مخصوص حل $y = e^{-x^2}$ ہے جسے شکل 1.12 میں دکھایا گیا ہے اور جو گھنٹی نما[40] ہے۔ □

مثال 1.9: کاربن سے عمر دریافت کرنے کا طریقہ

طبعی معلومات: کائناتی شعاعیں[41] فضا میں تابکار کاربن $^{14}_{6}C$ بناتی ہیں۔یہ عمل زمین کی پیدائش سے اب تک ہوتا آ

[40] bell shaped
[41] cosmic rays

شکل 1.12: مثال 1.8 کا گھنٹی نما حل۔

رہا ہے۔وقت کے ساتھ فضا میں $^{14}_{6}\mathrm{C}$ اور $^{12}_{6}\mathrm{C}$ ہم جا[42] کی تناسب ایک مخصوص قیمت حاصل کر چکی ہے۔کوئی بھی جاندار سانس لے کر یا خوراک کے ذریعہ فضا سے کاربن جذب کرتا ہے۔یوں جب تک جانور زندہ رہے اس کی جسم میں دونوں ہم جا کاربن کی تناسب وہی ہو گی جو فضا میں ان کی تناسب ہے۔البتہ مرنے کے بعد جسم میں تابکار کاربن کی مقدار تابکاری تحلیل کی بنا گھٹتی ہے جبکہ غیر تابکار کاربن کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی۔تابکار کاربن $^{14}_{6}\mathrm{C}$ کی نصف زندگی 5715 سال ہے۔

اہرام مصر میں دفن مومیائی ہوئی فرعون کی لاش میں $^{14}_{6}\mathrm{C}$ اور $^{12}_{6}\mathrm{C}$ کا تناسب فضا کے تناسب کا 56.95 % ہے۔لاش کی عمر دریافت کریں۔

حل:تابکار کاربن کی نصف زندگی سے تابکاری تحلیل کا مستقل k دریافت کرتے ہیں۔

$$y_0 e^{-k(5715)} = \frac{y_0}{2}, \quad e^{-k(5715)} = \frac{1}{2}, \quad -k = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{5715}, \quad k = 0.0001213$$

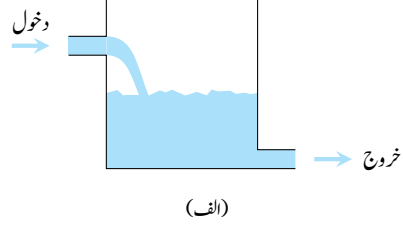
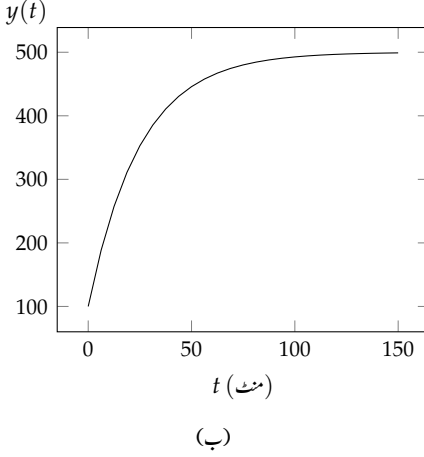
لاش میں ہم جا کاربن کی تناسب سے لاش کی عمر حاصل کرتے ہیں۔

$$e^{-0.0001213t} = 0.5695, \quad -0.0001213t = \ln 0.5695, \quad t = 4641$$

---

[42] isotopes

$y(t)$
500
400
300
200
100
0 50 100 150
t (منٹ)
(ب)

دخول
خروج
(الف)

شکل 1.13: مثال 1.10 میں مرکب بنانے کا عمل۔

یوں فرعون کی لاش 4641 سال پرانی ہے۔

□

مثال 1.10: مرکب بنانے کا عمل
کیمیائی صنعت میں مرکب بنانے کا عمل عام ہے۔ شکل 1.13-الف میں پانی کی ٹینکی دکھائی گئی ہے جس میں ابتدائی طور پر 1000 لٹر پانی پایا جاتا ہے۔ اس پانی میں کل $100\,\mathrm{kg}$ نمک ملایا گیا ہے۔ پانی کو مسلسل ہلانے سے ٹینکی میں کثافت یکساں رکھی جاتی ہے۔ ٹینکی میں 40 لٹر فی منٹ کی شرح سے نمکین پانی شامل کیا جاتا ہے۔ اس پانی میں نمک کی مقدار $0.5\,\mathrm{kg\,l^{-1}}$ ہے۔ ٹینکی سے نمکین پانی کا انخلا 40 لٹر فی منٹ ہے۔ ٹینکی میں نمک کی کل مقدار بالمقابل وقت دریافت کریں۔

حل: چونکہ ٹینکی میں پانی شامل ہونے کی شرح اور پانی خارج ہونے کی شرح برابر ہے لہٰذا ٹینکی میں پانی کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی۔ ٹینکی میں داخل ہونے والا ایک لٹر کا نمکین پانی $0.5\,\mathrm{kg}$ نمک ٹینکی میں شامل کرتا ہے۔ یوں 40 لٹر فی منٹ سے داخل ہوتا پانی $40 \times 0.5 = 20\,\mathrm{kg\,min^{-1}}$ سے نمک شامل کرتا ہے۔ کسی بھی لمحہ ٹینکی میں کل نمک کو y کلو گرام لکھتے ہوئے ٹینکی میں نمک کی کثافت کو $\frac{y}{1000}$ کلو گرام فی لٹر لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

خارج ہوتا پانی $\frac{y}{1000} \times 40$ کلو گرام فی منٹ نمک خارج کرتا ہے۔اس طرح نمک میں اضافے کی شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کو

$$\begin{aligned} y' &= \text{نمک شامل ہونے کی شرح} - \text{نمک خارج ہونے کی شرح} \qquad \text{(متوازن مساوات)} \\ &= 20 - \frac{40y}{1000} \end{aligned}$$

یعنی

$$y' = 0.04(500 - y) \tag{1.20}$$

لکھا جا سکتا ہے جو قابل علیحدگی مساوات ہے لہٰذا اس میں متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے تکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{y - 500} = -0.04\,\mathrm{d}t, \quad \ln\left|y - 500\right| = -0.04t + c_1, \quad y = 500 + ce^{-0.04t}$$

ٹینکی میں ابتدائی نمک کی کل مقدار $100\,\mathrm{kg}$ ہے۔اس معلومات کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے مساوات کا مستقل c حاصل کرتے ہیں۔

$$100 = 500 + c^{-0.04(0)}, \quad c = -400$$

یوں کسی بھی لمحے ٹینکی میں کل نمک کی مقدار درج ذیل ہے جس کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$y(t) = 500 - 400e^{-0.04t}$$

شکل-ب کے مطابق ٹینکی میں آخر کار کل $500\,\mathrm{kg}$ نمک پایا جائے گا۔ یہی جواب بغیر کسی مساوات لکھے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر ٹینکی میں لگاتار نمکین پانی شامل کیا جائے اور اس سے پرانا پانی خارج کیا جائے تو آخر کار ٹینکی میں صرف نیا شامل کردہ پانی ہی پایا جائے گا۔چونکہ شامل کردہ پانی میں 0.5 کلو گرام فی لٹر نمک پایا جاتا ہے لہٰذا 1000 لٹر کی ٹینکی میں کل نمک $1000 \times 0.5 = 500\,\mathrm{kg}$ ہو گا۔ □

مثال 1.11: نیوٹن قانون ٹھنڈک[43]

گرمیوں میں ایک دفتر کا درجہ حرارت ایئر کنڈیشنر کی مدد سے $21\,^{\circ}\mathrm{C}$ پر رکھا جاتا ہے۔ صبح سات بجے ایئر کنڈیشنر چالو کیا جاتا ہے اور شام نو بجے اس کو بند کر دیا جاتا ہے۔ایک مخصوص دن کو شام نو بجے بیرونی درجہ حرارت $40\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہوتا ہے جبکہ صبح سات بجے بیرونی درجہ حرارت $30\,^{\circ}\mathrm{C}$ تک گر چکا ہوتا ہے۔دفتر کے اندر رات دو بجے درجہ حرارت $26\,^{\circ}\mathrm{C}$ ہوتا ہے۔ صبح سات بجے دفتر کے اندر درجہ حرارت معلوم کریں۔

[43] برطانوی ریاضی دان اور ماہر طبیعیات اسحاق نیوٹن [1642-1727] اور جرمن ریاضی دان گٹفرڈ ولہلم ون لیبنٹز [1646-1716] نے علیحدہ علیحدہ تفرقی اور تکملی احصاء ایجاد کی۔

طبعی معلومات: تجربے سے معلوم کیا گیا ہے کہ حرارتی توانائی کو با آسانی منتقل کرتے جسم (مثلاً لوہا) کے درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح جسم اور اس کے گرد ماحول کے درجہ حرارت میں فرق کے راست تناسب ہوتا ہے۔اس کو **نیوٹن کا قانون ٹھنڈک**[44] کہا جاتا ہے۔

حل: پہلا قدم: نمونہ کشی
دفتر کے اندرونی حرارت کو T سے ظاہر کرتے ہیں جبکہ بیرونی حرارت کو T_b سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں نیوٹن کا قانون ٹھنڈک کی ریاضیاتی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_b) \tag{1.21}$$

دوسرا قدم: عمومی حل کی تلاش
اگرچہ دفتر کی دیواریں اور چھت حرارتی توانائی با آسانی منتقل نہیں کرتی ہم اسی کلیے کا سہارا لیتے ہوئے مسئلہ حل کریں گے۔یہاں بیرونی درجہ حرارت مستقل قیمت نہیں ہے لہٰذا درج بالا مساوات کو حل کرنا مشکل ہو گا۔انجنیئرنگ کے شعبے میں عموماً ایسی ہی مشکلات کا سامنہ کرنا ہوتا ہے۔ہمیں مسئلے کی سادہ صورت حل کرنا ہو گی۔اگر ہم تصور کریں کہ T_b مستقل قیمت ہے تب درج بالا مساوات کے متغیرات علیحدہ کئے جا سکتے ہیں۔چونکہ بیرونی درجہ حرارت $30\,^\circ\mathrm{C}$ تا $40\,^\circ\mathrm{C}$ رہا ہے لہٰذا ہم اس کی اوسط قیمت یعنی $35\,^\circ\mathrm{C}$ کو بیرونی درجہ حرارت تصور کرتے ہوئے مسئلے کو حل کرتے ہیں۔مساوات کے متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے تکمل لے کر اس کو حل کرتے ہیں۔

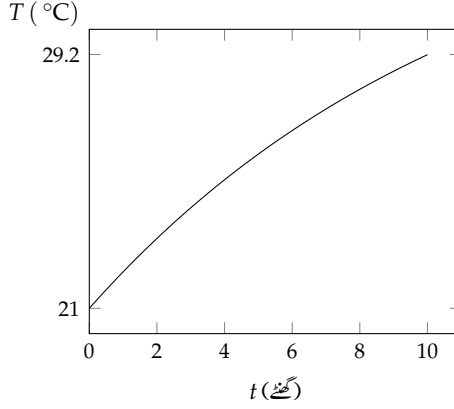
$$\frac{\mathrm{d}T}{T-35} = k\,\mathrm{d}t, \quad \ln|T-35| = kt + c_1, \quad T - 35 = ce^{kt}$$

تیسرا قدم: مخصوص حل کا حصول
اگر شام نو بجے کو لمحہ $t = 0$ لیا جائے اور وقت کو گھنٹوں میں ناپا جائے تب $T(0) = 21$ لکھا جائے گا جسے درج بالا میں پر کرتے ہوئے $c = -14$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مخصوص حل

$$T = 35 - 14e^{kt}$$

چوتھا قدم: مستقل k کا حصول
ہم جانتے ہیں کہ رات دو بجے اندرونی درجہ حرارت $26\,^\circ\mathrm{C}$ ہے۔یاد رہے کہ شام نو بجے کو لمحہ $t = 0$ لیا گیا لہٰذا رات دو بجے $t = 5$ ہو گا۔یوں $T(5) = 26$ لکھا جائے گا۔ان معلومات کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے k حاصل کرتے ہوئے مکمل مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$26 = 35 - 14e^{5k}, \quad k = -0.088, \quad T = 35 - 14e^{-0.088t}$$

Newton's law of cooling[44]

شکل 1.14: مثال 1.11: دفتر کا اندرونی درجہ حرارت بالمقابل وقت۔

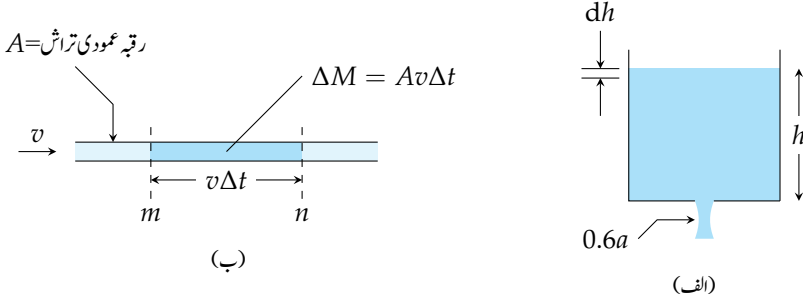
آخری قدم:
صبح سات بجے اندرونی درجہ حرارت کا تخمینہ لگاتے ہیں یعنی $t = 10$ پر درجہ حرارت درکار ہے۔

$$T = 35 - 14e^{-0.088(10)} = 29.2\ ^\circ\mathrm{C}$$

پوری رات میں اندرونی درجہ حرارت $8.2\ ^\circ\mathrm{C}$ بڑھ گیا ہے۔ شکل 1.14 میں اندرونی درجہ حرارت بالمقابل وقت دکھایا گیا ہے۔ □

مثال 1.12: پانی کا انخلا: پانی کی ٹینکی کا رقبہ عمودی تراش $B = 2\,\mathrm{m^2}$ ہے۔ ٹینکی کی تہہ میں $r = 0.5\,\mathrm{cm}$ رداس کا گول سوراخ ہے جس سے پانی نکل رہا ہے۔ ٹینکی میں پانی کی ابتدائی گہرائی $h_1 = 1.5\,\mathrm{m}$ ہے۔ ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہو گی۔

طبعی معلومات: پانی کی سطح پر m کمیت پانی کی مخفی توانائی mgh ہے جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع اور h پانی کی گہرائی ہے۔ سوراخ سے خارج ہوتے وقت یہ مخفی توانائی حرکی توانائی $\frac{mv^2}{2}$ میں تبدیل ہو جاتی ہے جہاں v رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔ مخفی توانائی اور حرکی توانائی کو برابر لکھتے ہوئے v کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad v = \sqrt{2gh}$$

شکل 1.15: مثال 1.12: پانی کا انخلا اور پانی کے دھار کا سکڑنا۔

شکل 1.15-الف میں پانی کی دھار دکھائی گئی ہے۔جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں دھار سوراخ کے قریب سکڑتا ہے۔اگر سوراخ کا رقبہ a ہو تب سکڑے ہوئے مقام پر دھار کا رقبہ عمودی تراش $0.6a$ ہوتا ہے۔یوں سوراخ سے نکلا تمام پانی رقبہ $0.6a$ سے گزرتا ہے اور یہی وہ مقام ہے جہاں پانی کا ہر ذرہ ایک ہی سمت میں رفتار v سے حرکت کرتا ہے۔

شکل 1.15-ب میں ایک نالی دکھائی گئی ہے جس میں پانی کی رفتار v ہے۔نالی کا رقبہ عمودی تراش A ہے۔لمحہ $t = 0$ پر مقام m پر موجود پانی کا ذرہ وقت Δt میں $v\Delta$ فاصلہ طے کرتے ہوئے مقام n تک پہنچ جائے گا۔یوں Δt کے دوران مقام m سے گزرا ہوا پانی نالی کو m تا n بھرے گا۔اس پانی کی مقدار $\Delta M = Av\Delta t$ ہو گی۔اسی کلیے کو استعمال کرتے ہوئے شکل 1.15-الف میں $\mathrm{d}t$ دورانیے میں کل $\mathrm{d}M = 0.6av\,\mathrm{d}t$ پانی خارج ہو گا۔یوں پانی کی شرح انخلا درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 0.6a\sqrt{2gh} \tag{1.22}$$

اس مساوات کو قانون ٹاری سلی[45] کہتے ہیں۔

حل: دورانیہ $\mathrm{d}t$ میں پانی کی انخلا کے بنا ٹینکی میں پانی کی گہرائی $\mathrm{d}h$ کم ہو گی جو $B\,\mathrm{d}h$ حجم کی کمی کو ظاہر کرتی ہے جہاں B ٹینکی کا رقبہ عمودی تراش ہے۔چونکہ پانی کے انخلا سے ٹینکی میں پانی کم ہوتا ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو دیے گئے مسئلے کا تفرقی مساوات ہے۔

$$0.6a\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t = -B\,\mathrm{d}h \tag{1.23}$$

[45] Torricelli's law

متغیرات کو علیحدہ کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}\,\mathrm{d}t, \quad 2\sqrt{h} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}t + c$$

ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر پانی کی گہرائی h_1 ہے۔ان معلومات کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے $c = 2h_1$ ملتا ہے لہٰذا تفرقی مساوات کا مخصوص حل درج ذیل ہے۔

$$2\sqrt{h} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}t + 2\sqrt{h_1} \tag{1.24}$$

خالی ٹینکی سے مراد $h = 0$ ہے۔مخصوص حل میں $h = 0$ پر کرتے ہوئے ٹینکی خالی کرنے کے لئے درکار وقت حاصل کرتے ہیں۔

$$2\sqrt{0} = -\frac{0.6a\sqrt{2g}}{B}t + 2\sqrt{h_1}, \quad t = \frac{2\sqrt{h_1}B}{0.6a\sqrt{2g}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{1.5}\times 2}{0.6\pi 0.005^2\sqrt{2\times 9.8}} = 23\,482\,\mathrm{s} \approx 6.52\,\mathrm{h}$$

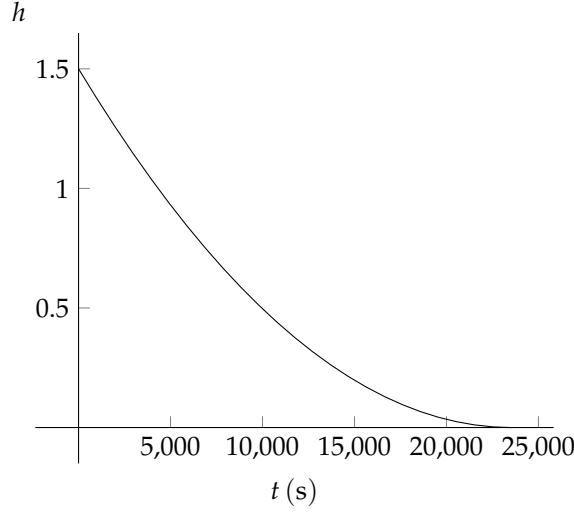
مساوات 1.24 کو شکل 1.16 میں دکھایا گیا ہے۔یاد رہے کہ $23\,482\,\mathrm{s}$ میں ٹینکی خالی ہو جاتی ہے لہٰذا ترسیم کو اتنے وقت کے لئے ہی کھینچا گیا ہے۔ □

علیحدگی متغیرات کی جامع ترکیب

بعض اوقات نا قابل علیحدگی تفرقی مساوات کے متغیرات کو تبدیل کرتے ہوئے مساوات کو قابل علیحدگی بنایا جا سکتا ہے۔اس ترکیب کو درج ذیل عملاً اہم قسم کی مساوات کے لئے سیکھتے ہیں جہاں $f(\frac{y}{x})$ قابل تفرق تفاعل ہے مثلاً $\cos\frac{y}{x}$ ، $e^{(y/x)}$ وغیرہ۔

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.25}$$

مساوات کی صورت دیکھتے ہوئے $\frac{y}{x} = u$ لیتے ہیں۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y = ux, \quad y' = u + xu' \tag{1.26}$$

شکل 1.16: مثال 1.12: ٹینکی خالی ہونے کا عمل۔

جنہیں $y' = f(\frac{y}{x})$ میں پر کرتے ہوئے $u + xu' = f(u)$ یعنی $xu' = f(u) - u$ ملتا ہے۔ اگر $f(u) - u \neq 0$ ہو تب متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{1.27}$$

مثال 1.13: تفاعل $xy' - y = 2x$ کو حل کریں۔

حل: تفاعل کو $y' = \frac{y}{x} + 2$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں $\frac{y}{x} = u$ لیتے ہوئے مساوات 1.26 کے استعمال سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u + xu' = u + 2, \quad \mathrm{d}u = 2\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad u = 2\ln|x| + c$$

اس میں u کی جگہ واپس $\frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے جواب حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{y}{x} = 2\ln|x| + c, \quad y = 2x\ln|x| + cx$$

□

سوالات

سوال 1.41 تا سوال 1.49 کے عمومی حل حاصل کریں۔حاصل حل کو واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

سوال 1.41: $y^2y' + x^2 = 0$

جواب: $x^3 + y^3 = c$

سوال 1.42: $yy' + x = 0$

جواب: $x^2 + y^2 = c$

سوال 1.43: $y' = \sec^2 y$

جواب: $y = \tan x + c$

سوال 1.44: $y' \cos x = y \sin x$

جواب: $y = c \sec x$

سوال 1.45: $y' = ye^{x-1}$

جواب: $\ln\lvert y\rvert = e^{x-1} + c$

سوال 1.46: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = y + x^2 \sin^2 \frac{y}{x}$ کو حل کریں۔

جواب: $\frac{\cos\frac{y}{x}-1}{\cos\frac{y}{x}+1} = ce^{2x}$

سوال 1.47: $y' = (2x+y)^2$ کو حل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر $u = 2x + y$ پر کرنا ہو گا۔

جواب: $y = -2x + \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x + c)$

سوال 1.48: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = y^2 + y$ کو حل کریں۔

جواب: $y = -\frac{x}{x+c}$

سوال 1.49: $u = \frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $xy' = x - y$ کو حل کریں۔

جواب: $xy - x^2 = c$

ابتدائی قیمت سوال 1.50 تا سوال 1.56 کے مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 1.50:

$$xy' + y = 0, \quad y(2) = 8$$

جواب: $y = \frac{16}{x}$

سوال 1.51:

$$y' = 1 + 9y^2, \quad y(1) = 0$$

جواب: $y = \frac{1}{3}\tan[3(x-1)]$

سوال 1.52:

$$y' \cos^2 x = \sin^2 y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

جواب: $\tan y = \frac{1}{1-\tan x}$

سوال 1.53:

$$y' = -4xy, \quad y(0) = 5$$

جواب: $y = 5e^{-2x^2}$

سوال 1.54:

$$y' = -\frac{2x}{y}, \quad y(1) = 2$$

جواب: $2x^2 + y^2 = 6$

سوال 1.55:

$$y' = (x + y - 4)^2, \quad y(0) = 5$$

جواب: $x + y - 4 = \tan(x + \frac{\pi}{4})$

سوال 1.56:

$$xy' = y + 3x^4 \cos^2 \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0$$

جواب:اس میں $u = \frac{y}{x}$ پر کرنے سے $\tan \frac{y}{x} = x^3 - 1$ ملتا ہے۔

سوال 1.57: کسی بھی لمحے پر جرثوموں کی تعداد بڑھنے کی شرح، اس لمحے موجود جرثوموں کی تعداد کے راست تناسب ہے۔اگر ان کی تعداد دو گھنٹوں میں دگنی ہو جائے تب چار گھنٹوں بعد ان کی تعداد کتنی ہو گی؟ چوبیس گھنٹوں بعد کتنی ہو گی؟

جوابات: $y = y_0 e^{0.34657t}$ ، $4y_0$ ، $4095y_0$

سوال 1.58: جرثوموں کی شرح پیدائش موجودہ تعداد کے راست تناسب ہے۔ان کی شرح اموات بھی موجودہ تعداد کے راست تناسب ہے۔ جرثوموں کی تعداد بڑھنے کی شرح کیا ہو گی؟ تعداد بالمقابل وقت کیا ہو گا؟ تعداد کہاں متوازن صورت اختیار کرے گی؟

جوابات: $\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y$ جہاں α اور β بالترتیب پیدائشی اور امواتی راست تناسب کے مستقل ہیں۔ تعداد بالمقابل وقت کی مساوات $y = y_0 e^{(\alpha - \beta)t}$ ہے۔اگر $\alpha > \beta$ ہو تب تعداد بڑھتی رہے گی۔اس کے برعکس اگر $\alpha < \beta$ ہو تب تعداد گھٹتی رہے گی حتٰی کہ جراثیم فنا ہو جائیں اور $\alpha = \beta$ کی صورت میں تعداد وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہو گی۔

سوال 1.59: عموماً جاندار مرنے کے بعد مکمل طور پر خاک میں مل جاتے ہیں اور ان کا نشان تک نہیں رہتا البتہ بعض اوقات حالات یوں ہوتے ہیں کہ ان کا جسم پتھر میں بدل جاتا ہے۔اس پتھریلی جسم میں موجود $^{14}_{6}C$ اور $^{12}_{6}C$ ہم جا کے تناسب سے اس کی عمر کا تخمینہ لگایا جا سکتا ہے۔ دو ہزار سال پرانی پتھریلی مچھلی میں کاربن کا تناسب، ابتدائی تناسب کے کتنا گنا ہو گا؟

جواب: $69.5\,\%$

سوال 1.60: طبیعیات میں باربردار[46] ذروں کو مسرع خطی[47] کے ذریعہ اسراع دی جاتی ہے۔تصور کریں کہ مسرع

charged[46]
linear accelerator[47]

خطی میں $^4_2He^{2+}$ داخل ہوتا ہے جس کی رفتار مستقل اسراع کے ساتھ $1.2\,ms$ دورانیے میں $10^3\,m\,s^{-1}$ سے بڑھا کر $1.6\times10^4\,m\,s^{-1}$ کر دی جاتی ہے۔اسراع دریافت کریں۔اس دورانیے میں ذرہ کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

جوابات: $1.25\times10^7\,m\,s^{-2}$ ، $10.2\,m$

سوال 1.61: ایک ٹینکی میں 2000 لٹر پانی پایا جاتا ہے جس میں $150\,kg$ نمک ملایا گیا ہے۔پانی کو مسلسل ہلانے سے کثافت یکساں رکھی جاتی ہے۔ٹینکی میں 10 لٹر فی منٹ تازہ پانی شامل کیا جاتا ہے۔ٹینکی سے پانی کا اخراج بھی 10 لٹر فی منٹ ہے۔ایک گھنٹہ بعد ٹینکی میں کل کتنا نمک پایا جائے گا؟

جوابات: $y=150e^{-\frac{t}{200}}$ ، $y=111\,kg$

سوال 1.62: مریض کی زبان کے نیچے تھرمامیٹر رکھ کر اس کا درجہ حرارت ناپا جاتا ہے۔کمرے اور مریض کے درجہ حرارت بالترتیب $25\,°C$ اور $40\,°C$ ہیں۔زبان کے نیچے رکھنے کے ایک منٹ بعد تھرمامیٹر کا پارہ $35\,°C$ تک پہنچتا ہے۔تھرمامیٹر کتنی دیر میں اصل درجہ حرارت کے قریب (مثلاً $39.9\,°C$) پہنچ پائے گا؟

جواب: $T=40-15e^{-1.204t}$ ، $t=4.16\,min$

سوال 1.63: سرطان[48] کی مہلک بیماری میرے خاندان کے کئی افراد کی جان لے چکی ہے۔سن 1960 میں اینا کین لائیرڈ[49] سرطان کی رسولی کی افزائش کو ٹھیک طرح **گامپرٹز تفاعل**[50] سے ظاہر کرنے میں کامیاب ہوئے۔

سرطانی رسولی میں جسم کا نظام تباہ ہو جاتا ہے۔یوں رسولی میں موجود خلیوں تک آکسیجن اور خوراک کا پہنچنا ممکن نہیں رہتا۔رسولی کے اندرونی خلیے آکسیجن اور خوراک کی کمی کی بنا مر جاتے ہیں۔ان حقائق کی نمونہ کشی درج ذیل گامپرٹز تفرقی مساوات کرتی ہے جہاں y رسولی کی کمیت ہے۔

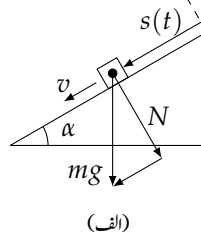
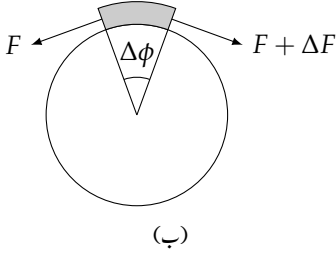
$$y'=-Ay\ln y,\quad A>0 \tag{1.28}$$

جواب: $\ln y=ce^{-At}$

---

[48] cancer
[49] Anna Kane Laird
[50] Benjamin Gompertz

(ب)

(الف)

شکل 1.17: سوال 1.65 اور سوال 1.66 کے اشکال۔

سوال 1.64: دھوپ میں کپڑے کی نمی خشک ہونی کی شرح کپڑے میں موجود نمی کے راست تناسب ہوتی ہے۔اگر پہلے پندرہ منٹ میں نصف پانی خشک ہو جائے تب 99.9 % پانی کتنی دیر میں خشک ہو گا؟ ہم 99.9 % خشک کو مکمل خشک تصور کر سکتے ہیں۔

جواب: $y = y_0 e^{-0.0462t}$ ، $49.8\,\mathrm{min}$

سوال 1.65: رگڑ
دو سطحوں کو آپس میں رگڑنے سے قوت رگڑ پیدا ہوتی ہے جو اس حرکت کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔خشک سطحوں پر پیدا قوت $|F| = \mu|N|$ سے حاصل کی جا سکتی ہے جہاں N دونوں سطحوں پر عمودی قوت، μ حرکی رگڑ کا مستقل[51] اور F رگڑ سے پیدا قوت ہے۔

شکل 1.17-الف میں α زاویہ کی سطح پر m کمیت کا جسم دکھایا گیا ہے۔اس پر ثقلی قوت (وزن) mg عمل کرتا ہے۔اس قوت کو دو حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔پہلا حصہ N ہے جو سطح کے عمودی ہے۔دوسرا حصہ سطح کے متوازی ہے جو جسم کو اسراع دیتا ہے۔ کمیت $10\,\mathrm{kg}$ ، ثقلی اسراع $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، رگڑ کا مستقل $\mu = 0.25$ اور زاویہ $\alpha = 30$ ہیں۔ ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے رفتار v کی مساوات حاصل کریں۔یہ جسم کتنی دیر میں کل $15\,\mathrm{m}$ فاصلہ طے کرے گا؟

جواب: $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ، $v = 3.93t\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، $2.76\,\mathrm{s}$

سوال 1.66: شکل 1.17-ب میں گول جسم کے گرد لپیٹی گئی رسی کا چھوٹا حصہ دکھایا گیا ہے۔تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ رسی کے چھوٹے حصے کے سروں پر قوت میں فرق زاویہ $\Delta\phi$ اور قوت F کے راست متناسب ہوتا ہے۔رسی کو جسم کے گرد کتنی مرتبہ لپیٹنے سے ایک شخص 500 گنا زیادہ قوت کی گاڑی کو روک سکتا ہے؟

[51] coefficient of kinetic friction

جوابات: $F = F_0 e^{\phi}$ ، $\phi = 6.21\,\mathrm{rad}$ یعنی 1.98 مرتبہ لپیٹنا ضروری ہے۔

سوال 1.67: کارتیسی محدد کے محور پر گول دائرے $x^2 + y^2 = r^2$ کا تفرقی مساوات y_1' حاصل کریں۔اسی طرح محور سے گزرتے ہوئے سیدھے خط کا تفرقی مساوات y_2' حاصل کریں۔دونوں تفرقی مساوات کا حاصل ضرب کیا ہو گا؟ اس حاصل ضرب سے آپ کیا اخذ کر سکتے ہیں؟

جواب: $y_1' y_2' = -1$ ؛ آپس میں عمودی ہیں۔

سوال 1.68: آپ کو ایسے تفاعل سے ضرور واسطہ پڑیگا جس کا تحلیلی تکمل حاصل کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ایسا ایک تفاعل e^{x^2} ہے۔اس تفاعل کی مکلارن تسلسل[52] کے پہلے چار ارکان کا تکمل حاصل کریں۔

جواب: $\int e^{x^2} \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{36} + \cdots$

سوال 1.69: قانون ٹاری سلی

کروی ٹینکی کا رداس R ہے۔اس کی تہہ میں چھوٹا سوراخ ہے جس کا رداس r ہے۔پوری طرح بھری ہوئی ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہو گی۔اگر $R = 1\,\mathrm{m}$ اور $r = 1\,\mathrm{cm}$ ہو تب ٹینکی کتنی دیر میں خالی ہو گی؟

جواب: $0.6\pi r^2 \sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t = -\pi[R^2 + (h-R)^2]\,\mathrm{d}h$ ،
$t + c = -\frac{\sqrt{2gh}}{9gr^2}(30R^2 - 10hR + 3h^2)$ ، $t_{\text{خالی}} = \frac{44R^2\sqrt{gR}}{9gr^2}$ ،
دیے رداس کی ٹینکی $4.34\,\mathrm{h}$ یعنی چار گھنٹے اور بیس منٹ میں خالی ہو گی۔

1.4 قطعی سادہ تفرقی مساوات اور جزو تکمل

ایسا تفاعل $u(x,y)$ جس کے استمراری[53] (یعنی بلا جوڑ) جزوی تفرق پائے جاتے ہوں کا (مکمل) تفرق درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{1.29}$$

[52] Maclaurin's series
[53] continuous partial differential

یوں اگر $u(x,y)=c$ ہو تب $\mathrm{d}u=0$ ہو گا۔

مثال کے طور پر $u=xy+2(x-y)=7$ کا تفرق

$$\mathrm{d}u=(y+2)\,\mathrm{d}x+(x-2)\,\mathrm{d}y=0$$

ہو گا جس سے درج ذیل تفرقی مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y+2}{x-2}$$

الٹ چلتے ہوئے اس تفرقی مساوات کو ہم حل کر سکتے ہیں۔ اس مثال سے ایک ترکیب جنم لیتی ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔

یک رتبی سادہ تفرقی مساوات $y'=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ یعنی

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \tag{1.30}$$

کو اس صورت **قطعی تفرقی مساوات**[54] کہتے ہیں جب اس کو درج ذیل لکھنا ممکن ہو جہاں $u(x,y)$ کوئی تفاعل ہے۔

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y=0 \tag{1.31}$$

یوں مساوات 1.30 کو

$$\mathrm{d}u=0 \tag{1.32}$$

لکھ کر تکمل لیتے ہوئے تفرقی مساوات کا عمومی **خفی حل**[55]

$$u(x,y)=c \tag{1.33}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 1.30 اور مساوات 1.31 کا موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 1.30 تب قطعی تفرقی مساوات ہو گی جب ایسا $u(x,y)$ پایا جاتا ہو کہ درج ذیل لکھنا ممکن ہو۔

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N \tag{1.35}$$

---

[54] exact differential equation

[55] implicit solution

ان سے ہم تفرقی مساوات کے قطعی ہونے کا شرط اخذ کرتے ہیں۔

سطح xy پر ایسا خطہ جس کا سرحد بند منحنی ہو اور یہ منحنی اپنے آپ کو نہ کاٹتا ہو پر تصور کریں کہ M اور N ایسے استمراری[56] (یعنی بلا جوڑ) تفاعل ہیں جن کے یک رتبی تفرق بھی اس خطے پر بے جوڑ ہیں۔تب مساوات 1.34 کے تفرق درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

استمراری شرط کی بنا $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ برابر ہیں لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{شرط قطعیت} \tag{1.36}$$

مساوات 1.30 کا قطعی تفرقی مساوات ہونے کے لئے مساوات 1.36 پر پورا اترنا لازمی[57] اور کافی[58] شرط[59] ہے۔

قطعی تفرقی مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔مساوات 1.34 کا x تکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$u = \int M \, \mathrm{d}x + k(y) \tag{1.37}$$

جہاں تکمل کا مستقل از خود y کا تفاعل ہو سکتا ہے۔تکمل کا مستقل $k(y)$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 1.37 کا جزوی تفرق $\frac{\partial u}{\partial y}$ لیتے ہوئے مساوات 1.35 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}$ حاصل کرتے ہیں جس کا y تکمل لینے سے k حاصل ہو گا۔(مثال 1.14 دیکھیں۔)

اسی طرح مساوات 1.35 کا y تکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$u = \int N \, \mathrm{d}y + m(x) \tag{1.38}$$

---

[56] continuous
[57] necessary condition
[58] sufficient condition
[59] اس حقیقت کو حصہ 11.12 میں ثابت کیا جائے گا۔

جہاں تکمل کا مستقل از خود x کا تفاعل ہو سکتا ہے۔ تکمل کا مستقل $m(x)$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 1.38 کا جزوی تفرق $\frac{\partial u}{\partial x}$ لیتے ہوئے مساوات 1.34 کی مدد سے $= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}$ حاصل کرتے ہیں جس کا x تکمل لینے سے m حاصل ہو گا۔

مثال 1.14: قطعی تفرقی مساوات
درج ذیل کو حل کریں۔

$$(1 + 2xy^3)\,\mathrm{d}x + (2y + 3x^2y^2)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.39}$$

حل: پہلے ثابت کرتے ہیں کہ یہ مساوات قطعی ہے۔ یہ مساوات 1.30 کی طرح ہے جہاں

$$M = 1 + 2xy^3$$
$$N = 2y + 3x^2y^2$$

ہیں۔ $\frac{\partial M}{\partial y}$ اور $\frac{\partial N}{\partial y}$ لکھتے ہیں

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$$

جو مساوات 1.36 پر پورا اترتے ہیں لہٰذا دی گئی مساوات قطعی تفرقی مساوات ہے۔ آئیں اب اس کو حل کرتے ہیں۔

مساوات 1.37 کو استعمال کرتے ہیں۔

$$u = \int (1 + 2xy^3)\,\mathrm{d}x + k(y) = x + x^2y^3 + k(y) \tag{1.40}$$

اس کا y جزوی تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.35 کا استعمال کرتے

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2 + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} = N = 2y + 3x^2y^2$$

ہوئے $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} = 2y$$

اس کا y تکمل لیتے ہوئے k حاصل کرتے ہیں

$$k = \int 2y \, dy = y^2 + c_1 \tag{1.41}$$

جہاں c_1 تکمل کا مستقل ہے۔چونکہ k صرف y پر منحصر ہے لہٰذا c_1 مستقل x پر منحصر نہیں ہو سکتا۔یوں مساوات 1.40 اور مساوات 1.41 سے قطعی تفرقی مساوات کا حاصل ہوتا ہے۔

$$u(x, y) = x + x^2y^3 + y^2 + c_1 = 0 \tag{1.42}$$

آخر میں مساوات 1.42 کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.39 حاصل کر کے حاصل حل کی درستگی ثابت کرتے ہیں۔

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = (1 + 2xy^3) \, dx + (3x^2y^2 + 2y) \, dy$$

□

مثال 1.15: مخصوص حل

$N = 2y + 3x^2y^2$ لیتے ہوئے مساوات 1.39 کو حل کریں جہاں $x = 1$ پر $y = 2$ ہے۔

حل: $\frac{\partial u}{\partial y} = N = 2y + 3x^2y^2$ کا y تکمل

$$u = \int (2y + 3x^2y^2) \, dy + m(x) = y^2 + x^2y^3 + m(x) \tag{1.43}$$

لے کر اس سے $\frac{\partial u}{\partial x}$ لکھتے ہیں

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3 + \frac{dm}{dx}$$

جو M کے برابر ہو گا

$$2xy^3 + \frac{dm}{dx} = M = 1 + 2xy^3$$

جس سے

$$\frac{dm}{dx} = 1, \quad m = x + c_2$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کو مساوات 1.43 میں پر کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا حل ملتا ہے۔

$$u = y^2 + x^2y^3 + x + c_2 = 0$$

ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$2^2 + (1^2)(2^3) + 1 + c_2 = 0, \quad c = -13$$

ملتا ہے جس سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y^2 + x^2y^3 + x - 13 = 0$$

□

مثال 1.16: غیر قطعی مساوات

مساوات $-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$ میں $M = -y$ اور $N = x$ ہیں لہٰذا $\frac{\partial M}{\partial y} = -1$ لیکن $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$ ہے۔یوں دی گئی مساوات غیر قطعی[60] ہے۔یوں قطعی مساوات کی ترکیب قابل استعمال نہیں ہے۔آئیں قطعی مساوات کی ترکیب استعمال کرنے کی کوشش کریں۔مساوات 1.37 سے

$$u = \int -y\,\mathrm{d}x + k(y) = -xy + k(y)$$

ملتا ہے جس کا y تفرق $\frac{\partial u}{\partial y} = -x + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}$ ہے جسے N یعنی x کے برابر پر کرنے سے $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} = 2x$ ملتا ہے جس کا تکمل $k = 2xy + c$ ہے۔اب مستقل k صرف y پر منحصر ہو سکتا ہے جبکہ حاصل k اس شرط پر پورا نہیں اترتا لہٰذا اس کو رد کیا جاتا ہے۔یوں قطعی تفرقی مساوات کی ترکیب اس مثال میں دیے تفرقی مساوات کے حل کے لئے نا قابل استعمال ہے۔آپ N سے شروع کرتے ہوئے حل کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔آپ اس راستے سے بھی حل حاصل نہیں کر پائیں گے۔ □

تخفیف بذریعہ جزو تکمل

مثال 1.16 میں تفاعل $-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$ غیر قطعی تھا البتہ اس کو $\frac{1}{x^2}$ سے ضرب دینے سے $-\frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y = 0$ حاصل ہوتا ہے جو قطعی مساوات ہے۔آپ مساوات 1.36 استعمال کرتے ہوئے ثابت

[60] non exact

کر سکتے ہیں کہ یہ واقعی قطعی مساوات ہے۔حاصل قطعی مساوات کا حل حاصل کرتے ہیں۔

$$-\tfrac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}y = 0, \quad \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \frac{y}{x} = c \tag{1.44}$$

اس ترکیب کو عمومی بناتے ہوئے ہم کہتے ہیں کہ غیر قطعی مساوات مثلاً

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.45}$$

کو ایک مخصوص تفاعل F سے ضرب دینے سے قطعی مساوات

$$FP\,\mathrm{d}x + FQ\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.46}$$

حاصل کی جا سکتی ہے۔تفاعل F **جزو تکمل**[61] کہلاتا ہے اور یہ عموماً x اور y پر منحصر ہو گا۔حاصل قطعی مساوات کو حل کرنا ہم سیکھ چکے ہیں۔

مثال 1.17: جزو تکمل

مساوات 1.44 میں جزو تکمل $\frac{1}{x^2}$ تھا لہٰذا اس کا حل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$FP\,\mathrm{d}x + FQ\,\mathrm{d}y = \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \frac{y}{x} = c$$

مساوات $-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$ کے مزید جزو تکمل $\frac{1}{y^2}$ ، $\frac{1}{xy}$ اور $\frac{1}{x^2+y^2}$ ہیں جن سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{y^2} &= \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \quad \frac{x}{y} = c \\
\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{xy} &= -\,\mathrm{d}\left(\ln\frac{x}{y}\right), \quad \ln\frac{x}{y} = c_1, \quad \frac{x}{y} = x \\
\frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} &= \mathrm{d}\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right), \quad \tan^{-1}\frac{x}{y} = c_1, \quad \frac{x}{y} = c
\end{aligned}$$

□

---

[61] integrating factor

جزو تکمل کا حصول

مساوات $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0$ کی قطعیت کی شرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ مساوات 1.36 ہے۔مساوات $FP\,\mathrm{d}x + FQ\,\mathrm{d}y = 0$ کے لئے اس شرط کو درج ذیل لکھا جائے گا

$$\frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ) \tag{1.47}$$

جس کو زنجیری طریقہ تفرق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں زیر نوشت تفرق کو ظاہر کرتی ہے (یعنی $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$)۔

$$F_yP + FP_y = F_xQ + FQ_x \tag{1.48}$$

یہ مساوات عموماً پیچیدہ ہو گی لہٰذا ہم اس پر مزید وقت ضائع نہیں کرتے۔ہم ایسے جزو تکمل تلاش کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو صرف x یا صرف y پر منحصر ہو۔صرف x پر منحصر جزو تکمل کی صورت میں $F = F(x)$ لکھا جائے گا اور $F_y = 0$ ہو گا جبکہ $F_x == F' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ ہو گا۔یوں مساوات 1.47 درج ذیل صورت اختیار کر لیگا

$$FP_y = F'Q + FQ_x \tag{1.49}$$

جسے FQ سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = R \quad \text{جہاں} \quad R = \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] \tag{1.50}$$

اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 1.1: اگر مساوات 1.45 سے مساوات 1.50 میں حاصل کردہ R صرف x پر منحصر ہو تب مساوات 1.45 کا جزو تکمل پایا جاتا ہے جسے مساوات 1.50 کا تکمل لے کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$F(x) = e^{\int R(x)\,\mathrm{d}x} \tag{1.51}$$

اسی طرح $F = F(y)$ کی صورت میں مساوات 1.50 کی جگہ درج ذیل ملتا ہے

$$\frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = R \quad \text{جہاں} \quad R = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \tag{1.52}$$

جس سے درج بالا مسئلے کی جوڑی ملتی ہے۔

مسئلہ 1.2: اگر مساوات 1.45 سے مساوات 1.52 میں حاصل کردہ R صرف y پر منحصر ہو تب مساوات 1.45 کا جزو تکمل پایا جاتا ہے جسے مساوات 1.52 کا تکمل لے کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$F(y) = e^{\int R(y)\,\mathrm{d}y} \tag{1.53}$$

مثال 1.18: جزو تکمل

دی گئی مساوات کا جزو تکمل حاصل کرتے ہوئے اس کا عمومی حل حاصل کریں۔ابتدائی معلومات $y(0) = -2$ سے مخصوص حل حاصل کریں۔

$$(e^{x+y} + ye^y)\,\mathrm{d}x + (xe^y - 1)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.54}$$

حل: پہلا قدم: غیر قطعیت ثابت کرتے ہیں۔مساوات 1.36 پر درج ذیل پورا نہیں اترتا لہٰذا غیر قطعیت ثابت ہوتی ہے۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} + e^y + ye^y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

دوسرا قدم: جزو تکمل حاصل کرتے ہیں۔مساوات 1.50 سے حاصل R کی قیمت x اور y دونوں پر منحصر ہے

$$R = \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] = \frac{1}{xe^y - 1}(e^{x+y} + e^y + ye^y - e^y)$$

لہٰذا مسئلہ 1.1 قابل استعمال نہیں ہے۔آئیں مسئلہ 1.2 استعمال کر کے دیکھیں۔ R کو مساوات 1.52 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$R = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] = \frac{1}{e^{x+y} + ye^y}(e^y - e^{x+y} - e^{-y} - ye^y) = -1$$

مساوات 1.53 سے جزو تکمل $F(y) = e^{-y}$ حاصل ہوتا ہے۔مساوات 1.54 کو F سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل قطعی مساوات ملتی ہے۔اس کو قطعیت کے لئے پرکھ کر دیکھیں۔آپ کو شرط قطعیت کے دونوں اطراف اکائی حاصل ہو گی۔

$$(e^x + y)\,\mathrm{d}x + (x - e^{-y})\,\mathrm{d}y = 0$$

مساوات 1.37 استعمال کرتے ہوئے حل حاصل کرتے ہیں۔

$$u = \int (e^x + y)\,\mathrm{d}x + k(y) = e^x + xy + k(y)$$

اس کا y تفرق لیتے ہوئے مساوات 1.35 کے استعمال سے $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}$ حاصل کرتے ہیں جس کا تکمل k ہو گا۔

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} = x - e^{-y}, \quad \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y} = N = -e^{-y}, \quad k = e^{-y} + c_1$$

یوں عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$u(x,y) = e^x + xy + e^{-y} = c \tag{1.55}$$

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $y(0) = -2$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے مستقل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

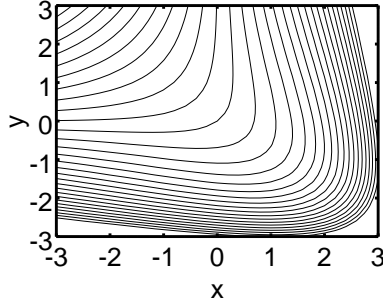
$$e^0 + (0)(-2) + e^{-(-2)} = c, \quad c = e^2$$

یوں مخصوص حل $e^x + xy + e^{-y} = e^2 = 7.389$ ہے۔ شکل 1.18 میں کئی مخصوص حل دکھائے گئے ہیں جو $u(x,y) = c$ کے ہم قد منحنیات ہیں۔

چھوتا قدم: عمومی حل اور مخصوص حل کو واپس دی گئی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔ □

سوالات

سوال 1.70 تا سوال 1.81 کو قطعیت کے لئے پرکھیں اور حل کریں۔ غیر قطعی صورت میں دیا گیا جزو تکمل استعمال کریں یا اس کو بھی حاصل کریں۔ جہاں ابتدائی معلومات دی گئی ہو، وہاں مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 1.70: $2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$

شکل 1.18: مثال 1.18

جواب: $y=\frac{c}{x^2}$

سوال 1.71: $x^2\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=0$

جواب: $2x^3+3y^2=c$

سوال 1.72: $[\sin x+(x+y^3)\cos x]\,\mathrm{d}x+3y^2\sin x\,\mathrm{d}y=0$

جواب: $\sin x(x+y^3)$

سوال 1.73: $(y+1)\,\mathrm{d}x+(x+1)\,\mathrm{d}y=0$

جواب: $x+xy+y=c$

سوال 1.74: $(e^y+ye^x+y)\,\mathrm{d}x+(xe^y+e^x+x)\,\mathrm{d}y=0$

جواب: $xe^y+xy+ye^x$

سوال 1.75: $\frac{y^2+4x}{x}\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0$

جواب: $F = x$ ، $u = (2x + y^2)x = c$

سوال 1.76: $ye^x(2x + 1 + 2y^2)\,\mathrm{d}x + e^x(x + 2y)\,\mathrm{d}y = 0$

جواب: $F = e^x$ ، $ye^{2x}(x + y) = c$

سوال 1.77: $(2y^2 + 2xy + y)\,\mathrm{d}x + (2y + x)\,\mathrm{d}y = 0$

جواب: $F = e^{2x}$ ، $e^{2x}(y^2 + xy) = c$

سوال 1.78: $y\,\mathrm{d}x + (2xy - e^{-2y})\,\mathrm{d}x = 0, \quad y(1) = 1$

جواب: $F = \frac{e^{2y}}{y}$ ، $xe^{2y} - \ln y = e^2$

سوال 1.79: $3(y + 1)\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}y, \quad y(1) = 3, \quad F = \frac{y+1}{x^4}$

جواب: $y + 1 = 4x^{\frac{3}{2}}$

سوال 1.80: $y\,\mathrm{d}x + [y + \tan(x + y)]\,\mathrm{d}y = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad F = \cos(x + y)$

جواب: $y \sin(x + y) = \frac{\pi}{2}$

سوال 1.81: $(a + 1)y\,\mathrm{d}x + (b + 1)x\,\mathrm{d}y = 0, \quad y(1) = 1, \quad F = x^a y^b$

جواب: $x^{a+1}y^{b+1} = 0$

سوال 1.82: جزو تکمل کو مزید بہتر سمجھنے کی خاطر کسی بھی تفاعل مثلاً $u = e^{2x}(y^2 + xy) = c$ کے مکمل تفرق کو $M\,\mathrm{d}+N\,\mathrm{d}y = 0$ صورت میں لکھیں یعنی $e^{2x}(2y^2 + 2xy + y)\,\mathrm{d}x + e^{2x}(2y + x)\,\mathrm{d}y = 0$ جو قطعی مساوات ہے۔ تفرقی مساوات کو e^{2x} سے تقسیم کرنے سے غیر قطعی مساوات $(2y^2 + 2xy + y)\,\mathrm{d}x + (2y + x)\,\mathrm{d}y = 0$ ملتی ہے۔ اس غیر قطعی مساوات کو e^{2x} سے ضرب دیتے ہوئے قطعی بنایا جا سکتا ہے لہٰذا e^{2x} اس غیر قطعی مساوات کا جزو تکمل ہے۔

1.5 خطی سادہ تفرقی مساوات۔مساوات برنولی

ایسے سادہ یک رتبی تفرقی مساوات جنہیں درج ذیل صورت میں لکھنا ممکن ہو **خطی**[62] کہلاتے ہیں

$$y' + p(x)y = r(x) \tag{1.56}$$

جبکہ ایسی مساوات جنہیں الجبرائی ترتیب دیتے ہوئے درج بالا صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو **غیر خطی** کہلاتے ہیں۔

خطی مساوات 1.56 کی بنیادی خاصیت یہ ہے کہ اس میں تابع متغیرہ y اور تابع متغیرہ کا تفرق y' دونوں خطی ہیں جبکہ $p(x)$ اور $r(x)$ غیر تابع متغیرہ x کے **کوئی** بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔اگر غیر تابع متغیرہ وقت ہو تب x کی جگہ t لکھا جاتا ہے۔

مساوات 1.56 خطی مساوات کی معیاری صورت ہے جس کے پہلے رکن y' کا جزو ضربی اکائی ہے۔ایسی مساوات جس میں y' کی بجائے $f(x)y'$ پایا جاتا ہو کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے، اس کی معیاری صورت حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں خطی مساوات $(x+\sqrt{x})y' + y\sec x = e^x$ کو $(x+\sqrt{x})$ سے تقسیم کرتے ہوئے اسے معیاری صورت $y' + \frac{\sec x}{x+\sqrt{x}}y = \frac{e^x}{x+\sqrt{x}}$ میں لکھا جا سکتا ہے۔

دائیں ہاتھ $r(x)$ **قوت**[63] کو ظاہر کر سکتی ہے جبکہ مساوات کا حل $y(x)$ **ہٹاو**[64] ہو سکتا ہے۔اسی طرح $r(x)$ **برقی دباو**[65] ہو سکتا ہے جبکہ $y(x)$ **برقی رو**[66] ہو سکتی ہے۔ انجینئری میں $r(x)$ کو عموماً **درآیدہ**[67] یا **جبری تفاعل**[68] کہتے ہیں جبکہ $y(x)$ کو **ماحصل**[69] یا **رد عمل**[70] کہتے ہیں۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

ہم مساوات 1.56 کو خطہ $a < x < b$ میں حل کرنا چاہتے ہیں۔اس خطے کو J کہا جائے گا۔پہلے اس مساوات کی سادہ صورت حل کرتے ہیں جس میں J پر تمام x کے لئے $r(x)$ صفر کے برابر ہو۔ (اس کو بعض اوقات

---

[62] linear
[63] force
[64] displacement
[65] voltage
[66] current
[67] input
[68] forcing function
[69] output
[70] response

$r(x) \equiv 0$ لکھا جاتا ہے۔) ایسی صورت میں مساوات 1.56 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$y' + p(x)y = 0 \tag{1.57}$$

جس کو متجانس[71] مساوات کہتے ہیں۔ متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x, \quad \ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + c_1$$

دونوں اطراف کا قوت نمائی لیتے ہوئے متجانس خطی مساوات 1.57 کا حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y(x) = ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}, \quad (c = \mp e^{c_1} \quad \text{جب} \quad y \lessgtr 0) \tag{1.58}$$

یہاں $c = 0$ بھی چنا جا سکتا ہے جو غیر اہم حل[72] (یعنی صفر حل) $y(x) = 0$ دیتا ہے۔

غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب مساوات 1.56 کو اس صورت میں حل کرتے ہیں جب $r(x) \not\equiv 0$ ہو یعنی J پر کہیں کہیں یا پورے خطے پر $r(x)$ غیر صفر ہو۔ ایسی صورت میں مساوات 1.56 غیر متجانس[73] کہلاتی ہے۔ غیر متجانس مساوات کی خوشگوار خاصیت یہ ہے کہ اس کا جزو تکمل $F(x)$ صرف x پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا اس کو مسئلہ 1.1 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ جزو تکمل کو حاصل کرتے ہیں۔ غیر قطعی مساوات 1.56 کو ترتیب دے کر F سے ضرب دیتے ہوئے قطعی مساوات حاصل کرتے ہیں

$$(py - r)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0, \quad F(py - r)\,\mathrm{d}x + F\,\mathrm{d}y = 0$$

جس سے مساوات 1.36 کی مدد سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\partial}{\partial y}[F(py - r)] = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{یعنی} \quad Fp = \frac{\partial F}{\partial x}$$

متغیرات علیحدہ کرتے ہوئے تکمل لیتے ہوئے F حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = p\,\mathrm{d}x, \quad \ln|F| = h(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{لہٰذا} \quad F = e^h$$

---

[71] homogeneous
[72] trivial solution
[73] heterogeneous

مساوات 1.56 کو جزو تکمل F سے ضرب دیتے اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}=p$ لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$e^h y' + e^h h' y = e^h r \quad \text{یعنی} \quad \left(e^h y\right)' = e^h r$$

جس کا تکمل لیتے ہیں۔

$$e^h y = \int e^h r \,\mathrm{d}x + c$$

دونوں اطراف کو e^h سے تقسیم کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات 1.56 کا حل ملتا ہے۔

$$y = e^{-h}\left(\int e^h r\,\mathrm{d}x + c\right), \quad h = \int p(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.59}$$

یوں مساوات 1.56 کا حل درج بالا تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو نسبتاً آسان ثابت ہوتا ہے۔اگر درج بالا تکمل بھی مشکل ثابت ہو تب تفرقی مساوات کا حل اعدادی ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہاں بتلاتا چلوں (سوال 1.83 دیکھیں) کہ h کے حصول میں تکمل کا مستقل کوئی کردار ادا نہیں کرتا لہٰذا اسے صفر تصور کیا جاتا ہے۔

مساوات 1.59 کا تکمل درآیدہ $r(x)$ پر منحصر ہے جبکہ ابتدائی معلومات تکمل کا مستقل c تعین کرتی ہیں۔اس مساوات کو درج ذیل لکھتے ہوئے

$$y = e^{-h}\int e^h r\,\mathrm{d}x + ce^{-h} \tag{1.60}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{عمل رد پیدا سے معلومات ابتدائی} + \text{عمل رد پیدا سے درآیدہ} = \text{ماحصل کل} \tag{1.61}$$

مثال 1.19: ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y' + y\cot x = 2x\operatorname{cosec} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

حل: یہاں $p=\cot x$ اور $r=\operatorname{cosec} x$ ہیں۔

$$h(x) = \int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin x\rvert$$

یوں مساوات 1.59 میں

$$e^h = \sin x, \quad e^{-h} = \operatorname{cosec} x, \quad e^h r = (\sin x)(2x \operatorname{cosec} x) = 2x$$

ہیں لہٰذا عمومی حل

$$y = \operatorname{cosec} x \left(\int 2x \,\mathrm{d}x + c \right) = \operatorname{cosec} x (x^2 + c)$$

ہو گا۔ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c = -\frac{\pi^2}{4}$ ملتا ہے لہٰذا مخصوص حل درج ذیل ہے

$$y = \operatorname{cosec} x \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right)$$

جس میں $x^2 \operatorname{cosec} x$ درآیدہ کا پیدا کردہ رد عمل ہے جبکہ $-\frac{\pi^2}{4} \operatorname{cosec} x$ ابتدائی معلومات کا پیدا کردہ رد عمل ہے۔ □

مثال 1.20: برقی دور

شکل 1.19 میں مزاحمت[74] R اور امالہ[75] L سلسلہ وار جڑے ہیں۔اس دور کو سلسلہ وار[76] RL دور کہتے ہیں۔لمحہ $t = 0$ پر برقی دباو[77] E برقی دور پر لاگو کیا جاتا ہے جو دور میں برقی رو[78] $I(t)$ کو جنم دیتا ہے۔ابتدائی رو صفر $I(0) = 0$ کے برابر ہے۔

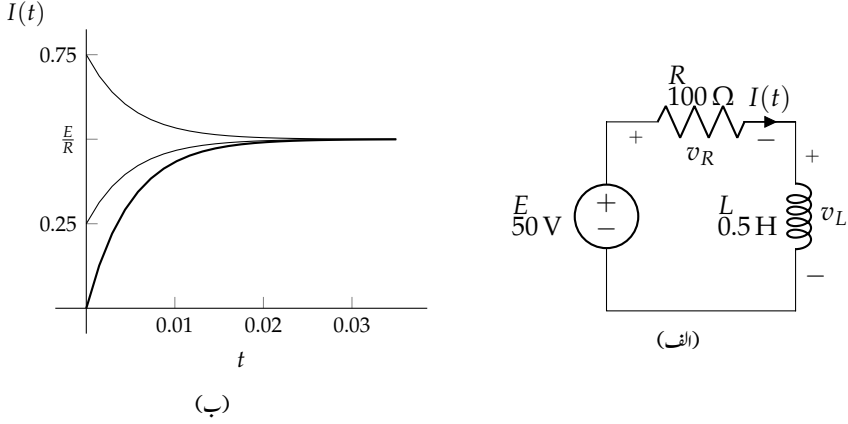
طبعی معلومات: مزاحمت کی اکائی اوہم[79] Ω اور امالہ کی اکائی ہینری[80] H ہے۔قانون اوہم[81] کے تحت مزاحمت R میں رو I اور دباو v_R کا تعلق $v_R = IR$ ہے۔اسی طرح امالہ میں رو اور دباو v_L کا تعلق $v_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ ہے۔کرخوف قانون دباو[82] کے تحت ان برقی دباو کا مجموعہ درآیدہ دباو E کے برابر ہو گا۔

حل: یہاں غیر تابع متغیرہ وقت t ہے جبکہ تابع متغیرہ رو $I(t)$ ہے۔کرخوف کے قانون کے تحت

$$v_L + v_R = E, \quad LI' + RI = E, \quad I' + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$$

---

resistance[74]
inductor[75]
series circuit[76]
electric voltage[77]
electric current[78]
Ohm[79]
Henry[80]
Ohm's law[81]
Kirchoff's voltage law[82]

(ب) (الف)

شکل 1.19: مثال 1.20 کا سلسلہ وار برقی دور۔

لکھا جائے گا جہاں آخری قدم پر L سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے۔اس کو مساوات 1.59 کی مدد سے حل کرتے ہیں جہاں x کی جگہ t اور y کی جگہ I استعمال ہو گا۔یہاں $p = \frac{R}{L}$ اور $r = \frac{E}{L}$ ہیں لہٰذا $h = \frac{R}{L}t$ ہو گا اور عمومی حل

$$I = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int e^{\frac{R}{L}t}\frac{E}{L}\,\mathrm{d}x + c\right)$$

لکھا جائے گا۔تکمل لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$I = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{E}{L}\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R}{L}} + c\right) = \frac{E}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t} \tag{1.62}$$

شکل 1.19-الف میں پرزوں کی قیمتیں دی گئی ہیں جن سے $\frac{E}{R} = \frac{50}{100} = 0.5$ اور $\frac{R}{L} = \frac{100}{0.5} = 200$ ملتا ہے لہٰذا عمومی حل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$I = 0.5 + ce^{-200t} \tag{1.63}$$

مساوات 1.62 میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے c کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔اس مساوات میں $ce^{-\frac{R}{L}t}$ جزو $t \to \infty$ پر صفر کے برابر ہو گا لہٰذا کافی دیر بعد رو پہلے جزو $\frac{E}{R}$ کے برابر ہو گی جسے رو کی برقرار حال[83]

[83] steady state

قیمت کہتے ہیں۔یہ ایک اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کافی دیر بعد رو کی قیمت کا دارومدار ابتدائی معلومات پر منحصر نہیں ہے۔رو کتنی جلدی برقرار حال قیمت اختیار کرتی ہے، اس کا دارومدار $\frac{R}{L}$ کی قیمت پر ہے۔

مساوات 1.62 میں ابتدائی معلومات $I(0)=0$ پر کرتے $0=0.5+ce^0$ ہوئے $c=-0.5$ ملتا ہے لہٰذا مخصوص حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 1.19-ب میں موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔شکل میں ابتدائی قیمت $I(0)=0.25$ اور $I(0)=0.75$ سے حاصل مخصوص حل بھی دکھائے گئے ہیں۔

$$I(t)=0.5(1-e^{-200t}) \tag{1.64}$$

□

مثال 1.21: جسم میں ہارمونز کی مقدار

جسم میں موجود غدود[84] یعنی گلٹی، خون میں مختلف مرکبات (ہارمونز)[85] خارج کرتے ہوئے مختلف نظام کو قابو کرتے ہیں۔تصور کریں کہ خون سے ایک مخصوص ہارمون مسلسل ہٹایا جاتا ہے۔ہٹانے کی شرح اس لمحے موجود ہارمون کی مقدار کے راست تناسب ہے۔ساتھ ہی ساتھ تصور کریں کہ روزانہ غدود اس ہارمون کو خون میں ایک مخصوص انداز سے خارج کرتی ہے۔خون میں موجود ہارمون کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا عمومی حل حاصل کریں۔صبح چھ بجے خون میں ہارمون کی مقدار y_0 لیتے ہوئے مخصوص حل حاصل کریں۔

حل: پہلا قدم: نمونہ کشی: چوبیس گھنٹوں میں خارج ہونے کے عمل کو $a+b\sin(\frac{2\pi t}{24})$ سے ظاہر کرتے ہیں۔چونکہ خون میں ہارمون خارج ہونے سے خون میں ہارمون کی مقدار بڑھتی ہے لہٰذا $a\geq b$ ہو گا۔یوں خارج کردہ ہارمون کی مقدار مثبت ہو گی۔کسی بھی لمحے خون میں ہارمون کی مقدار کی تبدیلی کی شرح، اس لمحے خون میں ہارمون کے داخل ہونے کی مقدار اور اس کی ہٹائی جانے والی مقدار میں فرق کے برابر ہو گا۔یوں مسئلے کا تفرقی مساوات درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=a+b\sin\left(\frac{2\pi t}{24}\right)-ky(t) \quad \text{یعنی} \quad y'-ky=a+b\sin\omega t,\quad \omega=\frac{2\pi}{24} \tag{1.65}$$

[84] gland
[85] hormones

دوسرا قدم: عمومی حل: یہاں $p=k$ ہے لہٰذا $h=\int k\,\mathrm{d}t=kt$ ہو گا۔اسی طرح $r=a+b\sin\omega t$ ہے لہٰذا مساوات 1.59 سے عمومی حل درج ذیل ہو گا جس کو تکمل بالحصص[86] حل کیا گیا ہے

$$\begin{aligned}
y&=e^{-kt}\int e^{kt}(a+b\sin\omega t)\,\mathrm{d}t+ce^{-kt}\\
&=e-kte^{kt}\left[\frac{a}{k}+\frac{b}{k^2+\omega^2}(k\cos\omega t+\omega\sin\omega t)\right]+ce^{-kt}\\
&=\frac{a}{k}+\frac{b}{k^2+\omega^2}(k\cos\omega t+\omega\sin\omega t)+ce^{-kt}
\end{aligned}$$

عمومی حل کا آخری جزو وقت بڑھنے سے آخر کار صفر ہو جاتا ہے۔یوں برقرار حل[87] بقایا اجزاء پر مشتمل ہے۔

آخر قدم: مخصوص حل: صبح چھ بجے کو لمحہ $t=0$ تصور کرتے ہوئے ابتدائی معلومات کو $y(0)=y_0$ لکھا جا سکتا ہے۔ان قیمتوں کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے c کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$y_0=\frac{a}{k}+\frac{b}{k^2+\omega^2}(k\cos 0+\omega\sin 0)+ce^0,\quad \text{یعنی}\quad c=y_0-\frac{a}{k}-\frac{bk}{k^2+\omega^2}$$

اس طرح مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔مخصوص حل کو $a=1$ ، $b=1$ ، $k=0.04$ اور $y_0=0$ لیتے ہوئے جسے شکل 1.20 میں دکھایا گیا ہے۔ شکل-ب میں $y_0=50$ لیا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خون میں ہارمون کی مقدار بہت جلد ایک مخصوص اوسط قیمت پر پہنچ پاتی ہے۔

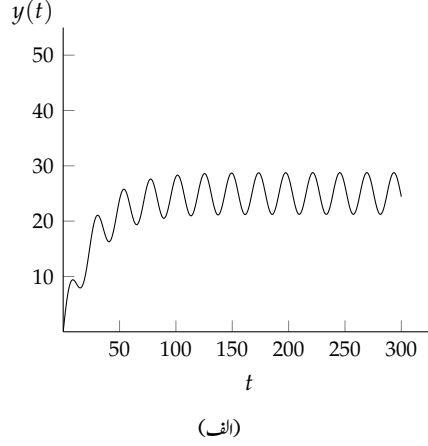
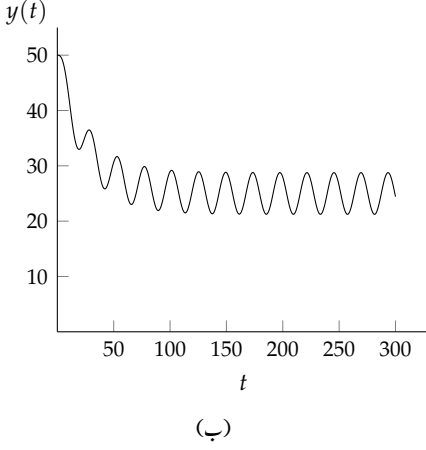
$$y=\frac{a}{k}+\frac{b}{k^2+\omega^2}(k\cos\omega t+\omega\sin\omega t)+(y_0-\frac{a}{k}-\frac{bk}{k^2+\omega^2})e^{-kt}$$

□

حصول خطی مساوات بذریعہ تخفیف۔برنولی مساوات

ایسے بہت سارے نظام ہیں جن کے غیر خطی سادہ تفرقی مساوات کو خطی بنایا جا سکتا ہے۔ان میں برنولی مساوات[88]

$$y'+p(x)y=g(x)y^a,\quad a \text{ حقیقی عدد ہے} \tag{1.66}$$

integration by parts[86]
steady state response[87]
Bernoulli equation[88]

شکل 1.20: مثال 1.21: خون میں ہارمون کی مقدار بالمقابل وقت۔

انتہائی اہم[89] ہے۔ برنولی مساوات $a = 0$ اور $a = 1$ کی صورت میں خطی ہے۔ اس کے علاوہ یہ غیر خطی ہے۔ آئیں اس کو تبدیل کرتے ہوئے خطی مساوات حاصل کریں۔ ہم

$$u(x) = [y(x)]^{1-a}$$

کا تفرق لیتے ہوئے اس میں مساوات 1.66 سے y' پر کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} u' &= (1-a)y^{-a}y' \\ &= (1-a)y^{-a}(gy^a - py) \\ &= (1-a)g - (1-a)py^{1-a} \\ &= (1-a)g - (1-a)pu \end{aligned}$$

یوں خطی سادہ تفرقی مساوات

$$u + (1-a)u' = (1-a)g \tag{1.67}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 1.22: ورہلسٹ مساوات برائے نمو آبادی درج ذیل برنولی مساوات کو ورہلسٹ[90] مساوات کہتے ہیں

[89] یعقوب برنولی (1654-1705): سوئزرلینڈ کے برنولی خاندان نے دنیا کو کئی اہم ریاضی داں دیے۔ یعقوب برنولی ان میں سر فہرست ہے۔ انہوں نے علم الامکانیات میں بہت کام کیا۔ قوت نمائی کا مستقل e بھی انہوں نے دریافت کیا۔

[90] Pierre Francois Verhulst

جو نموآبادی[91] کی تفرقی مساوات ہے۔اس کو حل کریں۔ (سوال 1.109 کو بھی دیکھیں۔)

$$y' = ay - by^2 \tag{1.68}$$

حل:اس کو مساوات 1.66 کی صورت $y' - ay = -by^2$ میں لکھ کر $a = 2$ ملتا ہے۔یوں ہم $u = y^{1-a} = y^{-1}$ کے تفرق میں مساوات 1.68 سے y' پر کرتے ہیں

$$u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(ay - by^2) = -ay^{-1} + b = -ua + b$$

جس سے خطی سادہ تفرقی مساوات

$$u' + au = b$$

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 1.59 سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$u = \frac{b}{a} + ce^{-at}$$

چونکہ $u = y^{-1}$ ہے لہٰذا اس سے درج ذیل ملتا ہے جس کو شکل 1.21 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{b}{a} + ce^{-at}} \tag{1.69}$$

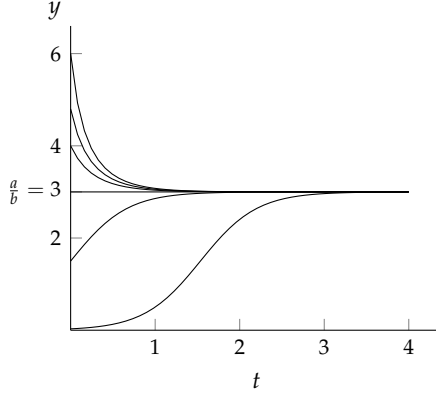
مساوات 1.68 کو دیکھ کر $y(t) = 0$ حل بھی لکھا جا سکتا ہے۔ □

مثال 1.23: مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ

مساوات 1.59 کو ایک دلچسپ ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے جسے **مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ**[92] کہتے ہیں۔متجانس مساوات $y' + p(x)y = 0$ کا حل $y_1 = ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ مساوات 1.58 دیتی ہے جس کو $y_1 = ce^{-h}$ لکھتے ہیں۔تصور کریں کہ غیر متجانس مساوات $y' + p(x)y = e(x)$ کا حل $y_2 = uy_1$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ ہو گا۔غیر متجانس مساوات میں y_2 اور y_2' پر کرتے ہیں۔

$$u'y_1 + uy_1' + puy_1 = r, \quad u'y_1 + u(y_1' + py_1) = r, \quad u'y_1 = r$$

---

[91] population growth
[92] variation of parameter

شکل 1.21: مثال 1.22: نمو آبادی کا خط۔

چونکہ y_1 متجانس مساوات کا حل ہے لہٰذا آخری قدم پر $y' + py = 0$ پر کرتے ہوئے $u'y_1 = r$ حاصل کیا گیا ہے۔اس سے u بذریعہ تکمل حاصل کرتے ہوئے y_2 لکھتے ہیں جو مساوات 1.59 ہے۔

$$u = \int \frac{r}{y_1}\,\mathrm{d}x, \quad u = \int re^h\,\mathrm{d}x + c, \quad \text{لہٰذا} \quad y_2 = uy_1 = e^{-h}\left[\int re^h\,\mathrm{d}x + c\right]$$

□

نمو آبادی

ورہلسٹ مساوات پودوں، جانوروں اور انسانی آبادی کی نمو کو ظاہر کرتی ہے۔اس مساوات میں $b = 0$ پر کرنے سے مالتھس مساوات 1.8 ملتی ہے جو آبادی کی بے روک نمو دیتی ہے۔ورہلسٹ مساوات میں جزو $-by^2$ آبادی بے قابو بڑھنے سے روکتی ہے۔ورہلسٹ مساوات کو $y' = ay(1 - \frac{b}{a}y)$ لکھ کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{b}{a}y < 1$ کی صورت میں $y' > 0$ ہو گا اور آبادی اس وقت تک مسلسل بڑھے گی جب تک $\frac{b}{a}y < 1$ ہو، $\frac{b}{a}y > 1$ کی صورت میں $y' < 0$ ہو گا اور آبادی اس وقت تک مسلسل گھٹے گی جب تک $\frac{b}{a}y < 1$ ہو۔دونوں صورتوں میں عین $\frac{b}{a}y = 1$ یعنی $y = \frac{a}{b}$ پر آبادی میں تبدیلی رک جائے گی۔شکل 1.21 میں ایسا دکھایا گیا ہے۔

ورہلسٹ نمو آبادی کی مساوات میں غیر تابع متغیرہ t صریحاً نہیں پایا جاتا لہٰذا یہ خود مختار مساوات ہے۔خود مختار مساوات

$$y' = f(y) \tag{1.70}$$

کے مستقل حل پائے جاتے ہیں جنہیں متوازن حل[93] یا متوازن نقطے[94] کہا جاتا ہے۔خود مختار مساوات میں تفاعل $f(y)$ کے صفر (f(y)=0) پر $y'=0$ ہو گا جس کا حل $y=c$ ہے جہاں c تکمل کا مستقل ہے۔تفاعل کے صفر کو مساوات 1.70 کے فاصل نقطے[95] کہتے ہیں۔مساوات 1.68 کے فاصل نقطے $y=0$ اور $y=\frac{a}{b}$ ہیں۔یوں اس مساوات کے مستقل حل $y=0$ اور $y=\frac{a}{b}$ ہیں۔متوازن حل کو دو گروہ میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں مستحکم[96] اور غیر مستحکم[97] حل کہتے ہیں۔ان کو شکل 1.21 کی مدد سے سمجھا جا سکتا ہے جہاں $y=\frac{a}{b}=3$ مستحکم حل ہے جبکہ $y=0$ غیر مستحکم حل ہیں۔

سوالات

سوال 1.83: مساوات 1.59 میں h کے حصول میں تکمل کا مستقل صفر لیا جا سکتا ہے۔ایسا کیوں ممکن ہے؟

سوال 1.84: ثابت کریں:

$$e^{\ln x}=x,\quad e^{-\ln x}=\frac{1}{x},\quad e^{-\ln\sec x}=\cos x$$

سوال 1.85 تا سوال 1.95 کے عمومی حل تلاش کریں۔ابتدائی معلومات کی صورت میں مخصوص حل حاصل کریں اور اس کا خط کھینچیں۔

سوال 1.85: $y'-y=2$

جواب: $y=ce^{x}-2$

سوال 1.86: $y'-4y=2x$

جواب: $y=ce^{4x}-\frac{x}{2}-\frac{1}{8}$

سوال 1.87: $y'+5y=e^{5x},\quad y(0)=2$

---

equilibrium solution[93]
equilibrium points[94]
critical points[95]
stable[96]
unstable[97]

جواب: $y=\frac{e^{5x}}{10}+\frac{19}{10}e^{-5x}$

سوال 1.88: $y'+6y=4\sin 4x, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right)=6$

جواب: $y=\frac{9}{13}\sin 4x-\frac{6}{13}\cos 4x+\frac{69}{13}e^{\frac{3\pi}{4}-6x}$

سوال 1.89: $y'+2xy=2x, \quad y(0)=3$

جواب: $y=1+2e^{-x^2}$

سوال 1.90: $xy'=2y+x^3e^x$

جواب: $y=x^2e^x+cx^2$

سوال 1.91: $y'+y\tan x=\sin x$

جواب: $y=c\cos x-\cos x\ln\cos x$

سوال 1.92: $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$

جواب: $y=xe^{-\sin x}+ce^{-\sin x}$

سوال 1.93: $\cos xy'+(4y-2)\sec x=0$

جواب: $y=\frac{1}{2}+ce^{-4\tan x}$

سوال 1.94: $y'=(y-4)\tan x, \quad y(0)=3$

جواب: $y=4-\sec x$

سوال 1.95: $xy'+6y=5x^3, \quad y(1)=1$

جواب: $y=\frac{5}{9}x^3+\frac{4}{9x^6}$

سوال 1.96 تا سوال 1.100 میں خطی سادہ تفرقی مساوات کی خصوصیات زیر بحث لائیں جائیں گی۔انہیں خصوصیات کی بنا انہیں غیر خطی سادہ تفرقی مساوات پر فوقیت حاصل ہے جو یہ خصوصیات نہیں رکھتے۔نمونہ کشی کرتے ہوئے انہیں وجوہات کی وجہ سے خطی مساوات حاصل کرنے کی کوشش کی جاتی ہے۔ان سوالات میں آپ کو متجانس اور غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات کی خصوصیات ثابت کرنے کو کہا گیا ہے۔

سوال 1.96: متجانس مساوات 1.57 کے حل y_1 اور y_2 کا عمومی مجموعہ $ay_1 + by_2$ بھی اس کا حل ہے جہاں a اور b مستقل ہیں۔ثابت کریں کہ غیر متجانس مساوات 1.56 یہ خصوصیات نہیں رکھتی۔

سوال 1.97: مساوات 1.57 کا غیراہم حل (یعنی صفر حل) $y \equiv 0$ [یعنی x کی ہر قیمت کے لئے $y(x) = 0$ ہے] پایا جاتا ہے جبکہ غیر متجانس مساوات 1.56 [جس میں $r(x) \neq 0$ ہو] کا ایسا حل نہیں پایا جاتا۔

سوال 1.98: مساوات 1.57 کے حل y_1 اور مساوات 1.56 کے حل y_2 کا مجموعہ $y_1 + y_2$ بھی مساوات 1.56 کا حل ہے۔

سوال 1.99: مساوات 1.56 کے دو عدد حل y_1 اور y_2 کا فرق $y_1 - y_2$ مساوات 1.57 کا حل ہے۔

سوال 1.100: اگر $y' + p(x)y = r_a(x)$ کا حل y_1 اور $y' + p(x)y = r_b(x)$ کا حل y_2 ہو جہاں دونوں مساوات کے $p(x)$ یکساں ہیں تو آپ $y_1 + y_2$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں۔

اس حصے میں سیکھے گئے ترکیب یا علیحدگی متغیرات کے ترکیب سے حل کرتے ہوئے سوال 1.101 تا سوال 1.106 کے عمومی حل حاصل کریں۔جہاں ابتدائی معلومات دی گئی ہوں وہاں مخصوص حل بھی حاصل کریں۔

سوال 1.101:

$$y' + y = y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

جواب: $\frac{y-1}{y} = e^x$

سوال 1.102:

$$y' + xy = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 2$$

جواب: $(y-1)(y+1) = 3^{-x^2}$

سوال 1.103:

$$y' + y = \frac{x}{y}$$

جواب: $2y^2 + 1 - 2x = ce^{-2x}$

سوال 1.104:

$$y' = 5y - 15y^2$$

جواب: $\frac{3y-1}{y} = ce^{-5x}$

سوال 1.105:

$$y' = \frac{\cot y}{x+1}, \quad y(0) = 1$$

جواب: $(x+1)\cos y = 2$

سوال 1.106:

$$2xyy' + (x-1)y^2 = x^2e^x, \quad (y^2 = z \text{ پر کریں})$$

جواب: $\frac{2e^x y^2 - xe^{2x}}{2x} = c$

سوال 1.107: پانی کو چولہے پر برتن میں گرم کیا جاتا ہے۔برتن کو آگ سے اتارتے وقت پانی کا درجہ حرارت 99 °C ہے جبکہ دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت 90 °C ہے۔فضا کا درجہ حرارت 32 °C ہے۔پانی کتنی دیر میں تقریباً فضا کے درجہ حرارت (مثلاً 33 °C) پر پہنچے گا؟

جواب: تقریباً چار گھنٹے اور پچاس منٹ۔

سوال 1.108: مریض کو قطرہ قطرہ نمکیات کا محلول بذریعہ شریان دیا جاتا ہے جس میں دوائی حل کی گئی ہے۔لمحہ $t=0$ سے مریض کو مسلسل a گرام فی منٹ دوائی دی جاتی ہے جبکہ جسم کا نظام دوائی کو مسلسل خون سے نکال کر خارج کرتا ہے۔خون سے دوائی ہٹانے کی شرح خون میں کل دوائی کی مقدار کے راست تناسب ہے۔اس مسئلے کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات حاصل کریں اور مساوات کو حل کریں۔

جوابات: $y'=a-ky$ اور لمحہ $t=0$ پر خون میں دوائی کی مقدار صفر ہے، $y=\frac{a}{k}(1-e^{-kt})$

سوال 1.109: وبائی بیماری کا پھیلاو
وبائی بیماری ایک شخص سے دوسرے شخص کو منتقل ہوتے ہوئے بڑھتی ہے۔تصور کریں کہ ایک مخصوص وبا سانس کے ذریعہ پھیلاتا ہے جو دو اشخاص کے قریب ہونے سے ممکن ہے۔یوں وبا میں اضافے کی شرح مریض اور صحت مند شخص کے قریب فاصلہ کے راست تناسب ہے۔تصور کریں شہر میں کل آبادی a ہے جبکہ لمحہ t پر بیماروں کی تعداد $y(t)$ ہے۔تصور کریں کہ تمام لوگ مکمل آزادی کے ساتھ آپس میں ملتے جلتے ہیں۔اس مسئلے کی نمونہ کشی کرتے ہوئے مسئلے کا تفرقی مساوات حاصل کریں۔مساوات کو حل کریں۔

حل: کسی بھی لمحے y لوگ بیمار اور بقایا یعنی $a-y$ لوگ صحت مند ہیں۔اگر $\mathrm{d}t$ دورانیے میں ایک بیمار شخص کسی ایک شخص سے ملے تو $\frac{a-y}{a}$ امکان ہے کہ وہ صحت مند شخص سے ملا ہو گا۔ اسی دورانیے میں بقایا بیمار بھی کسی سے ملے ہوں گے لہٰذا بیمار اور صحت مند کے ملنے کا امکان $y\left(\frac{a-y}{a}\right)$ ہو گا۔اس طرح بیماری میں اضافے کی شرح کو $y'=ky\left(\frac{a-y}{a}\right)$ لکھا جا سکتا ہے جو مساوات 1.68 ہے۔لمحہ $t=0$ پر ایک شخص بیمار تصور کرتے ہوئے اس کا حل $\frac{y}{y-a}=\frac{e^t}{1-a}$ ملتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t\to\infty$ پر $y\to a$ ہو گا یعنی آخر کار وبا پورے شہر میں پھیل جائے گی۔

سوال 1.110: ایک جھیل میں $200\times10^6\,\mathrm{m}^3$ پانی پایا جاتا ہے جس میں ماہی گیروں کی غفلت سے گندگی کی مقدار 5 % تک بڑھ جاتی ہے جس سے ماہی گیری متاثر ہو رہی ہے۔جھیل سے سالانہ $20\times10^6\,\mathrm{m}^3$ پانی

خارج ہوتا ہے اور اتنا ہی تازہ پانی اس میں داخل ہوتا ہے۔تازہ پانی میں $0.6\,\%$ گندگی پائی جاتی ہے۔ جھیل کو صاف کرنے کی غرض سے اس میں ماہی گیری ممنوع کر دی جاتی ہے۔ جھیل میں گندگی کی مقدار کتنی مدت میں $2\,\%$ رہ جائے گی؟

جوابات: جھیل میں کل گندگی کو $y(t)$ لکھتے ہوئے $y' = 120000 - 0.1y$ ملتا ہے جس کا عمومی حل $y = (1.2 + 8.8e^{-0.1t}) \times 10^6$ ہے۔ جھیل کو درکار حد تک صفائی کے لئے 11.45 سال درکار ہوں گے۔

سوال 1.111 سے سوال 1.114 میں ماہی گیری کو مثال بنایا گیا ہے۔یہی حقائق ملک میں پالتو مال مویشی پر بھی لاگو ہوتا ہے۔

سوال 1.111: ایسی جھیل جس میں ماہی گیری منع ہو میں مچھلی کی تعداد مساوات دیتی ہے۔ماہی گھیری کی اجازت کے بعد مساوات کیا ہو گی؟ تصور کریں کہ مچھلی پکڑنے کی شرح مچھلی کی لمحاتی تعداد کے راست تناسب ہے۔

حل: مچھلی پکڑنے کی شرح کو py لکھتے ہوئے نئی مساوات $y' = ay - by^2 - py$ ہو گی۔

سوال 1.112: سوال 1.111 میں مچھلی پکڑنے کی شرح اس قدر ہے کہ مچھلی کی تعداد تبدیل نہیں ہوتی۔ مچھلی کی تعداد کیا ہو گی؟

حل: مچھلی کی تعداد تبدیل نہ ہونے سے مراد $y' = 0$ ہے لہٰذا $y' = ay - by^2 - py = 0$ لکھتے ہوئے $y = 0$ اور $y = \frac{a-p}{b}$ ملتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جھیل سے مسلسل $p\left(\frac{a-p}{b}\right)$ پیداوار لی جا سکتی ہے۔

سوال 1.113: سوال 1.111 میں $a = b = 1$ ، $p = 0.1$ اور $y(0) = 5$ لیتے ہوئے تفرقی مساوات کو حل کریں۔ اس شرح سے پیداوار لیتے ہوئے ماہی گیری کی مستقبل کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

جواب: $y = \frac{0.9}{1-e^{-0.9t-0.198}}$ ؛اس شرح سے $t \to \infty$ پر $y \to 0$ ہو گا اور ماہی گیری ممکن نہ رہ پائے گی۔

سوال 1.114: ماہی گیری کے شعبے کو برقرار رکھنے کی خاطر سوال 1.111 میں دو سال ماہی گیری کے بعد دو سال کا وقفہ دیا جاتا ہے جس میں ماہی گیری ممنوع ہوتی ہے اور جس دوران جھیل میں مچھلی کی آبادی دوبارہ بڑھتی

ہے۔اس مسئلے کو آٹھ سال کے لئے حل کرتے ہوئے حل کا خط کھینچیں۔ $a = b = 1$ ، $p = 0.1$ اور $y(0) = 5$ لیں۔

سوال 1.115: جنگل میں بھیڑیوں کی آبادی میں شرح موت لمحاتی آبادی کے راست تناسب ہے جبکہ شرح پیدائش بھیڑیوں کی جوڑی کی اتفاقی ملاپ کے راست تناسب ہے۔اس مسئلے کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔غیر تغیر آبادی دریافت کریں۔

حل: بھیڑیا کی کل آبادی y میں آدھے نر اور آدھے مادہ ہوں گے۔دورانیہ $\mathrm{d}t$ میں ایک جوڑی کے ملاپ کا امکان $\frac{y}{2}$ کے راست تناسب ہے۔یوں $\frac{y}{2}$ جوڑیوں کے ملاپ کا امکان $\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{y}{2}\right)$ ہو گا۔یوں شرح تبدیلی $y' = ay^2 - by$ لکھی جائے گی جہاں $a > 0$ اور $b > 0$ ہیں۔غیر تغیر آبادی سے مراد $y' = 0$ ہے جس سے $y = 0$ اور $y = \frac{b}{a}$ حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $y > \frac{b}{a}$ کی صورت میں $y' > 0$ ہو گا جس کی بنا آبادی مسلسل بڑھے گی۔اس کے برعکس $y < \frac{b}{a}$ کی صورت میں $y' < 0$ ہو گا اور آبادی مسلسل گھٹے گی۔

سوال 1.116: شہروں کے بند مکانوں میں باہر فضا کی نسبت زیادہ آلودگی پائی جاتی ہے۔گھر کے اندر جانور یا پودوں سے یہ مسئلہ مزید سنگین صورت اختیار کر لیتا ہے۔ قابل رہائش ہونے کے لئے لازم ہے کہ مکان میں ہوا کا بہاو پایا جاتا ہو۔ایک عمارت کا حجم $1500\,\mathrm{m}^3$ ہے۔لمحہ $t = 0$ پر تمام کھڑکیاں کھول دی جاتی ہیں جس کے بعد $200\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$ تازہ ہوا مسلسل عمارت میں ایک رخ سے داخل ہوتی ہے اور اتنی ہی ہوا دوسری جانب خارج ہوتی ہے۔عمارت میں پنکھے ہوا کو مسلسل حرکت میں رکھتے ہیں۔ کتنی دیر بعد $90\,\%$ ہوا تازہ ہو گی؟

جواب: 17 گھنٹے اور 16 منٹ۔

1.6 عمودی خطوط کی نسلیں

ایک نسل کے خطوط کے عمودی مطقاطع خطوط معلوم کرنا طبیعیات کے اہم مسائل میں سے ایک ہے۔حاصل خطوط کو دیے گئے خطوط کے عمودی مطقاطع خطوط[98] کہتے ہیں اور اسی طرح دیے گئے خطوط کو حاصل کردہ خطوط کے عمودی مطقاطع خطوط کہتے ہیں۔

[98] orthogonal trajectories

زاویہ تقاطع[99] سے مراد نقطہ تقاطع پر دو خطوط کے مماس کے مابین زاویہ ہے۔

عمودی خطوط کو عموماً تفرقی مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر $G(x,y,c)=0$ ایک ہی نسل کے خطوط کو ظاہر کرتی ہو تب مستقل c کی ہر انفرادی قیمت نسل کے ایک منفرد خط کو ظاہر کرتی ہے۔چونکہ اس مساوات میں ایک عدد مستقل (c) پایا جاتا ہے لہٰذا ان خطوط کو ایک عدد مقدار معلوم[100] کے خطوط کی نسل کہا جاتا ہے۔

آئیں درج ذیل خطوط کو مثال بناتے ہوئے اس ترکیب کو سیکھیں۔

$$\frac{x^2}{4}+y^2=c \tag{1.71}$$

مماس کی ڈھلوان y' کو تفرق کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{2x}{4}+2yy'=0, \quad y'=-\frac{x}{4y} \tag{1.72}$$

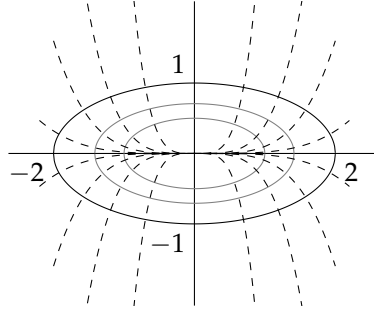
تفرقی مساوات میں c نہیں پایا جا سکتا۔آپس میں عمودی خطوط کے ڈھلوان کا حاصل ضرب منفی اکائی (-1) کے برابر ہو گا۔یوں درکار خطوط کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$y'=\frac{4y}{x} \tag{1.73}$$

علیحدگی متغیرات کرتے ہوئے تکمل سے عمودی خطوط حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=4\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad y=c_1x^4 \tag{1.74}$$

اس مساوات کے مستقل کو c_1 لکھا گیا ہے جس کا ہر انفرادی قیمت نسل کی منفرد خط دیتا ہے۔شکل 1.22 میں $c=1$ لیتے ہوئے مساوات 1.71 کو گہری سیاہی میں ٹھوس لکیر سے دکھایا گیا ہے۔اسی طرح ہلکی سیاہی کی ٹھوس لکیروں سے مختلف c سے حاصل نسل کے دیگر خطوط دکھائے گئے ہیں۔مساوات 1.74 کو شکل میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔مستقل c_1 کے مثبت اور منفی قیمتیں لے کر ان خطوط کو کھینچا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ٹھوس خطوط کی نسل اور نقطہ دار خطوط کی نسل ایک دونوں کو عمودی قطع کرتے ہیں۔

---
[99] angle of intersection
[100] parameter

شکل 1.22: عمودی خطوط کی نسلیں۔

سوالات

سوال 1.117 تا سوال 1.122 کے عمودی تقاطع خطوط دریافت کریں۔

سوال 1.117: $y = 2x + c$

جواب: $y = -\frac{x}{2} + c_1$

سوال 1.118: $3y = -2x + c$

جواب: $y = \frac{3x}{2} + c_1$

سوال 1.119: $y^2 = 3x + c$

جواب: $y = c_1 e^{-\frac{2}{3}x}$

سوال 1.120: $y = x^2 + c$

جواب: $y = \ln \frac{c_1}{\sqrt{|x|}}$

سوال 1.121: $G(x, y, c) = e^x \cos y = c$

جواب: $\sin y = c_1 e^{-x}$

سوال 1.122: $2y = \frac{3}{x} + c$

جواب: $y=\frac{2x^3}{9}+c_1$

سوال 1.123 تا سوال 1.125 عملی استعمال کے چند سوالات ہیں۔

سوال 1.123: ہم قوہ خطوط اور ثقلی قوت
ثقلی قوت کی سمت زمین کی محور کو ہے۔کار تیسی محدد پر اس قوت کی سمت کو $y=cx$ لکھا جا سکتا ہے۔ان کی عمودی خطوط حاصل کریں جو ہم قوہ خطوط[101] کہلاتے ہیں۔

جواب: ہم جانتے ہیں کہ y' کی مساوات c سے پاک ہونا لازمی ہے لہٰذا $y'=c$ میں دی گئی مساوات سے $c=\frac{y}{x}$ پر کرتے ہوئے $y'=\frac{y}{x}$ حاصل کرتے ہیں۔اس طرح عمودی خطوط کی ڈھلوان $y'=-\frac{x}{y}$ ہو گی جس کا تکمل $x^2+y^2=c_1$ دیتا ہے۔

سوال 1.124: ہم محوری تار
حساس برقی اشارات کی ترسیل عموماً ہم محوری تار[102] کے ذریعہ کی جاتی ہے۔موصل نلکی کے محور پر موصل تار رکھنے سے ہم محوری تار حاصل ہوتی ہے۔ہم محوری تار کو کار تیسی z محور پر رکھتے ہوئے دونوں موصل تاروں کے درمیانی خطے میں ہم قوہ خطوط کی مساوات $u(x,y)=x^2+y^2=c$ حاصل ہوتی ہے جو z محور پر پڑی نلکی سطحوں کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم قوہ خطوط کے عمودی متقاطع خطوط حاصل کریں جو برقی میدان[103] کو ظاہر کرتی ہیں۔

جواب: $y=c_1x$

سوال 1.125: ہم حرارت خطوط
درجہ حرارت میں فرق، حرارتی توانائی کی منتقلی کا سبب ہے لہٰذا حرارتی توانائی کی منتقلی ہم حرارت خطوط[104] کے عمودی ہو گی۔کسی خطے میں ہم حرارتی خطوط کو $2x^2+5y^2=c$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ان کی عمودی متقاطع خطوط حاصل کریں۔

جواب: $y^2=c_1x^5$

equipotential lines[101]
coaxial cable[102]
electric field[103]
isotherms[104]

1.7 ابتدائی قیمت تفرقی مساوات: حل کی وجودیت اور یکتائیت

کسی بھی متغیرہ کی مطلق قیمت صفر یا مثبت $|k| \geq 0$ ہوتی ہے لہٰذا درج ذیل ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کا کوئی حل نہیں پایا جاتا چونکہ اس تفرقی مساوات کا واحد حل $y \equiv 0$ ہے جو ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اترتا۔

$$2\left|y'\right| + 3|y| = 0, \quad y(0) = 2$$

اس کے برعکس درج ذیل مساوات کا صرف اور صرف ایک عدد حل یعنی $y = x^3 + 2$ پایا جاتا ہے۔

$$y' = 3x^2, \quad y(0) = 2$$

درج ذیل تفرقی مساوات کے لامتناہی حل $y = -1 + cx$ پائے چونکہ $x = 0$ پر c کی کسی بھی قیمت کے لئے $y = -1$ ہی ہے۔

$$xy' = y + 1, \quad y(0) = -1$$

یوں ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.75}$$

کے حل کے بارے میں درج ذیل دو اہم سوالات اٹھتے ہیں۔

وجودیت حل: وہ کون سی صورتیں ہیں جن میں مساوات 1.75 کا ایک یا ایک سے زیادہ حل ممکن ہے۔

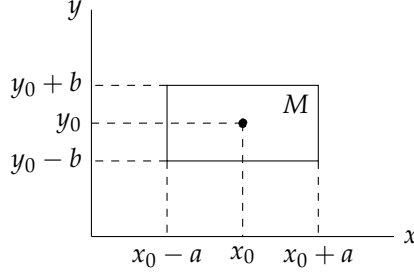
یکتائی حل: وہ کون سی صورتیں ہیں جن میں مساوات 1.75 کا زیادہ سے زیادہ ایک حل ممکن ہے۔(یوں ایک سے زیادہ حل رد کئے جاتے ہیں۔)

قبل از حل یہ جاننا کہ آیا ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کا حل پایا جاتا ہے اور آیا کہ اس کا حل یکتا ہے انتہائی اہم معلومات ہیں جنہیں مسئلہ وجودیت[105] اور مسئلہ یکتائی[106] سے جاننا ممکن ہے۔ ان مسئلوں پر غور کرتے ہیں۔

مسئلہ 1.3: مسئلہ وجودیت
ابتدائی نقطہ (x_0, y_0) کو مرکز بناتے ہوئے شکل 1.23 میں مستطیل خطہ M دکھایا گیا ہے۔

$$M : |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b \tag{1.76}$$

---

[105] existence theorem
[106] uniqueness theorem

شکل 1.23: وجودیت اور یکتائی کے مسئلوں کا مستطیل۔

تصور کریں کہ اس مستطیل خطے کے تمام نقطوں (x,y) پر ابتدائی قیمت سادہ تفرقی مساوات

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.77}$$

کا دایاں ہاتھ $f(x,y)$ **استمراری تفاعل**[107] (یعنی بلا جوڑ تفاعل) ہے۔مزید اس خطے میں تفاعل کی قیمت **محدود**[108] ہے یعنی

$$\text{مستطیل کے تمام نقطوں } (x,y) \text{ پر} \quad |f(x,y)| \leq K \tag{1.78}$$

جہاں K محدود قیمت کا مستقل ہے۔ایسی صورت میں ابتدائی قیمت مساوات 1.77 کا کم از کم ایک حل موجود ہو گا۔ یہ حل کم از کم x کی ان تمام قیمتوں کے لئے پایا جائے گا جو $|x-x_0| < \alpha$ خطے میں پائے جاتے ہوں۔ α کی قیمت a اور $\frac{b}{K}$ کی قیمتوں میں سے کم قیمت کے برابر ہو گی۔

مثال 1.24: تفاعل $f(x,y)=2x+y^2$ خطہ $|x|<1$ ، $|y|<1$ میں محدود تفاعل ہے جس کی زیادہ سے زیادہ مطلق قیمت $K=3$ ہے۔اس کے برعکس تفاعل $\tan x$ خطہ $|x|<\frac{\pi}{5}$ میں غیر محدود ہے چونکہ نقطہ $x=\frac{\pi}{2}$ اسی خطے میں پایا جاتا ہے جہاں $\tan\frac{\pi}{2}\to\infty$ ہے۔ □

مسئلہ 1.4: مسئلہ یکتائی
تصور کریں کہ شکل 1.23 کے مستطیل میں تمام نقطوں (x,y) پر $f(x,y)$ اور $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ استمراری اور

[107] continuous function
[108] bounded

محدود تفاعل ہیں یعنی:

$$\left|f(x,y)\right| < K_a \tag{1.79}$$

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| < K_b \tag{1.80}$$

ایسی صورت میں مساوات 1.77 کا زیادہ سے زیادہ ایک عدد حل موجود ہو گا۔یوں مسئلہ 1.3 کے تحت تفرقی مساوات کا صرف اور صرف ایک عدد حل موجود ہو گا اور یہ حل کم از کم x کی ان تمام قیمتوں کے لئے پایا جائے گا جو $|x-x_0|<\alpha$ خطے میں پائے جاتے ہوں۔

درج بالا دو مسئلوں کے ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیے جائیں گے۔البتہ انہیں شکل 1.24 کی مدد سے سمجھا جا سکتا ہے جہاں ابتدائی نقطہ (x_0,y_0) مستطیل M کا مرکز ہے۔مخصوص حل ابتدائی نقطے سے گزرتا ہے۔مساوات 1.78 کے تحت $f(x,y)$ یعنی y' کی قیمت کم سے کم $-K$ اور زیادہ سے زیادہ $+K$ ممکن ہے یعنی مساوات 1.78 کے منحنی حل کی ڈھلوان $-K$ تا $+K$ ممکن ہے۔شکل میں ابتدائی نقطے سے گزرتا ہوا $y'=\mp K$ ڈھلوان کے خطوط دکھائے گئے ہیں۔یوں (x_0,y_0) سے گزرتا ہوا منحنی حل کسی صورت سایہ دار[109] خطہ $y'=\mp K$ سے باہر نہیں نکل سکتا۔شکل میں ابتدائی نقطے سے گزرتا ہوا منحنی حل ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 1.24-الف میں منحنی حل کو دیکھیے۔سائے دار خطے میں رہتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ حل $|x-x_0|<\alpha$ پر پایا جائے گا جہاں $\alpha=a$ کے برابر ہے۔شکل-ب میں منحنی حل مستطیل M سے باہر نکل جاتا ہے۔چونکہ مستطیل کے باہر $f(x,y)$ اور $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ کے بارے میں کچھ نہیں کہا جا سکتا ہے لہٰذا ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $|x-x_0|<\alpha$ پر حل پایا جاتا ہے جہاں $\alpha=\frac{b}{K}$ کے برابر ہے۔

مثال 1.25: ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$y'=1+y^2,\quad y(0)=0$$

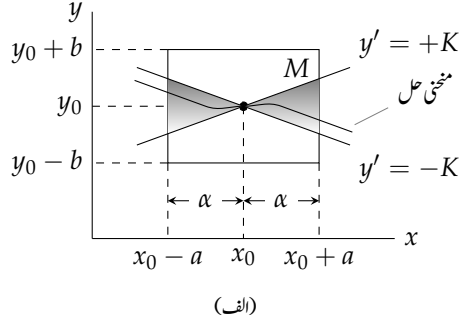
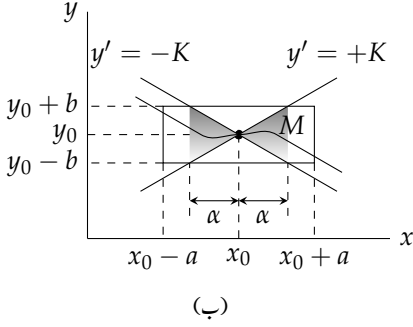
اور خطہ $|x|<4$ ، $|y|<5$ لیتے ہیں۔یوں $a=4$ ، $b=5$ اور

$$\left|f(x,y)\right|=\left|1+y^2\right|\le K_a=26$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2y\le K_b=10$$

$$\alpha=\frac{b}{K_a}=\frac{5}{26}<a$$

---

[109] shaded

شکل 1.24: مساوات 1.78 میں دی گئی شرط اور α۔

ہوں گے۔ہم جانتے ہیں کہ اس تفرقی مساوات کا حل $y = \tan x$ ہے جس میں $x = \mp\frac{\pi}{2} > \alpha$ پر جوڑ پایا جاتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستطیل کے پورے x پر مسلسل حل نہیں پایا جاتا۔ □

تفرقی مساوات کے حل کے لئے درج بالا دو مسئلوں میں کافی شرائط نا کہ لازم شرائط دی گئی ہیں۔ یہ شرائط ہلکی بنائی جا سکتی ہیں۔احصاء تفرقیات[110] کے مسئلہ اوسط قیمت[111] کے تحت

$$f(x,y_2) - f(x,y_1) = (y_2 - y_1)\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_i}$$

ہے جہاں y_1 اور y_2 خطہ M میں پائے جاتے ہیں اور y_i ان کے درمیان کوئی موزوں قیمت ہے۔مساوات 1.80 کے استعمال سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x,y_2) - f(x,y_1) \le (y_2 - y_1)K_b \tag{1.81}$$

مساوات 1.80 کی جگہ مساوات 1.81 استعمال کیا جا سکتا ہے جو نسبتاً ہلکی شرط ہے۔یہاں یہ بتلانا ضروری ہے یکتا حل کے لئے $f(x,y)$ کا مسلسل تفاعل ہونا ناکافی شرط ہے۔درج ذیل مثال اس حقیقت کی وضاحت کرتی ہے۔

مثال 1.26: غیر یکتائی

ابتدائی قیمت تفرقی مساوات

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

---

[110] differential calculus
[111] mean value theorem

کے دو حل پائے جاتے ہیں

$$y = 0 \quad \text{اور} \quad y = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & x < 0 \end{cases}$$

اگرچہ $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ مسلسل تفاعل ہے۔مساوات 1.81 کی شرط لکیر $y = 0$ پر پوری نہیں ہوتی چونکہ $y_1 = 0$ اور y_2 کو مثبت لیتے ہوئے

$$\frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2 - y_1|} = \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y_2}}, \quad (\sqrt{y_2}) > 0)$$

ملتا ہے جس کی قیمت y_2 کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے لامتناہی بڑھائی جا سکتی ہے جبکہ مساوات 1.81 کہتی ہے کہ یہ قیمت کسی مخصوص مستقل قیمت K_b سے کم ہونا لازمی ہے۔

□

مثال 1.27: تصور کریں کہ $|x - x_0| \leq a$ فاصلے پر مساوات $y' + p(x)y = r(x)$ میں $p(x)$ اور $r(x)$ استمراری ہیں۔ثابت کریں کہ یہ مساوات مسئلہ وجودیت اور مسئلہ یکتائی کی شرائط پر پورا اترتا ہے لہٰذا ابتدائی معلومات کی صورت میں اس تفرقی مساوات کا یکتا حل پایا جاتا ہے۔

جواب: $f(x, y) = r - py$ ہے لہٰذا $\frac{\partial f}{\partial y} = -p$ ہو گا۔چونکہ p استمراری ہے لہٰذا $\frac{\partial f}{\partial y}$ استمراری اور دیے فاصلے پر محدود ہو گا۔ □

سوالات

سوال 1.126: خطی سادہ تفرقی مساوات

ثابت کریں کہ اگر تفرقی مساوات $y' + p(x)y = r(x)$ میں $p(x)$ اور $r(x)$ وقفہ $|x - x_0| \leq a$ میں تمام x کے لئے استمراری ہو تب اس تفرقی مساوات کا $f(x, y)$ مسئلہ 1.3 اور مسئلہ 1.4 کے شرائط پر پورا اترتا ہے لہٰذا اس تفرقی مساوات پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا حل یکتا ہو گا۔

جواب: $y' = f(x, y) = r(x) - p(x)y$ ہے لہٰذا $\frac{\partial f}{\partial y} = -p(x)$ استمراری ہو گا۔یکتا حل بند وقفہ $|x - x_0| \leq a$ میں محدود ہو گا۔

سوال 1.127: لامحدود پٹی
اگر مسئلہ 1.3 اور مسئلہ 1.4 کی شرائط صرف مستطیل کی بجائے لامحدود پٹی $|x - x_0| < a$ پر پورا اترتی ہوں تب مساوات 1.75 کا حل کس وقفہ میں موجود ہو گا؟

جواب: $\alpha = \frac{b}{K}$ میں b کی قیمت بڑی لیں یعنی $b = \alpha K$ لہٰذا حل وقفہ $|x - x_0| < a$ میں موجود ہو گا۔

سوال 1.128: x وقفے کی لمبائی
عموماً مساوات 1.75 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلے کا حل مسئلہ 1.3 اور مسئلہ 1.4 میں دیے گئے وقفے سے زیادہ لمبائی پر پر موجود ہوتا ہے۔ a کی بہترین قیمت (اور b کی اچھی قیمت) چنتے ہوئے اس حقیقت کو $y' = 2y^2, \quad y(1) = 1$ کے لئے ثابت کریں۔

جواب: R کے اطراف $2a$ اور $2b$ ہیں اور چونکہ $y(1) = 1$ ہے لہٰذا اس کا وسط $(1,1)$ ہے۔ R میں

$$f = 2y^2 \leq 2(b+1)^2 = K, \; \alpha = \frac{b}{K} = \frac{b}{2(b+1)^2}, \; \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}b} = 0 \implies b = 1$$

سے $\alpha_{\text{بہترین}} = \frac{b}{K} = \frac{1}{8}$ حاصل ہو گا۔ تفرقی مساوات کا حل $\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = 2\,\mathrm{d}x$ کے تکمل سے $y = \frac{1}{3-2x}$ ملتا ہے۔

سوال 1.129: کیا کسی ایک ہی تفرقی مساوات کے دو مختلف حل، مسئلہ 1.3 اور مسئلہ 1.4 میں دی گئی شرائط پر پورا اترتے ہوئے، مستطیل میں ایک ہی نقطے سے گزر سکتے ہیں۔

جواب: ایسا ممکن نہیں ہو گا چونکہ اگر ایسا ہو تب اس مشترک نقطہ (x_1, y_1) پر دونوں حل ابتدائی معلومات $y(x_1) = y_1$ پر پورا اتریں گے جو یکتائی کی خلاف ورزی ہے۔

باب 2

دو رتبی سادہ تفرقی مساوات

کئی اہم میکانی اور برقی مسائل کو خطی دو رتبی تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ خطی دو رتبی تفرقی مساوات تمام خطی تفرقی مساوات کی نمائندگی کرتی ہیں۔ چونکہ دو رتبی مساوات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے لہٰذا اس باب میں اسی پر پہلے غور کرتے ہیں۔ اگلے باب کا موضوع تین رتبی مساوات ہے۔

تفرقی مساوات کو خطی اور غیر خطی گروہوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ غیر خطی تفرقی مساوات کے حل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے جبکہ خطی مساوات کو حل کرنے کے کئی عمدہ تراکیب پائی جاتی ہیں۔ اس باب میں عمومی حل اور ابتدائی معلومات کی صورت میں مخصوص حل کا حصول دکھایا جائے گا۔

2.1 متجانس خطی دو رتبی تفرقی مساوات

یک رتبی مساوات پر پہلے باب میں غور کیا گیا۔ اس باب میں دو رتبی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش[1]، متحرک امواج، منتقلی حرارتی توانائی اور طبیعیات کے دیگر شعبوں میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

ایسی دو رتبی تفرقی مساوات جس کو

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2.1}$$

[1] oscillations

صورت میں لکھا جا سکے خطی[2] کہلاتا ہے ورنہ اس کو غیر خطی[3] کہتے ہیں۔

اس مساوات کی خاصیت یہ ہے کہ اس میں y ، y' اور y'' کی طاقت اکائی ہے یعنی تینوں خطی ہیں البتہ $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔دو رتبی مساوات کا پہلا جزو $f(x)y''$ ہونے کی صورت میں مساوات کو $f(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کو مساوات 2.1 کی معیاری صورت[4] میں لکھیں جہاں y'' پہلا جزو ہے۔

متجانس اور غیر متجانس دو رتبی مساوات کی تعریف ہو بہو یک رتبی متجانس اور غیر متجانس مساوات کی تعریف کی طرح ہے جس پر حصہ 1.5 میں تبصرہ کیا گیا۔یقیناً $r(x) = 0$ ہو؛اس کو مکمل صفر[5] پڑھیں۔] کی صورت میں مساوات 2.1 درج ذیل لکھی جائے گی [جہاں زیر غور تمام x پر $r \equiv 0$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.2}$$

جو متجانس ہے۔اگر $r(x) \not\equiv 0$ ہو تب مساوات 2.1 غیر متجانس[6] کہلائے گا۔

متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال درج ذیل ہے

$$xy'' + 2y' + y = 0, \quad \text{جو کو معیاری صورت میں لکھتے ہیں} \quad y'' + \frac{2y'}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

جبکہ غیر متجانس خطی تفرقی مساوات کی مثال

$$y'' + x^2y = \sec x$$

ہے۔آخر میں غیر خطی مساوات کی تین مثال پیش کرتے ہیں۔

$$\left(y''\right)^3 + xy = \sin x, \quad y'' + xy' + 4y^2 = 0, \quad yy'' - xy' = 0$$

تفاعل p اور q مساوات 2.2 کے عددی سر[7] کہلاتے ہیں۔

دو رتبی مساوات کے حل کی تعریف عین یک رتبی مساوات کے حل کی مانند ہے۔ تفاعل $y = h(x)$ کو کھلے وقفہ I پر اس صورت خطی (یا غیر خطی) دو رتبی تفرقی مساوات کا حل تصور کیا جاتا ہے جب اس پورے فاصلے پر

linear[2]
nonlinear[3]
standard form[4]
identically zero[5]
nonhomogenous[6]
coefficients[7]

$h(x)$ ، h' اور h'' پائے جاتے ہوں اور تفرقی مساوات میں y کی جگہ h ، y' کی جگہ h' اور y'' کی جگہ h'' پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں صورت اختیار کرتے ہوں۔چند مثالیں جلد پیش کرتے ہیں۔

متجانس خطی تفرقی مساوات: خطی میل

اس باب کے پہلے حصے میں متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا جبکہ بقایا باب میں غیر متجانس خطی مساوات پر غور کیا جائے گا۔

خطی تفرقی مساوات حل کرنے کے نہایت عمدہ تراکیب پائی جاتی ہیں۔متجانس مساوات کے حل میں **اصول خطیت**[8] یا **اصول خطی میل**[9] کلیدی کردار ادا کرتا ہے جس کے تحت متجانس مساوات کے مختلف حل کو آپس میں جمع کرنے یا انہیں مستقل سے ضرب دینے سے دیگر حل حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 2.1: خطی میل
تمام x پر درج ذیل متجانس خطی تفرقی مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں۔

$$y'' + 4y = 0 \tag{2.3}$$

ان حل کی درستگی ثابت کرنے کی خاطر انہیں دی گئی مساوات میں پر کرتے ہیں۔پہلے $y_1 = \cos 2x$ کو درست حل ثابت کرتے ہیں۔چونکہ $(\cos 2x)'' = -4\cos 2x$ کے برابر ہے لہٰذا

$$y'' + 4y = (\cos 2x)'' + 4(\cos 2x) = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0$$

ملتا ہے۔اسی طرح $y_2 = \sin 2x$ کو پر کرتے ہوئے

$$y'' + 4y = (\sin 2x)'' + 4(\sin 2x) = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$$

ملتا ہے۔ہم دیے گئے حل سے نئے حل حاصل کر سکتے ہیں۔یوں ہم $\cos 2x$ کو کسی مستقل مثلاً 2.73 سے ضرب دیتے ہوئے اور $\sin 2x$ کو -1.25 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_3 = 2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x$$

---
[8] linearity principle
[9] superposition principle

لیتے ہوئے توقع کرتے ہیں کہ یہ بھی دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔آئیں نئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
y'' + 4y &= (2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x)'' + 4(2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x)\\
&= 4(-2.73\cos 2x + 1.25\sin 2x) + 4(2.73\cos 2x - 1.25\sin 2x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

□

اس مثال میں ہم نے دیے گئے حل y_1 اور y_2 سے نیا حل

$$y_3 = c_1y_1 + c_2y_2, \quad (c_1 \text{ اور } c_2 \text{ اختیاری مستقل ہیں}) \tag{2.4}$$

حاصل کیا۔ اس کو y_1 اور y_2 کا خطی میل[10] کہتے ہیں۔اس مثال سے ہم مسئلہ خطی میل بیان کرتے ہیں جسے عموماً اصول خطیت یا اصول خطی میل کہا جاتا ہے۔

مسئلہ 2.1: بنیادی مسئلہ برائے متجانس خطی سادہ دو رتبی تفرقی مساوات
کھلے وقفہ I پر متجانس خطی دو رتبی تفرقی مساوات 2.2 کے حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔

ثبوت: تصور کریں کہ متجانس مساوات 2.2 کے دو حل y_1 اور y_2 پائے جاتے ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned}
y_1'' + py_1' + qy_1 &= 0\\
y_2'' + y_2' + qy_2 &= 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

ہو گا۔خطی میل سے نیا حل $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ حاصل کرتے ہیں۔اس کا یک رتبی تفرق اور دو رتبی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
y_3' &= c_1y_1' + c_2y_2'\\
y_3'' &= c_1y_1'' + c_2y_2''
\end{aligned}$$

y_3 ، y_3' اور y_3'' کو متجانس مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
y_3'' + py_3' + qy_3 &= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2)\\
&= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2)\\
&= 0
\end{aligned}$$

---

[10] linear combination

جہاں مساوات 2.5 سے آخری قدم پر دونوں قوسین صفر کے برابر پر کئے گئے ہیں۔یوں مساوات کا بایاں ہاتھ اور دایاں ہاتھ برابر ہیں لہٰذا ثابت ہوتا ہے کہ y_3 بھی مساوات 2.2 کا حل ہے۔

□

انتباہ: یہاں یاد رہے کہ مسئلہ 2.1 صرف متجانس مساوات کے لئے قابل استعمال ہے۔غیر متجانس مساوات کے دیگر حل اس مسئلے سے حاصل نہیں کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 2.2: تصور کریں کہ y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات 2.1 کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ اس متجانس مساوات کا حل نہیں ہے جہاں c_1 اور c_2 مستقل مقدار ہیں۔

حل: y_1 اور y_2 غیر متجانس مساوات کے حل ہیں لہٰذا انہیں متجانس مساوات میں پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف برابر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$
\begin{aligned}
y_1'' + py_1' + qy_1 &= r \\
y_2'' + py_2' + qy_2 &= r
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

y_3 کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
y_3'' + py' + qy &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\
&= (c_1 + c_2)r
\end{aligned}
$$

جہاں آخری قدم پر مساوات 2.6 کا استعمال کیا گیا۔اس سے $(c_1 + c_2)r$ حاصل ہوتا ہے جبکہ متجانس مساوات کا دایاں ہاتھ r کے برابر ہے لہٰذا y_3 متجانس مساوات پر پورا نہیں اترتا۔یوں y_3 متجانس مساوات کا حل نہیں ہے۔ □

مشق 2.1: غیر متجانس خطی مساوات

درج ذیل خطی غیر متجانس مساوات میں $y = 2 - \cos x$ اور $y = 2 - \sin x$ کو پر کرتے ہوئے ثابت

کریں کہ یہ مساوات کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ مساوات کا حل نہیں ہے۔اسی طرح ثابت کریں کہ $3(2-\cos x)$ یا $-7(2-\sin x)$ بھی مساوات کے حل نہیں ہیں۔

$$y'' + y = 2$$

مشق 2.2: درج ذیل مساوات میں $y = 1$ اور $y = x^3$ پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ دونوں تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ثابت کریں کہ ان کا مجموعہ تفرقی مساوات کا حل نہیں ہے نا ہی $y = -x^3$ حل ہے۔اس کا مطلب یہ ہوا کہ حل کو -1 سے بھی ضرب دے کر نیا حل نہیں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$yy'' - 2x^2y' = 0$$

ابتدائی قیمت مسائل۔اساس۔عمومی حل

باب 1 میں ابتدائی قیمت یک رتبی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔یک رتبی سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ مل کر ابتدائی قیمت تفرقی مساوات کہلاتی ہیں۔ابتدائی قیمت کو استعمال کرتے ہوئے یک رتبی سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل کا واحد اختیاری مستقل c حاصل کرتے ہوئے مخصوص یکتا حل حاصل کیا جاتا ہے۔اسی تصور کو دو رتبی سادہ تفرقی مساوات تک بڑھاتے ہیں۔

دو رتبی متجانس خطی ابتدائی قیمت مسئلے سے مراد متجانس مساوات 2.2 اور درج ذیل ابتدائی معلومات ہیں۔

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{2.7}$$

K_0 اور K_1 کھلے وقفہ پر نقطہ x_0 پر بالترتیب نقطہ عمومی حل اور حل کے تفرق (یعنی ڈھلوان) کی قیمتیں ہیں۔

مساوات 2.7 میں دیے گئے ابتدائی قیمتوں سے عمومی حل

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{2.8}$$

کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 کی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔یہاں y_1 اور y_2 مساوات 2.7 کے حل ہیں۔یوں مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے جو نقطہ (x_0, K_0) سے گزرتا ہے اور جس کی ڈھلوان اس نقطے پر K_1 ہوتی ہے۔

مثال 2.3: درج ذیل ابتدائی قیمت دو رتبی سادہ تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -3$$

حل:پہلا قدم: اس مساوات کے حل $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = \sin 2x$ ہیں (مثال 2.1 سے رجوع کریں) لہٰذا اس کا موزوں عمومی حل

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \tag{2.9}$$

ہو گا۔ (موزوں حل پر اس مثال کے فوراً بعد بات کرتے ہیں۔)

دوسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرتے ہیں۔عمومی حل کا تفرق $y' = -2\sin 2x + 2c_2 \cos x$ ہے۔ابتدائی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے

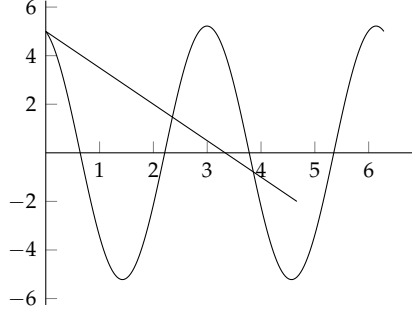
$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 5$$
$$y'(0) = -2\sin 0 + 2c_2 \cos 0 = 2c_2 = -3, \quad c_2 = -1.5$$

حاصل ہوتے ہیں لہٰذا مخصوص حل

$$y = 5\cos 2x - 1.5\sin 2x$$

ہو گا۔شکل 2.1 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔نقطہ $x = 0$ پر اس کی قیمت $y(0) = 5$ ہے جبکہ اسی نقطے پر خط کی ڈھلوان (مماس) $y'(0) = 0.5$ ہے۔مماس x محور کو $x = \frac{5}{3} = 3.33$ پر قطع کرتا ہے۔ □

درج بالا مثال میں y_1 اور y_2 ایسے تفاعل تھے جن سے حاصل عمومی حل ابتدائی معلومات پر پورا اترتا تھا۔آئیں اب دو آپس میں راست تناسب حل لیتے ہوئے عمومی حل لکھیں، مثلاً $y_1 = \cos 2x$ اور $y_2 = k\cos 2x$ لیتے ہوئے

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 k \cos 2x = (c_1 + c_2 k)\cos 2x = c_3 \cos 2x$$

شکل 2.1: مثال 2.3 کا مخصوص حل۔

عمومی حل لکھتے ہیں۔اس مساوات میں ایک عدد اختیاری مستقل c_3 پایا جاتا ہے جو دونوں ابتدائی قیمتوں پر پورا اترنے کے لئے ناکافی ہے۔یوں ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی حل لکھتے ہوئے ایسے موزوں حل کا خطی میل لیا جاتا ہے جو آپس میں راست تناسبی نہ ہوں۔

آپ نے یہ بھی دیکھ لیا ہو گا کہ عمومی حل میں استعمال ہونے والے موزوں حل y_1 اور y_2 انفرادی طور پر دونوں ابتدائی معلومات پر پورا نہیں اتر سکتے البتہ ان کا خطی میل دونوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہے۔یہی عمومی حل کی اہمیت کی وجہ ہے۔

تعریف: عمومی حل، اساس اور مخصوص حل کی تعریف
کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا عمومی حل مساوات 2.9 دیتا ہے جہاں I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کے (آپس میں) غیر تناسبی حل اور c_1 ، c_2 اختیاری مستقل ہیں۔فاصلہ I پر y_1 اور y_2 مساوات 2.2 کی اساس[11] حل کہلاتے ہیں۔

کھلے وقفہ I پر سادہ تفرقی مساوات 2.2 کا مخصوص حل مساوات 2.9 میں c_1 اور c_2 کی جگہ مخصوص قیمتیں پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

کھلے وقفہ کی تعریف حصہ 1.1 میں دی گئی ہے۔ y_1 اور y_2 اس صورت تناسبی تصور کئے جاتے ہیں جب پورے I پر

$$(a) \quad y_1 = ky_2 \quad \text{یا} \quad (b) \quad y_2 = ly_1 \tag{2.10}$$

basis[11]

ہو، جہاں k اور l اعداد ہیں جو صفر بھی ہو سکتے ہیں۔(یہاں توجہ رکھیں: a اس صورت b کے مترادف ہے جب $k \neq 0$ ہو۔)

آئیں اساس کی تعریف ذرہ مختلف اور عمومی اہمیت کے حامل طریقے سے بیان کریں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 ، وقفہ I پر، اس صورت خطی طور غیر تابع[12] کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$k_1y_1 + k_2y_2 = 0 \tag{2.11}$$

سے مراد

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0 \tag{2.12}$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.11 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 خطی طور تابع[13] کہلاتے ہیں۔اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.11 کو k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1}y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2}y_1$ لکھا جا سکتا ہے جو تناسبی رشتے کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\text{پورے کھلے وقفے } I \text{ پر} \qquad y_1 = ky_2, \quad y_2 = ly_1 \tag{2.13}$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابعیت کی صورت میں ہم مساوات 2.11 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہٰذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ (درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا (اور) l صفر بھی ہو سکتے ہیں۔)اس طرح اساس کی (درج ذیل) قدر مختلف تعریف حاصل ہوتی ہے۔

تعریف: اساس کی قدر مختلف تعریف
کھلے وقفے I پر مساوات 2.11 کا خطی طور غیر تابع حل مساوات 2.11 کے حل کا اساس ہے۔

اگر کسی کھلے وقفے I پر مساوات کے عددی سر p اور q استمراری تفاعل ہوں تب اس وقفے پر مساوات کا عمومی حل موجود ہے۔مساوات 2.7 میں دیے ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس عمومی حل سے مخصوص حل حاصل ہو گا۔ وقفہ I پر مساوات کے تمام حل یہی عمومی مساوات دے گا لہٰذا ایسی صورت میں مساوات کا

---

[12] linearly independent
[13] linearly dependent

کوئی نادر[14] حل موجود نہیں ہے (نادر حل کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ یہاں سوال 1.16 سے رجوع کریں)۔ ان تمام حقائق کی وضاحت جلد کی جائے گی۔

مثال 2.4: اساس، عمومی اور مخصوص حل
$\cos 2x$ اور $\sin 2x$ تمام x پر مثال 2.3 کے تفرقی مساوات $y'' + 4y = 0$ کے حل کی اساس ہیں۔ایسا اس لئے ہے کہ $\frac{\cos 2x}{\sin 2x} \neq c$ اور $0 \neq \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ ہیں جہاں c مستقل ہے۔اس مثال میں ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے عمومی حل سے مخصوص حل $y = 5\cos 2x - 1.5\sin 2x$ حاصل کیا گیا تھا۔ □

مثال 2.5: $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ سادہ تفرقی مساوات $y'' - 4y = 0$ کے حل ہیں۔یوں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$$

حل:چونکہ $y_1'' - 4y_1 = (e^{2x})'' - 4e^{2x} = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ اور $y_2'' - 4y_2 = (e^{-2x})'' - 4e^{-2x} = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0$ ہیں لہٰذا y_1 اور y_2 دیے گئے تفرقی مساوات کے حل ہیں۔چونکہ $\frac{e^{2x}}{e^{-2x}} \neq c$ ہے جہاں c مستقل کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا دونوں حل غیر متناسب ہیں اور یوں e^{2x} اور e^{-2x} پورے x پر حل کا اساس ہے۔اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 2, \quad y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}, \quad y'(0) = 2c_1 - 2c_2 = 1$$

دو عدد ہمزاد مساوات[15] $c_1 + c_2 = 2$ اور $2c_1 - 2c_2 = 1$ کو آپس میں حل کرتے ہوئے $c_1 = \frac{3}{4}$ اور $c_2 = \frac{5}{4}$ ملتے ہیں جس سے مخصوص حل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = \frac{3}{4} e^{2x} + \frac{5}{4} e^{-2x}$$

□

[14] singular solution
[15] simultaneous equations

ایک حل معلوم ہونے کی صورت میں اساس دریافت کرنا۔ تخفیف رتبہ

بعض اوقات ایک حل با آسانی حاصل ہو جاتا ہے۔دوسرا خطی طور غیر تابع حل یک رتبی سادہ تفرقی مساوات کے حل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کو تخفیف رتبہ[16] کی ترکیب[17] کہتے ہیں۔ اس ترکیب کی مثال دیکھنے کے بعد اس کی عمومی اطلاق پر غور کرتے ہیں۔

مثال 2.6: ایک حل جانتے ہوئے تخفیف درجہ۔اساس
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات کے اساس حل دریافت کریں۔

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

حل: دی گئی مساوات کے معائنے سے ایک حل $y_1 = x$ لکھا جا سکتا ہے چونکہ یوں $y_1'' = 0$ ہو گا لہٰذا تفرقی مساوات کا پہلا جزو صفر ہو جاتا ہے اور $y_1' = 1$ ہو گا جس سے مساوات کے دوسرے اور تیسرے اجزاء کا مجموعہ صفر ہو جاتا ہے۔ اس ترکیب میں دوسرے حل کو $y_2 = uy_1$ لکھ کر دیے گئے تفرقی مساوات میں

$$y_2 = uy_1 = ux, \quad y_2' = u'x + u, \quad y_2'' = u''x + 2u'$$

پر کرتے ہیں۔

$$x^2(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = 0$$

درج بالا کو ترتیب دیتے ہوئے xu اور $-xu$ آپس میں کٹ جاتے ہیں اور $x^3u'' + x^2u' = 0$ رہ جاتا ہے جس کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$xu'' + u' = 0$$

ملتا ہے۔اس میں $u' = v$ پر کرتے ہوئے یک رتبی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو علیحدگی متغیرات کے ترکیب سے حل کرتے ہیں۔

$$xv' + v = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad v = \frac{1}{x}$$

اس میں واپس $v = u'$ پر کرتے ہوئے تکمل سے u حاصل کرتے ہیں۔

$$v = u' = \frac{1}{x}, \quad u = \ln|x|$$

---

[16] reduction of order

[17] یہ ترکیب یوسف لوئی لیگرینج (1736-1813) نے دریافت کی۔

یوں $y_2 = x\ln|x|$ حاصل ہوتا ہے۔چونکہ y_1 اور y_2 کا حاصل تقسیم مستقل نہیں ہے لہٰذا یہ حل خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں اساس حل $y_1 = x$ ، $y_2 = x\ln|x|$ ہے۔دونوں بار تکمل لیتے ہوئے تکمل کا مستقل نہیں لکھا گیا چونکہ ہمیں اساس درکار ہے۔ عمومی مساوات لکھتے وقت مستقل لکھنا ضروری ہو گا۔ □

اس مثال میں ہم نے تخفیف رتبہ کی ترکیب متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.14}$$

پر استعمال کی۔درج بالا مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں پہلا جزو y'' ہے جس کا عددی سر اکائی کے برابر ہے۔نیچے اخذ کلیات مساوات کی معیاری صورت کے لئے حاصل کئے گئے ہیں۔تصور کریں کہ کھلے وقفہ I پر ہمیں مساوات 2.14 کا ایک عدد حل y_1 معلوم ہے اور ہم حل کا اساس جاننا چاہتے ہیں۔ اس کی خاطر ہمیں I پر خطی طور غیر تابع دوسرا حل y_2 درکار ہے۔ دوسرا حل حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$y = y_2 = uy_1, \quad y' = y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y'' = y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

کو مساوات 2.14 میں پر کرتے ہوئے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + p(u'y_1 + uy_1') + q(uy_1) = 0$$

u'' ، u' اور u کے عددی سر اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0$$

چونکہ y_1 مساوات 2.14 کا حل ہے لہٰذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے لہٰذا

$$u''y_1 + u'(2y_1' + py_1') = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $u' = v$ پر کرنے سے تخفیف شدہ[18] یک رتبی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$v' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right)v = 0$$

---

[18] reduced

علیحدگی متغیرات کے بعد تکمل لینے سے

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p\right)\mathrm{d}x, \quad \ln|v| = -2\ln|y_1| - \int p\,\mathrm{d}x$$

یعنی

$$v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,\mathrm{d}x} \tag{2.15}$$

ملتا ہے۔ چونکہ $v = u'$ کے برابر ہے لہٰذا دوسرا حل

$$y_2 = y_1 u = y_1 \int v\,\mathrm{d}x \tag{2.16}$$

ہو گا۔ حاصل تقسیم $\frac{y_2}{y_1} = u = \int p\,\mathrm{d}x$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا چونکہ $v > 0$ ہے لہٰذا y_1 اور y_2 اساس حل ہیں۔

متجانس خطی دو رتبی مساوات سے یک رتبی مساوات کا حصول ہم دیکھ چکے۔ آئیں تخفیف رتبہ کی دو مثال دیکھیں جو خطی مساوات اور غیر خطی مساوات پر لاگو کی جا سکتی ہیں۔

مثال 2.7: دو رتبی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x, y, y', y'')$ میں y صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے یک رتبی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ y صریحاً نہیں پایا جاتا لہٰذا اس کو $F(x, y', y'')$ لکھ سکتے ہیں جس میں $z = y'$ پر کرتے ہوئے یک رتبی مساوات $F(x, z, z')$ حاصل ہوتی ہے۔ یک رتبی مساوات کے حل کے تکمل سے y حاصل ہو گا۔
□

مثال 2.8: دو رتبی خطی یا غیر خطی مساوات $F(x, y, y', y'')$ میں x صریحاً نہیں پایا جاتا۔ اس سے یک رتبی مساوات حاصل کریں۔

حل: چونکہ x صریحاً نہیں پایا جاتا لہٰذا اس کو $F(y, y', y'')$ لکھ سکتے ہیں۔ ہم $z = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ لیتے ہیں۔ یوں زنجیری تفرق[19] سے

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{y''}{z}$$

[19] chain rule of differentiation

یعنی

$$y'' = z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ z اور z_y کو دیے مساوات میں پر کرتے ہوئے یک رتبی مساوات $F(y, z, z_y)$ ملتی ہے جس کا آزاد متغیرہ y ہے۔ □

سوالات

سوال 2.1 تا سوال 2.7 سے یک رتبی مساوات حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.1: $y'' - y' = 0$

جواب: $y = c_1e^x + c_2$

سوال 2.2: $xy'' + y' = 0$

جواب: $y = c_1 \ln|x| + c_2$

سوال 2.3: $xy'' - 2y' = 0$

جواب: $y = c_1x^3 + c_2$

سوال 2.4: $yy'' - (y')^2 = 0$

جواب: $y = c_2e^{c_1x}$

سوال 2.5: $y'' - (y')^3 \cos y = 0$

جواب: $\cos y + c_1y = x + c_2$

سوال 2.6: $y'' - (y')^2 \cos y = 1$

جواب: $y = \ln\sec(x + c_1) + c_2$

سوال 2.7: $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x^2$

جواب: $y = c_1x^2 + c_2x$

قابل تخفیف سادہ تفرقی مساوات کے استعمال سوالات 2.8 تا سوال 2.11 دیتے ہیں۔

سوال 2.8: منحنی
کارتیسی محدد کے مبدا سے گزرتی منحنی $y'' + y' = 0$ کی مبدا پر ڈھلوان اکائی کے برابر ہے۔ منحنی کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $y = 1 - e^{-x}$

سوال 2.9: لیزم
دو مقررہ نقاط سے لٹکی ہوئی زنجیری ڈوری سے بننے والا خم لیزم[20] کہلاتا ہے جسے مساوات $y'' = k\sqrt{1 + y'^2}$ کے حل سے حاصل کیا جاتا ہے۔ مستقل k کی قیمت ڈوری کی تناو اور کمیت پر منحصر ہے۔ڈوری نقطہ $(1,0)$ اور $(-1,0)$ سے لٹکی ہوئی ہے۔ $k = 1$ تصور کرتے ہوئے لیزم کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: زنجیر کے وسط یعنی $x = 0$ پر ڈھلوان صفر کے برابر ہے۔یوں $y = -1 + \cosh x$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 2.10: حرکت
ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کا اسراع اور رفتار میں فرق ایک مثبت مستقل k کے برابر رہتا ہے۔فاصلہ $y(t)$ ابتدائی رفتار u اور ابتدائی فاصلہ y_0 پر کس طرح منحصر ہے؟

جواب: $y = (k + u)e^t + (y_0 - u) - k(t + 1)$

سوال 2.11: حرکت
ایک چھوٹی جسامت کی چیز سیدھی لکیر پر یوں حرکت کرتی ہے کہ اس کے اسراع کی قیمت رفتار کی قیمت کے مربع کے برابر رہتی ہے۔فاصلے کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $t = c_1 - \ln(t + c_2)$

[20] catenary

سوال 2.12 تا سوال 2.15 میں ثابت کریں کہ دیے گئے تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں اور یوں یہ حل کی اساس ہیں۔ان ابتدائی قیمت سوالات کے حل لکھیں۔

سوال 2.12: $y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -2; \quad \cos 3x, \sin 3x$

جواب: $y = 5\cos 3x - \frac{2}{3}\sin 3x$

سوال 2.13: $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1; \quad e^x, xe^x$

جواب: $y = e^{x-1}(x-1)$

سوال 2.14: $x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y(1) = 3.2, \quad y'(1) = -1.5; \quad x, x\ln x$

جواب: $y = \frac{16}{5}x - \frac{47}{10}x\ln x$

سوال 2.15:

$$y'' + 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3; \quad e^{-x}\cos\sqrt{2}x,\ e^{-x}\sin\sqrt{2}x$$

جواب: $y = e^{-x}(2\cos\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x)$

2.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

اب ایسے دو رتبی متجانس تفرقی مساوات پر بات کرتے ہیں جن کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہیں۔

$$y'' + ay' + b = 0 \tag{2.17}$$

یہ مساوات میکانی اور برقی ارتعاش میں اہم کردار ادا کرتی ہے۔قوت نمائی تفاعل $y = e^{-kx}$ کے تفرق سے $y' = -ke^{-kx} = -ky$ یعنی $y' + ky = 0$ تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے۔یوں $y' + ky = 0$ کا حل $y = e^{-kx}$ ہے۔اس کو دیکھتے ہوئے ہم دیکھنا چاہتے ہیں کہ آیا مساوات 2.17 کا حل

$$y = e^{\lambda x} \tag{2.18}$$

ممکن ہے یا نہیں۔یہ جاننے کی خاطر $y = e^{\lambda x}$ اور اس کے تفرق

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

کو مساوات 2.17 میں پر کرتے ہیں۔

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

کسی بھی محدود قیمت کے λ اور x کے لئے $e^{\lambda x}$ صفر نہیں ہو گا لہٰذا اس مساوات کے دونوں اطراف صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب λ **امتیازی مساوات**[21]

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.19}$$

کا جذر ہو۔اس **دو درجی الجبرائی مساوات**[22] کو حل کرتے ہیں۔

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \tag{2.20}$$

یوں مساوات 2.17 کے حل

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{2.21}$$

ہوں گے۔انہیں مساوات 2.17 میں پر کرتے ہوئے آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ یہی تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

دو درجی الجبرائی مساوات 2.19 کے جذر کی تین ممکنہ قیمتیں ہیں جو $a^2 - 4b$ کی علامت $(\mp)$ پر منحصر ہیں۔

---
[21] characteristic equation
[22] quadratic equation

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر $a^2 - 4c > 0$

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر $a^2 - 4c = 0$

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر $a^2 - 4c < 0$

آئیں ان تین صورتوں پر باری باری غور کریں۔

پہلی صورت: دو منفرد حقیقی جذر

اس صورت میں، چونکہ y_1 اور y_2 کسی بھی وقفے I پر معین ہیں (اور حقیقی ہیں) اور ان کا حاصل تقسیم مستقل قیمت نہیں ہے لہٰذا کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{2.22}$$

ہو گا۔یوں تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

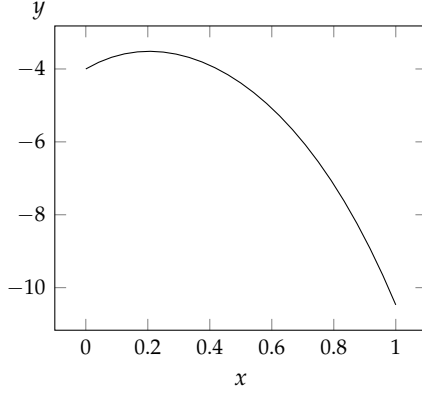
$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{2.23}$$

مثال 2.9: دو حقیقی منفرد جذر
مساوات $y'' - 4y = 0$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔اس کی امتیازی مساوات $\lambda^2 - 4 = 0$ ہے جس کے جذر $\lambda_1 = +2$ اور $\lambda_2 = -2$ دو منفرد قیمتیں ہیں۔یوں حل کا اساس $y_1 = e^{2x}$ اور $y_2 = e^{-2x}$ ہے جن سے تفرقی مساوات کا عمومی حل $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ لکھا جا سکتا ہے۔ □

مثال 2.10: ابتدائی قیمت مسئلہ۔دو حقیقی منفرد جذر
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + y' - 6 = 0, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 5$$

حل: امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

شکل 2.2: مثال 2.10 کا مخصوص حل۔

جس کے جذر

$$\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{1+24}}{2} = 2, \quad \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{1+24}}{2} = -3,$$

ہیں۔ان سے اساس حل $y_1 = e^{2x}$ ، $y_2 = e^{-3x}$ ملتا ہے جس سے عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے مستقل حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $y' = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$ ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = -4 \\ y'(0) &= 2c_1 - 3c_2 = 5 \end{aligned}$$

لکھا جائے گا۔ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{7}{5}$ اور $c_2 = -\frac{13}{5}$ ملتا ہے جن سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y = -\frac{7}{5} e^{2x} - \frac{13}{5} e^{-3x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.2 میں دکھایا گیا ہے جو ابتدائی قیمتوں پر پورا اترتا ہے۔ □

دوسری صورت: دوہرا حقیقی جذر

اگر $a^2 - 4c = 0$ ہو تب مساوات 2.20 سے $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$ ملتا ہے جو واحد حل

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$$

دیتا ہے۔ ہمیں اساس کے لئے دو حل درکار ہیں۔دوسرا حل تخفیف رتبہ کی ترکیب سے حاصل کیا جائے گا۔اس ترکیب پر بحث ہو چکی ہے۔یوں ہم دوسرا حل $y_2 = uy_1$ تصور کرتے ہیں۔مساوات 2.17 میں

$$y_2 = uy_1, \quad y_2' = u'y_1 + uy_1', \quad y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + b(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے عددی سر اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) + u(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0 \tag{2.24}$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہٰذا آخری قوسین صفر کے برابر ہے۔اب پہلی قوسین پر غور کرتے ہیں۔چونکہ $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ لہٰذا $y_1' = -\frac{a}{2}y_1$ ہو گا۔ان قیمتوں کو پہلی قوسین میں پر کرتے

$$2y_1' + ay_1 = 2(-\frac{a}{2}y_1) + ay_1 = 0$$

ہوئے یہ قوسین بھی صفر کے برابر حاصل ہوتی ہے۔یوں مساوات 2.24 سے $u''y_1 = 0$ یعنی $u'' = 0$ حاصل ہوتا ہے۔دو مرتبہ تکمل لیتے ہوئے $u = c_1x + c_2$ ملتا ہے۔دوسرا خطی طور غیر تابع حل $y_2 = uy_1$ حاصل کرتے ہوئے ہم $c_1 = 1$ اور $c_2 = 0$ چن سکتے ہیں جن سے $u = x$ اور $y_2 = xy_1$ حاصل ہوتے ہیں۔چونکہ y_1 اور حاصل کردہ $y_2 = xy_1$ کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہٰذا یہ دونوں خطی طور غیر تابع ہیں اور انہیں اساس لیا جا سکتا ہے۔یوں دوہرے جذر کی صورت میں کسی بھی وقفے پر مساوات 2.17 کے حل کا اساس

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}, \quad y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$$

اور عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-\frac{a}{2}x} \tag{2.25}$$

مثال 2.11: دوہرے جذر کی صورت میں عمومی حل
سادہ تفرقی مساوات $y''+10y'+25=0$ کی امتیازی مساوات $\lambda^2+10\lambda+25=0$ ہے جس کو $(\lambda+5)^2=0$ لکھ کر دوہرا جذر $\lambda_1=\lambda_2=-5$ حاصل ہوتا ہے۔یوں تفرقی مساوات کے حل کا اساس $y_1=e^{-5x}$ ، $y_2=xe^{-5x}$ اور اس کا عمومی حل $y=(c_1+c_2x)e^{-5x}$ ہے۔

□

مثال 2.12: دوہرے جذر کی صورت میں مخصوص حل کا حصول
دی گئی تفرقی مساوات کا مخصوص حل دریافت کریں۔

$$y''+0.2y'+0.01y=0,\quad y(0)=10,\quad y'(0)=-4$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2+0.2\lambda+0.01=0$ یعنی $(\lambda+0.1)^2=0$ سے $\lambda_1=\lambda_2=-0.1$ دوہرا جذر حاصل ہوتا ہے جس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y=(c_1+c_2x)e^{-0.1x}$$

عمومی حل کا جذر لکھتے ہیں جو مخصوص حل کے حصول میں درکار ہے۔

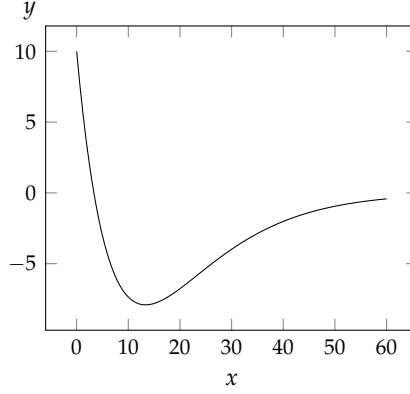
$$y'=c_2e^{-0.1x}-0.1(c_1+c_2x)e^{-0.1x}$$

عمومی حل اور عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے c_1 اور c_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(0)=c_1=10$$
$$y'(0)=c_2-0.1c_1=-4,\quad c_2=-3$$

یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y=(10-3x)e^{-0.1x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.3 میں دکھایا گیا ہے۔ □

شکل 2.3: مثال 2.12 کا مخصوص حل۔

تیسری صورت: مخلوط جوڑی دار جذر

امتیازی مساوات 2.19 میں a^2-4c کی قیمت منفی ہونے کی صورت میں مخلوط جوڑی دار جذر $\lambda=-\frac{a}{2}\mp i\omega$ ملتے ہیں جہاں $\omega^2=b-\frac{a^2}{4}$ کے برابر ہے۔ان سے مخلوط اساس لکھتے ہیں۔

$$y_{m1}=e^{(-\frac{a}{2}+i\omega)x},\quad y_{m2}=e^{(-\frac{a}{2}-i\omega)x} \tag{2.26}$$

اس مخلوط اساس سے حقیقی اساس حاصل کیا جائے گا۔ایسا کرنے کی خاطر ریاضی کے چند کلیات پر غور کرتے ہیں۔تفاعل e^z ، جہاں $z=x+iy$ مخلوط عدد ہے جبکہ x اور y حقیقی اعداد ہیں، کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}$$

e^{iy} کی مکلارن تسلسل[23] لکھ کر حقیقی اجزاء اور خیالی اجزاء کو علیحدہ علیحدہ قوسین میں اکٹھے کرتے ہیں۔یہاں $i^2=-1$ ، $i^3=-i$ ، $i^4=1$ لئے گئے ہیں۔

$$\begin{aligned}
e^{iy}&=1+\frac{iy}{1!}+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\frac{(iy)^4}{4!}+\frac{(iy)^5}{5!}\cdots\\
&=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-+\cdots\right)+i\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-+\cdots\right)\\
&=\cos y+i\sin y
\end{aligned}$$

[23] Maclaurin series

آخری قدم پر آپ تسلی کر لیں کہ پہلی قوسین $\cos y$ کی مکلارن تسلسل دیتی ہے جبکہ دوسری قوسین $\sin y$ کی مکلارن تسلسل دیتی ہے۔ آپ اس کتاب میں آگے پڑھیں گے کہ درج بالا تسلسل میں اجزاء کی ترتیب بدلی جا سکتی ہے۔یوں ہم یولر مساوات[24]

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{2.27}$$

حاصل کرنے میں کامیاب ہوئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y \tag{2.28}$$

مساوات 2.27 اور مساوات 2.28 کو جمع اور تفریق کرتے ہوئے درج ذیل کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \tag{2.29}$$

ہو گا۔یہ سب جاننے کے بعد آئیں مساوات 2.26 میں دیے مخلوط اساس پر دوبارہ غور کریں۔

$$\begin{aligned} y_{m1} &= e^{(-\frac{a}{2}+i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x}e^{i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x}(\cos \omega x + i \sin \omega x) \\ y_{m2} &= e^{(-\frac{a}{2}-i\omega)x} = e^{-\frac{a}{2}x}e^{-i\omega x} = e^{-\frac{a}{2}x}(\cos \omega x - i \sin \omega x) \end{aligned}$$

چونکہ اساس کے اجزاء کو مستقل (حقیقی یا خیالی یا مخلوط) سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے نیا حل حاصل کیا جا سکتا ہے لہٰذا ہم درج بالا دونوں اجزاء کو مستقل $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر جمع کرتے ہوئے ایک نیا اور حقیقی حل y_1 دریافت کرتے ہیں۔

$$y_1 = \frac{1}{2}y_{m1} + \frac{1}{2}y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x} \cos \omega x$$

اسی طرح مخلوط اساس کے پہلے جزو کو مستقل $\frac{1}{2i}$ اور دوسرے جزو کو مستقل $-\frac{1}{2i}$ سے ضرب دیتے ہوئے جمع کر کے نیا اور حقیقی حل y_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$y_2 = \frac{1}{2i}y_{m1} - \frac{1}{2i}y_{m2} = e^{-\frac{a}{2}x} \sin \omega x$$

درج بالا حاصل کردہ حقیقی تفاعل

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x} \cos \omega x \quad y_2 = e^{-\frac{a}{2}x} \sin \omega x \tag{2.30}$$

[24] Euler equation

کو از خود حل کا اساس تصور کیا جا سکتا ہے۔ یہاں غور کریں کہ ہم نے مخلوط جذر $\lambda = (-\frac{a}{2} \mp i\omega)x$ سے حقیقی اساس (مساوات 2.30) حاصل کیا ہے۔ اس حقیقی اساس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) \tag{2.31}$$

مثال 2.13: مخلوط جذر، ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y'' + 0.36y' + 9.0324y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^2 + 0.36\lambda + 9.0324 = 0$ کے مخلوط جذر $\lambda = -0.18 + \mp i3$ ہیں لہٰذا عمومی حل

$$y = e^{-0.18x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

ہو گا۔ مخصوص حل حاصل کرنے کی خاطر c_1 اور c_2 درکار ہیں جنہیں عمومی مساوات میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔ پہلے ابتدائی معلومات سے

$$y(0) = e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = 0, \quad c_1 = 0$$

ملتا ہے۔ عمومی حل کے تفرق

$$y' = -0.5e^{-0.5x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + e^{-0.5x}(-3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x)$$

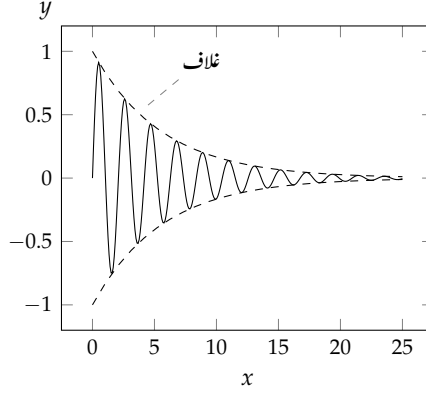
میں دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$y' = -0.5e^0(0 \cos 0 + c_2 \sin 0) + e^0(0 \sin 0 + 3c_2 \cos 0) = 3, \quad c_2 = 1$$

ملتا ہے۔ یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = e^{-0.18x} \sin 3x$$

شکل 2.4 میں مخصوص حل دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ، نقطہ دار لکیروں سے، سائن نما منحنی کے مثبت چوٹیوں کو چھوتا ہوا غلاف[25] $e^{-0.18x}$ اور منفی چوٹیوں کو چھوتا ہوا غلاف $-e^{-0.18x}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ مخصوص حل (x کو t لیتے ہوئے) قصری ارتعاش[26] کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر y فاصلے کو ظاہر کرتی ہو تب یہ میکانی قصری ارتعاش ہو گی اور اگر y برقی رو یا برقی دباو ہو تب یہ برقی قصری ارتعاش ہو گی۔

[25] envelope
[26] damped oscillations

شکل 2.4: مثال 2.13 کا مخصوص حل۔

جدول 2.1: تین صورتوں کی تفصیل

صورت	مساوات 2.19 کے جذر	مساوات 2.17 کی اساس	مساوات 2.17 کا عمومی حل
پہلی	منفرد حقیقی λ_1 ، λ_2	$e^{\lambda_1 x}$ ، $e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
دوسری	دوہرا جذر $\lambda = -\frac{a}{2}$	$e^{-\frac{a}{2}x}$ ، $xe^{-\frac{a}{2}x}$	$y = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{a}{2}x}$
تیسری	جوڑی دار مخلوط $\lambda = -\frac{a}{2} \mp i\omega$	$e^{-\frac{a}{2}x}\cos\omega x$ ، $e^{-\frac{a}{2}x}\sin\omega x$	$y = e^{-\frac{a}{2}x}(c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x)$

□

مثال 2.14: مخلوط جذر

سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad (\omega \text{ غیر صفر مستقل ہے})$$

کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x$$

□

جدول 2.1 میں درج بالا تین صورتوں کی تفصیل اکٹھی کی گئی ہے۔یہ تین اقسام میکانی ارتعاش یا برقی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہیں۔آپ تفرقی مساوات کی قوت یہاں سے جان سکتے ہیں۔آپس میں بالکل مختلف میدانوں (مثلاً میکانی اور برقی) کے مسائل ایک طرز کی تفرقی مساوات سے ظاہر کئے جا سکتے ہیں۔

سوالات

سوال 2.16 تا سوال 2.24 کے عمومی حل حاصل کریں۔انہیں واپس تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ان کی درستگی ثابت کریں۔

سوال 2.16: $y'' + 4y = 0$
جواب: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

سوال 2.17: $4y'' - 9y = 0$
جواب: $y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

سوال 2.18: $y'' + 5y' + 6y = 0$
جواب: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

سوال 2.19: $y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = 0$
جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{-\pi x}$

سوال 2.20: $y'' - 6y' + 9y = 0$
جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$

سوال 2.21: $4y'' - 12y' + 9y = 0$
جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{3}{2}x}$

سوال 2.22: $4y'' + 4y' - 3y = 0$
جواب: $y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

سوال 2.23: $y'' - 5y' + 6y = 0$
جواب: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$

سوال 2.24: $9y'' - 30y' + 25y = 0$
جواب: $y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{5}{3}x}$

سوال 2.25 تا سوال 2.29 میں اساس سے تفرقی مساوات $y'' + ay' + by = 0$ حاصل کریں۔

سوال 2.25: $e^{0.2x}, \quad e^{-0.5x}$
جواب: $y'' + 0.3y' - 0.1y = 0$

سوال 2.26: $e^{-0.66x}, \quad e^{-0.32x}$
جواب: $y'' + 0.98y' + 0.2112y = 0$

سوال 2.27: $\cos(4\pi x), \quad \sin(4\pi x)$
جواب: $y'' + 16\pi^2 y = 0$

سوال 2.28: $e^{(-2+i3)x}, \quad e^{(-2-i3)x}$
جواب: $y'' + 4y'' + 13y = 0$

سوال 2.29: $e^{-1.7x}\cos 6.2x, \quad e^{-1.7x}\sin 6.2x$
جواب: $y'' + 3.4y'' + 41.33y = 0$

سوال 2.30 تا سوال 2.37 ابتدائی قیمت سوالات ہیں۔ان کے مخصوص حل دریافت کریں۔

سوال 2.30: $y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2$
جواب: $y = 5\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x$

سوال 2.31: $y'' - 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$
جواب: $y = 0.7e^{5x} + 1.3e^{-5x}$

سوال 2.32: $y'' - y'' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
جواب: $y = \frac{1}{5}(e^{3x} - e^{-2x})$

سوال 2.33: $4y'' + 4y'' + 37y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$
جواب: $y = e^{-\frac{x}{2}}\sin 3x$

سوال 2.34: $9y'' + 12y'' + 49y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
جواب: $y = e^{-\frac{2}{3}x}(2\cos\sqrt{5}x + \frac{1}{3\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}x)$

سوال 2.35: $y'' - 6y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.1$
جواب: $y = \frac{1}{40}e^{3x}\sin 4x$

سوال 2.36: $y''+y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1$
جواب: $y=\cos x+\sin x$

سوال 2.37: $8y''-2y'-y=0, \quad y(0)=2.2, \quad y'(0)=3.4$
جواب: $y=\frac{79}{15}e^{\frac{x}{2}}-\frac{46}{15}e^{-\frac{x}{4}}$

عمومی حل کے حصول میں خطی طور غیر تابع تفاعل نہایت اہم ہیں۔ صرف ایسے تفاعل سے اساس حاصل ہوتا ہے۔ دیے وقفے پر سوال 2.38 تا سوال 2.42 میں دیے تفاعل میں خطی طور تابع اور غیر تابع کی نشاندہی کریں۔

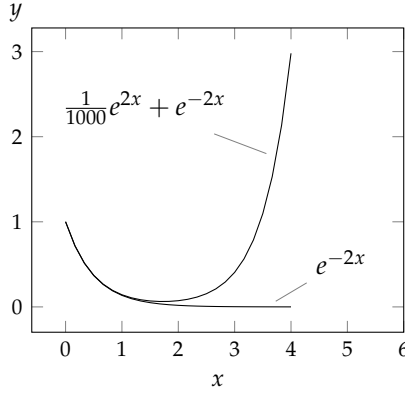
سوال 2.38: $\cos kx, \quad \sin kx, \quad -\infty<x<\infty$
جواب: چونکہ $\frac{\sin kx}{\cos kx}$ کی قیمت x تبدیل کرنے سے تبدیل ہوتی ہے لہٰذا یہ تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 2.39: $e^{kx}, \quad e^{-kx} \quad -\infty<x<\infty$
جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.40: $x, \quad x^2 \quad x>1$
جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.41: $x\ln x, \quad x^2\ln x \quad x>1$
جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 2.42: $x\ln x, \quad x\ln x^2 \ln x \quad x>1$
جواب: خطی طور تابع

سوال 2.43: غیر مستحکم صورت حال
ابتدائی قیمت مسئلہ $y''-4y=0$ میں ابتدائی قیمتیں $y(0)=1$ اور $y'(0)=-2$ لیتے ہوئے مخصوص حل حاصل کریں۔ مخصوص حل کو دوبارہ ابتدائی معلومات $y(0)=1.001$ اور $y'(0)=-1.998$ کے لئے حاصل کریں۔

شکل 2.5: سوال 2.43 کے منحنی حل۔

جوابات: $y=e^{-2x}$ اور $y=\frac{1}{1000}e^{2x}+e^{-2x}$؛ شکل 2.5 میں دونوں حل دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ابتدائی قیمتوں میں انتہائی کم فرق حل پر بہت زیادہ اثر ڈالتی ہیں۔یہ غیر مستحکم[27] صورت کو ظاہر کرتی ہے۔زلزلے میں غیر مستحکم عمارتیں انہیں وجوہات پر ڈھیر ہوتی ہیں۔فضا میں ہوا کا دباو، درجہ حرارت اور نمی کا تناسب بھی غیر مستحکم صورت پیدا کرتے ہوئے تباہ کن آندھیوں کا سبب بنتی ہیں۔

سوال 2.44: استمراری مساوات کے جذر $\lambda_1=-2$ اور $\lambda_2=3$ ہیں۔مساوات 2.17 حاصل کریں۔

جواب: $y''-y'-6y=0$

سوال 2.45: استمراری مساوات کے جذر λ_1 اور λ_2 ہیں۔مساوات 2.17 میں a اور b حاصل کریں۔یوں جذر جانتے ہوئے تفرقی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔

جواب: $a=-\lambda_1-\lambda_2$ ، $b=\lambda_1\lambda_2$

سوال 2.46: تفرقی مساوات $y''+ky'=0$ کو موجودہ طریقے سے حل کریں۔اسی کو تخفیف رتبہ کی ترکیب سے بھی حل کریں۔دونوں جواب یکساں کیوں ہونا ضروری ہیں۔

جواب: $y=c_1+c_2e^{-kx}$؛ یکتائیت۔

[27] instability

سوال 2.47: دوہرا جذر کو منفرد λ_1 اور λ_2 کی وہ صورت تصور کی جا سکتی ہے جب $\lambda_2 \to \lambda_1$ ہو۔ $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ لیتے اور ایک حل $= e^{\lambda_1 x}$ لیتے ہوئے اساس کا دوسرا رکن $xe^{\lambda_1 x}$ تلاش کریں۔

حل: دوسرا حل $e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1+\Delta\lambda)x} = e^{\lambda_1 x}e^{\Delta\lambda x}$ ہے۔ $e^{\Delta\lambda x}$ کا مکلارن تسلسل لیتے ہوئے $\Delta\lambda \to 0$ کی بنا صرف پہلے دو ارکان لیتے ہیں۔ یوں $e^{\Delta\lambda x} = 1 + \frac{\Delta\lambda x}{1!} + \frac{(\Delta\lambda x)^2}{2!} + \cdots \approx 1 + \Delta\lambda x$ ہو گا اور $e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} + \Delta\lambda x e^{\lambda_1 x}$ لکھا جا سکتا ہے۔ اب چونکہ $e^{\lambda_1 x}$ پہلے سے اساس کا حصہ ہے لہٰذا اساس کا دوسرا رکن $xe^{\lambda_1 x}$ ہو گا جہاں $\Delta\lambda$ کو مستقل تصور کرتے ہوئے رد کیا جاتا ہے

2.3 تفرقی عامل

آپ $y = \sin x$ یا $y = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ کے عمل سے بخوبی واقف ہیں۔ پہلی مثال میں کسی مقدار یا تفاعل x پر عامل $\sin$ عمل کرتے ہوئے ایک نیا تفاعل دیتا ہے۔ یوں $x = \frac{\pi}{2}$ پر $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ **عامل**[28] $\sin$ تفاعل x کے نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ سے مبدل تفاعل y کا نقطہ $y = 1$ دیتا ہے۔ اسی طرح **عامل** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ تفاعل x^3 پر عمل کرتے ہوئے تفاعل $3x^2$ دیتا ہے۔

یہ بتلاتا چلوں کہ ریاضیات اور طبیعیات میں عامل کا استعمال نہایت اہم کردار ادا کرتا ہے۔ یہاں بالخصوص **کوانٹم میکانیات**[29] کا ذکر کرنا لازم جہاں عامل کا استعمال کثرت سے کیا جاتا ہے۔

اس کتاب میں ہم صرف **تفرقی عامل**[30] D پر بحث کریں گے جہاں $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ہے۔ یوں یک رتبی تفرق

$$Dy = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{2.32}$$

لکھا جائے گا۔ اسی طرح دو رتبی تفرق $D^2y = D(Dy) = y''$ اور تین رتبی تفرق $D^3y = y'''$ لکھا جائے گا۔ اس طرح $D\sin x = \cos x$ اور $D^2\sin x = -\sin x$ ہو گا۔

خطی متجانس مساوات $y'' + ay' + by = 0$ جہاں a اور b مستقل مقدار ہیں میں **دو رتبی تفرقی عامل**

$$L = P(D) = D^2 + aD + bI$$

---

[28] operator
[29] quantum mechanics
[30] differential operator

متعارف کرتے ہیں جہاں I **مماثلی عامل**[31] ہے جس کی تعریف $Iy = y$ ہے۔اس طرح دیے گئے تفرقی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Ly = P(D)y = (D^2 + aD + bI)y = 0 \tag{2.33}$$

L خطی عامل اور P کثیر رکنی[32] ہے۔یوں اگر Lw اور Ly پائے جاتے ہوں (یعنی w اور y دو مرتبہ قابل تفرق ہوں) تب $L(cy + kw)$ بھی پایا جاتا ہے جہاں c اور k کوئی مستقل ہیں۔مزید درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L(cy + kw) = cLy + kLw \tag{2.34}$$

چونکہ $De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$ اور $D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned} Le^{\lambda x} &= (D^2 + aD + bI)e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x} = 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

ہو گا۔حصہ 2.2 میں بھی ہم نے یہی نتیجہ اخذ کیا تھا کہ $e^{\lambda x}$ صرف اور صرف اس صورت اس تفرقی مساوات کا حل ہو گا اگر λ امتیازی مساوات $P(\lambda) = 0$ کا جذر ہو۔

یہاں دلچسپ بات یہ ہے کہ $P(\lambda)$ عام الجبرائی کثیر رکنی ہے جس کی تجزی[33] کی جا سکتی ہے۔ λ کی جگہ D پر کرنے سے **کثیر رکنی عامل** حاصل ہوتا ہے۔

مثال 2.15: تفرقی مساوات کا حل بذریعہ تجزی
کثیر رکنی $P(D) = D^2 + 4D - 21I$ کی تجزی سے $P(D) = 0$ کو حل کریں۔

حل: $I^2 = 1$ لیتے ہوئے $D^2 + 4D - 21I = (D - 3)(D + 7)$ لکھا جا سکتا ہے۔اب $(D - 3)y = y' - 3y = 0$ کا حل $y_1 = e^{3x}$ اور $(D + 7)y = y' + 7y = 0$ کا حل $y_2 = e^{-7x}$ ہے۔یہ جوابات کسی بھی وقفے پر حل کی اساس ہیں۔آئیں تفرقی مساوات حاصل کریں۔

$$(D - 3)(D + 7)y = (D - 3)(y' + 7y) = y'' + 7y' - 3y' - 21y = y'' + 4y' - 21y = 0$$

□

---

[31] identity operator
[32] polynomial
[33] factorization

مساوات 2.33 میں کثیر رکنی کے عددی سر مستقل مقدار ہیں۔ایسی صورت میں تفرقی عامل کے استعمال سے تفرقی مساوات حل کرنا نہایت آسان ثابت ہوتا ہے۔عددی سر مستقل نہ ہونے کی صورت میں تفرقی عامل کا استعمال نہایت پیچیدہ ثابت ہوتا ہے جس پر اس کتاب میں تبصرہ نہیں کیا جائے گا۔

اب تین اہم کلیات

$$
\begin{aligned}
D^s(xf) &= xD^s f + sD^{s-1} f \\
D^s(x^2 f) &= x^2 D^s f + 2sxD^{s-1} f + s(s-1)D^{s-2} f \\
D^s[(x^2-1)f] &= (x^2-1)D^s f + 2sxD^{s-1} f + s(s-1)D^{s-2} f
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

حاصل کرتے ہیں جن کی ضرورت باب 5 میں پیش آئے گی۔

درج ذیل کو دیکھ کر

$$
\begin{aligned}
&D^1(xf) = xD^1 f + f \\
&D^2(xf) = D^1[D^1(xf)] = D^1[xD^1 f + f] = xD^2 f + D^1 f + D^1 f = xD^2 f + 2D^1 f \\
&D^3(xf) = D^1[D^2(xf)] = D^1[xD^2 f + 2D^1 f] = xD^3 f + D^2 f + 2D^2 f = xD^3 + 3D^2 f
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ درج ذیل درست ہو گا۔

$$
D^s(xf) = xD^s f + sD^{s-1} f \tag{2.38}
$$

اس کلیے کو الکراجی ماخوذ[34] کے ذریعہ ثابت کرتے ہیں۔ہم نے مساوات 2.37 میں دیکھا کہ $s = 1$ اور $s = 2$ کے لئے یہ کلیہ درست ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ کلیہ $s - 1$ کے لئے بھی درست ہے لہٰذا

$$
D^{s-1}(xf) = xD^{s-1} f + (s-1)D^{s-2} f \tag{2.39}
$$

لکھنا درست ہو گا۔اس پر D^1 کا اطلاق کرنے سے $D^s(xf)$ لکھتے ہوئے مساوات 2.36 میں دیے پہلے کلیے کو ثابت کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
D^s(xf) = D^1[D^{s-1}(xf)] &= D^1[xD^{s-1} f + (s-1)D^{s-2} f] \\
&= xD^s f + D^{s-1} f + (s-1)D^{s-1} f \\
&= xD^s f + sD^{s-1} f
\end{aligned}
$$

---

[34] induction

اب مساوات 2.36 میں دیا ہوا دوسرا کلیہ ثابت کرتے ہیں۔مساوات 2.36 کے پہلی کلیہ سے درج ذیل لکھتے ہیں

$$D^s(xg) = xD^s g + sD^{s-1} g$$

جس میں $g = xf$ پر کرتے ہوئے کلیے کو ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
D^s(x \cdot xf) &= xD^s[xf] + sD^{s-1}[xf] \\
&= x[xD^s f + sD^{s-1} f] + sD^{s-1}[xf] \\
&= x[xD^s f + sD^{s-1} f] + s[D^{s-1} f + (s-1)D^{s-2} f] \\
&= x^2 D^s f + 2sxD^{s-1} f + s(s-1)D^{s-2} f
\end{aligned}$$

آخر میں مساوات 2.36 کا تیسرا کلیہ ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
D^s[(x^2-1)f] &= D^s[x^2 f] - D^s[f] \\
&= x^2 D^s f + 2sxD^{s-1} f + s(s-1)D^{s-2} f - D^s f \\
&= (x^2-1)D^s f + 2sxD^{s-1} f + s(s-1)D^{s-2} f
\end{aligned}$$

سوالات

سوال 2.48 تا سوال 2.52 دیے تفاعل پر دیا تفرقی عامل لاگو کریں۔

سوال 2.48: $D + 2I; \quad x^3, \quad \cos 5x, \quad e^{-kx}, \quad \cosh x$
جوابات: $3x^2 + 2x^3$ ، $-5\sin 5x + 2\cos 5x$ ، $(2-k)e^{-kx}$ ، $\sinh x + 2\cosh x$

سوال 2.49: $D^2 - 3D; \quad 2x^4 - x, \quad 2\sinh 2x - \cos 5x$
جوابات: $24x^2 - 24x^3 + 3$ ، $-15\sin 5x - 12\cosh 2x + 25\cos 5x + \sinh 2x$

سوال 2.50: $(D + 2I)^2; \quad e^{3x}, \quad xe^{2x}$
جوابات: $25e^{3x}$ ، $(12x + 8)e^{2x}$

سوال 2.51: $(D - 3I)^2; \quad e^{2x}, \quad xe^{3x}$
جوابات: e^{2x} ، 0

سوال 2.52: $(D + I)(D - 2I); \quad e^{2x}, \quad xe^{2x}$
جوابات: $-2e^{2x}$ ، $2(1-x)e^{2x}$

سوال 2.53 تا سوال 2.57 کی تجزی حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 2.53: $(D^2-9I)y=0$
جواب: $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$

سوال 2.54: $(D^2+4D+4I)y=0$
جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے لہٰذا دوسرا حل xe^{2x} لیتے ہوئے $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$ ملتا ہے۔

سوال 2.55: $(D^2+4D+13I)y=0$
جواب: $y=e^{-2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$

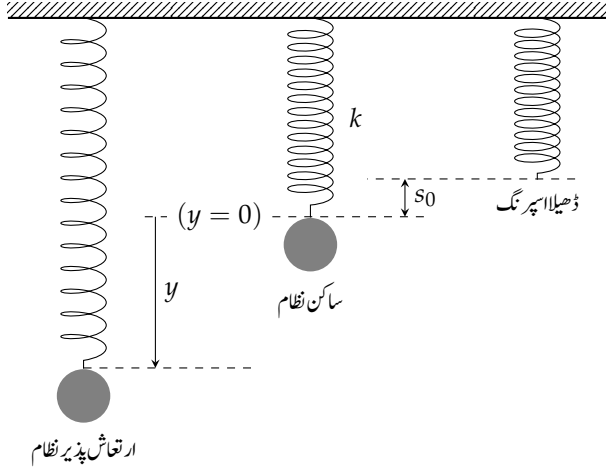
سوال 2.56: $(4D^2+4D-17I)y=0$
جواب: $y=e^{\frac{x}{2}}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

سوال 2.57: $(9D^2+12D+4I)y=0$
جواب: دوہرا جذر پایا جاتا ہے۔ $y=(c_1+c_2x)e^{-\frac{2}{3}x}$

2.4 اسپرنگ سے جڑی کمیت کی آزادانہ ارتعاش

مستقل قیمت کے عددی سر والے خطی سادہ تفرقی مساوات میکانی ارتعاش میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔اس حصے میں اسپرنگ سے جڑی کمیت کی حرکت پر غور کیا جائے گا۔اس نظام کو اسپرنگ اور کمیت کا نظام کہا جائے گا جسے شکل 2.6 میں دکھایا گیا ہے۔

ایک عام اسپرنگ جو لمبائی میں اضافہ اور کمی کو روکتا ہو کو شکل 2.6 میں مستحکم سلاخ سے لٹکایا ہوا دکھایا گیا ہے۔اس کی نچلی سر سے کمیت m کی لوہے کا گیند لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔اس ساکن نظام میں اسپرنگ کے نچلے سر کو $y=0$ تصور کیا جاتا ہے۔ہم نیچے رخ کو مثبت رخ تصور کرتے ہیں۔یوں نیچے رخ قوت کو مثبت اور اوپر رخ قوت کو منفی تصور کیا جائے گا۔اسی طرح مقام $y=0$ سے نیچے رخ فاصلہ y مثبت ہو گا۔مزید اسپرنگ کی کمیت کو گیند کی کمیت سے اتنا کم تصور کیا جاتا ہے کہ اسپرنگ کی کمیت کو درج ذیل تبصرے میں رد کیا جا سکتا ہے۔

k
s_0
ڈھیلا اسپرنگ
$(y=0)$
ساکن نظام
y
ارتعاش پذیر نظام

شکل 2.6: اسپرنگ اور کمیت کا غیر قصری نظام۔

ساکن حالت میں اسپرنگ پر نیچے رخ قوت mg عمل کرتا ہے جس سے اسپرنگ کی لمبائی میں s_0 اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ یہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع اور mg گیند کا وزن ہے۔اسپرنگ کی لمبائی میں اضافے کی وجہ سے، **قانون ہک**[35] کے تحت[36]، اسپرنگ اوپر رخ **بحالی قوت**[37] $F_0 = -ks_0$ پیدا کرتا ہے جہاں k **اسپرنگ مستقلہ**[38] ہے جس کو $\mathrm{kg\,s^{-2}}$ یعنی $\mathrm{N\,m^{-1}}$ میں ناپا جاتا ہے۔بحالی قوت اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتا ہے۔قوت mg مثبت رخ ہے لہٰذا اس کو مثبت لکھا گیا ہے جبکہ قوت $-ks_0$ منفی رخ ہے لہٰذا اس کو منفی لکھا گیا ہے۔ان قوتوں کا مجموعہ صفر $mg - ks_0 = 0$ کے برابر ہوتا ہے۔اگر ان قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر نہ ہوتا تو گیند ساکن نہ ہوتی بلکہ نیوٹن کے قانون $F = my''$ کے تحت حرکت کرتا۔طاقتور اسپرنگ کے مستقلہ k کی قیمت زیادہ ہوتی ہے۔ان دونوں قوتوں کی مقدار گیند کی حرکت سے تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا ان کا مجموعہ ہر وقت صفر کے برابر ہو گا۔یوں گیند کی حرکت میں ان دونوں قوتوں کا کوئی کردار نہیں ہے لہٰذا ان پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

فرض کریں کہ گیند کو نیچے رخ کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔شکل 2.6 میں گیند کو ساکن مقام سے لمحاتی طور y فاصلے پر

[35] Hooke's law
[36] رابرٹ ہک (1635-1703) انگلستان کے ماہر طبیعیات تھے۔
[37] restoring force
[38] spring constant

دکھایا گیا ہے۔اس لمحہ اسپرنگ اضافی بحالی قوت $F_1 = -ky$ پیدا کرتا ہے جس کے تحت گیند نیوٹن کے قانون

$$F_1 = ma = my'' \tag{2.40}$$

کے تحت حرکت کرے گی جہاں $y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$ ہے۔

بلا تقصیر حرکت کی سادہ تفرقی مساوات

ہر نظام تقصیری ہوتا ہے ورنہ حرکت کبھی بھی نہ رکتی۔ نہایت کم تقصیری نظام جس کے حرکت کا مطالعہ نسبتاً کم دورانیے کے لئے کیا جائے میں تقصیر کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔یوں اس کو بلا تقصیر تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل 2.6 کا نظام بلا تقصیر نظام کی عمدہ مثال ہے۔نیوٹن کے قانون کو بروئے کار لیتے ہوئے اس نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں۔

$$my'' + ky = 0 \tag{2.41}$$

یہ مستقل عددی سر والا خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات ہے جس کی امتیازی مساوات $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ ہے۔امتیازی مساوات کی جوڑی دار مخلوط جذر $\lambda = \mp i\sqrt{\frac{k}{m}} = \mp i\omega_0$ ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.42}$$

اس حرکت کو ہارمونی ارتعاش[39] کہتے ہیں جس کی تعدد[40] $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ہرٹز[41] ہے[42]۔تعدد f_0 کو نظام کی قدرتی تعدد[43] کہتے ہیں۔چونکہ ایک سیکنڈ میں f_0 چکر (پھیرے) پورے ہوتے ہیں لہٰذا ایک چکر $\frac{1}{f_0}$ عرصے میں پورا ہو گا۔اس دورانیے کو T سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کو دوری عرصہ[44] کہتے ہیں۔

$$T = \frac{1}{f_0} \tag{2.43}$$

$C = \sqrt{A^2 + B^2}$ اور $\delta = \tan^{-1}\frac{B}{A}$ لیتے ہوئے مساوات 2.42 کو

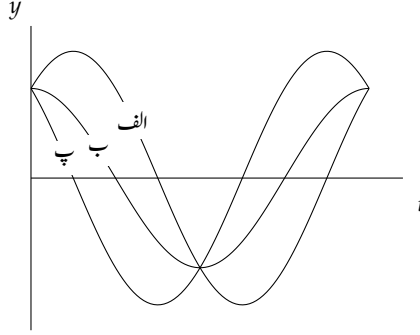
$$y = C\cos(\omega_0 t - \delta) \tag{2.44}$$

---

[39] harmonic oscillation
[40] frequency
[41] Hertz
[42] ہائنرک ہرٹز (1857-1894) جرمنی کے ماہر طبیعیات تھے جنہوں نے برقناطیسی امواج دریافت کئے۔
[43] natural frequency
[44] time period

y

الف
ب
پ

t

شکل 2.7: مساوات 2.42 کے عمومی اشکال۔

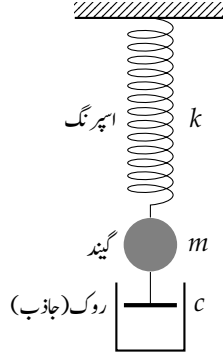
لکھا جا سکتا ہے جہاں C حیطہ[45] اور δ زاویائی فرق[46] کہلاتے ہیں۔

مساوات 2.42 (یعنی مساوات 2.44) کو شکل 2.7 میں دکھایا گیا ہے۔دکھائے گئے تینوں منحنی میں ابتدائی فاصلہ $y(0) = A$ ہے جبکہ ابتدائی رفتار $y'(0) = \omega_0 B$ خط الف میں مثبت، ب میں صفر اور پ میں منفی ہے۔

مثال 2.16: ایک اسپرنگ سے $2\,\mathrm{kg}$ کمیت لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی میں $61.25\,\mathrm{cm}$ کا اضافہ پیدا ہوتا ہے۔اس اسپرنگ سے کتنی کمیت لٹکانے سے ایک ہرٹز $1\,\mathrm{Hz}$ کا ارتعاش حاصل کیا جا سکتا ہے؟ ساکن حالت سے کمیت کو $10\,\mathrm{cm}$ نیچے کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے۔ کمیت کی حرکت دریافت کریں۔

حل: قانون ہک کے تحت $mg = 0.6125k$ سے $k = \frac{2\times9.8}{0.6125} = 32\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ حاصل ہوتا ہے۔ایک ہرٹز کی تعدد کے لئے $2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ سے $m = \frac{k}{(2\pi f_0)^2} = \frac{32}{(2\pi\times1)^2} = 0.811\,\mathrm{kg}$ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 2.42 میں $y(0) = 0.10\,\mathrm{m}$ اور $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $A = 0.1$ اور $B = 0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا حرکت کی مساوات $y = 0.1\cos 2\pi t$ ہو گی۔ y کی قیمت میٹر میں ہو گی۔ □

amplitude[45]
phase angle[46]

شکل 2.8: اسپرنگ اور کمیت کا قصری نظام۔

قصری نظام کا سادہ تفرقی مساوات

شکل 2.8 میں اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں قوت روک $F_3 = -cy'$ کا اضافہ کیا گیا ہے جو ہر لمحہ حرکت کے الٹ رخ عمل کرتی ہے۔یوں $my'' = -ky - cy'$ لکھا جائے گا جس سے قصری نظام کی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = 0 \tag{2.45}$$

حاصل ہوتی ہے۔گیند کے ساتھ چادر منسلک کی گئی ہے جو ایک طرف سے بند نلکی میں حرکت کرتے ہوئے توانائی کا ضیاع اور یوں قوت روک پیدا ہوتا ہے۔ اس حصے کو (توانائی کا) **جاذب**[47] بھی کہا جاتا ہے۔اس سے قوت روک پیدا ہوتا ہے۔تجربے سے دیکھا گیا ہے کہ کم رفتار پر ایسی قوت رفتار کے راست تناسب ہوتی ہے۔ c **قصری مستقل**[48] کہلاتا ہے۔قصری مستقل از خود مثبت مستقل ہے۔یوں نیچے رخ رفتار، یعنی مثبت رفتار، کی صورت میں قصری قوت منفی، یعنی اوپر رخ، ہو گی۔

قصری نظام کی مساوات خطی متجانس ہے جس سے امتیازی مساوات (m سے تقسیم شدہ) لکھتے ہیں۔

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

اس دو درجی الجبرائی مساوات کے جذر لکھتے ہیں۔

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta \quad \text{جہاں} \quad \alpha = \frac{c}{2m}, \quad \beta = \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{2.46}$$

---

[47] absorber
[48] damping constant

تقصیر کی مقدار پر $c^2 - 4mk$ کی قیمت منحصر ہے جو تین مختلف صورتیں پیدا کرتی ہے۔

پہلی صورت: زیادہ تقصیر[49] دو منفرد حقیقی جذر $c^2 > 4mk$

دوسری صورت: فاصلاتی تقصیر[50] دوہرا حقیقی جذر $c^2 = 4mk$

تیسری صورت: کم تقصیر[51] جوڑی دار مخلوط جذر $c^2 < 4mk$

اس قسم کی تین صورتیں ہم صفحہ 91 پر پہلے دیکھ چکے ہیں۔

تین صورتوں کے حل

پہلی صورت

زیادہ تقصیر

پہلی صورت میں قصری قوت اتنا زیادہ ہے کہ $c^2 > 4mk$ ہے جس سے دو منفرد حقیقی جذر λ_1 اور λ_2 حاصل ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات 2.45 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t} \tag{2.47}$$

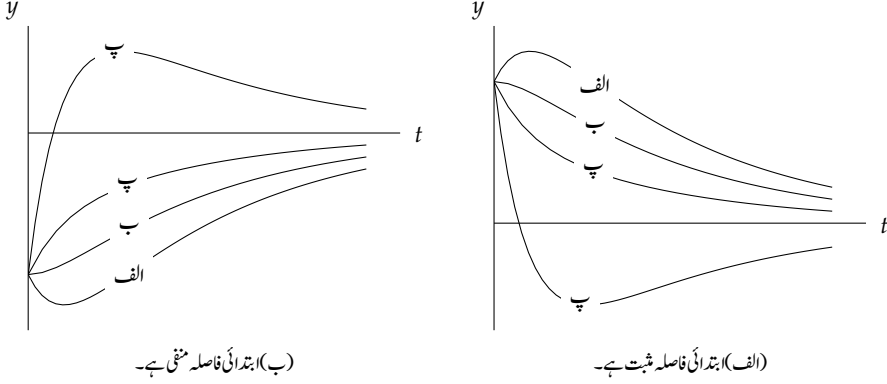
چونکہ $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ اور $\beta^2 = \alpha^2 - \frac{k}{m} < \alpha^2$ ہیں لہٰذا $\alpha - \beta$ اور $\alpha + \beta$ دونوں مثبت مقدار ہیں۔یوں مساوات 2.47 میں دونوں قوت نمائی تفاعل کی طاقت منفی ہو گی اور دونوں تفاعل کی قیمتیں نہایت تیزی سے گھٹے گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t \to \infty$ پر $y(\infty) \to 0$ ہو گا یعنی گیند ساکن ہو گی۔زیادہ قصری نظام میں قصری قوت اس تیزی سے نظام سے توانائی خارج کرتا ہے کہ نظام ارتعاش کرنے کے قابل نہیں رہتا۔

مساوات 2.47 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے شکل 2.9 میں دکھایا گیا ہے۔شکل-الف میں ابتدائی فاصلہ مثبت ہے جبکہ شکل-ب میں ابتدائی فاصلہ منفی ہے۔شکل-الف میں خط الف مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔شکل-ب میں خط الف منفی ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے جبکہ خط ب صفر ابتدائی رفتار اور دو عدد خط پ کو مثبت ابتدائی رفتار کے لئے کھینچا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ تقصیری نظام میں ارتعاش ممکن نہیں ہے اور نظام میں حرکت بہت جلد ختم ہو جاتی ہے۔

---

[49] over damping
[50] critical damping
[51] under damping

(الف) ابتدائی فاصلہ مثبت ہے۔

(ب) ابتدائی فاصلہ منفی ہے۔

شکل 2.9: تقصیری نظام میں حرکت بالمقابل وقت۔

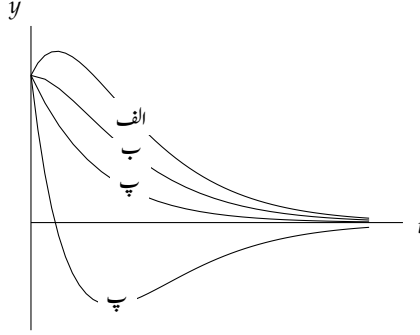
دوسری صورت

فاصل تقصیر

زیادہ تقصیر اور کم تقصیر کے درمیان فاصل تقصیر کی صورت پائی جاتی ہے جہاں $c^2 = 4mk$ ہوتا ہے۔یوں $\beta = 0$ اور امتیازی مساوات کا دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ پایا جاتا ہے۔یوں مساوات 2.45 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t} \tag{2.48}$$

یہ مساوات ساکن مقام $y = 0$ سے صرف ایک مرتبہ گزر سکتی ہے۔اس کو یوں سمجھا جا سکتا ہے کہ $e^{-\alpha t}$ کبھی صفر یا منفی نہیں ہو سکتا جبکہ $c_1 + c_2 t$ صرف ایک صفر دیتا ہے۔اگر c_1 اور c_2 دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب $c_1 + c_2 t$ کسی صورت صفر نہیں ہو سکتا اور y صفر سے کبھی نہیں گزرے گا۔

شکل 2.10 میں مساوات 2.48 کو مختلف ابتدائی قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ابتدائی فاصلہ مثبت لیا گیا ہے، خط الف میں ابتدائی رفتار مثبت، خط ب میں صفر اور دو عدد خط پ میں ابتدائی رفتار منفی لی گئی ہے۔یہ خطوط شکل 2.9-الف سے مشابہت رکھتے ہیں۔ایسا ہونا بھی چاہیے کیونکہ موجودہ صورت منفرد حقیقی جذر کی وہ مخصوص صورت ہے جہاں دونوں جذر عین برابر ہوں۔

شکل 2.10: فاصل تقصیری نظام میں حرکت بالمقابل وقت۔

تیسری صورت

کم تقصیر

یہ سب سے زیادہ دلچسپ صورت ہے جہاں تقصیری مستقل کی قیمت اتنی کم ہے کہ $c^2 - 4mk < 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 2.46 میں β خیالی عدد ہو گا۔

$$\beta = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = i\omega \qquad (\omega > 0) \tag{2.49}$$

امتیازی مساوات کے جذر جوڑی دار مخلوط اعداد ہوں گے

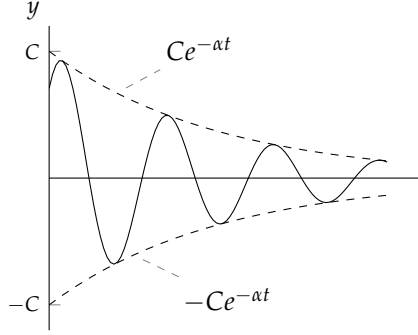
$$\lambda_1 = -\alpha + i\omega, \quad \lambda_2 = -\alpha - i\omega \tag{2.50}$$

اور مساوات 2.45 کا عمومی حل درج ذیل ہو گا

$$y = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta) \tag{2.51}$$

جہاں $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ اور $\delta = \tan^{-1}\frac{B}{A}$ ہیں۔

یہ **قصری ارتعاش**[52] کو ظاہر کرتی ہے جس کو شکل 2.11 میں دکھایا گیا ہے۔اس منحنی کی چوٹیاں، نقطہ دار لکیر سے دکھائی گئیں، تفاعل $y = Ce^{-\alpha t}$ اور $y = -Ce^{-\alpha t}$ کے منحنی کو چھوتی ہے۔ارتعاش کی تعدد $\frac{\omega}{2\pi}$ ہے جو قصری مستقل c کم کرنے سے بڑھتی ہے۔قصری مستقل کی قیمت صفر کرنے سے مساوات 2.44 کی ہارمونی ارتعاش حاصل ہوتی ہے جس کی قدرتی تعدد $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ہو گی۔

[52] damped oscillations

شکل 2.11: قصری ارتعاش۔

مثال 2.17: تقصیری حرکت کے تین صورتیں

ایک اسپرنگ جس کا مستقل $k = 32\,\mathrm{N\,kg^{-1}}$ ہے سے $m = 2\,\mathrm{kg}$ کا گیند لٹکایا گیا ہے۔اس نظام میں باری باری $c = 5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ اور $c = 16\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ ، $c = 20\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ تقصیری اثر شامل کیا جاتا ہے۔ابتدائی معلومات $y(0) = 4\,\mathrm{cm}$ اور $y'(0) = 0$ ہیں۔گیند کی حرکت دریافت کریں۔

حل: قوت روک نظام میں توانائی کے ضیاع کو ظاہر کرتی ہے جس سے مسلسل گھٹتی ارتعاش (پہلی صورت) یا غیر ارتعاشی حرکت (دوسری اور تیسری صورت) پیدا ہوتی ہے۔

پہلی صورت: $m = 2$ ، $k = 32$ اور $c = 20$ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ دیتی ہے

$$2y'' + 20y' + 32y = 0, \quad y(0) = 0.04\,\mathrm{m}, \quad y'(0) = 0$$

جس کی امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 20\lambda + 32 = 0$ ہے۔امتیازی مساوات $2(\lambda + 8)(\lambda + 2) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = -2$ اور $\lambda_2 = -8$ ہیں جن سے عمومی حل اور حل کا یک رتبی تفرق لکھتے ہیں۔

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-8t}, \quad y' = -2c_1 e^{-2t} - 8e^{-8t}$$

ان میں ابتدائی قیمتیں پر کرتے ہوئے $c_1 + c_2 = 0.04$ اور $-2c_1 - 8c_2 = 0$ ملتا ہے جنہیں حل کرنے سے $c_1 = \frac{4}{75}$ اور $c_2 = -\frac{1}{75}$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح حرکت کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$y = \frac{4}{75}e^{-2t} - \frac{1}{75}e^{-8t}$$

یہ مسلسل گھٹتی ارتعاش ہے جو آخر کار $t \to \infty$ پر $y \to 0$ ہو گی یعنی بہت دیر بعد گیند ساکن ہو گی۔

دوسری صورت: $c = 16$ کی صورت میں امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 16\lambda + 32 = 0$ یعنی $2(\lambda+4)^2 = 0$ ہو گا جس کا دوہرا جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ ہے۔یوں حرکت کی عمومی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-4t}$$

جس میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے $c_1 = 0.04$ اور $c_2 = 0.16$ حاصل ہوتے ہیں جن سے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y = (0.04 + 0.16t)e^{-4t}$$

تیسری صورت: تقصیری مستقل $c = 5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ لیتے ہوئے تفرقی مساوات $2y'' + 5y' + 32y = 0$ ہو گا جس سے امتیازی مساوات $2\lambda^2 + 5\lambda + 32 = 0$ حاصل ہوتی ہے۔امتیازی مساوات کے جوڑی دار مخلوط جذر $-1.25 \mp 3.8i$ ہیں جن سے عمومی مساوات اور عمومی مساوات کا تفرق لکھتے ہیں۔

$$y = e^{-1.25t}\left(A\cos 3.8t + B\sin 3.8t\right)$$
$$y' = -1.25e^{-1.25t}\left(A\cos 3.8t + B\sin 3.8t\right) + 3.8e^{-1.25t}\left(-A\sin 3.8t + B\cos 3.8t\right)$$

ابتدائی معلومات کو y کی مساوات میں پر کرنے سے $A = 0.04$ حاصل ہوتا ہے جبکہ انہیں y' کی مساوات میں پر کرنے سے $-1.25A + 3.8B = 0$ یعنی $B = -0.013$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

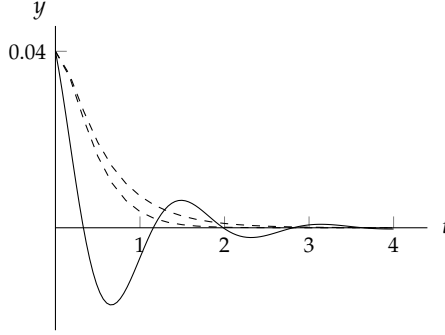
$$y = e^{-1.25t}\left(0.04\cos 3.8t - 0.013\sin 3.8t\right)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بلا تقصیری نظام کی قدرتی ارتعاش $\omega_0 = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4$ سے موجودہ تعدد $\omega = 3.8$ کم ہے۔شکل 2.12 میں اس مثال کی تینوں صورتوں کو دکھایا گیا ہے۔

□

اس حصے میں بیرونی قوتوں سے پاک اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی آزاد حرکت[53] پر غور کیا گیا۔ایسے نظام کو متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔ہم اسی باب میں بیرونی جبری قوتوں کی موجودگی میں پائی جانے والی جبری حرکت[54] پر بھی غور کریں گے۔ایسے نظام کو غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے۔

---

[53] free motion
[54] forced motion

شکل 2.12: مثال 2.17 کی آزاد حرکت کی تین صورتیں۔

سوالات

سوال 2.58 تا سوال 2.68 بلا تقصیر، ہارمونی ارتعاش کے سوالات ہیں۔

سوال 2.58: ابتدائی قیمت مسئلہ

بلا تقصیر ارتعاش کو مساوات 2.42 ظاہر کرتی ہے۔ابتدائی فاصلہ $y(0) = y_0$ اور ابتدائی رفتار $y'(0) = v_0$ کی صورت میں مخصوص حل لکھیں۔

جواب: $y = y_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$

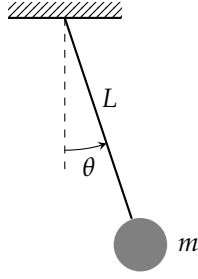
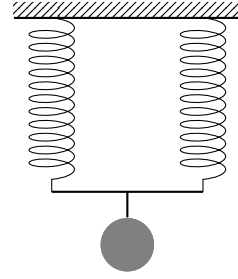
سوال 2.59: تعدد

ایک اسپرنگ کی لمبائی $75\,\mathrm{cm}$ ہے۔اس سے $0.25\,\mathrm{kg}$ کا گیند لٹکانے سے اسپرنگ کی لمبائی $85\,\mathrm{cm}$ ہو جاتی ہے۔اس نظام کی تعدد f_0 اور دوری عرصہ T کیا ہوں گے؟

جوابات: $f_0 = 1.58\,\mathrm{Hz}$ ، $T = 0.63\,\mathrm{s}$

سوال 2.60: تعدد

اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں کمیت چار گنا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔مستقلہ اسپرنگ کی قیمت چار گنا کرنے سے تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے۔

جوابات: کمیت چار گنا کرنے سے تعدد آدھی ہوتی ہے۔مستقلہ اسپرنگ چار گنا کرنے سے تعدد دگنی ہوتی ہے۔

(الف) سوال 2.62 کا نظام۔

(ب) سوال 2.64 کا نظام۔

شکل 2.13: متوازی اسپرنگ اور جھولا کے سوالات۔

سوال 2.61: ابتدائی رفتار
اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں ابتدائی رفتار صفر نہ ہونے کی صورت میں نظام کے تعدد اور رفتار پر کیا اثر ہو گا؟

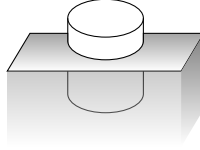
جواب: نظام کی تعدد پر کوئی اثر نہیں ہو گا البتہ اس سے رفتار بڑھے گی۔

سوال 2.62: متوازی اسپرنگ
چار کلو گرام کی گیند کو $k_1 = 16\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جاتا ہے۔نظام کی تعدد کیا ہو گی؟ اگر اسی گیند کو $k_2 = 32\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ کی اسپرنگ سے لٹکایا جائے تب نظام کی تعدد کیا ہو گی؟ دونوں کی لمبائی برابر ہے۔ ان دونوں اسپرنگ کو متوازی جوڑا جاتا ہے۔ایسی صورت میں نظام کی تعدد کیا ہو گی؟ شکل 2.13-الف کو دیکھیے۔

جوابات: $0.32\,\mathrm{Hz}$ ، $0.45\,\mathrm{Hz}$ ، $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} = 0.55\,\mathrm{Hz}$

سوال 2.63: سلسلہ وار اسپرنگ
گزشتہ سوال کے دونوں اسپرنگ کو سلسلہ وار جوڑا جاتا ہے۔نظام کی تفرقی مساوات لکھتے ہوئے تعدد حاصل کریں۔

جوابات: $my'' + \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}y = 0$ ، $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)m}} = 0.26\,\mathrm{Hz}$

سوال 2.64: جھولا
ایک ہلکے دھاگے سے m کمیت کی گیند لٹکائی شکل 2.13-ب میں دکھائی گئی ہے۔اس نظام کی تفرقی مساوات حاصل کریں۔نہایت چھوٹے زاویے کی صورت میں $\sin\theta \approx \theta$ لکھتے ہوئے مساوات کی سادہ صورت حاصل کریں جس کو حل کرتے ہوئے نظام کی تعدد حاصل کریں۔

شکل 2.14: آرشمیدسی اصول؛سوال 2.65

حل: گیند کا وزن mg ہے جو نیچے رخ قوت ہے۔اس کا مماس $mg\sin\theta$ ہے جو اسراع پیدا کرتا ہے۔ $L\theta'' = g\sin\theta$ ، $L\theta'' = g\theta$ ، $\theta = \cos\sqrt{\frac{g}{L}}t$ ، $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$

سوال 2.65: اصول آرشمیدس

اصول آرشمیدس[55] کے تحت جب کسی جسم کو مائع میں ڈبویا جائے تو اس پر قوت اچھال عمل کرتی ہے جس کی مقدار، جسم کے ڈبویے گئے حجم کے برابر، مائع کے وزن جتنی ہوتی ہے۔

ایک بیلن کو سیدھا پانی میں کھڑا کرنے سے اس کا کچھ حصہ پانی میں ڈوب جاتا ہے۔شکل 2.14 میں اس کو ساکن حالت میں دکھایا گیا ہے۔بیلن کا رداس $r = 20\,\text{cm}$ ہے۔اگر بیلن کو نیچے دھکیل کر چھوڑا جائے تو یہ دو سیکنڈ کے دوری عرصے سے اوپر نیچے ارتعاشی حرکت کرتا ہے۔بیلن کی کمیت M دریافت کریں۔ پانی کی کثافت $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$ ہے۔

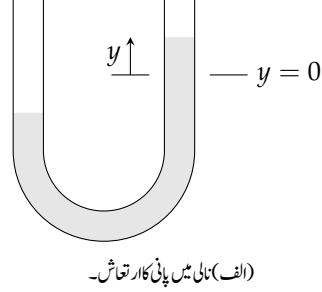
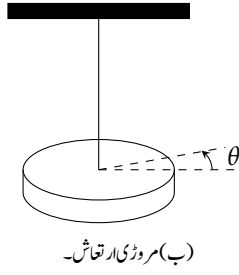
جوابات: $M = g\rho\pi r^2\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 9.8\times 1000\pi 0.2^2\left(\frac{2}{2\pi}\right)^2 = 124.8\,\text{kg}$

سوال 2.66: زنجیر کا میز سے پھسلنا

ایک پھسلنی میز پر زنجیر سیدھی پڑی ہوئی ہے۔ ان کے مابین قوت رگڑ قابل نظر انداز ہے۔اگر زنجیر کے ایک سرے کو میز سے لٹکایا جائے تو پوری زنجیر پھسلتے پھسلتے نیچے گر پڑتی ہے۔زنجیر کی کل لمبائی L اور کمیت m کلوگرام فی میٹر لیتے ہوئے اس مسئلے کی تفرقی مساوات لکھیں۔اگر $y(0) = 0$ اور $y'(0) = v_0$ ہو تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

جوابات: $mLy'' = mgy$ ، $y = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}\right)$

(ب) مروڑی ارتعاش۔

(الف) نالی میں پانی کا ارتعاش۔

شکل 2.15: سوال 2.67 اور سوال 2.68 کے اشکال۔

سوال 2.67: نالی میں پانی کی ارتعاش
شکل 2.15-الف میں $M = 9\,\text{kg}$ پانی زیر ثقلی قوت نالی میں ارتعاش کرتا ہے۔نالی کا اندرونی رداس $r = 1.5\,\text{cm}$ ہے۔ ارتعاش کا دوری عرصہ دریافت کریں۔

جوابات: $My'' = -2\pi r^2 \rho g y$ ، $T = 5.06\,\text{s}$

سوال 2.68: باریک غیر لچکدار تار سے I_0 جمودی معیار اثر[56] کی ٹکی لٹکائی جاتی ہے جو مروڑی ارتعاش کرتی ہے۔شکل 2.15-ب کو دیکھیے۔اس نظام کو $I_0\theta'' + k\theta = 0$ تفرقی مساوات ظاہر کرتی ہے جہاں θ کو متوازن حال سے ناپا جاتا ہے۔ k مروڑی مستقل (یا اسپرنگ مستقلہ) ہے جس کو $\text{N}\,\text{m}\,\text{rad}^{-1}$ نیوٹن میٹر فی ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ ابتدائی زاویہ $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ریڈیئن یعنی $45°$ اور ابتدائی رفتار صفر ہے۔اس مساوات کو $\frac{k}{I_0} = 9\,\text{s}^{-2}$ لیتے ہوئے حل کریں۔تعدد کا کلیہ دریافت کریں۔اس تجربے کو باریک تار کی مروڑی مستقل k حاصل کرنے کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ٹکی کا جمودی معیار اثر جانتے ہوئے اور قدرتی تعدد ناپ کر باریک تار کا مروڑی مستقل دریافت کیا جا سکتا ہے۔

جواب: $\theta = \frac{\pi}{4}\cos 3t$ ، $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I_0}}$

سوالات 2.69 تا سوال 2.69 میں قصری حرکت پائی جاتی ہے۔

---

[55] Archimedian principle
[56] moment of inertia

سوال 2.69: زیادہ تقصیر
زیادہ تقصیری صورت میں مساوات 2.47 حل دیتی ہے۔ابتدائی معلومات $y(0) = y_0$ اور $y'(0) = v_0$ ہونے کی صورت میں c_1 اور c_2 دریافت کریں۔

جوابات: $c_1 = \frac{1}{2}[(1 + \frac{\alpha}{\beta})y_0 + \frac{v_0}{\beta}]$ ، $c_2 = \frac{1}{2}[(1 - \frac{\alpha}{\beta})y_0 - \frac{v_0}{\beta}]$

سوال 2.70: زیادہ تقصیر
زیادہ تقصیری صورت میں ثابت کریں کہ y زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ $y = 0$ سے گزر سکتا ہے۔

سوال 2.71: دھچکا روک
گاڑیوں میں دھچکا روک[57] نسب ہوتے ہیں جو گاڑی کی حرکت کو یقینی طور پر غیر ارتعاشی رکھتے ہیں۔صفحہ 112 پر شکل 2.8 دھچکا روک کو ظاہر کرتی ہے۔سوار کو دھچکوں سے پاک سواری اسپرنگ مہیا کرتا ہے جبکہ جاذب ان دھچکوں کی توانائی کو جذب کرتا ہے۔گاڑی بمع سواری کی کمیت کو m ظاہر کرتی ہے۔

کمیت $1300\,\mathrm{kg}$ اور اسپرنگ مستقل $80\,000\,\mathrm{kg\,s^{-2}}$ ہونے کی صورت میں تقصیری مستقل کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر یقینی طور پر غیر ارتعاشی سواری حاصل ہو گی۔

جواب: $c \geq 20\,396\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$

سوال 2.72: تعدد
کم قصری صورت کی ارتعاش کا تعدد ω مساوات 2.49 دیتی ہے۔اس مساوات پر مسئلہ ثنائی کا اطلاق کرتے ہوئے پہلے دو اجزاء لیں اور مثال 2.17 کی کم قصری حرکت $(c = 5\,\mathrm{kg\,s^{-1}})$ کی تعدد ارتعاش حاصل کریں۔موجودہ جواب اور مثال میں حاصل کردہ جوابات میں کتنے فی صد فرق پایا جاتا ہے۔

جوابات: $\omega = \omega_0(1 - \frac{c^2}{8mk})$ ، $\omega = 3.8046$ لہٰذا دونوں جوابات میں $0.13\,\%$ فرق پایا جاتا ہے۔(مثال 2.17 میں تعدد کی بالکل ٹھیک قیمت $\omega = 3.79967$ ہے جسے مثال میں $\omega = 3.8$ لکھا گیا ہے۔)

سوال 2.73: بلا تقصیر نظام کے قدرتی تعدد اور کم تقصیری نظام ($5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$) کے تعدد ارتعاش میں فرق مثال 2.17 کے لئے حاصل کریں۔

---
[57] shock absorber

جواب: $4.88\,\%$ ؛ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگرچہ قوت روک تعدد ارتعاش پر فرق ڈالتا ہے لیکن یہ فرق بہت زیادہ نہیں ہوتا۔

سوال 2.74: کم قصری ارتعاش کی مثبت چوٹیاں یکساں وقفوں پر پائی جاتی ہیں۔اس وقفے کو دریافت کریں۔

جواب: مساوات 2.51 کی مثبت چوٹیاں $\omega t - \delta = 2n\pi$ پر پائی جاتی ہیں جہاں $n = 0, 1, 2 \cdots$ ہے۔یوں دو چوٹیوں کے درمیان وقفہ $\frac{2\pi}{\omega}$ یعنی $T = \frac{1}{f}$ ہو گا۔

سوال 2.75: لوگارتھمی گھٹاو
کم قصری نظام میں دو قریبی چوٹیوں کی قیمتوں کی شرح ایک مستقل قیمت ہوتی ہے جس کے لوگارتھم کو لوگارتھمی گھٹاو[58] کہتے ہیں۔لوگارتھمی گھٹاو Δ حاصل کریں۔

جواب: $\Delta = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$

سوال 2.76: تقصیری مستقل
ایک کم تقصیری نظام میں $m = 0.25\,\mathrm{kg}$ ہے اور ارتعاش کا دوری عرصہ $5\,\mathrm{s}$ ہے۔بیس چکروں میں چوٹی گھٹ کر $\frac{1}{4}$ گنّا رہ جاتی ہے۔نظام کے تقصیری مستقل کا تخمینہ لگائیں۔

جواب: $\alpha = 0.01386$

2.5 یولر کوشی مساوات

سادہ تفرقی مساوات[59]

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \tag{2.52}$$

یولر کوشی مساوات[60] کہلاتی ہے جہاں a اور b مستقل ہیں۔اس میں

$$y = x^m, \quad y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

---

[58] logarithmic decrement

[59] لیون آرڈ یولر (1707-1783) سوئزرلینڈ کا ریاضی دان اور ماہر حساب تھا۔آگستن لوئی کوشی (1789-1857) فرانسیسی ماہر حساب تھا جنہوں نے جدید تجزیے کی بنیاد ڈالی۔

[60] Euler-Cauchy equation

پر کرنے سے

$$x^2m(m-1)x^{m-2}+axmx^{m-1}+bx^m=0$$

ملتا ہے جس کو مشترک جزو x^m سے تقسیم کرتے ہوئے **ذیلی مساوات**[61] $m(m-1)+am+b=0$ یعنی

$$m^2+(a-1)m+b=0 \tag{2.53}$$

حاصل ہوتی ہے۔یوں $y=x^m$ مساوات 2.52 کا حل اس صورت ہو گا جب m مساوات 2.53 کا جذر ہو۔مساوات 2.53 کے جذر

$$m_1=\frac{1}{2}(1-a)+\sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2-b}, \quad m_2=\frac{1}{2}(1-a)-\sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2-b} \tag{2.54}$$

ہیں۔

پہلی صورت: منفرد حقیقی جذر کی صورت میں دو منفرد حل

$$y_1=x^{m_1}, \quad y_2=x^{m_2}$$

ملتے ہیں۔چونکہ ان حل کا حاصل تقسیم مستقل مقدار نہیں ہے لہٰذا یہ حل خطی طور غیر تابع ہیں۔اس طرح یہ حل کی اساس ہیں اور انہیں استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2} \tag{2.55}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔یہ حل تمام x کے لئے درست ہے۔

مثال 2.18: یولر کوشی مساوات $x^2y''+0.5xy'-1.5y=0$ سے $m^2-0.5m-1.5m=0$ ذیلی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $m_1=1.5$ اور $m_2=-1$ ہیں۔ان سے اساس $y_1=x^{\frac{3}{2}}$ ، $y_2=x^{-1}$ لکھی جا سکتی ہے۔اساس سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y=c_1x\sqrt{x}+\frac{c_2}{x}$$

□

[61] auxiliary equation

دوسری صورت: حقیقی دوہرا جذر $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}(1-a)$ اس صورت پایا جاتا ہے جب $b = \frac{1}{4}(1-a)^2$ ہو۔ایسی صورت میں مساوات 2.52 درج ذیل شکل اختیار کر لیتی ہے

$$x^2y'' + axy' + \frac{1}{4}(1-a)^2y = 0 \quad \implies \quad y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y = 0 \tag{2.56}$$

جس کا ایک حل $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے۔

دوسرا خطی طور غیر تابع حل تخفیف رتبہ کی ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس ترکیب پر حصہ 2.1 میں غور کیا گیا ہے۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے پہلا حل y_1 اور دوسرا حل $y_2 = uy_1$ لیتے ہیں۔یوں $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ اور $y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ ہوں گے جنہیں معیاری تفرقی مساوات 2.56 میں پر کرتے

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + \frac{1}{x}(u'y_1 + uy_1') + \frac{(1-a)^2}{4x^2}(uy_1) = 0$$

ہوئے u'' ، u' اور u کے جزو ضرب اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) + u[y_1'' + \frac{a}{x}y_1' + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y_1] = 0$$

چونکہ y_1 تفرقی مساوات کا حل ہے لہٰذا درج بالا مساوات میں دایاں قوسین صفر کے برابر ہو گا اور یوں

$$u''y_1 + u'(2y_1' + \frac{a}{x}y_1) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو y_1 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$u'' + u'\left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{a}{x}\right) = 0$$

اب چونکہ $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ ہے لہٰذا $y_1' = \frac{1-a}{2}x^{(\frac{1-a}{2}-1)} = \frac{1-a}{2}\frac{y_1}{x}$ اور $\frac{y_1'}{y_1} = \frac{1-a}{2x}$ ہو گا جس کو درج بالا میں پر کرتے ہیں۔

$$u'' + u'\left[2\left(\frac{1-a}{2x}\right) + \frac{a}{x}\right] = 0 \quad \implies \quad u'' + \frac{u'}{x} = 0$$

اس میں $u' = v$ لیتے ہوئے $v' + \frac{v}{x} = 0$ ملتا ہے جس کا حل $v = \frac{1}{x}$ ہے۔یوں $v = u' = \frac{1}{x}$ لکھتے ہوئے تکمل لے کر $u = \ln x$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح خطی طور غیر تابع دوسرا حل $y_2 = uy_1 = y_1 \ln x$ ہو گا۔ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^m \qquad m = \frac{1-a}{2} \tag{2.57}$$

مثال 2.19: دوہرا جذر
یولر کوشی مساوات $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$ کا ذیلی مساوات $m^2 - 8m + 16 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $m_1 = m_2 = 4$ ہے۔یوں تمام مثبت x کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^4$$

□

تیسری صورت: جوڑی دار مخلوط جذر کی صورت انجینئری نقطہ نظر سے زیادہ اہم نہیں ہے لہٰذا اس کی ایک عدد مثال ہی دیکھتے ہیں۔

مثال 2.20: یولر کوشی مساوات $x^2y'' + 0.8xy' + 9.01y = 0$ کی $m^2 - 0.2m + 9.01 = 0$ ذیلی مساوات ہے جس کے جوڑی دار مخلوط جذر $m_1 = 0.1 + 3i$ اور $m_2 = 0.1 - 3i$ ہیں جہاں $i = \sqrt{-1}$ ہے۔یہاں ایک چال چلاتے ہیں جس کے ذریعہ خیالی عدد i سے چھٹکارا حاصل ہو گا کرتے ہیں یعنی ہم $x = e^{\ln x}$ لکھتے ہیں۔یوں

$$x^{m_1} = x^{0.1+3i} = x^{0.1}\left(e^{\ln x}\right)^{3i} = x^{0.1}e^{(3\ln x)i}$$
$$x^{m_2} = x^{0.1-3i} = x^{0.1}\left(e^{\ln x}\right)^{-3i} = x^{0.1}e^{-(3\ln x)i}$$

لکھے جا سکتے ہیں۔اب صفحہ 97 پر یولر مساوات 2.27 استعمال کرتے ہیں۔

$$x^{m_1} = x^{0.1}e^{(3\ln x)i} = x^{0.2}[\cos(3\ln x) + i\sin(3\ln x)]$$
$$x^{m_2} = x^{0.1}e^{-(3\ln x)i} = x^{0.2}[\cos(3\ln x) - i\sin(3\ln x)]$$

اب دونوں کا مجموعہ لیتے ہوئے دو (2) سے تقسیم کرتے ہیں۔اسی طرح پہلی سے دوسری مساوات منفی کرتے ہوئے $-2i$ سے تقسیم کرتے ہیں۔یوں درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$x^{0.1}\cos(3\ln x), \quad x^{0.1}\sin(3\ln x)$$

ان کا حاصل تقسیم $\tan(3\ln x)$ ہے جو مستقل مقدار نہیں ہے لہٰذا درج بالا دونوں خطی طور غیر تابع ہیں۔اس طرح یہ حل کی اساس ہیں جن سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = x^{0.1}[c_1\cos(3\ln x) + c_2\sin(3\ln x)]$$

□

شکل 2.16 میں یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کی تینوں صورتوں کے حل دکھائے گئے ہیں۔

مثال 2.21: دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں ساکن برقی میدان؛ سرحدی قیمت مسئلہ
دو ہم محوری نلکیوں کے بیچ میں برقی دباو تفرقی مساوات $\rho\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho}=0$ دیتی ہے۔نلکی کے رداس $\rho_1 = 2\,\mathrm{cm}$ اور $\rho_2 = 5\,\mathrm{cm}$ ہیں جبکہ ان پر برقی دباو[62] $v_1 = 50\,\mathrm{V}$ اور $v_2 = 0\,\mathrm{V}$ ہے۔درمیانی خطے کی برقی دباو حاصل کریں۔

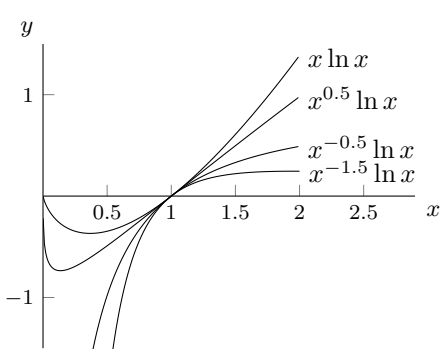
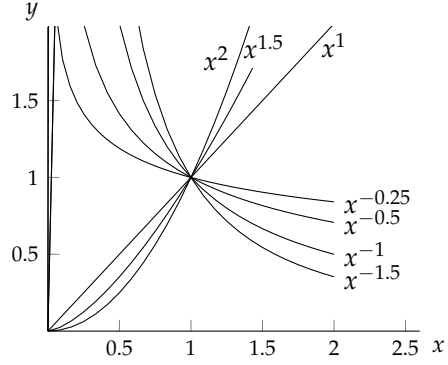
حل:یولر کوشی مساوات میں $a = 1$ اور $b = 0$ موجودہ تفرقی مساوات دیتی ہے۔دی گئی مساوات میں $v = \rho^m$ پر کرتے ہوئے ذیلی مساوات $m^2 = 0$ حاصل ہوتی ہے جس کا دوہرا جذر $m = 0$ ہے۔یوں عمومی حل $v = c_1 + c_2\ln x$ ہو گا۔دیے گئے سرحدی شرائط حل میں پر کرتے

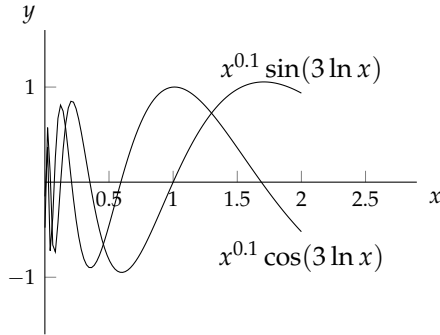
$$50 = c_1 + c_2\ln 0.02, \quad 0 = c_1 + c_2\ln 0.05$$

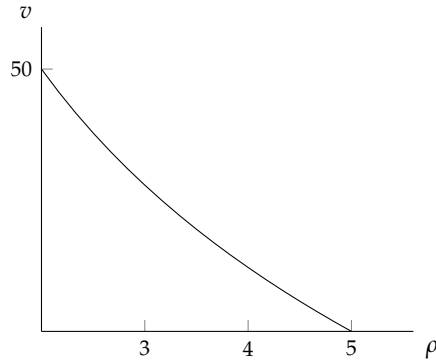
ہوئے $c_1 = -163.471$ اور $c_2 = -54.568$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا مخصوص حل $y = -163.471 - 54.568\ln\rho$ ہو گا جسے شکل 2.17 میں دکھایا گیا ہے۔ □

مثال 2.22: یولر کوشی مساوات 2.52 میں $x = e^t$ پر کرتے ہوئے اس کو مستقل عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات میں تبدیل کریں۔

---

[62] electric voltage

(الف) پہلی صورت: منفرد حقیقی جذر۔

(ب) دوسری صورت: دوہرا جذر۔

(پ) جوڑی دار مخلوط جذر۔

شکل 2.16: یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کے حل۔

شکل 2.17: مثال 2.21 کا حل۔

حل: ہم $y(x)$ کو $y[x(t)]$ یعنی $y(t)$ تصور کرتے ہیں۔ یوں زنجیری تفرق سے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان میں $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$ اور $\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{x^2}$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

انہیں مساوات 2.52 میں پر کرتے

$$x^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+ax\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+by=0$$

ہوئے مستقل عددی سر والا سادہ تفرقی مساوات حاصل ہوتا ہے جہاں $\dot{y}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\ddot{y}=\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$ ہیں۔

$$\ddot{y}+(a-1)\dot{y}+by=0 \tag{2.58}$$

□

سوالات

سوال 2.77 تا سوال 2.85 حل کریں۔

سوال 2.77: $x^2y''-2xy'+2y=0$
جواب: $y=c_1x+c_2x^2$

سوال 2.78: $x^2y''-6y=0$
جواب: $y=c_1x^3+c_2x^{-2}$

سوال 2.79: $x^2y''+6xy'+4y=0$
جواب: $y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^4}$

سوال 2.80: $x^2y''-5xy'+9y=0$
جواب: $y=(c_1+c_2\ln x)x^3$

سوال 2.81: $x^2y'' + 11xy' + 25y = 0$
جواب: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-5}$

سوال 2.82: $10x^2y'' + 11xy' - 3y = 0$
جواب: $y = c_1\sqrt{x} + c_2x^{-\frac{3}{5}}$

سوال 2.83: $x^2y'' + 0.44xy' + 0.0748y = 0$
جواب: $y = c_1x^{0.22} + c_2x^{0.34}$

سوال 2.84: $x^2y'' + 0.4xy' + 0.73y = 0$
جواب: $y = x^{0.3}[c_1 \cos(0.8 \ln x) + c_2 \sin(0.8 \ln x)]$

سوال 2.85: $x^2y'' + 2xy' + 4.25y = 0$
جواب: $y = x^{-0.5}[c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x)]$

سوال 2.86 تا سوال 2.91 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔انہیں حل کریں۔

سوال 2.86: $x^2y'' - 0.4xy' + 0.45y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$
جواب: $y = 7\sqrt{x} - 5x^{0.9}$

سوال 2.87: $x^2y'' + 1.08xy' - 0.01713y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 1$
جواب: $y = \frac{23}{18}x^{0.23} - \frac{41}{18}x^{-0.31}$

سوال 2.88: $35x^2y'' + 57xy' + 3y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -5$
جواب: $y = \frac{77}{4}x^{-\frac{3}{7}} - \frac{65}{4}x^{-\frac{1}{5}}$

سوال 2.89: $6x^2y'' + 19xy' + 6y = 0, \quad y(1) = -3, \quad y'(1) = 1$
جواب: $y = \frac{6}{5}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{21}{5}x^{-\frac{2}{3}}$

سوال 2.90: $25x^2y'' - 15xy' + 16y = 0, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 1$
جواب: $y = 2^{\frac{1}{5}}x^{\frac{4}{5}}(\ln x - \ln 2)$

سوال 2.91: $49x^2y'' + 77xy' + 4y = 0, \quad y(2) = 3, \quad y'(2) = 0$
جواب: $y = x^{-\frac{2}{7}}(2.93 + 1.04 \ln x)$

2.6 حل کی وجودیت اور یکتائی؛ ورونسکی

اس حصے میں متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات،

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.59}$$

جس کے عددی سر $p(x)$ اور $q(x)$ کوئی بھی استمراری تفاعل ہو سکتے ہیں، کے عمومی حل کی وجودیت[63] پر غور کیا جائے گا۔ ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.59 اور ابتدائی معلومات

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1 \tag{2.60}$$

کے ابتدائی قیمت مسئلہ کی مخصوص حل کی یکتائی[64] پر بحث کی جائے گی۔

مسئلہ 2.2 کہتا ہے کہ اس ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل پایا جاتا ہے جو یکتا ہو گا اور مساوات 2.59 کے عمومی حل

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad \text{اختیاری } c_1, c_2 \tag{2.61}$$

میں تمام حل شامل ہیں۔ یوں استمراری عددی سر والے متجانس سادہ تفرقی مساوات کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا۔ نادر حل اس حل کو کہتے ہیں جسے عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

ہمیں مستقل عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات یا یولر کوشی سادہ تفرقی مساوات کے حل کی وجودیت اور یکتائی جاننے کی ضرورت پیش نہیں آئی چونکہ ان کے حل کے دوران ہی ایسی تمام معلومات سامنے آ جاتی ہیں۔

مسئلہ 2.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی برائے ابتدائی قیمت تفرقی مساوات
اگر کھلے وقفہ I پر $p(x)$ اور $q(x)$ استمراری ہوں اور x_0 اس وقفے پر پایا جاتا ہو، تب مساوات 2.59 اور مساوات 2.60 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا یکتا مخصوص حل $y(x)$ وقفہ I پر موجود ہو گا۔

وجودیت حل کے ثبوت کے لئے وہی بنیادی شرائط درکار ہیں جو صفحہ 69 پر مسئلہ 1.3 کے لئے درکار تھے۔ اس کتاب میں ان پر غور نہیں کیا جائے گا۔ اگرچہ یکتائی کا ثبوت عموماً آسان ہوتا ہے لیکن موجودہ مسئلہ 2.2 کے یکتائی حل کا ثبوت اتنا آسان نہیں ہے لہٰذا اس کو کتاب کے آخر میں بطور ضمیمہ ا شامل کیا گیا ہے۔

---

[63] existence
[64] uniqueness

خطی طور غیر تابع حل

آپ کو حصہ 2.4 سے یاد ہو گا کہ کھلے وقفہ I پر عمومی حل اساس y_1 ، y_2 پر مشتمل ہوتا ہے جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفے I پر خطی طور غیر تابع حل ہیں۔ وقفہ I پر معین y_1 اور y_2 ، وقفہ I پر، اس صورت **خطی طور غیر تابع**[65] کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$k_1y_1 + k_2y_2 = 0 \tag{2.62}$$

سے مراد

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0 \tag{2.63}$$

ہو۔ k_1 اور k_2 میں سے کم از کم ایک کی قیمت صفر کے برابر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 2.62 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 اور y_2 **خطی طور تابع**[66] کہلاتے ہیں۔ اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 2.62 کو k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے $y_1 = -\frac{k_2}{k_1}y_2$ لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔ اسی طرح $k_2 \neq 0$ کی صورت میں $y_2 = -\frac{k_1}{k_2}y_1$ لکھا جا سکتا ہے جو تناسبی رشتے کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\text{(الف)} \quad y_1 = ky_2, \quad \text{(ب)} \quad y_2 = ly_1 \qquad \text{پورے } I \text{ پر} \tag{2.64}$$

اس کے برعکس خطی طور غیر تابعیت کی صورت میں ہم مساوات 2.62 کو k_1 (یا k_2) سے تقسیم نہیں کر سکتے لہٰذا تناسبی رشتہ حاصل نہیں کیا جا سکتا۔(درج بالا مساوات میں $k = -\frac{k_2}{k_1}$ اور $l = -\frac{k_1}{k_2}$ لکھے گئے ہیں۔ k یا(اور) l صفر بھی ہو سکتے ہیں۔) خطی طور غیر تابع اور خطی طور تابع حل کو درج ذیل طرز پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 2.3: خطی طور تابع اور غیر تابع حل

کھلے وقفہ I پر استمراری عددی سر $p(x)$ اور $q(x)$ والے سادہ تفرقی مساوات 2.62 کے I پر دو حل y_1 اور y_2 اس صورت I پر **خطی طور تابع** ہوں گے جب ان کے **ورونسکی**[67] [68]

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' \tag{2.65}$$

کی قیمت کسی x_0 پر صفر کے برابر ہو، جہاں x_0 کھلے وقفے I پر پایا جاتا ہے۔ مزید اگر نقطہ $x = x_0$ پر $W = 0$ ہو تب پورے I پر W **مکمل صفر**[69] $W \equiv 0$ ہو گا۔ یوں اگر I پر کوئی ایسا x پایا جاتا ہو جس پر W صفر کے برابر نہ ہو تب y_1 اور y_2 **خطی طور غیر تابع** ہوں گے۔

---

[65] linearly independent
[66] linearly dependent
[67] Wronskian
[68] یوسف ماریا ہون[1778-1853] جنہوں نے اپنا نام تبدیل کرتے ہوئے ورونسکی رکھا
[69] identically zero

ثبوت :

(الف) y_1 اور y_2 کو I پر خطی طور غیر تابع تصور کریں۔یوں مساوات 2.64-الف یا ب میں سے ایک درست ہو گی۔اگر مساوات 2.64-الف درست ہو تب

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = k y_2 y_2' - y_2 k y_2' = 0$$

ہو گا۔اسی طرح مساوات 2.64-ب کی صورت میں بھی $W = 0$ ملتا ہے۔

(ب) اس کے الٹ چلتے ہوئے ہم ثابت کرتے ہیں کہ کسی x_0 پر $W(y_1, y_2) = 0$ سے مراد y_1 اور y_2 کا I پر خطی طور تابع ہونا ہے۔درج ذیل مساوات پر غور کریں جہاں k_1 اور k_2 کو نا معلوم متغیرات تصور کریں۔

$$\begin{aligned} k_1 y_1(x_0) + k_2 y_2(x_0) &= 0 \\ k_1 y_1'(x_0) + k_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.66}$$

k_2 حذف کرنے کی نیت سے پہلی مساوات کو $y_2'(x_0)$ اور دوسری کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$k_1 y_1(x_0) y_2'(x_0) - k_1 y_1'(x_0) y_2(x_0) = k_1 W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0 \tag{2.67}$$

اسی طرح k_1 حذف کرنے کے لئے پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں مساوات کا مجموعہ

$$k_2 y_1(x_0) y_2'(x_0) - k_2 y_2(x_0) y_1'(x_0) = k_2 W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0 \tag{2.68}$$

لیتے ہیں۔اب اگر x_0 پر W صفر نہ ہوتا تب ہم مساوات 2.67 اور مساوات 2.68 کو W سے تقسیم کرتے ہوئے $k_1 = k_2 = 0$ حاصل کرتے البتہ x_0 پر $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$ ہے لہٰذا ہم ان مساوات کو W سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔یوں ہمزاد مساوات 2.66 کا حل k_1 اور k_2 پایا جاتا ہے جہاں k_1 اور k_2 دونوں غیر صفر ہو سکتے ہیں۔اب ان اعداد k_1 اور k_2 کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \tag{2.69}$$

لیتے ہیں۔چونکہ مساوات 2.59 متجانس خطی ہے لہٰذا مسئلہ 2.1 (مسئلہ خطی میل) کے تحت یہ تفاعل بھی مساوات 2.59 کا حل ہو گا۔مساوات 2.66 سے ظاہر ہے کہ یہ تفاعل ابتدائی معلومات $y(x_0) = 0$

اور $y'(x_0) = 0$ پر پورا اترتا ہے۔اب تصور کریں کہ مساوات 2.59 کا دوسرا حل جو انہیں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہو $y^*(x) = 0$ ہے۔اب چونکہ مساوات 2.59 میں $p(x)$ اور $q(x)$ استمراری ہیں لہٰذا مسئلہ 2.2 کے تحت اس کا مخصوص حل یکتا ہو گا۔یوں $y(x)$ اور $y^*(x)$ مختلف نہیں ہو سکتے ہیں لہٰذا $y^*(x) = y(x) = 0$ یعنی

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 \equiv 0 \qquad \text{پورے } I \text{ پر} \tag{2.70}$$

ہو گا۔چونکہ k_1 اور k_2 میں کم از کم ایک صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا مساوات 2.70 کہتا ہے کہ I پر y_1 اور y_2 خطی طور تابع ہیں۔

(پ) ہم مسئلے کا آخری نقطہ ثابت کرتے ہیں۔اگر کھلے وقفے I پر نقطہ x_0 پر $W(x_0) = 0$ ہو تب ثبوت (ب) کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور تابع ہیں لہٰذا ثبوت (الف) کے تحت $W \equiv 0$ ہو گا۔یوں خطی طور تابعیت کی صورت میں ایسا نہیں ہو سکتا ہے کہ $W(x_1) \neq 0$ ہو جہاں x_1 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہے۔اگر ایسا ممکن ہو تب اس سے مراد خطی طور غیر تابعیت ہو گی جیسا کہ دعویٰ کیا گیا ہے۔

□

حساب کی نقطہ نظر سے مساوات 2.65 سے درج ذیل زیادہ آسان مساوات ہے۔

$$W(y_1, y_2) = \begin{cases} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' y_1^2 & (y_1 \neq 0) \\ -\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' y_2^2 & (y_2 \neq 0) \end{cases} \tag{2.71}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ورونسکی کو قالب کی مقطع کے طرز پر لکھا جا سکتا ہے جس کو ورونسکی مقطع[70] یا حل y_1 اور y_2 کی ورونسکی کہتے ہیں۔

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \tag{2.72}$$

مثال 2.23: مسئلہ 2.3 کا اطلاق

تفرقی مساوات $y'' + \omega^2 y = 0$ کے حل $y_1 = \cos \omega x$ اور $y_2 = \sin \omega x$ ہیں۔ان کی ورونسکی

$$W(\cos \omega x, \sin \omega x) = \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & -\omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega \cos^2 \omega x + \omega \sin^2 \omega x = \omega$$

---

[70] Wronskian determinant

ہے۔مسئلہ 2.3 کے تحت یہ حل صرف اس صورت میں خطی طور غیر تابع ہوں گے جب $\omega \neq 0$ ہو۔یہی دونوں حل کے حاصل تقسیم $\tan \omega x = \frac{y_2}{y_1}$ سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے جہاں $\omega = 0$ سے $y_2 = 0$ ملتا ہے جو خطی طور تابع صورت ظاہر کرتی ہے۔ □

مثال 2.24: دوہرا جذر کی صورت میں مسئلہ 2.3 کا اطلاق
تفرقی مساوات $y'' - 6y' + 9y = 0$ کا (ثابت کریں کہ) عمومی حل $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$ ہے جس کا ورونسکی صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا e^{3x} اور xe^{3x} تمام x پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

$$W(e^{3x}, xe^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3xe^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} + 3xe^{6x} - 3xe^{6x} = e^{6x} \neq 0$$

□

مساوات 2.59 کے عمومی حل میں تمام حل کی شمولیت

اس حصے کو مساوات 2.59 کے عمومی حل کی وجودیت سے شروع کرتے ہیں۔

مسئلہ 2.4: وجودیت عمومی حل
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں مساوات 2.59 کا عمومی حل I پر موجود ہو گا۔

ثبوت: مسئلہ 2.2 کے تحت I پر مساوات 2.59 کا، ابتدائی معلومات

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_1(x)$ موجود ہے۔اسی طرح ابتدائی معلومات

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1$$

پر پورا اترتا ہوا حل $y_2(x)$ بھی موجود ہے۔نقطہ x_0 پر ان کا ورونسکی

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) = 1$$

ہے۔مسئلہ 2.3 کے تحت I پر y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا یہ مساوات 2.59 کے حل کی اساس ہیں۔اس طرح ثابت ہوا کہ I پر مساوات 2.59 کا عمومی حل $y = c_1y_1 + c_2y_2$ ہے جہاں c_1 اور c_2 اختیاری مستقل ہیں۔

□

آئیں اب ثابت کریں کہ عمومی حل اتنا عمومی ہے جتنا کوئی حل عمومی ہو سکتا ہے۔

مسئلہ 2.5: عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں
کھلا وقفہ I پر استمراری $p(x)$ اور $q(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.59 کے ہر حل $y = Y(x)$ کو

$$Y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{2.73}$$

لکھا جا سکتا ہے، جہاں y_1 اور y_2 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.59 کی کوئی بھی اساس اور C_1 ، C_2 مناسب مستقل ہیں۔

یوں مساوات 2.59 کا کوئی نادر حل[71] موجود نہیں ہے۔(نادر حل سے مراد ایسا حل ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔)

ثبوت: تصور کریں کہ I پر مساوات 2.59 کا $y = Y(x)$ کوئی حل ہے۔اب مسئلہ 2.4 کے تحت I پر تفرقی مساوات 2.59 کا عمومی حل

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{2.74}$$

موجود ہے۔ہم c_1 اور c_2 کی وہ قیمتیں دریافت کرنا چاہتے ہیں جن سے I پر $y(x) = Y(x)$ حاصل ہوتا ہو۔ہم I پر کوئی بھی x_0 چنتے ہوئے پہلے ثابت کرتے ہیں کہ c_1 اور c_2 کی ایسی قیمتیں دریافت کی جا سکتی ہیں کہ x_0 پر $y(x_0) = Y(x_0)$ اور $y'(x_0) = Y'(x_0)$ ہوں۔اس کو مساوات 2.74 کے استعمال سے

$$c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = Y(x_0) \tag{2.75}$$
$$c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = Y'(x_0) \tag{2.76}$$

---

[71] singular solution

لکھ سکتے ہیں۔ان ہمزاد مساوات سے c_1 اور c_2 معلوم کرتے ہیں۔مساوات 2.75 کو $y_2'(x_0)$ اور مساوات 2.76 کو $-y_2(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لینے سے c_1 حاصل کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے سے مساوات 2.77 ملتی ہے۔اسی طرح c_2 حاصل کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو $-y_1'(x_0)$ اور دوسری کو $y_1(x_0)$ سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ لیتے ہوئے مساوات 2.78 حاصل ہوتی ہے۔ان مساوات میں y_1 ، y_1' ، y_2 ، y_2' ، Y اور Y' کی قیمتیں نقطہ x_0 پر لی گئی ہیں۔

$$c_1y_1y_2' - c_1y_2y_1' = c_1W(y_1, y_2) = Yy_2' - y_2Y \tag{2.77}$$

$$c_2y_1y_2' - c_2y_2y_1' = c_2W(y_1, y_2) = y_1Y - Yy_1' \tag{2.78}$$

اب چونکہ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں لہٰذا ورونسکی کی قیمت صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا ان مساوات سے c_1 اور c_2 حاصل کیے جا سکتے ہیں

$$c_1 = \frac{Yy_2' - y_2Y}{W} = C_1, \quad c_2 = \frac{y_1Y - Yy_1'}{W} = C_2$$

جہاں ان منفرد قیمتوں کو C_1 اور C_2 لکھا گیا ہے۔انہیں مساوات 2.74 میں پر کرتے ہوئے مخصوص حل

$$y^*(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

حاصل ہوتا ہے۔اب چونکہ C_1 اور C_2 مساوات 2.75 اور مساوات 2.76 کے حل ہیں لہٰذا ہم ان مساوات سے دیکھتے ہیں کہ

$$y^*(x_0) = Y(x_0), \quad y^{*\prime}(x_0) = Y'(x_0)$$

مسئلہ 2.2 میں جس یکتائی کا ذکر کیا گیا ہے اس کے تحت y^* اور Y تمام I پر ہر جگہ برابر ہوں گے۔

□

سوالات

سوال 2.92: مساوات 2.71 سے مساوات 2.65 حاصل کریں۔

سوال 2.93 تا سوال 2.99 کی ورونسکی حاصل کریں۔حاصل تقسیم سے ثابت کریں کہ یہ خطی طور غیر تابع ہیں اور مسئلہ 2.3 سے بھی اس بات کی تصدیق کریں

سوال 2.93: $e^{2x}, e^{-1.2x}$
جوابات: $\frac{e^{2x}}{e^{-1.2x}} = e^{3.2x} \neq c$ ، $W = -3.2e^{0.8x} \neq 0$

سوال 2.94: $e^{2.4x}, e^{1.1x}$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = e^{1.3x} \neq c$ ، $W = -1.3e^{3.5x} \neq 0$

سوال 2.95: $x, \frac{1}{x}$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = x^2 \neq c$ ، $W = -2x^{-2} \neq 0$

سوال 2.96: x, x^3
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = x^{-2} \neq c$ ، $W = 2x^3 \neq 0$

سوال 2.97: $e^{-0.2x} \sin 3x, e^{-0.2x} \cos 3x$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = \tan 3x \neq c$ ، $W = 3e^{-0.4x} \neq 0$

سوال 2.98: $e^{-ax} \sinh kx, e^{-ax} \cosh kx$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = \tanh kx \neq c$ ، $W = -ke^{-2ax} \neq 0$

سوال 2.99: $x^a \sin(k \ln x), x^a \cos(k \ln x)$
جوابات: $\frac{y_1}{y_2} = \tan(k \ln x) \neq c$ ، $W = -kx^{2a-1} \neq 0$

سوال 2.100 تا سوال 2.106 میں تفرقی مساوات کے حل دیے گئے ہیں۔ تفرقی مساوات حاصل کریں۔ ورونسکی کی مدد سے ثابت کریں کہ دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں اور ابتدائی قیمت مسئلے کا مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.100: $\sin 3x,\ \cos 3x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$
جوابات: $y'' + 9y = 0$ ، $W = -3 \neq 0$ ، $y = 2\cos 3x - \sin 3x$

سوال 2.101: $x^3,\ x^{-4}, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 2$
جوابات: $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$ ، $W = -\frac{7}{x^2} \neq 0$ ، $y = -\frac{2x^3}{7} - \frac{5x^{-4}}{7}$

سوال 2.102: $e^{-1.2x} \sin 0.8x,\ e^{-1.2x} \cos 0.8x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 7$
جوابات: $y'' + 2.4y' + 2.08y = 0$ ، $W = -0.8e^{-2.4x} \neq 0$ ،
$y = e^{-\frac{6}{5}x}\left(\frac{65}{4} \sin \frac{4x}{5} + 5 \cos \frac{4x}{5}\right)$

سوال 2.103: $x^3,\ x^3\ln x,\quad y(1)=2,\quad y'(1)=8$
جوابات: $x^2y''-5xy'+9y=0$ ، $W=x^5\neq 0$ ، $y=2x^3(1+\ln x)$

سوال 2.104: $1,\ e^{3x},\quad y(0)=1.5,\quad y'(0)=-2.5$
جوابات: $y''-3y'=0$ ، $W=3e^{3x}\neq 0$ ، $y=\frac{8}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}$

سوال 2.105: $e^{-kx}\sin\pi x,\ e^{-kx}\cos\pi x,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-k-\pi$
جوابات: $y''+2ky'+(k^2+\pi^2)y=0$ ، $W=-\pi e^{-2kx}\neq 0$ ،
$y=e^{-kx}(\sin\pi x-\cos\pi x)$

سوال 2.106: $\sinh 1.8x,\ \cosh 1.8x,\quad y(0)=14.2,\quad y'(0)=16.38$
جوابات: $y''-3.24y=0$ ، $W=-1.8\neq 0$ ،
$y=9.1\sinh 1.8x+14.2\cosh 1.8x$

سوال 2.107: تفرقی مساوات $y''-y=0$ کا عمومی حل قوت نمائی تفاعل اور بذلولی[72] تفاعل کی صورت میں لکھیں۔دونوں صورتوں کے مستقل کا تعلق کیا ہے؟

جوابات: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ ، $y=c_a\sinh x+c_b\cosh x$ ، $c_a=c_1-c_2$ ، $c_b=c_1+c_2$

2.7 غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات

اس باب میں اب تک متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا گیا۔یہاں سے باب کے اختتام تک غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔درج ذیل غیر متجانس خطی تفرقی مساوات پر غور کرتے ہیں جہاں $r\not\equiv 0$ ہے۔

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \tag{2.79}$$

ہم دیکھیں گے کہ مساوات 2.79 کا عمومی حل، مطابقتی متجانس مساوات

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{2.80}$$

کے عمومی حل اور مساوات 2.80 کے ایک مخصوص حل کا مجموعہ ہو گا۔ مساوات 2.79 کے عمومی حل اور مخصوص حل کی تعریف درج ذیل ہے۔

[72] hyperbolic

تعریف : عمومی حل اور مخصوص حل
کھلے وقفہ I پر غیر متجانس مساوات 2.79 کا عمومی حل

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{2.81}$$

ہو گا جہاں I پر $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ متجانس مساوات 2.80 کا عمومی حل ہے اور I پر y_p مساوات 2.79 کا کوئی بھی حل ہے جس میں مستقل نہیں پایا جاتا۔

مساوات 2.79 کا مخصوص حل، مساوات 2.81 کے c_1 اور c_2 میں خصوصی قیمتیں پر کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔

اب ہمیں حل کی ان تعریف کا جواز پیش کرنا ہو گا اور ساتھ ہی ساتھ مساوات 2.79 کا حل y_p حاصل کرنا ہو گا۔پس ہم پہلے ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 2.81 کا عمومی حل مساوات 2.79 پر پورا اترتا ہے اور یہ کہ مساوات 2.79 اور مساوات 2.80 کے حل کا آپس میں سادہ تعلق ہے۔

مسئلہ 2.6: مساوات 2.79 اور مساوات 2.80 کے حل کا آپس میں تعلق

(الف) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.79 کے حل y اور اسی وقفے پر مساوات 2.80 کے حل $\tilde{y}$ کا مجموعہ I پر مساوات 2.79 کا حل ہو گا۔بالخصوص مساوات 2.81 کھلے وقفہ I پر مساوات 2.79 کا حل ہو گا۔

(ب) کھلے وقفہ I پر مساوات 2.79 کے دو حل کا فرق I پر مساوات 2.80 کا حل ہو گا۔

ثبوت :

(الف) مساوات 2.79 کے بائیں ہاتھ کو $L[y]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں I پر مساوات 2.79 کے کسی بھی حل y اور مساوات 2.80 کے کسی بھی حل $\tilde{y}$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L[y + \tilde{y}] = L[y] + L[\tilde{y}] = r + 0 = r$$

(ب) کھلے وقفے I پر مساوات 2.79 کے کسی بھی حل y اور y^* کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L[y-y^*] = L[y] - L[y^*] = r - r = 0$$

□

ہم جانتے ہیں کہ متجانس مساوات 2.80 کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہوتے ہیں۔اب ہم ثابت کرتے ہیں کہ غیر متجانس مساوات 2.79 کے عمومی حل میں اس کے تمام حل شامل ہیں۔

مسئلہ 2.7: غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں
کھلے وقفہ I پر استمراری $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 2.79 کا ہر حل، مساوات 2.81 میں دیے گئے عمومی حل کے اختیاری مستقل c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ثبوت : تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر y^* ، مساوات 2.79 کا کوئی حل ہے جبکہ x_0 اس وقفے پر کوئی x ہے۔اسی طرح مساوات 2.81 کھلے وقفے پر مساوات 2.79 کا کوئی عمومی حل ہے۔یہ حل موجود ہے۔یقیناً $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ مسئلہ 2.4 کے تحت موجود ہے جبکہ y_p کی وجودیت حصہ 2.10 میں دکھائی جائے گی۔اب مسئلہ 2.6-ب کے تحت $Y = y^* - y_p$ کھلے وقفے پر مساوات 2.80 کا حل ہے۔نقطہ x_0 پر

$$Y(x_0) = y^*(x_0) - y_p(x_0), \quad Y'(x_0) = y^{*'}(x_0) - y'_p(x_0)$$

لکھا جا سکتا ہے۔کھلے وقفے I پر، مسئلہ 2.2 کے مطابق، کسی بھی ابتدائی معلومات کی طرح، ان معلومات پر پورا اترتا ہوا، مساوات 2.80 کا مخصوص حل موجود ہے جسے y_h میں c_1 اور c_2 میں موزوں قیمتیں پر کرنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے $y^* = Y + y_p$ سے مسئلہ کا دعویٰ ثابت ہوتا ہے۔

□

نامعلوم عددی سر کی ترکیب

آپ نے دیکھا کہ مساوات 2.79 یا اس پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا حل حاصل کرنے کی خاطر مساوات 2.80 کو حل کرنا ہو گا اور مساوات 2.79 کا کوئی بھی حل y_p تلاش کرنا ہو گا۔اس طرح عمومی حل 2.81 حاصل ہو گا۔

مساوات 2.79 کا حل y_p حاصل کرنے کی ایک ترکیب کو **نامعلوم عددی سر کی ترکیب**[73] کہتے ہیں۔یہ ترکیب نہایت آسان ہے۔اس ترکیب سے ارتعاشی نظام عمدگی سے حل ہوتے ہیں لہٰذا اسے انجینئری شعبے میں مقبولیت حاصل ہے۔اس باب کے آخری حصے میں عمومی ترکیب پر غور کیا جائے گا جو نسبتاً مشکل ترکیب ہے۔

نامعلوم عددی سر کی ترکیب ان خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + ay' + by = r(x) \tag{2.82}$$

کے حل کے لئے موزوں ہے جس کے عددی سر a اور b مستقل مقدار ہوں اور $r(x)$ قوت نمائی تفاعل ہو یا x کی طاقت ہو یا سائن نما تفاعل ہو اور یا ان تفاعل کا مجموعہ یا حاصل ضرب ہو۔ایسے تفاعل کی تفرقات بھی یہی تفاعل ہوتی ہیں۔مثلاً x^3 کے تفرقات $3x^2$ ، $6x$ اور 6 ہیں جو از خود x کی طاقت ہیں۔اسی طرح $\sin \omega x$ کا یک رتبی تفرق $\omega \cos \omega x$ جبکہ دو رتبی تفرق $-\omega^2 \sin \omega x$ ہے۔یہ دونوں تفرقات از خود سائن نما تفاعل ہیں۔

اس ترکیب میں y_p کو $r(x)$ اور اس کے تمام تفرقات کے مجموعے کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔مجموعہ لکھتے ہوئے ہر رکن کو نامعلوم مستقل سے ضرب دی جاتی ہے۔ y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.82 میں پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کے یکساں اجزاء کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے نامعلوم مستقل دریافت کئے جاتے ہیں۔تفاعل $r(x)$ سے y_p جدول 2.2 کے تحت لکھی جاتی ہے۔تفاعل $r(x)$ سے y_p درج ذیل قواعد کے تحت لکھی جاتی ہے۔

بنیادی قاعدہ: اگر مساوات 2.82 کا $r(x)$ جدول 2.2 کے دائیں قطار میں دیا گیا ہو تب اس تفاعل کے صف سے $y_p(x)$ حاصل کریں۔حاصل y_p اور اس کے تفرقات کو مساوات 2.2 میں پر کرتے ہوئے نامعلوم عددی سر کی قیمت دریافت کریں۔

---

[73] method of undetermined coefficients

جدول 2.2: نامعلوم عددی سر کی ترکیب

$y_p(x)$ کے ارکان	$r(x)$ کے ارکان
$Ce^{\gamma x}$	$ke^{\gamma x}$
$k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0$	$kx^n \quad (n = 0, 1, \cdots)$
$K\cos\omega x + M\sin\omega x$	$k\cos\omega x$
$K\cos\omega x + M\sin\omega x$	$k\sin\omega x$
$e^{\alpha x}(K\cos\omega x + M\sin\omega x)$	$ke^{\alpha x}\cos\omega x$
$e^{\alpha x}(K\cos\omega x + M\sin\omega x)$	$ke^{\alpha x}\sin\omega x$

ترمیمی قاعدہ: اگر y_p کا کوئی رکن تفاعل مساوات 2.82 کے مطابقتی متجانس مساوات کا حل ہو تب اس رکن کو x سے ضرب دے کر y_p میں شامل کریں۔(اگر یہ حل مطابقتی متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل کیا گیا ہو تب اس رکن کو x^2 سے ضرب دیں۔)

مجموعے کا قاعدہ: اگر $r(x)$ جدول 2.2 کے دوسرے قالب کے اجزاء کا مجموعہ ہو تب $y_p(x)$ کو جدول کے تیسرے قالب سے ان اجزاء کے مطابقتی تفاعل کے مجموعے کی صورت میں لکھا جائے گا۔

$r(x)$ صرف ایک رکن پر مشتمل ہونے کی صورت میں بنیادی قاعدہ استعمال ہو گا۔ترمیمی قاعدہ استعمال کرنے سے پہلے متجانس مساوات حل کرنا ہو گا۔اگر $r = r_1$ کی صورت میں مساوات 2.82 کا حل y_{p1} ہو اور $r = r_2$ کی صورت میں اس کا حل y_{p2} ہو تب $r = r_1 + r_2$ کی صورت میں اس کا حل $y_{p1} + y_{p2}$ ہو گا۔یہ حقیقت مجموعے کا قاعدہ دیتی ہے۔

نامعلوم عددی سر کی ترکیب خود اصلاحی ہے۔ یوں y_p چنتے ہوئے کم اجزاء لینے سے تضاد پیدا ہو گا اور عددی سر حاصل کرنا ممکن نہ ہو گا۔زیادہ اجزاء لینے سے زائد ارکان کے عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوں گے۔

آئیں مثال 2.25 تا مثال 2.27 کی مدد سے اس ترکیب کو مزید سمجھیں۔

مثال 2.25: بنیادی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل تلاش کریں۔

$$y'' + 9y = 0.2x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات $y'' + 9y = 0$ کا حل y_h درج ذیل ہے۔

$$y_h = A\cos 3x + B\sin 3x$$

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: اگر ہم $y_p = Kx^2$ چننے تب $y'_p = 2Kx$ اور $y'' = 2K$ ہو گے جنہیں دیے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے $2K + 9Kx^2 = 0.2x^2$ ملتا ہے۔یہ مساوات صرف اور صرف اس صورت تمام x کے لئے درست ہو سکتی ہے کہ دونوں جانب x^2 کے عددی سر برابر ہوں۔اسی طرح x^1 یا x^0 کے عددی سر بھی دونوں اطراف برابر ہونا ضروری ہے۔ اس کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہوئے $2K = 0$ اور $9K = 0.2$ لکھا جائے گا جس سے $K = 0$ اور $K = \frac{0.2}{9}$ حاصل ہوتا ہے جو تضاد کی صورت حال ہے۔یوں اس y_p کو رد کیا جاتا ہے۔

آئیں اب دیے گئے قواعد کے تحت جدول 2.2 سے y_p لکھیں۔جدول کی دوسری صف کے تحت درج ذیل لکھا جائے گا

$$y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0$$

جس کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(2K_2) + 9(K_2x^2 + K_1x + K_0) = 0.2x^2 \implies 9K_2x^2 + 9K_1x + 2K_2 + 9K_0 = 0.2x^2$$

اس مساوات کے دونوں اطراف یکساں طاقت کے اجزاء کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں۔یوں بائیں جانب x^2 کا عددی سر $9K_2$ ہے جبکہ دائیں جانب یہ 0.2 کے برابر ہے۔انہیں آپس میں برابر پر کیا جاتا ہے۔اسی طرح بائیں جانب x^1 کا عددی سر $9K_1$ ہے جبکہ دائیں جانب ایسا کوئی رکن نہیں پایا جاتا لہٰذا دائیں جانب x^1 کا عددی سر صفر کے برابر ہے۔اسی طرح x^0 کا عددی سر بائیں جانب $2K_2 + 9K_0$ اور دائیں جانب صفر ہے۔

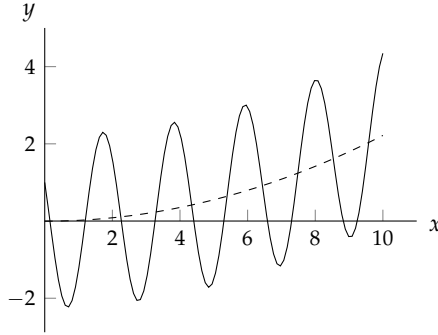
$$9K_2 = 0.2, \quad 9K_1 = 0, \quad 2K_2 + 9K_0 = 0$$

ان تین ہمزاد مساوات کو آپس میں حل کرتے ہوئے $K_2 = \frac{1}{45}$ ، $K_1 = 0$ اور $K_0 = -\frac{2}{405}$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا $y_p = \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح تفرقی مساوات کا عمومی حل

$$y = y_h + y_p = A\cos 3x + B\sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

ہو گا۔

تیسرا قدم: مخصوص حل: **ابتدائی معلومات** $x = 0$ پر $y(0) = 1$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $1 = A - \frac{2}{405}$ لکھا جائے گا جس سے $A = \frac{407}{405}$ حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $y'(0) = -5$ کو استعمال کرتے ہوئے $3B = -6$ لکھا جائے گا جس سے $B = -2$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = \frac{407}{405}\cos 3x - 2\sin 3x + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{405}$$

شکل 2.18: مثال 2.25 کا مخصوص حل۔

مخصوص حل کو شکل 2.18 میں دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ دار لکیر y_p کو ظاہر کرتی ہے۔ مخصوص حل y_p کے دونوں اطراف ارتعاش کر رہی ہے۔ □

مثال 2.26: ترمیمی قاعدے کا اطلاق
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

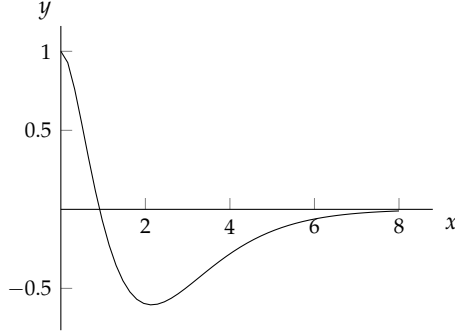
$$y'' + 2.4y' + 1.44y = -5e^{-1.2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: متجانس مساوات کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 2.4\lambda + 1.44 = 0$ یعنی $(\lambda + 1.2)^2 = 0$ ہے جس کا دوہرا جذر $\lambda = -1.2$ ہے جس سے $y_h = (c_1 + c_2x)e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: تفرقی مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل $e^{-1.2x}$ سے عام طور جدول 2.2 کو دیکھ کر $y_p = Ce^{-1.2x}$ لکھا جاتا البتہ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ تفاعل متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دوہرے جذر سے حاصل حل ہے۔ یوں ترمیمی قاعدے کے تحت منتخب تفاعل کو x^2 سے ضرب دینا ہو گا۔ یوں درج ذیل چننا جائے گا

$$y_p = Cx^2e^{-1.2x}$$

جس کے تفرقات $y_p' = (2x - 1.2x^2)Ce^{-1.2x}$ اور $y_p'' = (1.44x^2 - 4.8x + 2)Ce^{-1.2x}$ ہیں۔ ان تمام کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں جہاں دونوں اطراف $e^{-1.2x}$ کو حذف کیا گیا ہے۔

$$(1.44x^2 - 4.8x + 2)C + 2.4(2x - 1.2x^2)C + 1.44Cx^2 = -5$$

شکل 2.19: مثال 2.26 کا مخصوص حل۔

دونوں اطراف x^2 ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھے ہوئے $0 = 0$ ، $0 = 0$ اور $2C = -5$ لکھا جاتا ہے جس سے $C = -2.5$ حاصل ہوتا ہے۔یوں $y_p = -2.5x^2e^{-1.2x}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x)e^{-1.2x} - 2.5x^2e^{-1.2x}$$

تیسرا قدم: مخصوص حل: ابتدائی معلومات $x = 0$ ، $y(0) = 1$ کو عمومی حل میں پر کرتے ہوئے $c_1 = 1$ حاصل ہوتا ہے۔ y کے تفرق

$$y' = [3x^2 - (1.2c_2 + 5)x + c_2 - 1.2c_1]e^{-1.2x}$$

میں $y'(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $0 = 2c_2 - 1.2c_1$ یعنی $c_2 = 1.2$ ملتا ہے۔یوں مخصوص حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$y = (1 + 1.2x - 2.5x^2)e^{-1.2x}$$

مخصوص حل کو شکل 2.19 میں دکھایا گیا ہے۔ □

مثال 2.27: مجموعے کا قاعدہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$y''3y' + 2y = 0.2\cos x + 0.1x - 0.4, \quad y(0) = -2.1, \quad y'(0) = 3.2$$

حل: پہلا قدم: متجانس مساوات کا حل: $y'' + 3y' + 2y = 0$ کا امتیازی مساوات $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ یعنی $(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -2$ ہیں جن سے $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$ حاصل ہوتا ہے۔

دوسرا قدم: غیر متجانس مساوات کا حل: غیر متجانس مساوات کے دائیں ہاتھ تفاعل کے تحت جدول 2.2 سے $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ لکھتے ہیں جہاں

$$y_{p1} = K\cos x + M\sin x, \quad y_{p2} = K_1 x + K_0$$

کے برابر ہیں۔یوں $y_p = K\cos x + M\sin x + K_1 x + K_0$ اور اس کے تفرقات

$$y_p' = -K\sin x + M\cos x + K_1, \quad y_p'' = -K\cos x - M\sin x$$

کو غیر متجانس مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(-K\cos x - M\sin x) &+ 3(-K\sin x + M\cos x + K_1)\\ &+ 2(K\cos x + M\sin x + K_1 x + K_0) = 0.2\cos x + 0.1x - 0.4\end{aligned}$$

دونوں اطراف $\cos x$ ، $\sin x$ ، x^1 اور x^0 کے عددی سر برابر لکھتے

$$-K + 3M + 2K = 0.2, \quad -M - 3K + 2M = 0, \quad 2K_1 = 0.1, \quad 3K_1 + 2K_0 = -0.4$$

ہوئے حل کرنے سے $K_0 = -\frac{11}{40}$ ، $K_1 = \frac{1}{20}$ ، $M = \frac{3}{50}$ اور $K = \frac{1}{50}$ ملتے ہیں لہٰذا

$$y_p = \tfrac{1}{50}\cos x + \tfrac{3}{50}\sin x + \tfrac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

لکھا جائے گا جس کو استعمال کرتے ہوئے عمومی حل

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \tfrac{1}{50}\cos x + \tfrac{3}{50}\sin x + \tfrac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

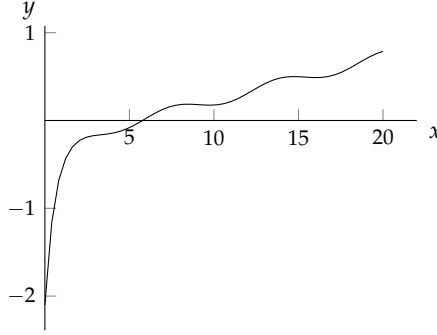
حاصل ہوتا ہے۔

تیسرا قدم: مخصوص حل: y اور y' میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{50} - \frac{11}{40} = -2.1, \quad -c_1 - 2c_2 + \frac{3}{50} + \frac{1}{20} = 3.2$$

جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1 = -\frac{3}{5}$ اور $c_2 = -\frac{249}{200}$ ملتے ہیں۔یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = -\frac{3}{5}e^{-x} - \frac{249}{200}e^{-2x} + \tfrac{1}{50}\cos x + \tfrac{3}{50}\sin x + \tfrac{x}{20} - \frac{11}{40}$$

مخصوص حل کو شکل 2.20 میں دکھایا گیا ہے۔ □

شکل 2.20: مثال 2.27 کا مخصوص حل۔

استحکام

کسی بھی انجینئری نظام کا مستحکم ہونا نہایت اہم ہوتا ہے۔مساوات 2.82 کے مطابقتی متجانس مساوات کے امتیازی مساوات کے دونوں جذر منفی یا دونوں جذر کے حقیقی حصے منفی ہونے کی صورت میں نظام اور تفرقی مساوات کو مستحکم[74] کہتے ہیں۔ایسی صورت میں $t \to \infty$ پر $y_h \to 0$ ہو گا لہٰذا عارضی حل $y = y_h + y_p$ آخر کار برقرار حل y_p کے قریب قریب ہو گا۔ایسا نہ ہونے کی صورت میں نظام غیر مستحکم[75] کہلاتا ہے۔چونکہ مثال 2.25 میں امتیازی مساوات کے جذر کے حقیقی حصے منفی مقدار نہیں ہیں لہٰذا یہ غیر مستحکم نظام کو ظاہر کرتا ہے۔

اگلے دو حصوں میں ان مساوات کا استعمال ہو گا۔

سوالات

سوال 2.108 تا سوال 2.117 میں دیے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کے حقیقی عمومی حل دریافت کریں۔

سوال 2.108: $y'' - y' - 6y = e^{-1.5x}$
جواب: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{4}{9} e^{-1.5x}$

سوال 2.109: $y'' + 5y' + 6y = e^{-3x}$
جواب: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} - (1+x) e^{-3x}$

[74] stable
[75] unstable

سوال 2.110: $4y'' + 12y' + 9y = 4^{-1.5x}$
جواب: $y = (c_1 + c_2x)e^{-1.5x} + \frac{x^2}{2}e^{-1.5x}$

سوال 2.111: $4y'' + 2y' + 3y = 4\cos 3x$
جواب: $y = c_1e^{-0.5x} + c_2e^{-1.5x} + \frac{32}{555}\sin 3x - \frac{44}{555}\cos 3x$

سوال 2.112: $y'' + 4y = \sin 2x$
جواب: $y = c_1\sin 2x + c_2\cos 2x - 0.5x\cos 2x$

سوال 2.113: $9y'' + 4y = e^{-2x}\sin\frac{2x}{3}$
جواب: $y = c_1\cos\frac{2x}{3} + c_2\sin\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2x}}{156}(2\cos\frac{2x}{3} + 3\sin\frac{2x}{3})$

سوال 2.114: $y'' + 3y' + 2y = x^2$
جواب: $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{2x^2-6x+7}{4}$

سوال 2.115: $y'' + 9y = 3\sin x + \sin 3x$
جواب: $y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + \frac{3}{8}\sin x - \frac{x}{6}\cos 3x$

سوال 2.116: $y'' + 8y' + 15y = 0.5x$
جواب: $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-5x} + \frac{15x-8}{450}$

سوال 2.117: $y'' + 2y' + y = x\cos x$
جواب: $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + 0.5\cos x + 0.5(x-1)\sin x$

سوال 2.118 تا سوال 2.130 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلوں کے مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.118: $y'' + 5y' + 6y = 0.2e^{-1.5x}, \quad y(0) = 1.2, \quad y'(0) = -0.5$
جواب: $y = -\frac{4}{15}e^{-1.5x} + \frac{27}{10}e^{-2x} - \frac{53}{30}e^{-3x}$

سوال 2.119: $y'' + 2.7y' + 1.8y = 3.4e^{-1.2x}, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -3$
جواب: $y = (\frac{102x-340}{9})e^{-1.2x} - 20e^{-1.2x} + \frac{302}{9}e^{-1.5x}$

سوال 2.120: $y'' + 6y' + 9y = 1.1e^{-2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
جواب: $y = 1.1e^{-2x} + (0.9x - 0.1)e^{-3x}$

سوال 2.121: $y''+8y'+16y=0.7e^{-4x}, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=-2$
جواب: $y=\frac{7}{20}x^2e^{-4x}+(6x+2)e^{-4x}$

سوال 2.122: $4y''+8y'+3y=24x^2, \quad y(0)=-2, \quad y'(0)=-2$
جواب: $y=-101e^{-0.5x}+\frac{59}{9}e^{-1.5x}+\frac{72x^2-384x+832}{9}$

سوال 2.123: $4y''+8y'+3y=2.4e^{-0.5x}+8x^2, \quad y(0)=3, \quad y'(0)=-2$
جواب: $y=(\frac{3x}{5}-\frac{301}{10})e^{-0.5x}+\frac{617}{270}e^{-1.5x}+\frac{8x^2}{3}-\frac{128x}{9}+\frac{832}{27}$

سوال 2.124: $6y''+29y'+35y=6\cos x, \quad y(0)=0.5, \quad y'(0)=-0.2$
جواب: $y=\frac{3}{29}\cos x+\frac{3}{29}\sin x+\frac{1197}{290}e^{-\frac{7}{3}x}-\frac{541}{145}e^{-\frac{5}{2}x}$

سوال 2.125: $y''+9y=\cos 3x, \quad y(0)=0.2, \quad y'(0)=0.3$
جواب: $y=\frac{1}{5}\cos 3x+(\frac{x}{6}+\frac{1}{10})\sin 3x$

سوال 2.126: $8y''-6y'+y=6\sinh x, \quad y(0)=0.2, \quad y'(0)=0.1$
جواب: $y=e^x-\frac{19}{5}e^{0.5x}+\frac{16}{5}e^{0.25x}-\frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.127: $x^2y''-3xy'+3y=3\ln x-4, \quad y(1)=0,\ y'(1)=1,\ y_p=\ln x$
جواب: $y=\frac{1}{3}\ln x+\frac{4}{9}+\frac{5x^3}{9}-x$

سوال 2.128: $y''+2y'+10y=17\sin x-37\sin 3x, \quad y(0)=6.6, \quad y'(0)=-2.2$
جواب: $y=e^{-x}\cos 3x-\sin 3x+6\cos 3x+\frac{9}{5}\sin x-\frac{2}{5}\cos x$

سوال 2.129: $8y''-6y'+y=6\sinh x, \quad y(0)=0.2, \quad y'(0)=0.05$
جواب: $y=e^x-4e^{0.5x}+\frac{17}{5}e^{0.25x}-\frac{1}{5}e^{-x}$

سوال 2.130: $y''+4y'+4y=e^{-2x}\sin 2x, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=-1.5$
جواب: $y=(1+x-0.25\sin 2x)e^{-2x}$

2.8 جبری ارتعاش۔ گمک

ہم اسپرنگ اور کمیت کے نظام پر حصہ 2.4 میں غور کر چکے ہیں جہاں اس نظام کو متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = 0 \tag{2.83}$$

سے ظاہر کیا گیا جہاں، ساکن حالت میں گیند کے مقام سے، حرکت کی صورت میں گیند کا فاصلہ $y(t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

حصہ 2.4 میں نظام پر کوئی بیرونی قوت لاگو نہیں کی گئی۔ نظام کی حرکت صرف اور صرف نظام کی اندرونی قوتوں کی بنا پر تھی۔ قوت جمود my'' ، قوت بحالی ky اور قوت روک cy' نظام کی اندرونی قوتیں تھیں۔

آگے بڑھتے ہوئے اس نظام میں بیرونی قوت $r(t)$ کا اضافہ کرتے ہیں۔ شکل 2.21 میں ایسا نظام دکھایا گیا ہے۔ بیرونی قوت $r(t)$ انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے۔ اس نظام کی نمونہ کشی درج ذیل تفرقی مساوات کرتی ہے۔

$$my'' + cy' + ky = r(t) \tag{2.84}$$

میکانی طور پر اس مساوات کا مطلب ہے کہ ہر لمحہ t پر اندرونی قوتوں کا مجموعہ بیرونی قوت $r(t)$ کے برابر ہے۔ اس نظام میں گیند کی حرکت کو **جبری حرکت**[76] کہتے ہیں جبکہ بیرونی قوت کو **جبری قوت**[77] یا **داخلی قوت**[78] کہتے ہیں۔ گیند کی حرکت کو نظام کا **رد عمل**[79] یا نظام کا **ماحصل**[80] بھی کہا جاتا ہے۔

ہمیں **دوری**[81] بیرونی قوتوں میں زیادہ دلچسپی ہے لہٰذا ہم

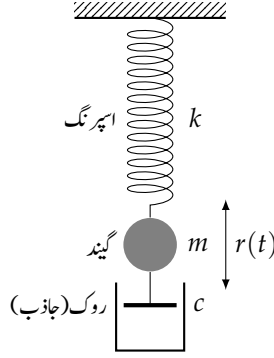
$$r(t) = F_0 \cos \omega t \qquad (F_0 > 0, \omega > 0)$$

طرز کی قوتوں پر توجہ دیں گے۔ یوں غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t \tag{2.85}$$

حاصل ہوتی ہے جس کے حل سے بنیادی اہمیت کے حقائق حاصل ہوں گے جن سے **گمک**[82] کی نمونہ کشی ممکن ہو گی۔

---

[76] forced motion
[77] forcing function
[78] input force
[79] response
[80] output
[81] periodic
[82] resonance

شکل 2.21: اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی جبری ارتعاش۔

غیر متجانس مساوات کا حل

ہم نے حصہ 2.7 میں دیکھا کہ غیر متجانس مساوات 2.85 کا عمومی حل متجانس مساوات 2.83 کے عمومی حل y_h اور مساوات 2.85 کے کوئی بھی حل y_p کا مجموعہ ہے۔ہم y_p کو حصہ 2.7 کے نا معلوم عدد سر کی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں۔یوں

$$y_p(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{2.86}$$

اور اس کے تفرقات

$$y_p'(t) = -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t, \quad y_p''(t) = -\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t$$

کو مساوات 2.85 میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} m(-\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t) + c(-\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t)\\ + k(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = F_0\cos\omega t \end{aligned}$$

دونوں اطراف کے $\cos\omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے اور دونوں اطراف $\sin\omega t$ کے عددی سر برابر لکھتے ہوئے ہمزاد مساوات

$$(k-m\omega^2)a + c\omega b = F_0, \quad -c\omega a + (k-m\omega^2)b = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان ہمزاد مساوات کو a اور b کے لئے حل کرتے ہیں۔ b حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $k-m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $-c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$(k-m\omega^2)^2 a + c^2\omega^2 a = F_0(k-m\omega^2)$$

اسی طرح a حذف کرنے کی خاطر بائیں مساوات کو $c\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے اور دائیں مساوات کو $k - m\omega^2$ سے ضرب دیتے ہوئے دونوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$c^2\omega^2 b + (k - m\omega^2)^2 b = F_0 c\omega$$

ان مساوات میں جزو $c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2$ صفر کے برابر نہیں ہے لہٰذا دونوں مساوات کو اس جزو سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے a اور b حاصل کرتے ہیں۔

$$a = F_0 \frac{(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

اگر حصہ 2.4 کی طرح $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ لکھا جائے تب $k = m\omega_0^2$ ہو گا اور

$$a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad b = F_0 \frac{c\omega}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2} \tag{2.87}$$

ہوں گے۔

اس طرح غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 2.85 کا عمومی حل

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \tag{2.88}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $y_h(t)$ متجانس مساوات 2.83 کا عمومی حل ہے اور $y_p(t)$ مساوات 2.86 میں دیا گیا ہے جس میں a اور b کی قیمتیں مساوات 2.87 سے پر کی گئی ہیں۔

آئیں اب اس میکانی نظام کی دو بالکل مختلف صورتوں پر غور کریں۔پہلی صورت $c = 0$ غیر قصری ہے جبکہ دوسری صورت $c > 0$ تقصیری ہے۔

پہلی صورت: بلا تقصیر جبری ارتعاش۔ گمک

اگر نظام میں قوت روک اتنی کم ہو کہ دورانیہ غور کے دوران اس کا اثر قابل نظر انداز ہو تب $c = 0$ لیا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 2.87 سے $a = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ اور $b = 0$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا مساوات 2.86

$$y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos\omega t = \frac{F_0}{k[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2]} \cos\omega t \tag{2.89}$$

لکھی جائے گی جہاں $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یہاں ضروری ہے کہ $\omega\neq\omega_0$ فرض کیا جائے جس کا مطلب ہے کہ جبری قوت کی تعدد $f=\frac{\omega}{2\pi}$ بلا تقصیر نظام کی قدرتی تعدد $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}$ سے مختلف فرض کی گئی ہے۔(بلا تقصیر نظام کی قدرتی تعدد کے لئے مساوات 2.42 دیکھیں۔) یوں مساوات 2.89 اور مساوات 2.44 کی مدد سے بلا تقصیر نظام کی عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y(t)=C\cos(\omega_0 t-\delta)+\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t \tag{2.90}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ نظام کا رد عمل دو مختلف تعدد کے ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

گمک

مساوات 2.89 کا حیطہ

$$a=\frac{F_0}{k}\rho,\quad \rho=\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{2.91}$$

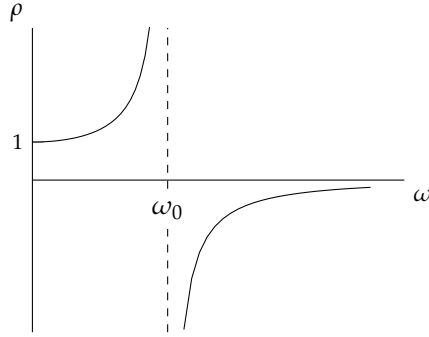
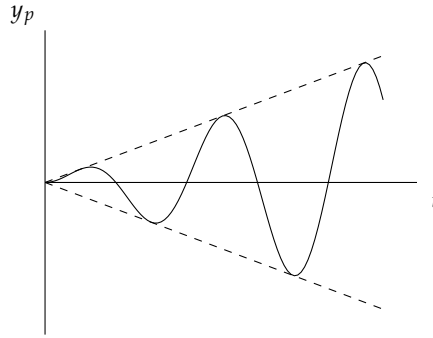
ω اور ω_0 پر منحصر ہے۔ $\omega\to\omega_0$ کرنے سے $\rho\to\infty$ اور $a\to\infty$ ہو گا۔ داخلی جبری قوت کی تعدد کو نظام کی قدرتی تعدد کے برابر $(\omega=\omega_0)$ کرنے سے انتہائی زیادہ حیطے کی پیدا ارتعاش کو گمک[83] کہتے ہیں۔ ρ کو گمکی جزو[84] کہتے ہیں جسے شکل 2.22 میں دکھایا گیا ہے۔مساوات 2.91 سے $\frac{\rho}{k}=\frac{a_0}{F_0}$ لکھا جا سکتا ہے جو مخصوص حل y_p اور داخلی جبری قوت کے حیطوں کا تناسب ہے۔ہم جلد دیکھیں گے کہ ارتعاشی نظام میں گمک اہم کردار ادا کرتی ہے۔گمک کی صورت میں غیر متجانس مساوات 2.85 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$y''+\omega_0^2 y=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{2.92}$$

جس کا حل مساوات 2.89 نہیں دیتی۔مساوات 2.92 کا مخصوص حل y_p ، صفحہ 143 پر دیے گئے ترمیمی قاعدہ کے تحت

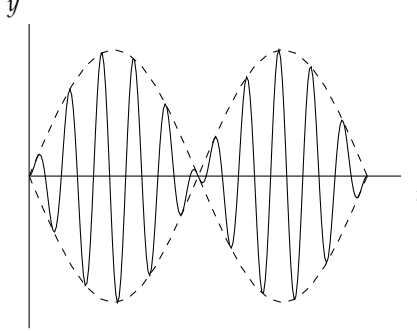
$$y_p(t)=t(a\cos\omega_0 t+b\sin\omega_0 t)$$

---

[83] resonance
[84] resonance factor

شکل 2.22: گمکی جزو $\rho(\omega)$

شکل 2.23: گمک کی صورت میں مخصوص حل۔

ہو گا جس کو مساوات 2.92 میں پر کرتے ہوئے $a=0$ اور $b=\frac{F_0}{2m\omega_0}$ ملتے ہیں لہٰذا مخصوص حل

$$y_p(t)=\frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t \tag{2.93}$$

ہو گا جسے شکل 2.23 میں دکھایا گیا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ جزو t کی وجہ سے ارتعاش کا حیطہ مسلسل بڑھتا ہے۔عملاً اس کا مطلب ہے کہ کم قصری نظام زیادہ جھولے گا۔ نہایت کم تقصیر کی صورت میں نظام جھولنے سے تباہ ہو سکتا ہے۔

شکل 2.24: قریبی سر تھاپ پیدا کرتے ہیں۔

تھاپ

ω اور ω_0 قریب قریب ہونے کی صورت میں ایک دلچسپ صورت پیدا ہوتی ہے۔اسے سمجھنے کی خاطر مساوات 2.90 میں $C=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$ اور $\delta=0$ لکھتے ہیں۔

$$y(t)=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos\omega_0 t+\cos\omega t)\qquad(\omega\neq\omega_0) \tag{2.94}$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$y(t)=\frac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right) \tag{2.95}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ ω_0 اور ω نہایت قریب ہیں لہٰذا $\frac{\omega_0-\omega}{2}$ چھوٹی مقدار ہو گی اور یوں دائیں سائن تفاعل کا دوری عرصہ زیادہ ہو گا۔اس کے برعکس $\frac{\omega_0+\omega}{2}$ بڑی مقدار ہو گی لہٰذا بائیں سائن تفاعل کا دوری عرصہ کم ہو گا۔ شکل 2.24 میں اس مساوات کو دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ دار لکیر دائیں سائن تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔اس شکل کے تفاعل کی آواز میں بلند تعدد کے ساتھ ساتھ کم تعدد بھی سنائی دیتی ہے جنہیں تھاپ[85] کہتے ہیں۔موسیقار تھاپ پر دھیان دیتے ہوئے موسیقی کے آلے کی تعدد درست کرتا ہے۔

دوسری صورت: قصری جبری ارتعاش

اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں قوت روک قابل نظر انداز نہ ہونے کی صورت میں $c>0$ ہو گا اور (جیسا ہم حصہ 2.4 میں دیکھ چکے ہیں) متجانس مساوات 2.83 کا حل y_h وقت گزرتے گھٹے گا حتیٰ کہ $t\to\infty$ پر

[85] beats

$y_h \to 0$ ہو گا۔ عملاً کافی دیر بعد y_h صفر کے برابر ہو گا لہٰذا مساوات 2.85 کا عارضی حل[86] مساوات 2.88 یعنی $y = y_h + y_p$ آخر کار برقرار حال حل[87] y_p کے برابر ہو گا۔اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 2.8: برقرار حال حل
سائن نما جبری قوت کی موجودگی میں قصری ارتعاشی نظام کچھ دیر بعد عملاً ہارمونی ارتعاش اختیار کرے گا۔اس ہارمونی ارتعاشی کی تعدد داخلی تعدد کے برابر ہو گی۔

2.8.1 برقرار حال حل کا حیطہ۔ عملی گمک

بلا تقصیر نظام میں $\omega \to \omega_0$ کرنے سے y_p کا حیطہ لامتناہی ہو گا۔قصری نظام میں ایسا نہیں ہوتا اور y_p کا حیطہ محدود رہتا ہے۔ہاں کسی مخصوص ω پر حیطہ زیادہ سے زیادہ ہو سکتا ہے جس کا دارومدار c کی قیمت پر ہو گا۔ایسی صورت کو عملی گمک کہہ سکتے ہیں۔ عملی گمک اس لئے اہم ہے کہ اگر c کی قیمت زیادہ نہ ہو تب عین ممکن ہے کہ داخلی جبری قوت نظام میں نقصان دہ یا تباہ کن حیطے کی ارتعاش پیدا کر سکے۔جس زمانے میں انسان کو گمک کی سمجھ نہ تھی اس زمانے میں اس کو ایسے نقصان اٹھانے پڑتے تھے۔مشین، جہاز ، گاڑی، پل اور بلند عمارتیں وہ میکانی نظام ہیں جن میں ارتعاش پایا جاتا ہے۔زلزلہ یا آندھی بطور جبری قوت بلند عمارت میں تباہ کن گمک پیدا کرتے ہوئے اسے ملبے کا ڈھیر بنا سکتی ہے۔بعض اوقات گمک سے پاک نظام کی تخلیق ناممکن ہوتی ہے۔

y_p کا حیطہ بالمقابل ω پر غور کی خاطر مساوات 2.86 کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں

$$y_p(t) = C^* \cos(\omega t - \eta) \tag{2.96}$$

جہاں

$$\begin{aligned} C^*(\omega) &= \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \\ \eta(\omega) &= \tan^{-1}\frac{b}{a} = \tan^{-1}\frac{c\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned} \tag{2.97}$$

---

[86] transient solution
[87] steady state solution

ہیں۔انہیں شکل 2.25 میں c کی مختلف قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ C^* ردعمل y_p کا حیطہ[88] اور η اس کا زاویائی فاصلہ[89] ہے۔داخلی جبری تفاعل اور y_p میں زاویائی فرق η کے برابر ہو گا۔مثبت η کی صورت میں مساوات 2.96 کے تحت داخلی قوت سے y_p پیچھے[90] ہے۔

حیطے کی زیادہ سے زیادہ قیمت دریافت کرنے کی خاطر C^* کے تفرق کو صفر کے برابر $(\frac{\mathrm{d}C^*}{\mathrm{d}\omega}=0)$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}C^*}{\mathrm{d}\omega}=-\frac{F_0[2m^2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega)+2c^2\omega]}{2[m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+c^2\omega^2]^{\frac{3}{2}}}=0$$

کسر کا شمار کنندہ صفر ہونے کی صورت میں درج بالا صفر کے برابر ہو گا جس سے

$$c^2=2m^2(\omega_0^2-\omega^2)\qquad(\omega_0^2=\frac{k}{m}) \tag{2.98}$$

یعنی

$$2m^2\omega^2=2m^2\omega_0^2-c^2=2mk-c^2 \tag{2.99}$$

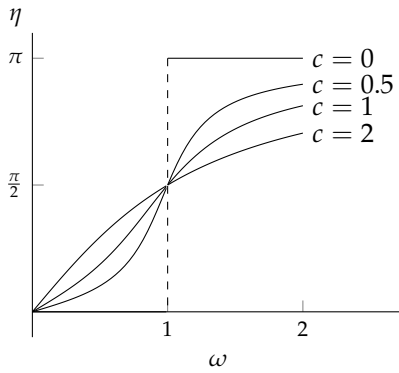
حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے $c^2>2mk$ کی صورت میں خیالی تعدد $\omega=\mp i\sqrt{\frac{c^2-2mk}{2m^2}}$ حاصل ہوتا ہے۔خیالی تعدد حساب کے نقطہ نظر سے درست جواب ہے لیکن عملی دنیا میں تعدد کی قیمت صرف حقیقی قیمت ممکن ہے۔ایسی صورت میں ω کی قیمت بڑھانے سے C^* کی قیمت گھٹتی ہے۔اس کے برعکس $c^2<2mk$ کی صورت میں مساوات 2.99 سے حقیقی تعدد $\omega_{\text{بلند تر}}$

$$\omega_{\text{بلند تر}}^2=\omega_0^2-\frac{c^2}{2m^2} \tag{2.100}$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 2.100 سے ظاہر ہے کہ c کی قیمت کم کرنے سے $\omega_{\text{بلند تر}}$ کی قیمت ω_0 بڑھتی ہے حتیٰ کہ $c\to 0$ کی صورت میں $\omega_{\text{بلند تر}}\to 0$ حاصل ہوتا ہے۔

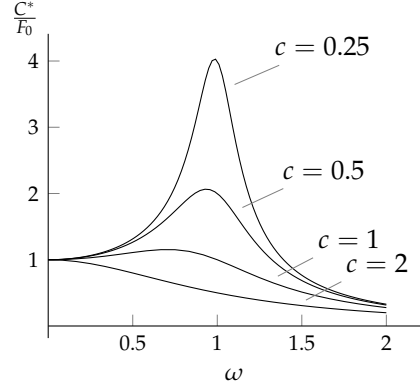
$\omega_{\text{بلند تر}}$ کو مساوات 2.97 میں پر کرنے سے $C^*(\omega_{\text{بلند تر}})$ حاصل کرتے ہیں۔

$$C^*(\omega_{\text{بلند تر}})=\frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega_0^2-\frac{c^2}{2m^2})^2+c^2(\omega_0^2-\frac{c^2}{2m^2})}}=\frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2-c^2}} \tag{2.101}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $c\to 0$ کرنے سے $C^*\to\infty$ حاصل ہو گا یعنی بلا تقصیر صورت میں لامتناہی حیطہ پایا جائے گا۔

---

[88] amplitude
[89] phase angle
[90] lagging

(الف) $k = 1$ ، $m = 1$ ، $\omega_0 = 1$ رکھتے ہوئے مختلف c کے لئے $\frac{C^*}{F_0}$ بالمقابل ω

(ب) $k = 1$ ، $m = 1$ ، $\omega_0 = 1$ رکھتے ہوئے مختلف c کے لئے η بالمقابل ω

شکل 2.25: مساوات 2.97 کا حیطہ اور زاویائی فاصلہ۔

سوالات

سوال 2.131 تا سوال 2.134 اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی تفرقی مساوات ہیں۔ان کے برقرار حال حل دریافت کریں۔

سوال 2.131: $y'' + 7y' + 10y = 4\cos 3t$
جواب: $y = \frac{2}{221}\cos 3t + \frac{42}{221}\sin 3t$

سوال 2.132: $y'' + 4y' + 3y = 2\sin 6t$
جواب: $y = \frac{16}{555}\cos 6t - \frac{22}{555}\sin 6t$

سوال 2.133: $10y'' + 11y' + 3y = 20 + 15\cos 3t - 5\sin 2t$
جواب: $y = 6.67 + 0.057\sin 3t - 0.151\cos 3t + 0.0998\sin 2t + 0.059\cos 2t$

سوال 2.134: $2y'' + 3y' + y = 0.8 + \sin 2t$
جواب: $y = 0.8 - 0.08\sin 2t - 0.07\cos 2t$

سوال 2.135 تا سوال 2.143 کے عارضی حل دریافت کریں۔

سوال 2.135: $6y'' + 7y' + 2y = 3\sin(3.5t)$
جواب: $y = Ae^{-\frac{1}{2}t} = k - 2e^{-\frac{2}{3}t} - 0.037\sin(3.5t) - 0.013\cos(3.5t)$

سوال 2.136: $y'' + 2y' + 2y = 2\sin 2t$
جواب: $y = e^{-t}(A\cos t + B\sin 2t) - 0.4\cos 2t - 0.2\sin 2t$

سوال 2.137: $y'' + 9y = 4\cos 3t$
جواب: $y = A\cos 3t + B\sin 3t + \frac{2}{3}t\sin 3t + \frac{2}{9}\cos 3t$

سوال 2.138: $y'' + 3y = \cos\sqrt{3}t - \sin\sqrt{3}t$
جواب: $y = A\cos\sqrt{3}t + B\sin\sqrt{3}t + \frac{t}{2\sqrt{3}}(\cos\sqrt{3}t + \sin\sqrt{3}t) + \frac{1}{6}\cos\sqrt{3}t$

سوال 2.139: $y'' + 2y' + 5y = 3\cos 2t + 2\sin 2t$
جواب: $y = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t) - \frac{10}{17}\cos 2t + \frac{11}{17}\sin 2t$

سوال 2.140: $y'' + y = 5\sin\omega t \qquad (\omega^2 \neq 1)$
جواب: $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{5}{\omega^2 - 1}\sin\omega t$

سوال 2.141: $y'' + 4y = 3\cos 2t$
جواب: $y = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{3}{4}t\sin 2t + \frac{3}{8}\cos 2t$

سوال 2.142: $y'' + 4y = e^{-2t}\cos 2t$
جواب: $y = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{e^{-2t}}{20}(\cos 2t - 2\sin 2t)$

سوال 2.143: $y'' + 4y' + 5y = 2\cos t + 3\sin t$
جواب: $y = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t) - \frac{1}{8}\cos t + \frac{5}{8}\sin t$

سوال 2.144 تا سوال 2.149 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔انہیں حل کریں۔

سوال 2.144: $y'' + 4y = 5\cos t, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$
جواب: $y = \frac{5}{3}\cos t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{2}{3}\cos 2t$

سوال 2.145: $y'' + 9y = \sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{5}$
جواب: $y = \frac{1}{8}\sin t + \frac{1}{10}\sin 2t + \frac{1}{168}\sin 3t - \frac{1}{28}\sin 4t$

سوال 2.146: $y'' + 4y' + 8y = 4\cos(0.5t), \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2$
جواب: $y = 0.125\sin(0.5t) + 0.484\cos(0.5t) + e^{-2t}[3.516\cos 2t + 2.485\sin 2t]$

سوال 2.147: $y'' + 4y' + 5y = e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
جواب: $y = \frac{e^{-2t}}{15}(8\sin t - 4\cos t) + \frac{e^{-0.5t}}{15}[4\cos(0.5t) + 2\sin(0.5t)]$

سوال 2.148: $y''+36y=\cos\pi t-\sin\pi t,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$
جواب: $y=\frac{1}{\pi^2-36}(\sin\pi t-\cos\pi t+\cos 6t+\frac{\pi^2-\pi-36}{6}\sin 6t)$

سوال 2.149: تھاپ $y''+36y=\cos(5.9t),\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$
جواب: $y=\frac{19}{119}\cos 6t+\frac{100}{119}\cos(5.9t)$

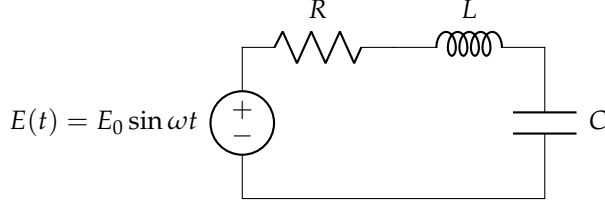
سوال 2.150: خود کار بندوق
خودکار بندوق[91] کے چلنے سے گولی پر نہایت کم دورانیے کے لئے قوت عمل کرتی ہے اور اتنی ہی قوت بندوق کی نالی پر الٹ سمت میں عمل کرتا ہے۔نالی کا جھٹکا اسپرنگ برداشت کرتا ہے۔اس قوت کو تفاعل $1-\frac{t^2}{\pi^2}$ سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل تفرقی مساوات حل کریں جس میں $y(0)=0$ اور $y'(0)=0$ ہوں گے۔لمحہ $t=\pi$ پر y اور y' دونوں استمراری ہیں۔

$$y''+y=\begin{cases}1-\frac{t^2}{\pi^2} & 0\le t\le\pi\\ 0 & t<0,\, t>\pi\end{cases}$$

جواب: $y=(1+\frac{2}{\pi^2})(1-\cos t)-\frac{t^2}{\pi^2}$

2.9 برقی ادوار کی نمونہ کشی

شکل 2.26 میں مزاحمت R ، امالہ L اور برق گیر[92] C کو منبع دباو کے ساتھ سلسلہ وار جوڑا گیا ہے۔اس دور کو سلسلہ وار RLC دور کہتے ہیں۔ہم صفحہ 52 پر مثال 1.20 میں مزاحمت اور امالہ کا سلسلہ وار RL دور دیکھ چکے ہیں جہاں مزاحمت پر دباو $v_R=IR$ اور امالہ پر دباو $v_L=L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ کے مجموعے کو کرخوف کے قانون برائے دباو کے تحت درآیدہ دباو E کے برابر پر کیا گیا۔موجودہ RLC میں v_R اور v_L کے ساتھ برق گیر کا دباو v_C بھی جمع کیا جائے گا۔برق گیر پر دباو v_C اور اس میں ذخیرہ بار[93] Q کا تعلق $Q=Cv_C$ ہے۔ برق گیر کی اکائی فیراڈ[94] F جبکہ بار کی اکائی کولمب[95] C ہے۔برقی بار اور برقی رو کا تعلق $Q=\int I\,\mathrm{d}t$ استعمال کرتے ہوئے برق گیر کے رو اور دباو کا تعلق

$$v_C=\frac{1}{C}\int I(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.102}$$

شکل 2.26: مزاحمت، امالہ اور برق گیر سلسلہ وار منبع دباو کے ساتھ جڑے ہیں۔

حاصل ہوتا ہے۔

یوں کرخوف مساوات دباو

$$LI' + RI + \frac{1}{C}\int I \,\mathrm{d}t = E_0 \sin \omega t \,\mathrm{d}t \tag{2.103}$$

ہو گی جو تکمل و تفرق مساوات ہے جس کا تفرق لیتے ہوئے تکمل سے پاک تفرقی مساوات

$$LI'' + RI' + \frac{I}{C} = E'(t) = \omega E_0 \cos \omega t \tag{2.104}$$

حاصل ہوتی ہے۔یہ مستقل عددی سر والی غیر متجانس دو رتبی سادہ تفرقی مساوات ہے جس کا حل $I(t)$ دے گا۔مساوات 2.103 میں تکمل Q کے برابر ہے جبکہ $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ لکھا جا سکتا ہے جن سے درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے جس کا حل $Q(t)$ دے گا۔

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E(t) = E_0 \sin \omega t \tag{2.105}$$

سلسلہ وار دور میں رو کا حصول

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.104 کا حل $I = I_h + I_p$ ہو گا جہاں I_h مطابقتی متجانس مساوات کا عمومی حل اور I_p غیر متجانس مساوات کا مخصوص حل ہے۔ہم I_p کو نا معلوم عددی سر کی ترکیب سے حاصل کرتے

automatic gun[91]
capacitor[92]
charge[93]
Farad[94]
Coulomb[95]

ہیں۔یوں مساوات 2.104 میں

$$
\begin{aligned}
I_p &= a\cos\omega t + b\sin\omega t \\
I'_p &= -\omega a\sin\omega t + \omega b\cos\omega t \\
I''_p &= -\omega^2 a\cos\omega t - \omega^2 b\sin\omega t
\end{aligned}
\tag{2.106}
$$

پر کرتے ہوئے دونوں اطراف $\cos\omega t$ کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں اور اسی طرح دونوں اطراف $\sin\omega t$ کے عددی سر برابر پر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)a + \omega R b &= \omega E_0 \\
-\omega R a + \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)b &= 0
\end{aligned}
$$

ان مساوات کو ω سے تقسیم کرتے ہوئے

$$
S = \omega L - \tfrac{1}{\omega C} \tag{2.107}
$$

لکھتے ہیں جہاں S کو متعاملیت[96] کہتے ہیں۔یوں درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
-Sa + Rb &= E_0 \\
-Ra - Sb &= 0
\end{aligned}
$$

b حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو S اور دوسری کو R سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔ a حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو R اور دوسری کو $-S$ سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$
-(S^2 + R^2)a = E_0 S, \quad (R^2 + S^2)b = E_0 R \tag{2.108}
$$

ان سے درج ذیل عددی سر حاصل ہوتے ہیں

$$
a = -\frac{E_0 S}{S^2 + R^2}, \quad b = \frac{E_0 R}{S^2 + R^2} \tag{2.109}
$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے I_p لکھتے ہیں۔

$$
I_p(t) = -\frac{E_0 S}{S^2 + R^2}\cos\omega t + \frac{E_0 R}{S^2 + R^2}\sin\omega t \tag{2.110}
$$

---

[96] reactance

اس کو

$$I_p(t) = I_0 \sin(\omega t - \theta) \tag{2.111}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$I_0 = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{E_0}{\sqrt{S^2 + R^2}}, \quad \tan\theta = -\frac{a}{b} = \frac{S}{R} \tag{2.112}$$

ہیں۔ I_0 کو رو کا حیطہ اور θ کو رو کا زاویہ کہتے ہیں۔داخلی دباو سے رو θ زاویے کے فاصلے پر ہے۔درج بالا مساوات میں $\sqrt{S^2 + R^2} = \frac{E_0}{I_0}$ لکھا جا سکتا ہے جو قانون اوہم سے مشابہت رکھتا ہے لہٰذا $\sqrt{S^2 + R^2}$ کو برقی رکاوٹ[97] کہا جاتا ہے۔

مساوات 2.104 کے مطابقتی متجانس مساوات کی امتیازی مساوات

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

کے جذر

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \mp \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

ہیں جن میں $\alpha = \frac{R}{2L}$ اور $\beta = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$ لکھتے ہوئے

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں I_h درج ذیل ہو گا۔

$$I_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

کسی بھی حقیقی دور میں R کبھی بھی صفر کے برابر نہیں ہوتا۔یوں $R > 0$ اور $\alpha > 0$ ہوں گے۔اس طرح $t \to \infty$ پر $I_h \to 0$ ہو گا لہٰذا RLC دور کا عمومی حل آخر کار I_p کے برابر ہو گا جو داخلی دباو کے تعدد ω پر ہارمونی ارتعاش کرتی رو کو ظاہر کرتی ہے۔

مثال 2.28: سلسلہ وار RLC دور میں سو اوہم کی مزاحمت $R = 100\,\Omega$ ، آدھا ہینری امالہ $L = 0.5\,\mathrm{H}$ ، بیس ملی فیراڈ برق گیر $C = 20\,\mathrm{mF}$ اور داخلی دباو $E(t) = 310\sin(2\pi 50 t)$ وولٹ ہیں۔لمحہ $t = 0$ پر رو اور برق گیر میں ذخیرہ بار صفر کے برابر ہیں۔دور میں رو $I(t)$ حاصل کریں۔

---

[97] impedance

حل: مساوات 2.104 میں دی گئی معلومات پر کرتے ہوئے

$$0.5I'' + 100I' + 50I = (100\pi)(310)\cos(100\pi t)$$

ملتا ہے جس سے متجانس مساوات $0.5I'' + 100I' + 50I = 0$ لکھ کر امتیازی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$0.5\lambda^2 + 100\lambda + 50 = 0$$

امتیازی مساوات کے جذر $\lambda_1 = -199.5$ اور $\lambda_2 = -0.5$ ہیں لہٰذا

$$I_h(t) = c_1e^{-199.5t} + c_2e^{-0.5t}$$

ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ I_h بہت جلد صفر کے برابر ہو گا۔

دور کی متعاملیت $S = 100\pi 0.5 - \frac{1}{100\pi 0.02} = 156.92$ لیتے ہوئے

$$I_p(t) = a\cos(100\pi t) + b\sin(100\pi t)$$

کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔

$$a = -\frac{310 \times 156.92}{156.92^2 + 100^2} = -1.4049, \quad b = \frac{310 \times 100}{156.92^2 + 100^2} = 0.8953$$

یوں

$$I_p(t) = -1.4049\cos(100\pi t) + 0.8953\sin(100\pi t) = 1.422\sin(100\pi t - 1.003) \tag{2.113}$$

ہو گا لہٰذا عمومی حل

$$I(t) = I_h + I_p = c_1e^{-199.5t} + c_2e^{-0.5t} + 1.422\sin(100\pi t - 1.003)$$

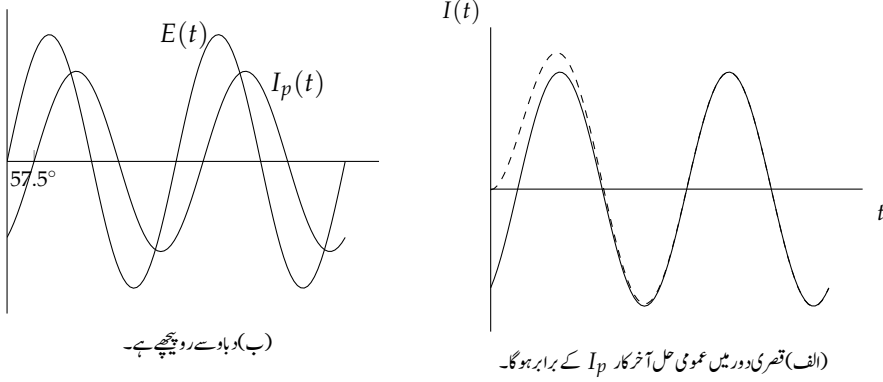
ہو گا۔ابتدائی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے c_1 اور c_2 دریافت کرتے ہیں۔عمومی حل میں $t = 0$ پر $I(0) = 0$ پر کرنے سے

$$c_1 + c_2 - 1.4049 = 0, \implies c_1 = 1.4049 - c_2 \tag{2.114}$$

ملتا ہے۔مساوات 2.103 میں تکمل کی قیمت بار کے برابر ہے یعنی $\int I\,\mathrm{d}t = Q$ لہٰذا $t = 0$ پر ابتدائی معلومات $Q(0) = 0$ اور $I(0) = 0$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 2.103 سے

$$LI'(0) + RI(0) = E_0\sin 0 \qquad \implies I' = 0$$

(ب) دباو سے رو پیچھے ہے۔

(الف) قصری دور میں عمومی حل آخر کار I_p کے برابر ہو گا۔

شکل 2.27: مثال 2.28 کی رو کے خطوط۔

حاصل ہوتا ہے۔ عمومی حل کے تفرق میں $I'(0) = 0$ پر کرنے سے

$$I'(0) = -199.5c_1 - 0.5c_2 + 0.8953(2\pi 50) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کو مساوات 2.114 کی مدد سے حل کرتے ہوئے $c_1 = 1.4099$ اور $c_2 = -0.00497$ ملتے ہیں۔ یوں مخصوص حل یعنی دور میں رو درج ذیل ہو گی۔

$$I(t) = 1.4099e^{-199.5t} - 0.00497e^{-0.5t} + 1.422\sin(100\pi t - 1.003)$$

شکل 2.27-الف میں $I(t)$ کو نقطہ دار لکیر جبکہ I_p کو ٹھوس لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ چونکہ I_h بہت جلد صفر کے برابر ہو جاتا ہے لہٰذا I اور I_p میں صرف شروع میں فرق پایا جاتا ہے۔ شکل-ب میں $E(t)$ اور $I_p(t)$ کو دکھایا گیا ہے۔ ان دونوں میں زاویائی فاصلہ 1.003 ریڈیئن یعنی $57.5°$ ہے جو شکل میں صاف واضح ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ دباو سے رو $57.5°$ پیچھے[98] ہے۔ آپ یہاں خود تسلی کر سکتے ہیں کہ $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباو سے رو پیچھے ہو گی جبکہ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباو سے رو آگے ہو گی۔ $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ کی صورت میں داخلی دباو اور رو ہم زاویہ[99] ہوں گے یعنی ان میں زاویائی فاصلہ نہیں پایا جاتا۔ □

---

[98] lagging
[99] in-phase

جدول 2.3: میکانی اور برقی نظام میں یکساں عناصر۔

برقی نظام	میکانی نظام
امالہ L	کمیت m
مزاحمت R	قصری مستقل c
برق گیر کا بالعکس $\frac{1}{C}$	اسپرنگ مستقلہ k
داخلی دباو کا تفرق $\omega E_0 \cos \omega t$	جبری قوت $F_0 \cos \omega t$
برقی رو $I(t)$	ہٹاو $y(t)$

برقی اور میکانی مقدار کی مماثلت

دو بالکل مختلف نظام کی ایک ہی تفرقی مساوات ہو سکتی ہے۔اسپرنگ اور کمیت کی تفرقی مساوات 2.85 اور سلسلہ وار RLC کی مساوات 2.104 کو یہاں موازنے کے لئے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

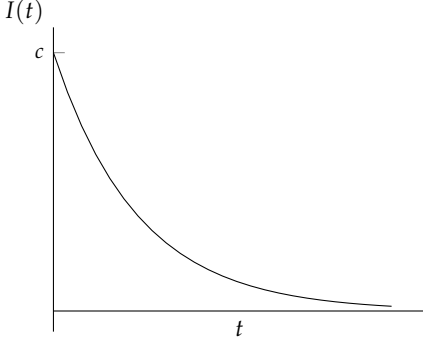
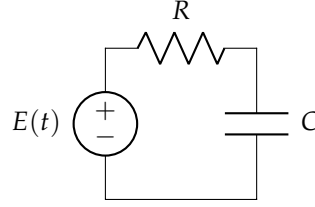
$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t, \quad LI'' + RI' + \frac{I}{C} = E'(t) = \omega E_0 \cos \omega t$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ میکانی نظام میں کمیت اور برقی نظام میں امالہ تفرقی مساوات میں یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔کمیت کے جمود کی طرح امالہ برقی دور کی رو میں تبدیلی کو روکنے کی کوشش کرتی ہے۔اسی طرح c اور R تفرقی مساوات میں یکساں کردار ادا کرتے ہیں اور نظام میں توانائی کا ضیاع کا باعث بنتے ہیں۔ اسپرنگ کا مستقل k اور برق گیر کا بالعکس متناسب $\frac{1}{C}$ یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔میکانی جبری قوت $F_0 \cos \omega t$ اور برقی داخلی دباو کا تفرق $\omega E_0 \cos \omega t$ یکساں کردار ادا کرتے ہیں۔میکانی اور برقی نظام کی یکسانیت کو جدول 2.3 میں پیش کیا گیا ہے۔

میکانی اور برقی نظام میں یکسانیت صحیح معنوں میں صرف مقداری نوعیت کی ہے۔یوں ہم میکانی نظام کے مطابق ایسا برقی دور تخلیق دے سکتے ہیں جس میں رو بالمقابل وقت میکانی نظام میں ہٹاو بالمقابل وقت کے بالکل برابر ہو گا۔یہ ایک انتہائی اہم نتیجہ ہے کیونکہ میکانی نظام مثلاً پل یا بلند عمارت کا برقی نمونہ انتہائی آسانی اور سستے دام بناتے ہوئے اس کی کارکردگی پر تفصیلاً غور کیا جا سکتا ہے۔ مزید، برقی متغیرات مثلاً رو یا دباو انتہائی آسانی سے ٹھیک ٹھیک ناپے جا سکتے ہیں جبکہ میکانی متغیرات اتنے آسانی سے اور ٹھیک ٹھیک ناپنے اتنے آسان ثابت نہیں ہوتے۔

میکانی متغیرات کو برقی متغیرات میں تبدیل کرنے والے کئی مبدل[100] اسی مشابہت پر کام کرتے ہیں۔

---

[100] transducer

سلسلہ وار RC کی رو بالمقابل وقت۔

(الف) سلسلہ وار RC دور۔

شکل 2.28: سلسلہ وار RC دور اور اس کی رو۔

سوالات

سوال 2.151 تا سوال 2.157 خصوصی سلسلہ وار RLC ادوار ہیں۔

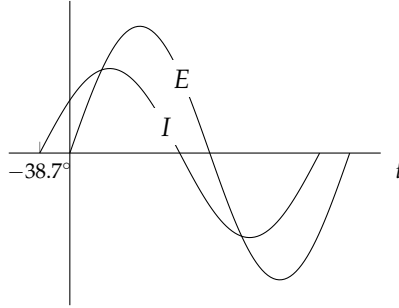
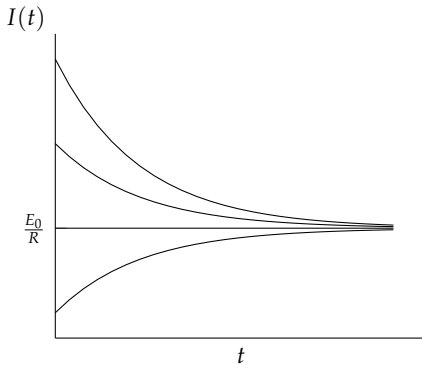
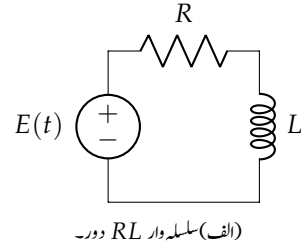
سوال 2.151: سلسلہ وار RC دور شکل 2.28-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں داخلی دباو مستقل مقدار $E(t) = E_0$ ہے۔ دور کی نمونہ کشی کرتے ہوئے برقی رو دریافت کریں۔

جوابات: $RI' + \frac{I}{C} = 0$ ، رو $I = ce^{-\frac{t}{RC}}$ کو شکل 2.28-ب میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 2.152: شکل 2.28-الف کو سائن نما برقی دباو $E(t) = E_0 \sin \omega t$ کے لئے حل کریں۔

جواب: $RI' + \frac{I}{C} = \omega E_0 \cos \omega t$ ، $I = ce^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\omega C E_0}{1+\omega^2 R^2 C^2}(\cos \omega t + \omega RC \sin \omega t)$

سوال 2.153: شکل 2.28-الف میں $R = 50\,\Omega$ ، $C = 0.25\,\text{mF}$ اور $E(t) = 20 \sin 100t$ لیتے ہوئے برقرار حال رو دریافت کریں۔ دباو کو حوالہ لیتے ہوئے برقرار حل رو کا زاویہ کتنا ہے؟ $E(t)$ اور $I(t)$ کے خط اکٹھے کھینچیں۔

جواب: $I_p = \frac{2}{\sqrt{41}} \sin(100t + 0.6747)$ ؛ دباو سے رو $38.7°$ زاویہ آگے ہے۔ RC دور میں داخلی دباو سے رو $0°$ تا $90°$ آگے ہی رہتی ہے۔ شکل 2.29 میں دباو اور رو کو دکھایا گیا ہے جہاں ان کے حیطے ٹھیک تناسب سے نہیں دکھائے گئے ہیں۔

شکل 2.29: RC دور میں دباو سے برقرار رو آگے رہتی ہے۔

سلسلہ وار RL کی رو بالمقابل وقت۔ داخلی دباو مستقل مقدار ہے۔

(الف) سلسلہ وار RL دور۔

شکل 2.30: سلسلہ وار RL دور اور اس کی رو۔

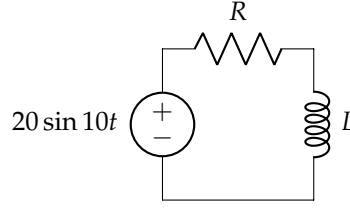
$I(t)$

t

سلسلہ وار RL کی رو بالمقابل وقت۔ داخلی دباو مستقل مقدار ہے۔

R

$20\sin 10t$

L

(الف) سلسلہ وار RL دور۔

شکل 2.31: سوال 2.155 کا دور۔

سوال 2.154: سلسلہ وار RL دور شکل 2.30-الف میں دکھایا گیا ہے۔ داخلی دباو مستقل مقدار $E(t) = E_0$ ہے۔ دور کی نمونہ کشی کرتے ہوئے برقی رو دریافت کریں۔

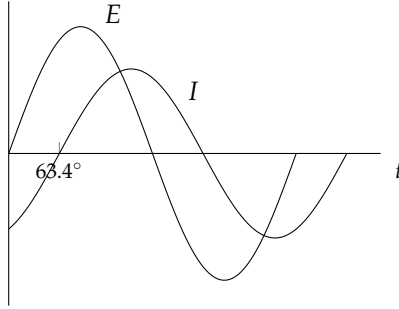
جوابات: $LI' + RI = E_0$ ، $I = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R}$ کو شکل 2.30-ب میں c کی مختلف قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔

سوال 2.155: شکل 2.31-الف میں $R = 5\,\Omega$ اور $L = 1\,\mathrm{H}$ لیں۔ ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر $I(0) = 0$ لیتے ہوئے $I(t)$ حاصل کریں۔ رو کا خط کھینچیں۔

جواب: $LI' + RI = E_0 \sin \omega t$ ، $I = \frac{8}{5}e^{-5t} + \frac{4}{5}\sin 10t - \frac{8}{5}\cos 10t$

سوال 2.156: شکل 2.31-الف میں $R = 10\,\Omega$ اور $L = 2\,\mathrm{H}$ لیں۔ برقرار حل رو دریافت کریں۔ دباو کے حوالے سے رو کا زاویہ کتنا ہے۔ داخلی دباو اور برقرار رو کے خط کھینچیں۔

جواب: $I = \frac{2}{\sqrt{5}}\sin(10t - 1.107)$ ؛ داخلی دباو سے رو $63.4°$ زاویہ پیچھے ہے۔ RL دور میں داخلی دباو سے رو $0°$ تا $90°$ پیچھے ہی رہتی ہے۔ شکل 2.32 میں دونوں خطوط دکھائے گئے ہیں۔

سوال 2.157: سلسلہ وار LC دور میں $L = 2\,\mathrm{H}$ اور $C = 0.02\,\mathrm{F}$ ہیں۔ $R = 0$ ہونے کی ناطے LC دور بلا تقصیر ہو گا۔ یوں LC نظام بلا تقصیر اسپر نگ اور کمیت کی نظام کی طرح ہے۔ اس دور کا داخلی

شکل 2.32: RL دور میں دباو سے برقرار رو پیچھے رہتی ہے۔

دباو $E(t) = \sin 5t$ ہے۔ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر رو اور برق گیر میں ذخیرہ بار دونوں صفر کے برابر ہیں۔رو کی عمومی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $I(t) = \cos 5t - \cos 100t$

سوال 2.158 تا سوال 2.165 شکل 2.26 کے سلسلہ وار RLC دور پر مبنی ہیں۔ان کی برقرار حال رو دریافت کریں۔

سوال 2.158: $R = 6\,\Omega, \quad L = 0.4\,\text{H}, \quad C = 0.1\,\text{F}, \quad E = 100 \sin 2t\,\text{V}$
جواب: $I = 13.65 \sin(2t + 0.611)\ \text{A}$

سوال 2.159: $R = 6\,\Omega, \quad L = 0.4\,\text{H}, \quad C = 0.1\,\text{F}, \quad E = 100\,\text{V}$
جواب: $I = 0\,\text{A}$

سوال 2.160: $R = 6\,\Omega, \quad L = 0.4\,\text{H}, \quad C = 0.1\,\text{F}, \quad E = 100 \sin 5t\,\text{V}$
جواب: $I = \frac{50}{3} \sin 5t\,\text{A}$

سوال 2.161: $R = 6\,\Omega, \quad L = 0.4\,\text{H}, \quad C = 0.1\,\text{F}, \quad E = 100 \sin 7t\,\text{V}$
جواب: $I = 16.25 \sin(7t - 0.225)\ \text{A}$

سوال 2.162: $R = 2\,\Omega, \quad L = 0.8\,\text{H}, \quad C = 1.2\,\text{F}, \quad E = 50 \cos 10t\,\text{V}$
جواب: $I = 5.9 \sin 10t + 1.5 \cos 10t\,\text{A}$

سوال 2.163: $R = 1\,\Omega, \quad L = 0.5\,\text{H}, \quad C = 1.5\,\text{F}, \quad E = 10\cos t\,\text{V}$
جواب: $I = -1.6\sin t + 9.7\cos t\,\text{A}$

سوال 2.164: $R = 0.1\,\Omega,\ L = 0.2\,\text{H},\ C = 0.01\,\text{F}, \quad E = 20\sin 10t + 10\sin 100t\,\text{V}$
جواب: $I = 0.003\sin 100t - 0.526\cos 100t + 0.031\sin 10t + 2.5\cos 10t\,\text{A}$

سوال 2.165: اسپرنگ اور کمیت کے نظام میں کم قصری، فاصل قصری اور زیادہ قصری صورت پائے گئے۔ سلسلہ وار RLC دور میں کم قصری، فاصل قصری اور زیادہ قصری صورت کے شرائط معلوم کریں۔

جوابات: کم قصری صورت $R^2 < \frac{4L}{C}$ دیتی ہے، جبکہ فاصل قصری صورت میں $R^2 = \frac{4L}{C}$ اور زیادہ قصری صورت میں $R^2 > \frac{4L}{C}$ ہو گا۔

سوال 2.166 تا سوال 2.168 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں جن میں ابتدائی رو اور برق گیر میں ذخیرہ ابتدائی بار صفر ہیں۔ان کی مخصوص حل حاصل کریں۔

سوال 2.166: $R = 0.1\,\Omega,\ L = 0.22\,\text{H},\ C = 0.1\,\text{F}, \quad E = 36\sin 15t\,\text{V}$
جواب: $I = 0.52\sin 15t - 13.65\cos 15t + e^{-\frac{5}{22}t}(-0.69\sin 6.74t + 13.65\cos 6.74t)\,\text{A}$

سوال 2.167: $R = 2\,\Omega,\ L = 0.1\,\text{H},\ C = 0.1\,\text{F}, \quad E = 10\sin 100t\,\text{V}$
جواب: $I = 0.196\sin 100t - 0.97\cos 100t + e^{-10t}(0.97 - 9.9t)\,\text{A}$

سوال 2.168: $R = 4\,\Omega,\ L = 0.4\,\text{H},\ C = 0.2\,\text{F}, \quad E = 5\sin 25t\,\text{V}$
جواب: $I = 0.179\sin 25t - 0.437\cos 25t - 0.103e^{-1.46t} + 0.541e^{-8.54t}\,\text{A}$

2.10 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

پہلے باب میں صفحہ 57 پر مثال 1.23 میں ہم نے مقدار معلوم بدلنے کے طریقے[101] سے تفرقی مساوات کا حل نکالا۔ اس ترکیب[102] سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2.115}$$

کا حل حاصل کرتے ہیں جہاں کھلے وقفے I پر $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ استمراری تفاعل ہیں۔ اس مساوات کو معیاری صورت میں لکھنا ضروری ہے جہاں y'' کا عددی سر اکائی (1) کے برابر ہے۔ حصہ 2.6 میں ہم نے دیکھا کہ مساوات 2.115 کے مطابقتی متجانس مساوات کے عمومی حل y_h اور مساوات 2.115 کے کسی بھی مخصوص حل y_p کا مجموعہ اس غیر متجانس مساوات کا عمومی حل دیتا ہے۔ سادہ $r(x)$ کی صورت میں نا معلوم عددی سر کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے y_p حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس ترکیب پر حصہ 2.7 میں غور کیا گیا جبکہ حصہ 2.8 اور حصہ 2.9 میں اس کا استعمال کیا گیا۔

نا معلوم عددی سر کی ترکیب ان $r(x)$ کے لئے قابل استعمال ہے جن کے تفرق، اصل تفاعل کی صورت رکھتے ہوں مثلاً سائن نما تفاعل، قوت نمائی تفاعل اور x^n تفاعل۔ اس کے برعکس مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ زیادہ مشکل تفاعل کے لئے کار آمد ہے۔ اس ترکیب کے تحت مساوات 2.115 کا مخصوص حل

$$y_p(t) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\,\mathrm{d}x \tag{2.116}$$

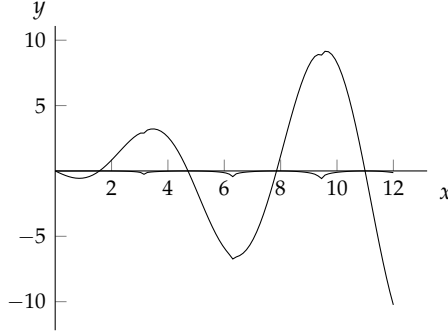
ہے جہاں y_1 اور y_2 ، مطابقتی متجانس مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.117}$$

کے حل کی اساس ہیں اور W ان کی ورونسکی [حصہ 2.6 دیکھیں] ہے۔

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' \tag{2.118}$$

مساوات 2.115 میں متغیر عددی سر کی صورت میں مساوات 2.116 کے تکملات عموماً مشکلات پیش کرتے ہیں لہٰذا جہاں ممکن ہو وہاں نا معلوم عددی سر کی ترکیب استعمال کریں۔ مساوات 2.116 کے حصول سے پہلے ایک

[101] variation of parameter
[102] یہ ترکیب یوسف لوئی لیگرنج سے منسوب ہے۔

شکل 2.33: مثال 2.29 کے خطوط۔

مثال دیکھتے ہیں جہاں نا معلوم عددی سر کی ترکیب قابل استعمال نہیں ہے لہٰذا موجودہ ترکیب ہی استعمال کی جائے گی۔

مثال 2.29: درج ذیل غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا عمومی حل دریافت کریں۔

$$y'' + y = \operatorname{cosec} x$$

حل: کسی بھی کھلے وقفے پر متجانس سادہ تفرقی مساوات کی اساس $y_1 = \cos x$ اور $y_2 = \sin x$ ہیں جن سے ورونسکی لکھتے ہیں۔

$$W = \cos^2 x - \sin x(\sin x) = 1$$

مساوات 2.116 سے y_p حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_p(t) &= -\cos x \int \sin x \operatorname{cosec} x \, dx + \sin x \int \cos x \operatorname{cosec} x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x \ln|\sin x| \end{aligned} \tag{2.119}$$

جہاں تکمل کے مستقل صفر چننے گئے ہیں۔

شکل 2.33 میں y_p اور اس کا دوسرا جزو دکھائے گئے ہیں۔ y_p کا دوسرا جزو اتنا کم ہے کہ حقیقتاً پہلا جزو $-x \cos x$ ہی y_p کی قیمت تعین کرتا ہے۔ غیر متجانس تفرقی مساوات کا عمومی حل $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ اور y_p کا مجموعہ ہو گا۔

$$y = y_h + y_p = (c_1 - x) \cos x + (c_2 + \ln|\sin x|) \sin x \tag{2.120}$$

مساوات 2.119 میں تکمل لیتے ہوئے تکمل کے مستقل a اور b بھی شامل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= -\cos x \int \sin x \operatorname{cosec} x \, dx + \sin x \int \cos x \operatorname{cosec} x \, dx \\
&= -\cos x (x + a) + \sin x (\ln|\sin x| + b)
\end{aligned}$$

ملتا ہے۔مساوات 2.120 کے ساتھ موازنہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ از خود عمومی حل ہے۔

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.115 کا عمومی حل مساوات 2.116 میں تکملات کے مستقل شامل کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

□

مقدار معلوم بدلنے کے طریقے کا حصول

اس ترکیب میں متجانس تفرقی مساوات کے حل

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

میں مستقل (یعنی مقدار معلوم) c_1 اور c_2 کی جگہ نا معلوم تفاعل $u(x)$ اور $v(x)$ پر کئے جاتے ہیں۔اسی لئے اس کو مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ کہتے ہیں۔ $u(x)$ اور $v(x)$ کی ایسی قیمتیں چننی جاتی ہیں کہ

$$y_p(x) = u(x) y_1(x) + v(x) y_2(x) \tag{2.121}$$

غیر متجانس تفرقی مساوات 2.115 کا مخصوص حل ہو۔حصہ 2.6 میں مسئلہ 2.4 کے تحت کھلے وقفہ I پر استمراری p اور q کی صورت میں اس وقفے پر y_h موجود ہو گا۔جبری تفاعل r کے استمراری ہونے کی ضرورت جلد پیش آئے گی۔

مساوات 2.121 اور اس کے تفرق کو مساوات 2.115 میں پر کرتے ہوئے u اور v دریافت کرتے ہیں۔مساوات 2.121 کا تفرق لکھتے ہیں۔

$$y_p' = u' y_1 + u y_1' + v' y_2 + v y_2'$$

ہم ایسی u اور v دریافت کر سکتے ہیں کہ y_p غیر متجانس تفرق مساوات پر پورا اترتا ہو جبکہ u اور v درج ذیل مساوات پر پورا اترتے ہوں۔

$$u' y_1 + v' y_2 = 0 \tag{2.122}$$

یوں y'_p نسبتاً آسان صورت اختیار کرتی ہے

$$y'_p = uy'_1 + vy'_2 \tag{2.123}$$

جس کا تفرق لیتے ہوئے y''_p کی مساوات ملتی ہے۔

$$y''_p = u'y'_1 + uy''_1 + v'y'_2 + vy''_2 \tag{2.124}$$

مساوات 2.121، مساوات 2.123 اور مساوات 2.124 کو مساوات 2.115 میں پر کرتے ہوئے

$$(u'y'_1 + uy''_1 + v'y'_2 + vy''_2) + p(uy'_1 + vy'_2) + q(uy_1 + vy_2) = r$$

u ، اور v کے عددی سر اکٹھے کرتے ہیں۔

$$u(y''_1 + py'_1 + qy_1) + v(y''_2 + py'_2 + qy_2) + u'y'_1 + v'y'_2 = r$$

چونکہ y_1 اور y_2 متجانس مساوات 2.117 کے حل ہیں لہٰذا دونوں قوسین صفر کے برابر ہیں اور درج بالا مساوات نسبتاً سادہ صورت اختیار کر لیتی ہے۔

$$u'y'_1 + v'y'_2 = r \tag{2.125}$$

یہاں مساوات 2.122 کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$u'y_1 + v'y_2 = 0 \tag{2.126}$$

مساوات 2.125 اور مساوات 2.126 دو ہمزاد مساوات ہیں جنہیں حل کرتے ہوئے u اور v حاصل کرتے ہیں۔ v' حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو $-y_2$ سے اور دوسری مساوات کو y'_2 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں

$$u'(y_1y'_2 - y_2y'_1) = -y_2r \quad \implies \quad u'W = -y_2r$$

جہاں W مساوات 2.118 ہے۔اسی طرح u' حذف کرنے کی خاطر پہلی مساوات کو y_1 اور دوسری کو $-y'_1$ سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$v'(y_1y'_2 - y_2y'_1) = y_1r \quad \implies \quad v'W = y_1r$$

چونکہ y_1 اور y_2 حل کی اساس ہیں لہٰذا حصہ 2.6 میں مسئلہ 2.3 کے تحت $W \neq 0$ ہو گا۔اس طرح درج بالا مساوات کو W سے تقسیم کیا جا سکتا ہے جس سے

$$u' = -\frac{y_2r}{W}, \quad v' = \frac{y_1r}{W}$$

ملتے ہیں۔ تکمل لیتے ہوئے u اور v حاصل ہوتے ہیں۔

$$u = -\int \frac{y_2 r}{W}\,\mathrm{d}x, \quad v = \int \frac{y_1 r}{W}\,\mathrm{d}x$$

چونکہ کھلے وقفہ I پر r استمراری تفاعل ہے لہٰذا درج بالا تکملات موجود ہیں۔ حاصل u اور v کو مساوات 2.121 میں پر کرتے ہوئے مساوات 2.116 حاصل ہوتا ہے۔

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\,\mathrm{d}x$$

سوالات

مساوات 2.169 تا مساوات 2.169 کو مقدار معلوم بدلنے کے طریقے یا نا معلوم عددی سر کی ترکیب سے حل کریں۔

سوال 2.169: $y'' + 4y = \sec 2x$
جواب: $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x|$

سوال 2.170: $y'' + 4y = \operatorname{cosec} 2x$
جواب: $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln|\sin 2x|$

سوال 2.171: $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3\cos x$
جواب: $y_p = c_1x^2 + c_2x - x\cos x$

سوال 2.172: $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{cosec} x$
جواب: $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x) - xe^x\cos x + e^x\sin x\ln|\sin x|$

سوال 2.173: $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 2x$
جواب: $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}(1-2x)\cos 2x$

سوال 2.174: $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^2}$
جواب: $y_p = (ax+b)e^{-3x} - e^{-3x}(1+\ln x)$

سوال 2.175: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$
جواب: $y_p = (ax+b)e^{-x} - xe^{-x}(1-\ln x)$

سوال 2.176: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$

جواب: $y_p = (ax+b)e^{-x} - e^{-x}(1 + \ln x)$

سوال 2.177: $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^3}$

جواب: $y_p = (ax+b)e^{-x} + \frac{e^{-x}}{2x}$

سوال 2.178: $y'' + 4y = \sinh 2x$

جواب: $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{8}\sinh 2x$

سوال 2.179: $y'' - 2y' + y = 28x^{\frac{1}{3}}e^x$

جواب: $y_p = (ax+b)e^x + 9x^{\frac{7}{3}}e^x$

سوال 2.180: $y'' + 2y' + y = e^{-x}\operatorname{cosec}^3 x$

جواب: $y_p = \frac{1}{2}e^{-x}\operatorname{cosec} x[(A + B\sin 2x) + (1-A)\cos 2x]$

سوال 2.181: $x^2y'' + 6xy' + 6y = x$

جواب: $y_p = \frac{x}{12} + c_1x^{-2} + c_2x^{-3}$

سوال 2.182: $x^2y'' + 7xy' + 9y = 25x^2$

جواب: $y_p = x^2 + c_1x^{-3} + c_2x^{-2}\ln|x|$

باب 3

بلند رتبی خطی سادہ تفرقی مساوات

دو رتبی خطی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنے کے طریقے بلند رتبی خطی سادہ تفرقی مساوات کے لئے بھی قابل استعمال ہیں۔ہم دیکھیں گے کہ بلند رتبی صورت میں مساوات زیادہ پیچیدہ ہوں گی، امتیازی مساوات کے جذر بھی تعداد میں زیادہ اور حصول میں نسبتاً مشکل ہوں گے اور ورونسکی زیادہ اہم کردار ادا کرے گا۔

3.1 متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

n رتبی سادہ تفرقی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم متغیرہ $y(x)$ کا $y^n = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ سب سے بلند رتبی تفرق ہو۔ایسی سادہ تفرقی مساوات کو

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں y اور کم رتبی تفرق موجود یا غیر موجود ہو سکتے ہیں۔ایسی مساوات کو خطی کہتے ہیں اگر اس کو

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \tag{3.1}$$

لکھنا ممکن ہو۔صفحہ 75 پر دو رتبی خطی سادہ تفرقی مساوات کی بات کی گئی۔موجودہ مساوات میں $n = 2$ ، $p_1 = p$ اور $p_0 = q$ پر کرنے سے دو رتبی مساوات حاصل ہو گی۔عددی سر $p_0(x)$ تا $p_n(x)$ اور جبری

تفاعل $r(x)$ غیر تابع متغیرہ x کے کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں جبکہ $y(x)$ نا معلوم متغیرہ ہے۔ خطی مساوات کو معیاری صورت میں لکھا گیا ہے جہاں $y^{(n)}$ کا عددی سر اکائی 1 ہے۔ تفرقی مساوات میں $p_n(x)y^{(n)}$ موجود ہونے کی صورت میں پوری مساوات کو $p_n(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کریں۔ جو تفرقی مساوات درج بالا صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو **غیر خطی** کہلاتی ہے۔

کسی کھلے وقفے I پر $r(x)$ **مکمل صفر** $r \equiv 0$ ہونے کی صورت میں مساوات 3.1 سے **متجانس مساوات**

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{3.2}$$

حاصل ہوتی ہے۔ کھلے وقفے پر $r(x)$ کے مکمل صفر ہونے سے مراد یہ ہے کہ اس وقفے پر ہر x کے لئے $r(x)$ کی قیمت صفر کے برابر ہے۔ دو رتبی تفرقی مساوات کی طرح اگر $r(x)$ مکمل صفر نہ ہو تب مساوات **غیر متجانس** کہلائے گی۔

کھلے وقفہ I پر n رتبی خطی یا غیر خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل $y = h(x)$ سے مراد ایسا تفاعل ہے جو I پر معین ہو، کھلے وقفے پر اس کا n رتبی تفرق موجود ہو اور تفرقی مساوات میں y اور اس کے تفرقات کی جگہ h اور اس کے تفرقات پر کرنے سے مساوات کے دونوں اطراف بالکل یکساں حاصل ہوں۔

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات: خطی میل اور عمومی حل

خطی میل یا **اصول خطیت** جس کا ذکر صفحہ 78 مسئلہ 2.1 میں کیا گیا بلند رتبی خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کے لئے بھی درست ہے۔

مسئلہ 3.1: بنیادی مسئلہ برائے متجانس خطی سادہ بلند رتبی تفرقی مساوات
کھلے وقفہ I پر متجانس خطی بلند رتبی تفرقی مساوات 3.2 کے حل کا خطی میل بھی I پر اس مساوات کا حل ہو گا۔ بالخصوص ان حل کو مستقل مقدار سے ضرب دینے سے بھی I پر مساوات کے حل حاصل ہوتے ہیں۔ (یہ اصول غیر خطی اور غیر متجانس مساوات پر لاگو نہیں ہوتا ہے۔)

اس کا ثبوت گزشتہ باب میں دئے گئے ثبوت کی طرح ہے جس کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہماری بقایا گفتگو ہو بہو دو رتبی تفرقی مساوات کی طرح ہو گی لہٰذا یہاں بلند رتبی خطی متجانس مساوات کی عمومی حل کی بات کرتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر n عدد تفاعل کی **خطی طور غیر تابع** ہونے کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

تعریف: عمومی حل، اساس اور مخصوص حل
کھلے وقفے I پر مساوات 3.2 کا **عمومی حل**

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) \tag{3.3}$$

ہے جہاں $y_1(x)$ تا $y_n(x)$ حل کی اساس اور c_1 تا c_2 اختیاری مستقل ہیں۔یوں y_1 تا y_n کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

عمومی حل کے مستقل کی قیمتیں مقرر کرنے سے **مخصوص حل** حاصل ہو گا۔

تعریف: خطی طور تابع تفاعل اور خطی طور غیر تابع تفاعل
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر n عدد تفاعل $y_1(x)$ تا $y_n(x)$ معین ہیں۔

وقفہ I پر معین y_1 تا y_n ، اس وقفے پر اس صورت **خطی طور غیر تابع**[1] کہلاتے ہیں جب پورے وقفے پر

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \cdots + k_ny_n(x) = 0 \tag{3.4}$$

سے مراد

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

ہو۔ k_1 تا k_n میں کم از کم ایک کی قیمت صفر نہ ہونے کی صورت میں مساوات 3.4 پر پورا اترتے ہوئے حل y_1 تا y_n **خطی طور تابع**[2] کہلاتے ہیں۔

y_1 تا y_n میں (کم از کم ایک) تفاعل کو اس صورت بقایا تفاعل کے **خطی میل** کے طرز پر لکھا جا سکتا ہے جب اس وقفے پر y_1 تا y_n خطی طور تابع ہوں۔ یوں اگر $k_1 \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 3.4 کو k_1 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$y_1 = -\frac{1}{k_1}(k_2y_2 + k_3y_3 + \cdots + k_ny_n)$$

---

[1] linearly independent
[2] linearly dependent

لکھ سکتے ہیں جو تناسبی رشتہ ہے۔یہ مساوات کہتی ہے کہ y_1 کو بقایا تفاعل کے خطی میل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی کو خطی طور تابع کہتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n=2$ کی صورت میں ہمیں حصہ 2.6 میں بیان کئے گئے تصورات ملتے ہیں۔

مثال 3.1: خطی طور تابع
ثابت کریں کہ تفاعل $y_1=2\sin x$ ، $y_2=1.5x^2$ ، $y_3=5\cos x+\sin x$ اور $y_4=4\cos x$ کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور تابع ہیں۔

حل:ہم $y_3=\frac{1}{2}y_1+0y_2+\frac{5}{4}y_4$ لکھ سکتے ہیں لہٰذا y_1 تا y_4 خطی طور تابع تفاعل ہیں۔ □

مثال 3.2: خطی طور غیر تابع
ثابت کریں کہ $y_1=x$ ، $y_2=x^3$ اور $y=x^4$ کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں۔

حل:ہم مساوات $k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3=0$ میں مختلف x کی قیمتیں پر کرتے ہوئے k_1 تا k_3 دریافت کرتے ہیں۔کھلے وقفے پر نقطہ $x=1$ ، $x=-1$ اور $x=2$ چنتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
k_1+k_2+k_3&=0\\
-k_1-k_2+k_3&=0\\
2k_1+8k_2+16k_3&=0
\end{aligned}
$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $k_1=0$ ، $k_2=0$ اور $k_3=0$ ملتا ہے جو خطی طور غیر تابع ہونے کا ثبوت ہے۔ □

مثال 3.3: اساس۔عمومی حل
تین رتبی سادہ تفرقی مساوات $y^{(3)}-y'=0$ کا عمومی حل تلاش کریں۔ $y^{(3)}$ سے مراد $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$ ہے۔

حل:حصہ 2.2 کی طرح ہم اس متجانس مساوات کا حل $y=e^{\lambda x}$ تصور کرتے ہوئے امتیازی مساوات

$$\lambda^3-\lambda=0$$

حاصل کرتے ہیں۔اس کو $\lambda(\lambda^2-1)=0$ لکھتے ہوئے $\lambda=0$ اور $\lambda=\mp 1$ ملتے ہیں جن سے اساس $y_1=c$ ، $y_2=e^x$ اور $y_3=e^{-x}$ ملتا ہے۔جیسا مثال 3.5 میں ثابت کیا جائے گا، یہ اساس کسی بھی کھلے وقفے پر خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا کسی بھی کھلے وقفے پر عمومی حل

$$y=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}$$

ہو گا۔ □

ابتدائی قیمت مسئلہ۔وجودیت اور یکتائی

مساوات 3.2 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 3.2 اور درج ذیل n ابتدائی شرائط پر مشتمل ہو گا

$$y(x_0)=K_0,y'(x_0)=K_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=K_{n-1} \tag{3.5}$$

جہاں x_0 کھلے وقفے I پر ایک نقطہ اور K_0 تا K_{n-1} اس نقطے پر دیے گئے مقدار ہیں۔

صفحہ 131 پر مسئلہ 2.2 کو وسعت دیتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

مسئلہ 3.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی برائے ابتدائی قیمت بلند رتبی تفرقی مساوات
کھلے وقفہ I پر مساوات 3.2 کے عددی سر p_0 تا p_{n-1} استمراری ہونے کی صورت میں اگر x_0 کھلے وقفے پر پایا جاتا ہو تب مساوات 3.2 اور مساوات 3.5 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلے کا I پر یکتا حل $y(x)$ موجود ہو گا۔

حل کی موجودگی کا ثبوت اس کتاب میں نہیں دیا جائے گا۔کتاب کے آخر میں ضمیمہ ا میں حل کی یکتائی کے ثبوت میں معمولی رد بدل سے یکتائی ثابت کی جا سکتی ہے۔

مثال 3.4: تین رتبی یولر کوشی مساوات کا ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں۔

$$x^3y'''-5x^2y''+12xy'-12y=0,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=-1,\quad y''(1)=0$$

حل:ہم تفرقی مساوات میں تفاعل پرکھ $y=x^m$ پر کرتے ہوئے امتیازی مساوات

$$m^3-8m^2+19m-12=0$$

حاصل کرتے ہیں جس کے جذر $m=1$ ، $m=3$ اور $m=4$ ہیں۔جذر کو مختلف طریقوں سے حاصل کیا جاتا ہے البتہ یہاں جذر حاصل کرنے پر بحث نہیں کی جائے گی۔ یوں حل کی اساس x ، $y_1=x$ ، $y_2=x^3$ اور $y_3=x^4$ ہیں جنہیں مثال 3.2 میں خطی طور غیر تابع ثابت کیا گیا۔اس طرح عمومی حل

$$y=c_1x+c_2x^3+c_3x^4$$

ہو گا۔دیے گئے تفرقی مساوات کو x^3 سے تقسیم کرتے ہوئے y''' کا عددی سر اکائی حاصل کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے۔معیاری صورت میں مساوات کے دیگر عددی سر $x=0$ پر غیر استمراری ہیں۔اس کے باوجود درج بالا عمومی حل تمام x بشمول $x=0$ کے لئے درست ہے۔

عمومی حل اور اس کے تفرقات $y'=c_1+3c_2x^2+4c_3x^3$ اور $y''=6c_2x+12c_3x^2$ میں ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل ہمزاد مساوات ملتے ہیں

$$\begin{aligned}c_1+c_2+c_3&=1\\c_1+3c_2+4c_3&=-1\\6c_2+12c_3&=0\end{aligned}$$

جن کا حل $c_1=3$ ، $c_2=-4$ اور $c_3=2$ ہے۔اس طرح مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$y=3x-4x^3+2x^4$$

□

خطی طور غیر تابع حل۔ورونسکی

عمومی حل کے حصول کے لئے ضروری ہے کہ حل خطی طور غیر تابع ہوں۔اگرچہ عموماً حل کو دیکھ کر ہی اندازہ ہو جاتا ہے کہ وہ خطی طور غیر تابع ہیں یا نہیں ہیں، البتہ ایسا معلوم کرنے کا منظم طریقہ زیادہ بہتر ہو گا۔صفحہ 132 پر مسئلہ 2.3 دو رتبی $n=2$ مساوات کے علاوہ بلند رتبی مساوات کے لئے بھی درست ہے۔ بلند رتبی مساوات کی صورت میں ورونسکی درج ذیل ہو گی۔

$$W(y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n'\\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}\tag{3.6}$$

ورونسکی تفرقی مساوات کے حل y_1 تا y_n پر مبنی ہے جو از خود x پر مبنی ہیں۔ورونسکی غیر صفر ہونے کی صورت میں y_1 تا y_n خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

مسئلہ 3.3: خطی طور تابع اور غیر تابع حل
کھلے وقفہ I پر استمراری عددی سر $p_0(x)$ تا $p_{n-1}(x)$ والے سادہ تفرقی مساوات 3.2 کے I پر حل y_1 تا y_n اس صورت I پر خطی طور تابع ہوں گے جب ان کے ورونسکی[3] کی قیمت کسی x_0 پر صفر کے برابر ہو، جہاں x_0 کھلے وقفے I پر پایا جاتا ہے۔مزید اگر نقطہ $x = x_0$ پر $W = 0$ ہو تب پورے I پر W مکمل صفر[4] ہو گا۔یوں اگر I پر کوئی ایسا x پایا جاتا ہو جس پر W صفر کے برابر نہ ہو تب I پر y_1 تا y_n خطی طور غیر تابع ہوں گے اور یہ حل کی اساس ہوں گے۔

ثبوت :

(الف) تصور کریں کہ کھلے وقفہ I پر y_1 تا y_n مساوات 3.2 کے حل ہیں۔یوں خطی طور غیر تابع کی تعریف سے

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n = 0 \tag{3.7}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ I پر اس مساوات کی $n-1$ تفرقات لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} k_1 y_1' + \cdots + k_n y_n' &= 0 \\ k_1 y_1'' + \cdots + k_n y_n'' &= 0 \\ &\vdots \\ k_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + k_n y_n^{(n-1)} &= 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 n عدد خطی متجانس ہمزاد الجبرائی مساوات کا نظام ہے جس کا غیر صفر حل[5] k_1 تا k_n ہے لہٰذا I پر تمام x کے لئے، اس نظام کی عددی سر قالب کا مقطع[6]، مسئلہ کریمر[7] (مسئلہ 8.15) کے تحت، صفر کے برابر ہو گی۔اب قالب کا مقطع ہی ورونسکی ہے لہٰذا I پر تمام x کے لئے W صفر کے برابر ہے۔

Wronskian[3]
identically zero[4]
non trivial solution[5]
determinant[6]
Cramer's theorem[7]

(ب) مسئلہ کریمر کو استعمال کرتے ہوئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ $W=0$ کی صورت میں مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 خطی متجانس ہمزاد الجبرائی مساوات کے نظام کا $x=x_0$ پر غیر صفر حل k_1^* تا k_n^* پایا جاتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے، I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y^*=k_1^*y_1+\cdots+k_n^*y_n$ لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 3.7 اور مساوات 3.8 کے تحت y^* ابتدائی شرائط $y^*(x_0)=0$ تا $y^{*(n-1)}(x_0)=0$ پر پورا اترتا ہے۔ انہیں ابتدائی شرائط پر حل $y\equiv 0$ بھی پورا اترتا ہے اور یوں مسئلہ 3.2 کے تحت، چونکہ مساوات 3.7 کے عددی سر I پر استمراری ہیں، لہٰذا $y^*=y$ ہو گا۔ اس طرح $y^*=k_1^*y_1+\cdots+k_n^*y_n\equiv 0$ پورے I پر ہو گا جس کا مطلب ہے کہ I پر y_1 تا y_n خطی طور تابع ہیں۔

(پ) اگر W کی قیمت x_0 پر صفر ہو جہاں x_0 کھلے وقفہ I پر پایا جاتا ہو، تب ثبوت (ب) کے تحت خطی طور تابع ہونا ثابت ہوتا ہے اور یوں ثبوت (الف) کے تحت $W\equiv 0$ ہو گا۔ اس طرح اگر I پر نقطہ x_1 پر W صفر نہ ہو تب y_1 تا y_n کھلے وقفہ I پر خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

□

مثال 3.5: اساس۔ ورونسکی

ثابت کریں کہ مثال 3.3 میں حاصل کردہ حل $y_1=c$ ، $y_2=e^x$ اور $y_3=e^{-x}$ خطی طور غیر تابع ہیں۔

حل: مساوات 3.6 کے طرز پر ورونسکی لکھ کر

$$W=\begin{vmatrix} c & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^x \end{vmatrix} = ce^xe^{-x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2c$$

حل کیا گیا ہے جہاں پہلی قطار سے c ، دوسری قطار سے e^x اور تیسری قطار سے e^{-x} باہر نکال کر قالب کی سادہ صورت حاصل کی گئی اور اس کے بعد پہلی قطار سے قالب کو پھیلا کر اس کا مقطع حاصل کا گیا ہے۔ چونکہ x کی کسی بھی قیمت کے لئے $W\neq 0$ ہے لہٰذا کسی بھی کھلے وقفے پر y_1 تا y_3 خطی طور غیر تابع ہیں۔ □

مساوات 3.2 کے عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں

پہلے عمومی حل کی وجودیت پر بات کرتے ہیں۔ صفحہ 135 پر دیا گیا مسئلہ 2.4 بلند رتبی تفرقی مساوات کے لئے بھی کار آمد ہے۔

مسئلہ 3.4: وجودیت عمومی حل
کھلے وقفہ I پر استمراری $p_0(x)$ اور $p_{n-1}(x)$ کی صورت میں مساوات 3.2 کا عمومی حل I پر موجود ہو گا۔

ثبوت: ہم I پر کوئی نقطہ x_0 لیتے ہیں۔مسئلہ 3.2 کے تحت مساوات 3.2 کے n عدد حل y_1 تا y_n پائے جاتے ہیں جو مساوات 3.5 میں دیے گئے ابتدائی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔ہم ابتدائی شرائط یوں چنتے ہیں کہ $K_{j-1}=1$ ہوں جبکہ بقایا K صفر کے برابر ہوں۔اس طرح x_0 پر حل کی ورونسکی کی قیمت اکائی (1) ہو گی۔مثلاً $n=3$ کی صورت میں $y_1(x_0)=1$ ، $y_2'(x_0)=1$ اور $y_3''(x_0)=1$ ہوں گے جبکہ بقایا تمام ابتدائی قیمتیں صفر کے برابر ہوں گی۔اس طرح ورونسکی

$$W(y_1(x_0),y_2(x_0),y_3(x_3))=\begin{vmatrix}y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0)\\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

اکائی ہو گی۔یوں کسی بھی n کے لئے حل y_1 تا y_n مسئلہ 3.3 کے تحت I پر خطی طور غیر تابع ہوں گے۔یہ حل اساس ہیں لہٰذا I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$ ہو گا۔

□

اب ہم اس قابل ہیں کہ ثابت کریں کہ مساوات 3.2 کے عمومی حل میں مساوات 3.2 کے تمام حل شامل ہیں۔مساوات 3.2 کے عمومی حل کے اختیاری مستقل میں موزوں قیمتیں پر کرتے ہوئے مساوات 3.2 کا کوئی بھی حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں n رتبی خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا ہے۔نادر حل سے مراد ایسا حل ہے جس کو عمومی حل سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 3.5: عمومی حل میں تمام حل شامل ہیں
کھلے وقفے I پر استمراری $p_0(x)$ تا $p_{n-1}(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 3.2 کے ہر حل $y=Y(x)$ کو

$$Y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_nY_n(x) \tag{3.9}$$

لکھا جس سکتا ہے جہاں y_1 تا y_n کھلے وقفے I پر مساوات 3.2 کے حل کی اساس ہیں جبکہ C_1 تا C_n موزوں مستقل ہیں۔

ثبوت : فرض کریں کہ I پر مساوات 3.2 کا عمومی حل $y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ ہے جبکہ Y مساوات 3.2 کا کوئی بھی حل ہے۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر کسی بھی نقطہ x_0 پر ایسے c_1 تا c_n دریافت کیے جا سکتے ہیں کہ x_0 پر y اور اس کے پہلے $n-1$ رتبی تفرقات اسی نقطے پر Y اور اس کے پہلے $n-1$ رتبی تفرقات کے برابر ہوں۔ اس طرح x_0 پر

$$
\begin{aligned}
c_1y_1 \cdots + c_ny_n &= Y \\
c_1y_1' + \cdots + c_ny_n' &= Y' \\
&\vdots \\
c_1y_1^{(n-1)} + \cdots + c_ny_n^{(n-1)} &= Y^{(n-1)}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

ہو گا جو الجبرائی مساوات کا خطی نظام ہے، جس کے نا معلوم متغیرات c_1 تا c_n جبکہ اس کا عددی سر قالب، x_0 پر حل y_1 تا y_n کا، ورونسکی ہے۔چونکہ y_1 تا y_n اساس ہیں للٰذا مسئلہ 3.3 کے تحت اس کی ورونسکی غیر صفر ہے۔یوں باب-7 میں دیے گئے قاعدہ کریمر[8] کے تحت مساوات 3.10 کا یکتا حل $c_1 = C_1$ تا $c_n = C_n$ پایا جاتا ہے۔عمومی حل میں اختیاری مستقل کی جگہ ان قیمتوں کو پر کرتے ہوئے I پر مخصوص حل

$$y^*(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

ملتا ہے۔ مساوات 3.10 کے تحت x_0 پر y^* اور اس کے پہلے $n-1$ تفرقات، x_0 پر Y اور اس کے پہلے $n-1$ تفرقات کے برابر ہیں یعنی x_0 پر y^* اور Y یکساں ابتدائی شرائط پر پورا اترتے ہیں۔یوں مسئلہ 3.2 کے تحت I پر $y^* \equiv Y$ ہو گا جو درکار ثبوت ہے۔

□

متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات پر ہماری بحث یہاں اختتام پذیر ہوتی ہے۔حزب توقع $n = 2$ کے لئے یہ بحث ہو بہو حصہ 2.6 کی طرز اختیار کر لیتی ہے۔

---

[8] Cramer's rule

سوالات

سوال 3.1 تا سوال 3.6 میں دیے گئے حل کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔ورونسکی استعمال کرتے ہوئے، ثابت کریں کہ کسی بھی کھلے وقفے پر، دیے حل خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا یہ حل کی اساس ہیں۔

سوال 3.1: $y''' = 0, \quad 1,\, x,\, x^2$
جواب: $W = 2$

سوال 3.2: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0, \quad e^x,\, e^{-x},\, e^{2x}$
جواب: $W = -6e^{2x}$

سوال 3.3: $y^{(4)} + 2y'' + y = 0, \quad \cos x,\, \sin x,\, x\cos x,\, x\sin x$
جواب: $W = 4$

سوال 3.4: $y^{(4)} + 12y^{(3)} + 54y^{(2)} + 108y^{(1)} + 81y = 0, \quad e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}$
جواب: $W = 12e^{-12x}$

سوال 3.5: $y''' + 4y'' + 13y' = 0, \quad 1,\, e^{-2x}\cos 3x,\, e^{-2x}\sin 3x$
جواب: $W = 39e^{-4x}$

سوال 3.6: $x^2y'' - 3xy'' + 3y' = 0, \quad 1,\, x^2,\, x^4$
میں کھلا وقفہ $x > 0$ ہے۔ثابت کریں کہ دیے گئے حل درست اور اساس ہیں۔

جواب: $W = 16x^3$ صرف $x = 0$ پر صفر کے برابر ہے لیکن یہ نقطہ کھلے وقفے میں شامل نہیں ہے لہٰذا کھلے وقفے پر $W \neq 0$ ہے۔

سوال 3.7 تا سوال 3.10: کیا دیے گئے تفاعل کھلے وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر خطی طور غیر تابع ہیں؟

سوال 3.7: $\sin x,\, \cos x,\, 1$
جواب: $W = -1$ ہے لہٰذا یہ خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 3.8: $e^{-x},\, xe^{-x},\, x^2e^{-x}$
جواب: $W = 2e^{-3x}$ ہے لہٰذا یہ تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 3.9: $\sinh x,\, \cosh x,\, e^x$
جواب: $W = 0$ ہے لہٰذا یہ تفاعل خطی طور تابع ہیں۔

سوال 3.10: $\sin x,\, \cos x,\, e^x$
جواب: $W = -2e^x$ ہے لہٰذا تفاعل خطی طور غیر تابع ہیں۔

3.2 مستقل عددی سر والے متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

ہم حصہ 2.2 کے طرز پر چلتے ہوئے، مستقل عددی سر والے متجانس خطی n رتبی سادہ تفرقی مساوات

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \tag{3.11}$$

کا حل حاصل کرتے ہیں جہاں $y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ اور a_0 تا a_{n-1} مستقل مقدار ہیں۔ حصہ 2.2 کی طرح ہم اس مساوات میں $y = e^{\lambda}$ پر کرتے ہوئے اس کی امتیازی مساوات

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{3.12}$$

حاصل کرتے ہیں۔ اگر λ مساوات 3.12 کا جذر ہو تب $y = e^{\lambda}$ مساوات 3.11 کا حل ہو گا۔ مساوات 3.12 کے جذر کو اعدادی طریقوں[9] سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ بلند رتبی $(n > 2)$ تفرقی مساوات کے حل میں زیادہ ممکنات پائے جاتے ہیں۔ آئیں انہیں چند مثالوں کی مدد سے دیکھیں۔

منفرد جذر

اگر مساوات 3.12 کے n جذر λ_1 تا λ_n منفرد اور حقیقی ہوں تب حل

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \cdots, y_n = e^{\lambda_n x} \tag{3.13}$$

کسی بھی x کے لئے حل کی اساس ہوں گے جن سے مساوات 3.11 کا عمومی حل

$$y = c_1e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_ne^{\lambda_n x} \tag{3.14}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم درج ذیل مثال کے بعد دیکھیں گے کہ مساوات 3.13 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں۔

مثال 3.6: تفرقی مساوات $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ کا حل تلاش کریں۔

حل: اس کی امتیازی مساوات $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ہے جس کے جذر -1 ، 1 اور -2 ہیں۔ اگر آپ کسی طرح امتیازی مساوات کا ایک جذر حاصل کر لیں تو بقایا دو جذر با آسانی حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ یوں اگر $\lambda = -1$ دریافت کر لیا جائے تو امتیازی مساوات کو $\lambda + 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ حاصل کر کے اس کے جذر 1 اور -2 نسبتاً آسانی سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ یوں دیے گئے تفرقی مساوات کا عمومی حل $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x}$ ہو گا۔ □

---

[9] numerical methods

مساوات 3.13 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں

ہم مساوات 3.13 میں دیے گئے حل کی ورونسکی لکھ کر، قالب کی پہلی قطار سے $e^{\lambda_1 x}$ ، دوسری قطار سے $e^{\lambda_2 x}$ اور اسی طرح چلتے ہوئے n قطار سے $e^{\lambda_n x}$ باہر نکالتے ہوئے کل $E = e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x}$ باہر نکال کر نسبتاً آسان قالب حاصل کرتے ہیں۔

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

اب قوت نمائی تفاعل E کسی بھی صورت صفر کے برابر نہیں ہو سکتا لہٰذا $W = 0$ صرف اس صورت ہو گا جب دائیں قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو۔دائیں قالب کے مقطع کو کوشی مقطع[10] کہتے ہیں جس کی قیمت

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V \tag{3.16}$$

کے برابر ثابت کی جا سکتی ہے۔ V تمام $(\lambda_j - \lambda_k)$ کا حاصل ضرب ہے جہاں $j < k (\leq n)$ ہے مثلاً $n = 3$ کی صورت میں $V = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)$ ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کوئی بھی دو جذر یکساں ہونے کی صورت میں $V = 0$ اور یوں $W = 0$ ہو گا۔اس سے ثابت ہوتا ہے کہ ورونسکی صرف اس صورت میں صفر کے برابر نہیں ہو گا جب مساوات 3.12 کے تمام جذر ایک دونوں سے مختلف ہوں۔اس سے درج ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 3.6: اساس
مساوات 3.11 کے حل $e^{\lambda_1 x}$ تا $e^{\lambda_n x}$ ، جہاں λ حقیقی یا مخلوط ہو سکتا ہے، صرف اس صورت کھلے وقفے پر مساوات 3.11 کے حل کی اساس ہو سکتے ہیں جب مساوات 3.12 کے تمام n جذر منفرد (یعنی ایک دونوں سے مختلف) ہوں۔

حقیقت میں مسئلہ 3.6، مساوات 3.15 اور مساوات 3.16 سے حاصل عمومی نتیجہ (مسئلہ 3.7) کی ایک مخصوص صورت ہے۔

[10] Cauchy determinant

مسئلہ 3.7: خطی طور غیر تابعیت
مساوات 3.11 کے $e^{\lambda x}$ طرز کے حل، جن کی تعداد کچھ بھی ہو سکتی ہے، I پر اس صورت خطی طور غیر تابع ہوں گے جب ان حل کے λ منفرد ہوں۔

سادہ مخلوط جذر

چونکہ مساوات 3.11 کے عددی سر حقیقی مقدار ہیں لہٰذا مخلوط جذر صرف اور صرف جوڑی دار مخلوط ممکن ہیں۔یوں اگر مساوات 3.12 کا ایک ایک سادہ جذر $\lambda = \gamma + i\omega$ ہو تب $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$ بھی اس کا جذر ہو گا اور یوں تفرقی مساوات کے دو عدد خطی طور غیر تابع حل [حصہ 2.2 دیکھیں] درج ذیل ہوں گے۔

$$y_1 = e^{\gamma x}\cos\omega x, \quad y_2 = e^{\gamma x}\sin\omega x$$

مثال 3.7: سادہ مخلوط جذر۔ابتدائی قیمت مسئلہ
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y''' - y'' + 225y' - 225y = 0, \quad y(0) = 3.2, \quad y'(0) = 46.2, \quad y''(0) = -448.8$$

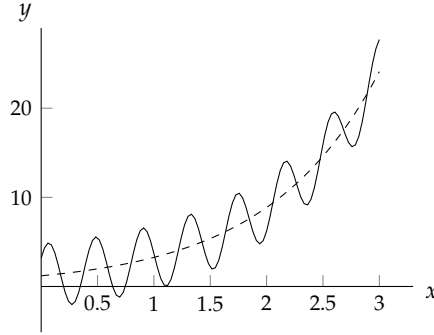
حل:امتیازی مساوات $\lambda^3 - \lambda^2 + 225\lambda - 225 = 0$ کا ایک جذر $\lambda_1 = 1$ ہے۔امتیازی مساوات کو $\lambda - 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے بقایا جذر $\lambda_2 = 15i$ اور $\lambda_3 = -15i$ حاصل ہوتے ہیں۔ان سے عمومی حل اور عمومی حل کے تفرقات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y &= ce^x + A\cos 15x + B\sin 15x\\
y' &= ce^x - 15A\sin 15x + 15B\cos 15x\\
y'' &= ce^x - 225A\cos 15x - 225B\sin 15x
\end{aligned}$$

ان مساوات میں $x = 0$ اور ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے

$$3.2 = c + A, \quad 46.2 = c + 15B, \quad -448.8 = c - 225A$$

ہمزاد مساوات ملتے ہیں۔پہلی مساوات کو تیسری مساوات سے منفی کرنے سے $-452 = -226A$ یعنی $A = 2$ حاصل ہوتا ہے جسے پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے $c = 1.2$ ملتا ہے۔دوسری مساوات میں $c = 1.2$ پر کرتے ہوئے $B = 3$ ملتا ہے۔اس طرح مخصوص حل

$$y = 1.2e^x + 2\cos 15x + 3\sin 15x$$

شکل 3.1: مثال 3.7 کا مخصوص حل۔

حاصل ہوتا ہے جسے شکل 3.1 میں دکھایا گیا ہے۔ مخصوص حل نقطہ دار لکیر سے دکھائے گئے $y = 1.2e^x$ کے گرد ارتعاش کرتا ہے۔ □

متعدد حقیقی جذر

امتیازی مساوات کا دوہرا منفرد جذر $\lambda_1 = \lambda_2$ ہونے کی صورت میں، صفحہ 99 پر جدول 2.1 کے تحت، تفرقی مساوات کے خطی طور غیر تابع حل $y = y_1$ اور $y_2 = xy_1$ ہوں گے۔

اسی حقیقت کے تحت اگر امتیازی مساوات کا m گنا جذر λ پایا جائے تب تفرقی مساوات کے m عدد خطی طور غیر تابع حل

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x}, \cdots, x^{m-1}e^{\lambda x} \tag{3.17}$$

ہوں گے۔ ایک مثال دیکھنے کے بعد درج بالا حل کو ثابت کرتے ہیں۔

مثال 3.8: حقیقی دہرا اور سہ گنا جذر
درج ذیل تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$y^{(5)} - 8y^{(4)} + 25y''' - 38y'' + 28y' - 8y = 0$$

حل: امتیازی مساوات $\lambda^5 - 8\lambda^4 + 25\lambda^3 - 38\lambda^2 + 28\lambda - 8 = 0$ کے جذر $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ اور $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 2$ ہیں۔ یوں تفرقی مساوات کا عمومی حل

$$y = (c_1 + c_2x)e^x + (c_3 + c_4x + c_5x^2)e^{2x}$$

ہو گا۔ □

آئیں اب مساوات 3.17 کو ثابت کریں۔ مساوات 3.11 کے بائیں ہاتھ کو

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y$$

لکھ کر اس میں $y = e^{\lambda x}$ پر کرتے ہوئے تفرق لیتے ہیں۔

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0)e^{\lambda x}$$

اب تصور کریں کہ امتیازی مساوات کا m گنا جذر λ_1 پایا جاتا ہے (جہاں $m < n$ ہے) جبکہ بقایا، λ_1 سے مختلف، جذر λ_{m+1} تا λ_n ہیں۔ یوں کثیر رکنی کو اجزائے ضربی کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda - \lambda_1)^m(\lambda - \lambda_{m+1})(\lambda - \lambda_{m+2})\cdots(\lambda - \lambda_n)e^{\lambda x} = (\lambda - \lambda_1)^m h(\lambda)e^{\lambda x} \tag{3.18}$$

جہاں $m = n$ کی صورت میں $h(\lambda) = 1$ ہو گا۔ دونوں ہاتھ λ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}L[e^{\lambda x}] = m(\lambda - \lambda_1)^{m-1}h(\lambda)e^{\lambda x} + (\lambda - \lambda_1)^m \frac{\partial}{\partial \lambda}[h(\lambda)e^{\lambda x}] \tag{3.19}$$

اب چونکہ x تفرق اور λ تفرق غیر تابع اور حاصل تفرق استمراری ہیں لہٰذا بائیں ہاتھ ان کی ترتیب بدلی جا سکتی ہے۔

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}L[e^{\lambda x}] = L\left[\frac{\partial}{\partial \lambda}e^{\lambda x}\right] = L[xe^{\lambda x}] \tag{3.20}$$

چونکہ λ_1 جذر m گنا ہے، جہاں $m \geq 2$ ہے، لہٰذا $\lambda = \lambda_1$ پر مساوات 3.19 کے دائیں ہاتھ کی قیمت جزو $(\lambda - \lambda_1)$ کی بنا صفر ہو گی۔ اس طرح مساوات 3.19 اور مساوات 3.20 کو ملا کر $L[xe^{\lambda x}] = 0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا ثابت ہوا کہ $xe^{\lambda x}$ مساوات 3.11 کا حل ہے۔

اسی ترتیب کو دہراتے ہوئے مساوات 3.18 کا دو رتبی تفرق لیتے ہوئے $L[x^2e^{\lambda x}] = 0$ لکھا جا سکتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ $x^2e^{\lambda x}$ بھی مساوات 3.11 کا حل ہے۔ اس ترکیب کو بار بار دہراتے ہوئے آخر کار $m - 1$ رتبی تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}}L[e^{\lambda x}] = L[x^{m-1}e^{\lambda x}] &= m(m-1)(m-2)\cdots(3)(2)(\lambda - \lambda_1)^1 h(\lambda)e^{\lambda x}\\ &\quad + (\lambda - \lambda_1)^m \frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}}[h(\lambda)e^{\lambda x}]\end{aligned} \tag{3.21}$$

مساوات کا دایاں ہاتھ $\lambda - \lambda_1$ کی بنا $\lambda = \lambda_1$ پر صفر کے برابر ہے لہٰذا اس سے $L[x^{m-1}e^{\lambda x}] = 0$ حاصل ہوتا ہے جس سے ثابت ہوتا ہے کہ $x^{m-1}e^{\lambda x}$ بھی مساوات 3.11 کا حل ہے۔

مساوات 3.18 کا m رتبی تفرق لینے کے لئے مساوات 3.21 کا تفرق لے سکتے ہیں جس سے

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L[e^{\lambda x}] = L[x^m e^{\lambda x}] = m(m-1)(m-2)\cdots(3)(2)(1)h(\lambda)e^{\lambda x} + (\lambda - \lambda_1)^m \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m}[h(\lambda)e^{\lambda x}]$$

ملتا ہے۔ مساوات کے دائیں ہاتھ پہلے جزو میں $\lambda - \lambda_1$ کا جزو نہیں پایا جاتا لہٰذا $\lambda = \lambda_1$ پر اس کی قیمت صفر کے برابر نہیں ہو گی۔یوں $L[x^m e^{\lambda x}] \neq 0$ ہو گا لہٰذا $x^m e^{\lambda x}$ تفرقی مساوات 3.11 کا حل نہیں ہو گا۔یوں مساوات 3.17 ثابت ہوتی ہے۔

آئیں اب ثابت کریں کہ مساوات 3.17 میں دیے گئے حل خطی طور غیر تابع ہیں۔مخصوص m کے لئے ان حل کا ورونسکی غیر صفر حاصل ہوتا ہے جس سے حل کی خطی طور غیر تابع ہونا ثابت ہوتا ہے۔کسی بھی m کی صورت میں ورونسکی کی m عدد قالب سے $e^{\lambda x}$ باہر نکالتے ہوئے کل $e^{m\lambda x}$ باہر نکالا جائے گا۔بقایا قالب میں مختلف صف آپس میں جمع اور منفی کرتے ہوئے قالب کا مقطع 1 ، x ، $\dots$ x^{m-1} کی ورونسکی کے برابر ثابت کیا جا سکتا ہے جو غیر صفر مقدار ہے۔یہ تفاعل تفرقی مساوات $y^{(m)} = 0$ کے حل ہیں لہٰذا مسئلہ 3.3 کے تحت یہ حل خطی طور غیر تابع ثابت ہوتے ہیں۔

متعدد مخلوط جذر

مخلوط جذر کی جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔یوں دوہرے مخلوط جذر کی صورت میں $\lambda = \gamma + i\omega$ اور $\bar{\lambda} = \gamma - i\omega$ دو بار پائے جائیں گے جن سے

$$e^{\gamma x + i\omega x}, \quad xe^{\gamma x + i\omega x}, \quad e^{\gamma x - i\omega x}, \quad xe^{\gamma x - i\omega x}$$

حل لکھے جا سکتے ہیں۔ان سے حقیقی حل لکھتے ہیں۔

$$e^{\gamma x}\cos\omega x, \quad e^{\gamma x}\sin\omega x, \quad xe^{\gamma x}\cos\omega x, \quad xe^{\gamma x}\sin\omega x \tag{3.22}$$

بائیں جانب کے دو عدد حل $e^{\gamma x + i\omega x}$ اور $e^{\gamma x - i\omega x}$ جبکہ بقایا دو حل $xe^{\gamma x + i\omega x}$ اور $xe^{\gamma x - i\omega x}$ سے حاصل کیے گئے ہیں۔ان سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$y = e^{\gamma x}[(A_1 + A_2 x)\cos\omega x + (B_1 + B_2 x)\sin\omega x] \tag{3.23}$$

مخلوط سہ گنا جذر (جو حقیقی مسائل میں شاذ و نادر پایا جاتا ہے) کی صورت میں درج ذیل حقیقی حل حاصل ہوں گے۔

$$e^{\gamma x}\cos\omega x,\ e^{\gamma x}\sin\omega x,\ xe^{\gamma x}\cos\omega x,\ xe^{\gamma x}\sin\omega x,\ x^2e^{\gamma x}\cos\omega x,\ x^2e^{\gamma x}\sin\omega x$$

اسی طرح آپ زیادہ تعداد میں پائے جانے والے مخلوط جذر سے بھی حل لکھ سکتے ہیں۔

سوالات

سوال 3.11 تا سوال 3.17 کے عمومی حل لکھیں۔

سوال 3.11: $y''' + 4y' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x$

سوال 3.12: $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$
جواب: $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3x\cos 2x + c_4x\sin 2x$

سوال 3.13: $y^{(4)} - y = 0$
جواب: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$

سوال 3.14: $y^{(4)} + 9y'' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2x + c_3\cos 3x + c_4\sin 3x$

سوال 3.15: $y^{(5)} + y''' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos x + c_5\sin x$

سوال 3.16: $y^{(5)} - y^{(4)} - 6y''' + 14y'' - 11y' + 3y = 0$
جواب: $y = c_0e^{-3x} + c_1e^x + c_2xe^x + c3x^2e^x + c_4x^3e^x$

سوال 3.17: $y^{(5)} - 2y^{(4)} - y' + 2y = 0$
جواب: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + c_4\cos x + c_5\sin x$

سوال 3.18 تا سوال 3.23 ابتدائی قیمت مسئلوں کے حل دریافت کریں۔ جذر حاصل کرنے کی خاطر کمپیوٹر استعمال کیا جا سکتا ہے۔

سوال 3.18: $y''' - 2.7y'' - 4.6y' + 9.6y = 0, \quad y(0) = 1.5, y'(0) = 2, y''(0) = -3$

جواب: $y = 2.521e^{1.5x} - 0.286e^{-2x} - 0.735e^{3.2x}$

سوال 3.19:

$$y''' + 10.06y'' - 94.82y' - 670.8766y = 0,$$
$$y(0) = -1.2, y'(0) = 5.2, y''(0) = -2.8$$

جواب: $y = 0.229e^{-13.4x} - 1.447e^{-5.6x} + 0.018e^{8.94x}$

سوال 3.20: $y''' + 5y'' + 49y' + 245y = 0, \quad y(0) = 10, y'(0) = -5, y''(0) = 1$

جواب: $y = 6.635e^{-5x} + 3.365\cos 7x + 4.025\sin 7x$

سوال 3.21: $y''' + 8y'' + 21y' + 18y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = -0.5$

جواب: $y = 23.5e^{-2x} - 21.5e^{-3x} - 16.5xe^{-3x}$

سوال 3.22:

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$$
$$y(0) = 1, y'(0) = 0.5, y''(0) = -0.5, y'''(0) = -1$$

جواب: $y = \cos 2x + 0.3125\sin 2x - 0.125x\cos 2x + 0.875x\sin 2x$

سوال 3.23:

$$y^{(5)} - 4y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 4y' = 0$$
$$y(0) = 1, y'(0) = 0.5, y''(0) = -0.5, y'''(0) = -1, y^{(4)} = 2$$

جواب: $y = 0.5 + 0.5e^{x}\cos x + 0.75e^{x}\sin x - 0.75xe^{x}\cos x - 0.25xe^{x}\sin x$

سوال 3.24: تخفیف رتبہ

آپ تخفیف رتبہ کے ذریعہ مثال 2.6 میں دو رتبی مساوات سے کم رتبی تفرقی مساوات حاصل کر چکے ہیں۔ مستقل عددی سر والے خطی متجانس سادہ تفرقی مساوات کا ایک حل λ_1 جانتے ہوئے کم رتبی مساوات کیسے حاصل کی جا سکتی ہے؟

جوابات: امتیازی مساوات کو $\lambda - \lambda_1$ سے تقسیم کرتے ہوئے کم رتبی تفرقی مساوات کی امتیازی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے جس سے کم رتبی مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

سوال 3.25: تخفیف رتبی
متغیر عددی سر والے خطی متجانس مساوات

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

کا ایک حل y_1 جانتے ہوئے دوسرے حل کو $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ لکھ کر، جہاں $u(x) = \int z(x)\,\mathrm{d}x$ ہے، درج بالا میں پر کرتے ہوئے کم رتبی مساوات

$$y_1z'' + (3y_1' + p_2y_1)z' + (3y_1'' + 2p_2y_1' + p_1y_1)z = 0$$

حاصل کریں ہے۔

سوال 3.26: تخفیف رتبہ
تفرقی مساوات

$$x^3y''' - 3x^2y'' + (6x - x^3)y' - (6 - x^2)y = 0$$

کا ایک حل $y_1 = x$ ہے۔ تخفیف رتبہ سے دو رتبہ مساوات حاصل کریں۔

جواب: $z'' - z = 0$

3.3 غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

آئیں اب معیاری صورت میں لکھی گئی، n رتبی غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \tag{3.24}$$

پر غور کریں جہاں $y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ اور $r(x) \not\equiv 0$ ہیں۔ کھلے وقفہ I پر مساوات 3.24 کا عمومی حل

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{3.25}$$

ہو گا جہاں $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots c_ny_n(x)$ مطابقتی متجانس خطی تفرقی مساوات

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{3.26}$$

کا I پر عمومی حل ہے۔ $y_p(x)$ مساوات 3.24 کا I پر ایسا کوئی بھی حل ہے جس میں اختیاری مستقل نہ پایا جاتا ہو۔ کھلے وقفہ I پر مساوات 3.24 کے استمراری عددی سر اور استمراری $r(x)$ کی صورت میں I پر مساوات 3.24 کا عمومی حل موجود ہے جس میں مساوات 3.24 کے تمام حل موجود ہیں۔یوں مساوات 3.24 کا کوئی نادر حل نہیں پایا جاتا ہے۔

مساوات 3.24 پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 3.24 اور درج ذیل $n-1$ ابتدائی شرائط پر مبنی ہو گا جہاں x_0 کھلے وقفے x_0 پر پایا جاتا ہے۔ تفرقی مساوات کے عددی سر اور r کھلے وقفے پر استمراری ہونے کی صورت میں اس ابتدائی قیمت مسئلے کا حل یکتا ہو گا۔ حل کے یکتائی کو حصہ 2.7 میں دو رتبی تفرقی مساوات کے یکتا حل کے ثبوت کے نمونے پر ثابت کیا جا سکتا ہے۔

$$y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1} \tag{3.27}$$

نامعلوم عددی سر کی ترکیب

غیر متجانس تفرقی مساوات 3.24 کے عمومی حل کے لئے مساوات 3.24 کا مخصوص حل درکار ہو گا۔ مستقل عددی سر والی تفرقی مساوات،

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = r(x) \tag{3.28}$$

جہاں a_0 تا a_{n-1} مستقل مقدار اور $r(x)$ ، حصہ 2.7 کی طرح، خاص نوعیت کا تفاعل ہو، کا مخصوص حل حصہ 2.7 کی طرح، بذریعہ **نامعلوم عددی سر کی ترکیب** حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مخصوص حل y_p کو جبری تفاعل r سے درج ذیل قواعد کے تحت لکھا جاتا ہے۔

بنیادی قاعدہ: یہ قاعدہ حصہ 2.7 میں دیے قاعدے کی طرح ہے۔

ترمیمی قاعدہ: اگر r کو دیکھ کر چنے گئے y_p کا کوئی رکن مساوات 3.28 کے مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_k ہو تب اس رکن کی جگہ x^ky_k کو y_p میں شامل کریں، جہاں k ایسا کم سے کم قیمت کا مثبت عدد ہے کہ تفاعل x^ky_k مطابقتی متجانس مساوات کا حل نہ ہو۔

مجموعے کا قاعدہ: یہ قاعدہ حصہ 2.7 میں دیے قاعدے کی طرح ہے۔

موجودہ ترکیب میں $k = 1$ یا $k = 2$ سے حصہ 2.7 کی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔آئیں مثال کی مدد سے موجودہ ترکیب کا ترمیمی قاعدہ استعمال کرنا سیکھیں۔

مثال 3.9: ابتدائی قیمت مسئلہ۔ ترمیمی قاعدہ۔ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = -5$$

حل: **پہلا قدم:** مطابقتی متجانس مساوات کا امتیازی مساوات $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ ہے جس کو $(\lambda - 1)^3 = 0$ لکھا جا سکتا ہے جس سے سہ گنا جذر $\lambda = 1$ ملتا ہے۔یوں متجانس مساوات کو عمومی حل

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

لکھا جا سکتا ہے۔

دوسرا قدم: اب اگر ہم دیے گئے غیر متجانس مساوات کے جبری تفاعل کو دیکھ کر $y_p = Ce^x$ چنتے ہوئے y_p اور اس کے تفرقات کو دیے گئے مساوات میں پر کریں تو $C - 3C + 3C - C = 1$ ملتا ہے جس سے C کی قیمت حاصل نہیں کی جا سکتی ہے۔اس کا مطلب ہے کہ چنا گیا y_p دیے گئے تفرقی مساوات پر پورا نہیں اترتا لہٰذا اس y_p کو رد کرنا ہو گا۔آپ $y_p = Cxe^x$ یا $y_p = Cx^2e^x$ چن کر دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تفاعل بھی دیے گئے تفرقی مساوات پر پورا نہیں اترتے۔یوں ہم اوپر دیے گئے ترمیمی قاعدے کے تحت $y_p = Cx^3e^x$ چنتے ہیں جس کے تفرقات درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
y' &= Ce^x(x^3 + 3x^2) \\
y'' &= Ce^x(x^3 + 6x^2 + 6x) \\
y''' &= Ce^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)
\end{aligned}$$

y_p اور اس کے تفرقات کو دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے

$$Ce^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6) - 3Ce^x(x^3 + 6x^2 + 6x) + 3Ce^x(x^3 + 3x^2) - Cx^3e^x = e^x$$

ہوئے $C=\frac{1}{6}$ ملتا ہے۔یوں دیے گئے غیر متجانس تفرقی مساوات کا مخصوص حل $y_p=\frac{1}{6}x^3e^x$ ہے لہٰذا اس کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y=y_h+y_p=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+\frac{1}{6}x^3e^x$$

تیسرا قدم: مخصوص حل حاصل کرنے کی خاطر عمومی حل کے مستقل حاصل کرنے ہوں گے۔عمومی حل میں پہلی ابتدائی معلومات $y(0)=8$ پر کرتے ہوئے $c_1=8$ ملتا ہے۔اس قیمت کو y میں پر کرتے ہوئے y' لے کر دوسری ابتدائی معلومات $y'(0)=-2$ سے c_2 حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح y''' لیتے ہوئے اس میں $y'''(0)=-5$ پر کرتے ہوئے c_3 کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2+\frac{1}{6}x^3)e^x,\quad y(0)=8,\quad y(0)=8=c_1$$
$$y'=(c_1+c_2+c_2x+c_3x^2+2c_3x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2})e^x,\quad y'(0)=-2,\quad c_2=-10$$
$$y''=(c_1+2c_2+2c_3+c_2x+4c_3x+c_3x^2+\frac{x^3}{6}+\frac{5}{6}x^2+x)e^x,\ y''(0)=-5,\ c_3=\frac{7}{2}$$

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مخصوص حل لکھتے ہیں۔

$$y=\left(8-10x+\frac{7}{2}x^2+\frac{x^3}{6}\right)e^x$$

□

3.4 مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے غیر متجانس خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل

مقدار معلوم بدلنے کا طریقہ (حصہ 2.10 دیکھیں) بلند رتبی تفرقی مساوات کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔یوں معیاری صورت میں لکھے گئے خطی غیر متجانس سادہ تفرقی مساوات 3.24، جس کے عددی سر اور $r(x)$ کھلے وقفہ I پر استمراری ہوں، کا I پر مخصوص حل y_p درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}y_p(x)&=\sum_{k=1}^{n}y_k(x)\int\frac{W_k(x)}{W(x)}r(x)\,\mathrm{d}x\\&=y_1(x)\int\frac{W_1(x)}{W(x)}r(x)\,\mathrm{d}x+\cdots+y_n(x)\int\frac{W_n(x)}{W(x)}r(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{3.29}$$

مساوات 3.29 میں y_1 تا y_n مطابقتی متجانس مساوات 3.26 کے حل کی اساس ہیں جبکہ ورونسکی W کے k قطار میں $[0\ 0 \cdots 0\ 1]^T$ پر کرتے ہوئے W_k حاصل کی جاتی ہے۔یوں $n=2$ کی صورت میں W ، W_1 اور W_2 درج ذیل ہوں گے۔

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = -y_2, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 1 \end{vmatrix} = y_1$$

مساوات 3.29 کو صفحہ 173 پر دیے گئے مساوات 2.116 کی ثبوت کی طرز پر ثابت کیا جا سکتا ہے۔

مثال 3.10: مقدار معلوم کی تبدیلی۔یولر کوشی غیر متجانس مساوات
درج ذیل غیر متجانس یولر کوشی مساوات کو حل کریں۔

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln x, \quad (x > 0)$$

حل: پہلا قدم: مطابقتی متجانس مساوات میں $y = x^m$ اور اس کے تفرقات پر کرتے ہوئے

$$[m(m-1)(m-1) - 3m(m-1) + 6m - 6]x^m = 0$$

ملتا ہے جس کو x^m سے تقسیم کرتے ہوئے جذر 1 ، 2 اور 3 حاصل ہوتے ہیں۔ان جذر سے اساس

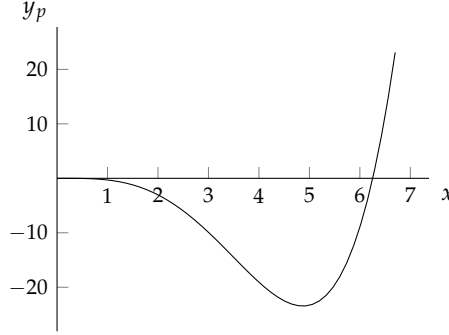
$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = x^3$$

لکھتے ہیں۔یوں متجانس یولر کوشی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

دوسرا قدم: مساوات 3.29 میں درکار قالب کا مقطع حاصل کرتے ہیں۔

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x^4$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix} = -2x^3, \quad W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2$$

شکل 3.2: مثال 3.10 کا y_p

تیسرا قدم: مساوات 3.29 کے تکمل میں $r(x)$ بھی درکار ہے جو دیے گئے یولر کوشی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے سے ملتا ہے۔دی گئی مساوات کو y''' کے عددی سر x^3 سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس سے $r = x\ln x$ ملتا ہے۔مساوات 3.29 میں $\frac{W_1}{W} = \frac{x}{2}$ ، $\frac{W_2}{W} = -1$ اور $\frac{W_3}{W} = \frac{1}{2x}$ ہیں لہٰذا

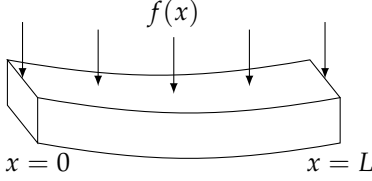
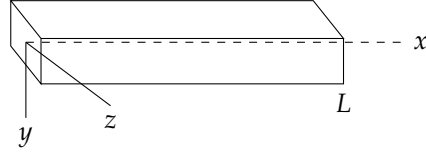
$$
\begin{aligned}
y_p &= x\int \frac{x}{2}x\ln x\,\mathrm{d}x - x^2\int x\ln x\,\mathrm{d}x + x^3\int \frac{1}{2x}x\ln x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x}{2}\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right) - x^2\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^3}{2}\left(x\ln x - x\right)\\
&= \frac{1}{6}x^4\left(\ln x - \frac{11}{6}\right)
\end{aligned}
$$

ہو گا۔یوں عمومی حل درج ذیل ہو گا۔ y_p کو شکل 3.2 میں دکھایا گیا ہے۔

$$
y = y_h + y_p = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \frac{1}{6}x^4\left(\ln x - \frac{11}{6}\right)
$$

□

عملی استعمال۔لچکدار شہتیر

دو رتبی تفرقی مساوات کا عملی انجینئری میں بہت زیادہ استعمال پایا جاتا ہے البتہ بلند رتبی تفرقی مساوات عملی انجینئری کے بہت کم مسائل میں کام آتے ہیں۔ انجینئری کا ایک انتہائی اہم مسئلہ لچکدار شہتیر کا جھکاو ہے جس کی نمونہ کشی

(الف) مستطیل رقبہ عمودی تراش کا شہتیر جس کی لمبائی L ہے۔

(ب) بوجھ شہتیر کو جھکا دیتی ہے۔

شکل 3.3: مثال 3.11 کا شہتیر۔

چہارم رتبی تفرقی مساوات کرتی ہے۔ کسی بھی عمارت یا پل میں شہتیر کلیدی کردار ادا کرتے ہیں جو لکڑی یا لوہے کے ہو سکتے ہیں۔

مثال 3.11: شکل 3.3-الف میں، یکساں لچک کے مادے سے بنا ہوا، مستطیل رقبہ عمودی تراش کا شہتیر دکھایا گیا ہے جس کی لمبائی L ہے۔ شہتیر کے اپنے وزن سے شہتیر کے جھکاو کو رد کیا جا سکتا ہے۔ شکل-ب میں شہتیر کے x محور پر عمودی بیرونی بوجھ $f(x)$ ڈالا گیا ہے جس کی وجہ سے شہتیر میں جھکاو پیدا ہوا ہے۔ بیرونی بوجھ اور شہتیر کے جھکاو کا تعلق، علم لچک کے تحت، درج ذیل ہے جہاں E **ینگ کا مقیاس لچک**[11] کہلاتا ہے جبکہ I مستطیل کا z محور پر **جمودی معیار اثر**[12] ہے۔ شہتیر کی فی اکائی لمبائی پر بیرونی قوت کو بوجھ $f(x)$ لکھا گیا ہے۔

$$EIy^{(4)} = f(x) \tag{3.30}$$

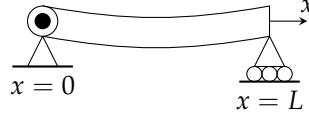
شہتیر کو عموماً شکل 3.4 میں دکھائے گئے تین طریقوں سے نصب کیا جاتا ہے جو درج ذیل سرحدی شرائط کو جنم دیتے ہیں۔

(الف) سادہ سہارا $\quad y(0)=y(L)=y''(0)=y''(L)=0$

(ب) دونوں اطراف جکڑے گئے ہیں $\quad y(0)=y(L)=y'(0)=y'(L)=0$

(پ) ایک طرف جکڑا گیا ہے $\quad y(0)=y'(0)=y''(L)=y'''(L)=0$

[11] Young's modulus of elasticity
[12] moment of inertia

x
$x = 0$
$x = L$

(الف) سادہ سہارا دیا گیا ہے۔

$x = 0$ $x = L$

(ب) دونوں اطراف سے جکڑا ہوا۔

$x = 0$ $x = L$

(پ) ایک طرف سے جکڑا گیا ہے۔

شکل 3.4: شہتیر جکڑنے کے عمومی طریقے۔

سرحدی شرط $y = 0$ سے مراد صفر ہٹاو ہے، $y' = 0$ سے مراد افقی مماس ہے، $y'' = 0$ سے مراد صفر **خماو کا معیار اثر**[13] ہے جبکہ $y''' = 0$ سے مراد صفر **جزی قوت**[14] ہے۔

آئیں سادہ سہارے والی شہتیر کے مسئلے کو حل کریں جسے شکل 3.4-الف میں دکھایا گیا ہے۔یکساں بیرونی بوجھ کی صورت میں $f(x) = f_0$ ہو گا اور مساوات 3.30 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$y^{(4)} = k, \quad k = \frac{f_0}{EI} \tag{3.31}$$

جس کو تکمل کے ذریعہ حل کرتے ہیں۔دو بار تکمل لیتے ہیں۔

$$y'' = \frac{k}{2}x^2 + c_1 x + c_2$$

$y''(0) = 0$ پر کرتے ہوئے $c_2 = 0$ حاصل ہوتا ہے جس کے بعد $y''(L) = 0$ پر کرنے سے $c_1 - \frac{kL}{2}$ ملتا ہے۔یوں

$$y'' = \frac{k}{2}x^2 - \frac{kL}{2}x$$

bending moment[13]
shearing force[14]

ہو گا جس کا دو بار تکمل لینے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{L}{6}x^3 + c_3x + c_4\right)$$

$y(0) = 0$ پر کرنے سے $c_4 = 0$ ملتا ہے جس کے بعد $y(L) = 0$ پر کرتے ہوئے c_3 حاصل کرتے ہیں۔

$$y(L) = \frac{kL}{2}\left(\frac{L^3}{12} - \frac{L^3}{6} + c_3\right) = 0, \quad c_3 = \frac{L^3}{12}$$

یوں $k = \frac{f_0}{EI}$ لکھتے ہوئے شہتیر کی لچک بالمقابل لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$y(x) = \frac{f_0}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

ہم توقع رکھتے ہیں کہ شہتیر کے درمیان سے دونوں اطراف یکساں جھکاو پایا جائے گا یعنی $y(x) = y(L-x)$ ہو گا۔زیادہ سے زیادہ جھکاو $y(\frac{L}{2}) = \frac{5f_0L^4}{16\times 24EI}$ ہے جو $x = \frac{L}{2}$ پر پایا جاتا ہے۔یاد رہے کہ شکل 3.3 میں مثبت y نیچے کی طرف کو ہے۔ □

سوالات

سوال 3.27 تا سوال 3.34 کو حل کریں۔

سوال 3.27: $y^{(4)} + 3y''' - 4y = 0$
جواب: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$

سوال 3.28: $y''' + 16y'' + 13y' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2e^{-3x}\cos 2x + c_3e^{-3x}\sin 2x$

سوال 3.29: $y''' + 3y'' - y' - 3y = 5e^{2x}$
جواب: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{-3x} + \frac{1}{3}e^{2x}$

سوال 3.30: $y^{(4)} + 8y'' - 9y = \cosh 2x$
جواب: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos 3x + c_4\sin 3x + \frac{5}{39}\cosh 2x$

سوال 3.31: $x^2y''' + 3xy'' - 2y' = 0$
جواب: $y = c_1 + c_2x^{\sqrt{3}} + c_3x^{-\sqrt{3}}$

سوال 3.32: $y''' + 2.25y'' + 1.6875y' + 0.421875y = 0$
جواب: $y = c_1e^{-0.75x} + c_2xe^{-0.75x} + c_3x^2e^{-0.75x}$

سوال 3.33: $y''' - y' = \frac{3}{40}\sinh\frac{x}{2}$
جواب: $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} - 2\cosh\frac{x}{2}$

سوال 3.34: $y''' + 9y'' + 27y' + 27 = 2x^2$
جواب: $y = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x} + c_3x^2e^{-3x} + \frac{2}{27}x^2 - \frac{4}{27}x + \frac{8}{81}$

سوال 3.35 تا سوال 3.39 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 3.35:

$$y^{(4)} - 10y'' + 9y = 4e^{-2x}$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -0.5, \quad y'''(0) = 0.2$$

جواب: $y = -\frac{2}{15}e^{-2x} + \frac{1}{1440}(127e^x + 1383e^{-x} - 119e^{3x} - 271e^{-3x})$

سوال 3.36:

$$y^{(4)} + y'' - 2y = 0.5\sin 2x$$
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 2$$

جواب: $y = 0.05\sin 2x + 3\cos x - 0.358\sin x - \cos\sqrt{2}x - 0.424\sin\sqrt{2}x$

سوال 3.37: مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_h حاصل کرتے ہوئے W ، W_1 ، W_2 اور W_3 کے مقطع حاصل کریں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات حل کریں۔(یاد رہے تفرقی مساوات کو معیاری صورت میں لکھتے ہوئے $r = x$ حاصل ہو گا)

$$x^3y''' - 5x^2y'' + 12xy' - 12y = x^4, \quad y(1) = 1, y'(1) = -1, y''(1) = 2$$

جوابات: $y_h = c_1x + c_2x^3 + c_3x^4$ ، $W = 6x^5$ ، $W_1 = x^6$ ، $W_2 = -3x^4$ ، $W_3 = 2x^3$
$y = \frac{59}{18}x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{8}{3}x^4 + \frac{x^4}{3}\ln x - \frac{4}{9}x^4$

سوال 3.38: مطابقتی متجانس مساوات کا حل y_h حاصل کرتے ہوئے W ، W_1 ، W_2 اور W_3 کے مقطع حاصل کریں۔انہیں استعمال کرتے ہوئے غیر متجانس مساوات حل کریں۔

$$x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2, \quad y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = -1$$

جوابات: $y_h = c_1x^{-1} + c_2x + c_3x^{-2}$ ، $W = 6x^{-5}$ ، $W_1 = -3x^{-2}$ ، $W_2 = x^{-4}$ ، $W_3 = 2x^{-1}$ ، $y = \frac{5}{3x} + x - \frac{3}{4x^2} + \frac{x^2}{12}$

سوال 3.39:

$$y''' + 9y'' + 27y' + 27y = 27x^2, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1, y''(0) = -1$$

جواب: $y = \frac{2}{3}e^{-3x} + 3xe^{-3x} + \frac{9}{2}x^2e^{-3x} + x^2 - 2x + \frac{4}{3}$

باب 4

نظامِ تفرقی مساوات

گزشتہ باب میں آپ نے بلند رتبی سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھا۔اس باب میں سادہ تفرقی مساوات کو حل کرنے کا نیا طریقہ دکھایا جائے گا جس میں n رتبی سادہ تفرقی مساوات سے n عدد یک رتبی سادہ تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جائے گا۔اس نظام کو حل کرنا بھی سکھایا جائے گا۔ تفرقی مساوات کے نظام کو قالب اور سمتیہ کی صورت میں لکھنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے لہٰذا حصہ 4.1 میں قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق پر غور کیا جائے گا۔

اسی باب میں تفرقی مساوات کے نظام کو حل کرنے کی بجائے تمام مساوات کے مجموعی طرز عمل پر غور کیا جائے گا جس سے نظام کے حل کے استحکام[1] کے بارے میں معلومات حاصل ہوتی ہے۔انجینئری میں مستحکم نظام اہمیت رکھتے ہیں۔ مستحکم نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی، مستقبل کے لمحات پر معمولی تبدیلی ہی پیدا کرتی ہے۔اس ترکیب سے مساوات کا اصل حل دریافت نہیں ہوتا لہٰذا اس کو کیفی ترکیب[2] کہتے ہیں۔ جس ترکیب سے نظام کا اصل حل حاصل ہوتا ہو اس کو مقداری ترکیب[3] کہتے ہیں۔

---

[1] stability
[2] qualitative method
[3] quantitative method

4.1 قالب اور سمتیہ کے بنیادی حقائق

تفرقی مساوات کے نظام پر غور کے دوران قالب اور سمتیات استعمال کئے جائیں گے۔

دو عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 7y_2 \\ y_2' &= 5y_1 + y_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

میں دو عدد نا معلوم تفاعل $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ پائے جاتے ہیں۔ان مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل $g_1(t)$ اور $g_2(t)$ بھی موجود ہو سکتے ہیں۔اسی طرح n عدد یک رتبی سادہ تفرقی مساوات پر مبنی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{4.2}$$

میں $y_1(t)$ تا $y_n(t)$ نا معلوم تفاعل پائے جائیں گے۔درج بالا ہر مساوات میں دائیں جانب اضافی تفاعل بھی پائے جا سکتے ہیں۔

تکنیکی اصطلاحات

قالب

نظام 4.1 کے عددی سر (جو مستقل یا متغیرات ممکن ہیں) کو 2×2 قالب[4] $\boldsymbol{A}$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

اسی طرح نظام 4.2 کے عددی سر کو $n \times n$ قالب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

---

[4] matrix

قالب میں درج a_{11} ، a_{12} ، a_{21} وغیرہ کو ارکان[5] کہتے ہیں۔ افقی لکیروں کو صف[6] جبکہ عمودی لکیروں کو قطار[7] کہتے ہیں۔ قالب 4.3 میں پہلا صف $[a_{11} \;\; a_{12}]$ یا $[3 \;\; 2]$ جبکہ دوسرا صف $[a_{21} \;\; a_{22}]$ یا $[-1 \;\; \frac{2}{3}]$ ہے۔اسی طرح پہلا قطار درج ذیل ہے۔

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ارکان کی علامتی اظہار میں دوگنا زیر نوشت کا پہلا عدد صف کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دوسرا عدد قطار کو ظاہر کرتا ہے۔یوں a_{21} دوسری صف اور پہلی قطار کا رکن ہے۔ قالب 4.3 کا مرکزی وتر[8] a_{11} اور a_{22} پر مبنی ہے جبکہ قالب 4.4 کا مرکزی وتر a_{11} ، a_{22} ، $\cdots$ ، a_{nn} پر مبنی ہے۔ہمیں یہاں صرف مربع قالب[9] درکار ہوں گے۔مربع قالب سے مراد ایسا قالب ہے جس میں صفوں کی تعداد قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔ قالب 4.3 اور قالب 4.4 مربع قالب ہیں۔

سمتیہ۔ ایک قطار اور n ارکان کا سمتیہ قطار[10] درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

اسی طرح ایک صف اور n ارکان کا سمتیہ صف[11] درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

قالب اور سمتیات کا حساب

برابری مساوات

دو عدد $n \times n$ قالب صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے تمام مطابقتی[12] ارکان برابر ہوں۔ظاہر ہے کہ دو قالب کی برابری کے لئے لازم ہے کہ ان میں صفوں کی تعداد یکساں ہو اور ان میں قطاروں

---

[5] entry
[6] row
[7] column
[8] main diagonal
[9] square matrix
[10] column vector
[11] row vector
[12] corresponding

کی تعداد یکساں ہو۔یوں $n = 2$ کی صورت میں

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

صرف اور صرف اس صورت برابر $(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B})$ ہوں گے جب

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{11}, \quad a_{12} = b_{12} \\ a_{21} &= b_{21}, \quad a_{22} = b_{22} \end{aligned}$$

ہوں۔دو عدد سمتیہ صف (یا دو عدد سمتیہ قطار) صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب دونوں میں ارکان کی تعداد n برابر ہو اور ان کے تمام مطابقتی ارکان برابر ہوں ۔یوں

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

کی صورت میں $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$ صرف اور صرف تب ہو گا جب

$$v_1 = x_1 \quad \text{اور} \quad v_2 = x_2$$

ہوں۔

مجموعہ

مجموعہ حاصل کرنے کی خاطر دونوں قالب کے مطابقتی ارکان کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔دونوں قالب یکساں $m \times n$ ہونا لازم ہے۔اسی طرح دونوں سمتیہ صف (یا دونوں سمتیہ قطار) میں برابر ارکان ہونا لازم ہے۔یوں 2×2 قالب کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{bb} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} v_1 + x_1 \\ v_2 + x_2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

غیر سمتی ضرب

[13] غیر سمتی ضرب یعنی مستقل c سے قالب کا ضرب حاصل کرنے کی خاطر قالب کے تمام ارکان کو c سے ضرب دی جاتی ہے۔مثلاً

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad -4\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ -20 & -4 \end{bmatrix}$$

---

[13] scalar product

اور

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad 3\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 27 \\ -12 \end{bmatrix}$$

قالب ضرب قالب

دو عدد $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ اور $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ کا حاصل ضرب $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ ، (اسی ترتیب میں) $n \times n$ قالب $\boldsymbol{C} = [c_{jk}]$ ہو گا جس کے ارکان

$$c_{jk} = \sum_{m=1}^{n} a_{jm} b_{mk} \qquad j = 1, \cdots, n, \qquad k = 1, \cdots, n \tag{4.6}$$

ہوں گے یعنی $\boldsymbol{A}$ قالب کے j صف کے ہر رکن کو $\boldsymbol{B}$ قالب کے j قطار کے مطابقتی رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے n حاصل ضرب کا مجموعہ لیں۔ہم کہتے ہیں کہ قالب کے ضرب سے مراد صف ضرب قطار ہے۔مثلاً

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 7 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) \\ (-3) \cdot 7 + 0 \cdot 2 & (-3) \cdot 1 + 0 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -2 \\ -21 & -3 \end{bmatrix}$$

یہاں دھیان رہے کہ ضرب قالب غیر مستبدل[14] ہے لہٰذا عموماً $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ ہو گا۔ یوں دو قالب کو آپس میں ضرب دیتے ہوئے قالبوں کی ترتیب تبدیل نہیں کی جا سکتی۔اس حقیقت کی وضاحت کی خاطر درج بالا مثال میں قالبوں کی ترتیب بدلتے ہوئے ان کو آپس میں ضرب دیتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 7 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-3) & 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 16 & 2 \end{bmatrix}$$

$n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کو n ارکان کی سمتیہ قطار $\boldsymbol{x}$ سے ضرب بھی اسی قاعدے کے تحت حاصل کی جاتی ہے۔یوں $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Ax}$ کے n عدد ارکان درج ذیل ہوں گے۔

$$v_j = \sum_{m=1}^{n} a_{jm} x_m \qquad j = 1, \cdots, n \tag{4.7}$$

یوں

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

ہو گا۔

---

[14] non commutative

سادہ تفرقی مساوات کے نظام کا اظہار بذریعہ سمتیات

تفرق

قالب یا سمتیہ کا تفرق، تمام ارکان کا تفرق حاصل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5t^3\\6\cos 2t\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}'(t)=\begin{bmatrix}y_1'(t)\\y_2'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15t^2\\-12\sin 2t\end{bmatrix}$$

قالب کی تفرق اور ضرب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 4.1 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}'=\begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-7\\5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} \tag{4.8}$$

اسی طرح مساوات 4.2 کو درج ذیل $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\\\vdots\\y_n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&\vdots&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix} \tag{4.9}$$

مزید اعمال اور اصطلاحات

تبدیل محل

تبدیلی محل[15] کے عمل سے قالب کی قطاروں کو صفوں کی جگہ لکھا جاتا ہے۔یوں 2×2 قالب $\boldsymbol{A}$ سے **تبدیلی محل**[16] کے ذریعہ **تبدیلی محل قالب**[17] $\boldsymbol{A}^T$ حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-11\\4&3\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\-11&3\end{bmatrix}$$

سمتیہ صف $\boldsymbol{x}$ کا تبدیلی محل سمتیہ $\boldsymbol{x}^T$ سمتیہ قطار ہو گا۔اسی طرح سمتیہ قطار $\boldsymbol{v}$ کا تبدیلی محل سمتیہ $\boldsymbol{v}^T$ سمتیہ صف ہو گا۔

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{x}^T=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{v}^T=\begin{bmatrix}v_1&v_2\end{bmatrix}$$

[15] transposition
[16] transposition
[17] transpose matrix

قالب کا معکوس

ایسا $n \times n$ قالب جس کے مرکزی وتر کے تمام ارکان اکائی (1) اور بقایا ارکان صفر ہوں کو **اکائی قالب**[18] $\boldsymbol{I}$ کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

ایسا $\boldsymbol{B}$ قالب، جس کا $\boldsymbol{A}$ قالب کے ساتھ حاصل ضرب اکائی قالب ہو $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ ، قالب $\boldsymbol{A}$ کا **معکوس قالب**[19] کہلاتا ہے جسے $\boldsymbol{A}^{-1}$ لکھا جاتا ہے جبکہ ایسی صورت میں $\boldsymbol{A}$ **غیر نادر قالب**[20] کہلاتا ہے۔ یہاں $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں $n \times n$ قالب ہیں۔

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{4.11}$$

قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس تب پایا جاتا ہے جب $\boldsymbol{A}$ کا **مقطع** غیر صفر $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ ہو۔اگر $\boldsymbol{A}$ کا معکوس نہ پایا جاتا ہو تب $\boldsymbol{A}$ نادر[21] قالب کہلاتا ہے۔ مربع 2×2 قالب کا معکوس

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

ہے جہاں $\boldsymbol{A}$ کا مقطع $|\boldsymbol{A}|$ درج ذیل ہے۔

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{4.13}$$

خطی طور تابعیت

r عدد سمتیات $\boldsymbol{v}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{v}^{(r)}$ جہاں ہر سمتیہ n ارکان پر مشتمل ہو، اس صورت **خطی طور غیر تابع سلسلہ**[22] یا **خطی طور غیر تابع** کہلاتے ہیں جب

$$c_1\boldsymbol{v}^{(1)} + \cdots + c_r\boldsymbol{v}^{(r)} = \boldsymbol{0} \tag{4.14}$$

---

[18] unit matrix
[19] inverse matrix
[20] non singular matrix
[21] singular
[22] linearly independent set

سے مراد c_1 تا c_r کی قیمتیں صفر ہو۔درج بالا مساوات میں $\mathbf{0}$ صفر سمتیہ[23] ہے جس کے تمام n ارکان صفر کے برابر ہیں۔اگر مساوات 4.14 میں c_1 تا c_r کوئی ایک یا ایک سے زائد مستقل غیر صفر ہوں تب $\boldsymbol{v}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{v}^{(r)}$ **خطی طور تابع سلسلہ**[24] یا **خطی طور تابع** کہلائیں گے چونکہ ایسی صورت میں کم از کم ایک سمتیہ کو بقایا سمتیات کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے، مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں مساوات 4.14 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = -\frac{1}{c_1}\left[c_2\boldsymbol{v}^{(2)} + \cdots + c_r\boldsymbol{v}^{(r)}\right]$$

لکھا جا سکتا ہے۔

امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات

امتیازی اقدار[25] اور **امتیازی سمتیات**[26] انتہائی اہم ہیں جو **کوانٹم میکانیات**[27] میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔مساوات

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{4.15}$$

میں $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ معلوم $n \times n$ قالب ہے جبکہ λ نامعلوم مستقل (جو حقیقی یا مخلوط مقدار ہو سکتا ہے) اور $\boldsymbol{x}$ نامعلوم سمتیہ ہے جنہیں حاصل کرنا درکار ہے۔کسی بھی λ کے لئے مساوات 4.15 کا ایک حل $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ممکن ہے۔ایسی غیر سمتی[28] λ جو $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ کی صورت میں مساوات 4.15 پر پورا اترتی ہو، $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی قدر**[29] کہلاتی ہے جبکہ، اس λ کی مطابقتی، $\boldsymbol{x}$ کو $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی سمتیہ**[30] کہتے ہیں۔

ہم مساوات 4.15 کو $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} = 0$ یا

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \tag{4.16}$$

لکھ سکتے ہیں جو n عدد خطی الجبرائی مساوات کو ظاہر کرتی ہے جس کے نامعلوم متغیرات x_1 تا x_n ، سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کے ارکان ہیں۔اس مساوات کے غیر صفر حل $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ کے لئے ضروری ہے کہ $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ کے عددی سر

---

[23] zero vector
[24] linearly dependent vector
[25] Eigenvalues, characteristic values
[26] Eigenvectors
[27] quantum mechanics
[28] scalar
[29] Eigenvalue
[30] Eigenvector

قالب کا مقطع صفر ہو۔اس کا ثبوت خطی الجبرا میں بطور بنیادی حقیقت پیش کیا جاتا ہے [مسئلہ 8.15]۔ اس باب میں ہمیں $n = 2$ سے دلچسپی ہے لہٰذا مساوات 4.16 کو

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

لکھتے ہیں جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

اب نادر قالب کا مقطع صفر ہوتا ہے لہٰذا $A - \lambda I$ اس صورت نادر قالب ہو گا جب اس قالب کا مقطع (جسے A کی امتیازی مقطع[31] کہتے ہیں) صفر ہو۔

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{12}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

اس دو درجی مساوات کو A کی امتیازی مساوات[32] کہتے ہیں۔اس کے حل λ_1 اور λ_2 ، قالب A کے امتیازی قدر یا امتیازی اقدار ہیں۔پہلے امتیازی قدر حاصل کریں۔اس کے بعد λ_1 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_1 کی مطابقتی، A کی امتیازی سمتیہ $x^{(1)}$ دریافت کریں۔اسی طرح λ_2 کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہوئے، λ_2 کی مطابقتی، A کی امتیازی سمتیہ $x^{(2)}$ دریافت کریں۔یاد رہے کہ اگر x قالب A کا امتیازی سمتیہ ہو تب kx بھی A کا امتیازی سمتیہ ہو گا جہاں $k \neq 0$ ہے۔

مثال 4.1: درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$$

حل:امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 \\ -0.8 & 0.4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2.6\lambda + 1.2 = 0$$

---

[31] characteristic determinant
[32] characteristic equation

$\lambda = \lambda_1 = -0.6$ کو A سے A کے امتیازی قدر $\lambda_1 = -0.6$ اور $\lambda_2 = -2$ ملتے ہیں۔امتیازی قدر $\lambda = \lambda_1 = -0.6$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
(-3+0.6)x_1 + 3x_2 &= 0 \\
-0.8x_1 + (0.4+0.6)x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

پہلی مساوات کو $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جا سکتا ہے۔دوسری مساوات کو بھی $x_2 = 0.8x_1$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں اگر $x_1 = 1$ چنا جائے تو $x_2 = 0.8$ ہو گا لہٰذا، $\lambda_1 = -0.6$ کی مطابقتی، A کا امتیازی سمتیہ

$$
\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}
$$

ہو گا۔ اسی طرح $\lambda = \lambda_2 = -2$ کو مساوات 4.18 میں پر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
(-3+2)x_1 + 3x_2 &= 0 \\
-0.8x_1 + (0.4+2)x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

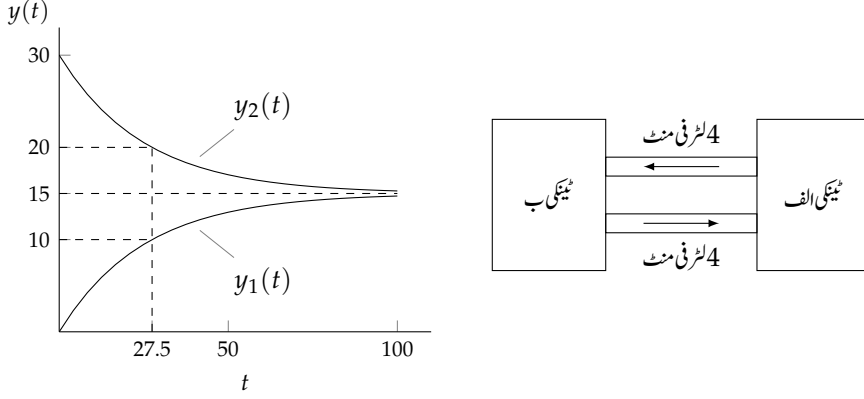
ان دونوں مساوات کو $x_1 = 3x_2$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں اگر $x_2 = 1$ چنا جائے تو $x_1 = 3$ حاصل ہو گا لہٰذا، $\lambda_2 = -2$ کی مطابقتی، A کا امتیازی سمتیہ

$$
\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

ہو گا۔جیسا پہلے ذکر کیا گیا، امتیازی سمتیات کو کسی بھی غیر صفر عدد سے ضرب دیا جا سکتا ہے۔ □

4.2 سادہ تفرقی مساوات کے نظام بطور انجینئری مسائل کے نمونے

اس حصے میں ہم تفرقی مساوات کے نظام کی عملاً اہمیت دیکھیں گے۔ ہم پہلے دیکھتے ہیں کہ ایسے نظام مختلف عملی مسائل میں کیسے کردار ادا کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم دیکھیں گے کہ بلند رتبی تفرقی مساوات کو کیسے تفرقی مساوات کے نظام میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 4.2: دو ٹینکیوں کا نظام
ایک ٹینکی کو استعمال کرتے ہوئے مرکب بنانے کے عمل پر صفحہ 25 مثال 1.10 میں غور کیا گیا جہاں مسئلے کو ایک

شکل 4.1: ٹینکیوں کا نظام۔

عدد تفرقی مساوات سے ظاہر کیا گیا۔اس مثال کو ایک مرتبہ دیکھ لیں چونکہ وہی معلومات یہاں بھی استعمال کی جائیں گی۔

شکل 4.1 میں دو ٹینکیاں دکھائی گئی ہیں جن میں یک برابر دو سو (200) لٹر پانی موجود ہے۔ٹینکی الف میں خالص پانی ہے جبکہ ٹینکی ب کی پانی میں تیس (30) کلو گرام کا نمک ملایا گیا ہے۔ ٹینکیوں میں پانی کو مسلسل ہلایا جاتا ہے تا کہ ان میں ہر جگہ محلول یکساں رہے۔ٹینکیوں میں پانی چار (4) لٹر فی منٹ سے چکر کاٹتی ہے جس کی وجہ سے ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ اور ٹینکی ب میں نمک کی مقدار $y_2(t)$ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے۔ کتنی دیر کے بعد ٹینکی الف میں نمک کی مقدار، ٹینکی ب میں نمک کی مقدار کا نصف ہو گا؟

حل: پہلا قدم: نظام کی نمونہ کشی کرتے ہیں۔ ایک ٹینکی کی طرح، ٹینکی الف میں نمک کی مقدار $y_1(t)$ میں تبدیلی کی شرح $y_1'(t)$ نمک کی در آمدی اور بر آمدی شرح میں فرق کے برابر ہو گی۔ یہی کچھ $y_2'(t)$ کے لئے بھی کہا جا سکتا ہے لہٰذا

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 4\frac{y_2}{200} - 4\frac{y_1}{200} \\
y_2' &= 4\frac{y_1}{200} - 4\frac{y_2}{200}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -0.02y_1 + 0.02y_2 \\
y_2' &= 0.02y_1 - 0.02y_2
\end{aligned}
$$

ہو گا۔اس نظام کو

$$y' = Ay \tag{4.20}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad A = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}$$

ہیں۔

دوسرا قدم: عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ ایک عدد تفرقی مساوات کی طرح یہاں بھی حل کو قوت نمائی تفاعل

$$y = xe^{\lambda t} \tag{4.21}$$

فرض کرتے ہیں۔مساوات 4.20 میں اس فرضی تفاعل اور اس کے تفرق کو پر کرتے ہیں۔

$$y' = \lambda xe^{\lambda t} = Axe^{\lambda t}$$

دونوں اطراف کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے دونوں اطراف کو بدل کر لکھتے ہیں۔

$$Ax = \lambda x$$

ہمیں اس مساوات کے غیر صفر اہم حل درکار ہیں لہٰذا ہمیں A کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات حاصل کرنے ہوں گے۔امتیازی اقدار امتیازی مساوات

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0.02 - \lambda & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 - \lambda \end{vmatrix} = (-0.02 - \lambda) - 0.02^2 = \lambda(\lambda + 0.04) = 0$$

کے حل $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ ہوں گے۔(یہاں دھیان رہے کہ ہمیں غیر صفر امتیازی سمتیات درکار ہیں۔امتیازی اقدار صفر ہو سکتے ہیں۔) امتیازی سمتیات مساوات 4.18 کے پہلے یا دوسرے مساوات سے حاصل ہوں گے۔مساوات 4.18 کی پہلے مساوات کو استعمال کرتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے لئے

$$-0.02x_1 + 0.02x_2 = 0, \quad (-0.02 + 0.04)x_1 + 0.02x_2 = 0$$

لکھے جائیں گے جن سے $x_1 = x_2$ اور $x_1 = -x_2$ ملتے ہیں۔ہم $x_1 = x_2 = 1$ اور $x_1 = -x_2 = 1$ چنتے ہوئے $\lambda_1 = 0$ اور $\lambda_2 = -0.04$ کے مطابقتی امتیازی سمتیات

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حاصل کرتے ہیں۔مساوات 4.21 اور مسئلہ خطی میل (جو خطی متجانس تفرقی مساوات کے نظام پر بھی لاگو ہوتا ہے) کی مدد سے حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t} = c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-0.04t} \tag{4.22}$$

تیسرا قدم: ابتدائی معلومات $y_1(0) = 0$ (یعنی ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر کوئی نمک نہیں پایا جاتا) اور $y_2(0) = 30$ (یعنی ٹینکی ب میں ابتدائی طور پر تیس کلو گرام نمک پایا جاتا ہے) ہیں۔مساوات 4.22 میں $t = 0$ اور ابتدائی معلومات پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}(0) = c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\30\end{bmatrix}$$

درج بالا مساوات کی جزوی صورت $c_1 + c_2 = 0$ اور $c_1 - c_2 = 30$ ہے جس کا حل $c_1 = 15$ اور $c_2 = -15$ ہے۔یوں ابتدائی معلومات پر پورا اترتا ہوا حل

$$\boldsymbol{y} = 15\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 15\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-0.04t}$$

یعنی

$$y_1(t) = 15 - 15e^{-0.04t}$$
$$y_2(t) = 15 + 15e^{-0.04t}$$

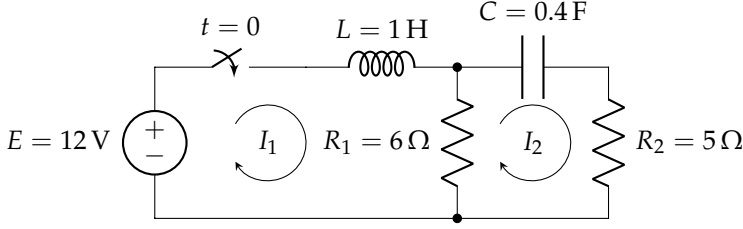
ہو گا۔اس حل کو شکل 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔

چوتھا قدم: ٹینکی الف میں اس وقت ٹینکی ب کا آدھا نمک ہو گا جب اس میں $\frac{30}{3} = 10$ کلو گرام نمک ہو۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y_1(t) = 15 - 15e^{-0.04t} = 10, \quad t = -\frac{1}{0.04}\ln\frac{1}{3} = 27.5\,\text{min}$$

□

مثال 4.3: برقی جال

شکل 4.2 میں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو ہوتا ہے۔برقی رو $I_1(t)$ اور $I_2(t)$ دریافت کریں۔ابتدائی رو اور ابتدائی برقی گیر میں ذخیرہ بار صفر ہیں۔

شکل 4.2: مثال 4.3 کا برقی جال۔

حل: پہلا قدم نظام کی نمونہ کشی ہے۔امالہ میں رو I_1 ہے لہٰذا اس پر برقی دباو $v_L = L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$ ہو گا۔برق گیر میں رو I_2 ہے لہٰذا اس پر دباو $v_C = \frac{1}{C}\int I_2\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔مزاحمت R_2 پر دباو $v_{R2} = I_2R_2$ ہو گا جبکہ مزاحمت R_1 میں کل رو $I_1 - I_2$ ہے لہٰذا اس پر دباو $v_{R1} = (I_1 - I_2)R_1$ ہو گا۔کرخوف قانون دباو کے تحت کسی بھی بند دائرے میں کل دباو کا اضافہ اس دائرے میں کل دباو کے گھٹاو کے برابر ہو گا۔یوں بائیں دائرے کے لئے

$$E = L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + (I_1 - I_2)R_1$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $E = 12$ ، $L = 1$ اور $R_1 = 6$ پر کرتے ہوئے

$$I_1' = -6I_1 + 6I_2 + 12 \tag{4.23}$$

ملتا ہے۔اسی طرح دائیں دائرے کے لئے

$$0 = \frac{1}{C}\int I_2\,\mathrm{d}t + I_2R_2 + (I_2 - I_1)R_1$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $C = 0.4$ اور $R_2 = 5$ پر کرتے ہوئے تفرق لینے سے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4I_1' = 0$$

ملتا ہے۔اس میں مساوات 4.23 سے I_1' کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$I_2 + 4.4I_2' - 2.4(-6I_1 + 6I_2 + 12) = 0$$

یعنی

$$I_2' = -\frac{36}{11}I_1 + \frac{67}{22}I_2 + \frac{72}{11} \tag{4.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.23 اور مساوات 4.24 کو

$$J' = AJ + g \tag{4.25}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$J = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 12 \\ \frac{72}{11} \end{bmatrix}$$

ہیں۔ I_1' اور I_2' کے سمتیہ قطار کو J اس لئے لکھا گیا ہے کہ اس باب میں I اکائی قالب کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

دوسرا قدم نظام کا حل تلاش کرنا ہے۔ g کی موجودگی غیر متجانس سادہ تفرقی نظام کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا ہم ایک عدد تفرقی مساوات کی طرح پہلے متجانس مطابقتی نظام $J' = AJ$ کا حل حاصل کرتے ہیں۔ ہم $J = xe^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے متجانس نظام میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$J' = \lambda x e^{\lambda t} = Ax e^{\lambda t} \quad \implies \quad Ax = \lambda x$$

غیر صفر اہم حل کے حصول کے لئے A کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات درکار ہوں گے۔ امتیازی اقدار امتیازی مساوات

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 6 \\ -\frac{36}{11} & \frac{67}{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{65}{22}\lambda - \frac{15}{11} = 0$$

سے $\lambda_1 = -2.38209$ اور $\lambda_2 = -0.57245$ حاصل ہوتے ہیں۔ ان امتیازی اقدار کی مطابقتی امتیازی سمتیات مساوات 4.18 سے حاصل ہوں گے۔ مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_1 پر کرتے ہوئے

$$(-6 + 2.38209)x_1 + 6x_2 = 0, \quad \implies x_1 = 1.658416x_2$$

ملتا ہے۔ یوں $x_2 = 1$ چنتے ہوئے $x_1 = 1.658416$ ملتا ہے جس سے $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.658416 \\ 1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 4.18 کے پہلے مساوات میں λ_2 پر کرتے ہوئے

$$(-6 + 0.57245)x_1 + 6x_2 = 0, \quad \implies x_1 = 1.105471x_2$$

ملتا ہے۔ یوں $x_2 = 1$ چنتے ہوئے $x_1 = 1.105471$ ملتا ہے جس سے $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.105471 \\ 1 \end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں متجانس نظام کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$J = c_1 x^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 x^{(2)} e^{\lambda_2 t} \tag{4.26}$$

مساوات 4.25 کے غیر متجانس نظام کا جبری تفاعل $\boldsymbol{g}$ مستقل مقدار ہے لہٰذا اس نظام کا مخصوص حل مستقل سمتیہ قطار $\boldsymbol{J}_p = \boldsymbol{a}$ فرض کرتے ہیں جس کے ارکان a_1 اور a_2 ہیں۔ یوں $\boldsymbol{J}' = 0$ ہو گا۔ مساوات 4.25 میں فرض کردہ مخصوص حل پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{g} = 0$ ملتا ہے جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$-6a_1 + 6a_2 + 12 = 0$$
$$-\frac{36}{11}a_1 + \frac{67}{22}a_2 + \frac{72}{11} = 0$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے $a_1 = 2$ اور $a_2 = 0$ ملتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ہو گا۔یوں عمومی حل

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_h + \boldsymbol{J}_p = c_1 \boldsymbol{x}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{x}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \boldsymbol{a}$$

ہو گا جو درج ذیل مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

$$I_1 = 1.658416 c_1 e^{-2.38209t} + 1.105471 c_2 e^{-0.57245t} + 2$$
$$I_2 = c_1 e^{-2.38209t} + c_2 e^{-0.57245t}$$

ابتدائی معلومات کے تحت $I_1(0) = 0$ اور $I_2(0) = 0$ ہے۔انہیں درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$1.658416 c_1 + 1.105471 c_2 + 2 = 0$$
$$c_1 + c_2 = 0$$

ملتا ہے جنہیں حل کرتے ہوئے $c_1 = -3.61699$ اور $c_2 = 3.61699$ حاصل ہوتا ہے۔یوں مخصوص حل

$$\boldsymbol{J} = -3.617 \boldsymbol{x}^{(1)} e^{-2.38t} + 3.617 \boldsymbol{x}^{(2)} e^{-0.57t} + \boldsymbol{a}$$

یعنی

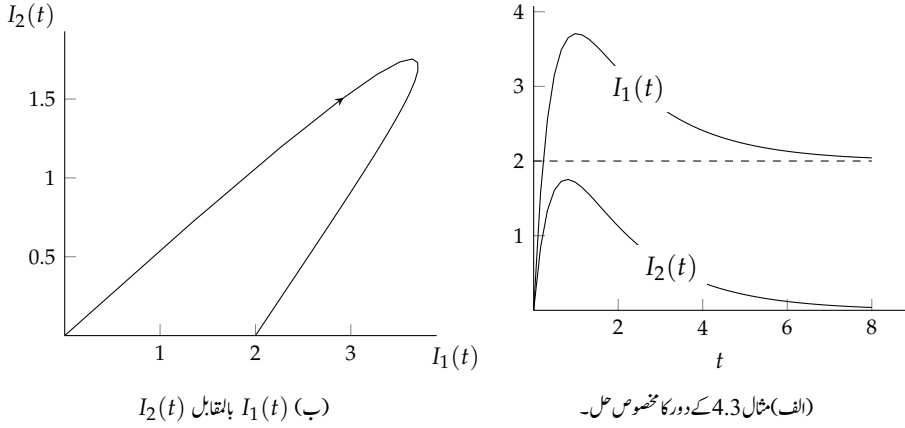
$$I_1 = -5.998 e^{-2.38t} + 3.998 e^{-0.57t} + 2$$
$$I_2 = -3.617 e^{-2.38t} + 3.617 e^{-0.57t}$$

ہو گا جسے شکل 4.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 4.3-ب میں $I_1(t)$ بالمقابل $I_2(t)$ کو $I_1 I_2$ سطح پر دکھایا گیا ہے جس میں t مقدار معلوم ہے۔مقدار معلوم کے بڑھنے کی سمت کو منحنی پر تیر کے نشان سے دکھایا گیا ہے۔ سطح $I_1 I_2$ کو نظام کی سطح مرحلہ[33] کہتے ہیں

[33] phase plane

(الف) مثال 4.3 کے دور کا مخصوص حل۔

(ب) $I_1(t)$ بالمقابل $I_2(t)$

شکل 4.3: مثال 4.3 کے منحنی۔

جبکہ شکل 4.3-ب کی منحنی کو خط حرکت[34] کہتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ سطح مرحلہ اشکال، سادہ شکل 4.3-الف طرز کے اشکال سے زیادہ اہم ثابت ہوتے ہیں۔ یہ خطوط کی نسل کے بارے میں بہتر کیفی معلومات فراہم کرتے ہیں۔ □

صفحہ 25 مثال 1.10 میں ایک عدد ٹینکی کی مثال پر غور کیا گیا جس کی نمونہ کشی ایک عدد سادہ تفرقی مساوات سے کی گئی۔ مثال 4.2 میں دو ٹینکیوں پر مبنی نظام کی نمونہ کشی دو عدد تفرقی مساوات سے کی گئی۔ اسی طرح مثال 4.3 میں دو عدد نا معلوم رو کی بنا دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل ہوئے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ بڑے نظام کی نمونہ کشی زیادہ تعداد کی تفرقی مساوات سے کی جائے گی۔

n رتبی سادہ تفرقی مساوات سے تفرقی مساوات کے نظام کا حصول

درج ذیل مسئلہ میں ثابت کیا جاتا ہے کہ n رتبی سادہ تفرقی مساوات 4.27 سے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 4.1: تفرقی مساوات کا مبادلہ
سادہ n رتبی تفرقی مساوات

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{4.27}$$

[34] trajectory

میں

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \cdots, y_n = y^{(n-1)} \tag{4.28}$$

لے کر اس کو n عدد سادہ یک رتبی تفرقی مساوات کے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{aligned} \tag{4.29}$$

میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

ثبوت: مساوات 4.28 کے تفرق سے نظام کے پہلے $n-1$ عدد تفرقی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ مساوات 4.28 سے $y_n' = y^{(n)}$ بھی حاصل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 4.27 سے مساوات 4.29 کی آخری مساوات بھی حاصل ہوتی ہے۔

□

مثال 4.4: ہم اسپرنگ اور کمیت کی آزادانہ ارتعاش کے مسئلے پر غور کر چکے ہیں جس کی تفرقی مساوات صفحہ 112 پر مساوات 2.45

$$my'' + cy' + ky = 0 \quad \implies \quad y'' = -\frac{k}{m}y - \frac{c}{m}y' \tag{4.30}$$

دیتی ہے جس کے لئے مساوات 4.29 کا نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2 \end{aligned}$$

متجانس اور خطی ہے۔ قالب کا استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ لکھتے ہوئے اس نظام کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

جس سے امتیازی مساوات لکھتے ہیں۔

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

اب مثلاً $m = 1$ ، $c = 1.4$ اور $k = 0.24$ ہوں تب

$$\lambda^2 + 1.4\lambda + 0.24 = (\lambda + 0.2)(\lambda + 1.2) = 0$$

ہو گا جس سے امتیازی اقدار $\lambda_1 = -0.2$ اور $\lambda_2 = -1.2$ حاصل ہوتے ہیں۔امتیازی سمتیات $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$ کی پہلی مساوات $-\lambda x_1 + x_2$ سے حاصل کرتے ہیں۔امتیازی قدر $\lambda_1 = -0.2$ پر کرتے ہوئے $0.2x_1 + x_2 = 0$ سے $x_2 = -0.2x_1$ ملتا ہے لہٰذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -0.2$ ہو گا۔اسی طرح $\lambda_2 = -1.2$ پر کرتے ہوئے $1.2x_1 + x_2 = 0$ سے $x_2 = -1.2x_1$ ملتا ہے لہٰذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -1.2$ ہو گا۔یوں درج ذیل امتیازی سمتیات حاصل ہوتی ہیں

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2 \end{bmatrix}$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \end{bmatrix} e^{-0.2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2 \end{bmatrix} e^{-1.2t}$$

سمتیہ حل لکھا جائے گا۔اس نظام کی پہلی مساوات

$$y = y_1 = c_1 e^{-0.2t} + c_2 e^{-1.2t}$$

درکار حل ہے جبکہ نظام کی دوسری مساوات حل کی تفرق ہے۔

$$y_2 = y_1' = y' = -0.2c_1 e^{-0.2t} - 1.2c_2 e^{-1.2t}$$

□

سوالات

سوال 4.1 تا سوال 4.5 میں دیے گئے قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات حاصل کریں۔

سوال 4.1: الیکٹران کی ایک خاصیت چکر[35] کہلاتی ہے جس کی مقدار $-\frac{\hbar}{2}$ یا $\frac{\hbar}{2}$ ہو سکتی ہے جہاں $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ہے اور $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{m^2kg/s}$ مستقل پلانک[36] ہے۔ چکر سمتیہ مقدار ہے۔ مقناطیسی میدان میں الیکٹران کا چکر یا ہمہ میدان (مقناطیسی میدان کی سمت میں) رہتا ہے اور یا مخالف میدان (میدان کی الٹ سمت میں) رہتا ہے۔ ہمہ میدان صورت میں الیکٹران کو اوپر چکر[37] الیکٹران کہتے ہیں جبکہ میدان مخالف چکر کی صورت میں الیکٹران کو نیچے چکر[38] الیکٹران کہتے ہیں۔ z سمت میں مقناطیسی میدان میں موجود الیکٹران کی خاصیت $\boldsymbol{S}_z$ قالبِ چکر[39] سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ z میدان میں اوپر چکر الیکٹران کو امتیازی سمتیہ χ_+^z اور نیچے چکر الیکٹران کو امتیازی سمتیہ χ_-^z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ درج ذیل $\boldsymbol{S}_z$ قالب کے امتیازی اقدار (یعنی الیکٹران کا چکر) حاصل کرتے ہوئے امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{S}_z = \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda_- = -\frac{\hbar}{2}$ ، $\lambda_+ = \frac{\hbar}{2}$ ، $\chi_-^z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\chi_+^z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

سوال 4.2: مقناطیسی میدان میں الیکٹران کی زاویائی حرکت کے معیار اثر کا مربع $\boldsymbol{S}^2$ قالب سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس قالب کی امتیازی قدر زاویائی حرکت کے معیار اثر کا مربع ہو گا۔ قالب کی امتیازی قدر اور امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{S}^2 = \begin{bmatrix} \frac{3\hbar}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3\hbar}{4} \end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3\hbar^2}{4}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

سوال 4.3: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

جوابات: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

---

spin[35]
Plank's constant[36]
spin up[37]
spin down[38]
spin matrix[39]

سوال 4.4: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}$

سوال 4.5: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$

جوابات: $\lambda_1 = \frac{3}{5}$ ، $\lambda_2 = \frac{4}{5}$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

سوال 4.6 اور سوال 4.7 ٹینکیوں کے سوالات ہیں۔

سوال 4.6: اگر مثال 4.2 میں ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر چار سو (400) لٹر پانی موجود ہو تب جوابات کیا ہوں گے؟

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.02 \\ 0.01 & -0.02 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -0.03$ ، $\lambda_2 = 0$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ ، $c_1 = -20$ ، $c_2 = 20$ ، $23.1\,\text{min}$

سوال 4.7: مثال 4.2 میں ٹینکی الف کے ساتھ دو سو (200) لٹر کی ٹینکی پ دو نالیوں کے ذریعہ جوڑی جاتی ہے۔ان کے مابین بھی چار لٹر فی منٹ کی شرح سے پانی کا تبادلہ ہوتا ہے۔ٹینکی پ میں ابتدائی طور پر دو سو لٹر کا خالص پانی پایا جاتا ہے۔اس نظام کے تفرقی مساوات لکھ کر $\boldsymbol{A}$ حاصل کریں۔نظام کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کرتے ہوئے مخصوص حل دریافت کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 & 0 \\ 0.02 & 0 & -0.02 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -0.06$ ، $\lambda_2 = -0.02$ ، $\lambda_3 = 0$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ،

$$\boldsymbol{y} = -10\boldsymbol{x}^{(1)}e^{-0.06t} + 15\boldsymbol{x}^{(-0.02t)} + 10\boldsymbol{x}^{(3)}$$

سوال 4.8 تا سوال 4.10 برقی جال پر مبنی ہیں۔

سوال 4.8: اگر مثال 4.3 میں ابتدائی برقی رو $I_1(0) = 0$ اور $I_2 = 2\,\mathrm{A}$ ہوں تب حل کیا ہو گا؟

جواب: $I_1 = 10.63e^{-0.57t} - 12.63e^{-2.38t} + 2$ ، $I_2 = 9.62e^{-0.57t} - 7.62e^{-2.38t}$

سوال 4.9: اگر مثال 4.3 میں $L = 0.5\,\mathrm{H}$ کر دیا جائے تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

جواب: $I_1 = 2.96e^{-0.529t} - 4.96e^{-5.153t} + 2$ ، $I_2 = 2.83e^{-0.529t} - 2.83e^{-5.153t}$

سوال 4.10: اگر مثال 4.3 میں $L = 2\,\mathrm{H}$ کر دیا جائے تب مخصوص حل کیا ہو گا؟

جواب: $I_1 = 2 + e^{-\frac{35}{44}t}[19.9\cos(0.22t) - 2\sin(0.22t)]$ ، $I_2 = 14.77e^{-\frac{35}{44}t}\sin(0.22t)$

سوال 4.11 تا سوال 4.11 میں تفرقی مساوات کو نظام میں تبدیل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ قالب حاصل کریں۔اس قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کریں۔مساوات کا عمومی حل حاصل کریں۔ تفرقی مساوات کو جوں کا توں بھی حل کریں۔

سوال 4.11: $y'' + 5y' + 6y = 0$

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -3$ ، $\lambda_2 = -2$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t}$

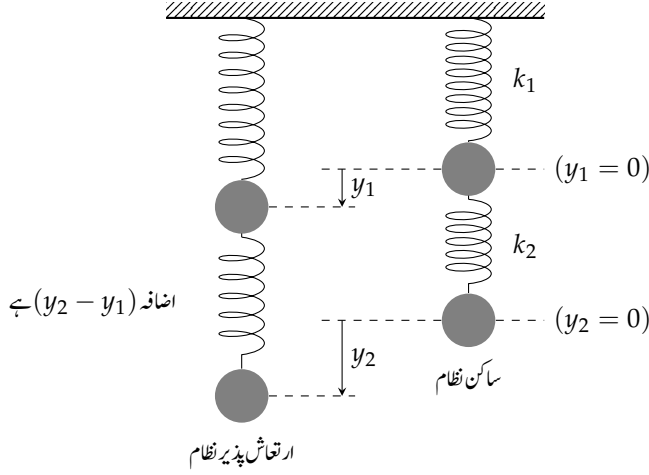
سوال 4.12: $12y'' - y' - 6y = 0$

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ ، $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} e^{-\frac{2}{3}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} e^{\frac{3}{4}t}$

ارتعاش پذیر نظام

ساکن نظام

اضافہ $(y_2 - y_1)$ ہے

k_1, k_2, y_1, y_2, $(y_1 = 0)$, $(y_2 = 0)$

شکل 4.4: دو اسپرنگ اور دو کمیت کا نظام۔

سوال 4.13: $y''' - y' = 0$

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -1$ ، $\lambda_2 = 1$ ، $\lambda_3 = 0$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

سوال 4.14: $y'' + 9y' + 14y = 0$

جوابات: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -14 & -9 \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1 = -2$ ، $\lambda_2 = -7$ ، $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} e^{-7t}$

سوال 4.15: دو اسپرنگ اور دو کمیت کا نظام شکل 4.4 میں دکھایا گیا ہے جس میں $m_1 = m_2 = 1$ ، $k_1 = 3$ اور $k_2 = 4$ ہیں۔اس نظام کے تفرقی مساوات لکھیں۔ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\omega t}$ تصور کرتے ہوئے، جہاں $\omega^2 = \lambda$ ہے، ان کا حل دریافت کریں۔

جوابات: $y_1 = A\cos(1.109t) + B\sin(1.109t) + C\cos(3.126t) + D\sin(3.126t)$ ، $y_2 = A^*\cos(1.109t) + B^*\sin(1.109t) + C^*\cos(3.126t) + D^*\sin(3.126t)$

4.3 نظریہ نظام سادہ تفرقی مساوات اور ورونسکی

گزشتہ حصے کے یک رتبی تفرقی مساوات کے نظام، درج ذیل عمومی نظام کی مخصوص صورت ہے۔

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(t, y_1, \cdots, y_n) \\
y_2 &= f_2(t, y_1, \cdots, y_n) \\
&\vdots \\
y_n &= f_n(t, y_1, \cdots, y_n)
\end{aligned}
\quad \implies \quad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \tag{4.32}
$$

نظام کو سمتیہ کی صورت میں سمتیہ قطار $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$ اور سمتیہ قطار $\boldsymbol{f} = [f_1, f_2, \cdots, f_n]^T$ (یہاں T سے مراد تبدیلی محل ہے جسے استعمال کرتے ہوئے سمتیہ قطار کو افقی لکھ کر جگہ بچائی گئی ہے) کی استعمال سے لکھا گیا ہے۔درج بالا نظام عملی استعمال کے تقریباً تمام صورتوں کو ظاہر کرتی ہے۔یوں $n = 1$ کی صورت میں یہ $y_1' = f_1(t, y_1)$ یعنی $y' = f(t, y)$ کو ظاہر کرے گی جسے ہم باب 1 سے جانتے ہیں۔

کسی کھلے وقفہ $a < t < b$ پر مساوات 4.32 کا حل، وقفہ $a < t < b$ پر قابل تفرق، n عدد تفاعل کا سلسلہ

$$y_1 = h_1(t), \quad y_2 = h_2(t), \quad \cdots, \quad y_n = h_n(t)$$

ہو گا جو پورے وقفے پر مساوات 4.32 پر پورا اترتا ہو۔حل سمتیہ[40] کو قطار سمتیہ $\boldsymbol{h} = [h_1(t), \cdots, h_n(t)]^T$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(t)$$

اس نظام پر مبنی ابتدائی قیمت مسئلہ مساوات 4.32 اور n عدد ابتدائی شرائط

$$y_1(t_0) = K_1, \quad y_2(t_0) = K_2, \quad \cdots, \quad y_n(t_0) = K_n \tag{4.33}$$

پر مبنی ہو گا۔ان ابتدائی شرائط کو سمتیہ کی صورت میں $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{K}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں t_0 دیے گئے وقفے پر پایا جاتا ہے اور سمتیہ قطار $\boldsymbol{K} = [K_1, \cdots, K_n]^T$ کے ارکان دیے گئے مستقل مقدار ہیں۔مساوات 4.32

[40] solution vector

اور مساوات 4.33 کے ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کی وجودیت اور یکتائی کے لئے کافی شرائط درج ذیل مسئلہ بیان کرتی ہے جو حصہ 1.7 میں دیے گئے مسئلے کو وسعت دیتی ہے۔اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مسئلہ 4.2: مسئلہ وجودیت اور یکتائی
تصور کریں کہ فضا $ty_1y_2\cdots y_n$ کے دائرہ کار[41] R میں تفاعل f_1 تا f_n اور ان کے تفرق $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}$ ، $\cdots$ ، $\frac{\partial f_1}{\partial y_n}$ ، $\cdots$ ، $\frac{\partial f_n}{\partial y_n}$ استمراری ہوں اور اس دائرہ کار میں نقطہ $(t_0, K_1, \cdots, K_n)$ پایا جاتا ہو تب کسی وقفہ $t_0 - \alpha < t < t_0 + \alpha$ پر مساوات 4.32 کا ایسا حل موجود ہو گا جو مساوات 4.33 کی ابتدائی شرائط پر پورا اترتا ہو اور یہ حل یکتا ہو گا۔

4.3.1 خطی نظام

سادہ تفرقی مساوات کے خطی ہونے کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے ہم مساوات 4.32 کو اس صورت خطی نظام[42] کہیں گے جب اس کو

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(t)y_1 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t) \\ y_2' &= a_{21}(t)y_1 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t) \end{aligned} \implies \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} \tag{4.34}$$

لکھنا ممکن ہو جہاں

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نظام 4.34 میں y_1' تا y_n' کا y_1 تا y_n کے ساتھ خطی تعلق ہے۔اگر $\boldsymbol{g} = 0$ ہو تب نظام 4.34

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{4.35}$$

---

[41] domain
[42] linear system

صورت اختیار کرتا ہے جو متجانس نظام ہے جبکہ $g \neq 0$ کی صورت میں نظام 4.34 کو غیر متجانس کہلاتا ہے۔یوں مثال 4.2 اور مثال 4.4 متجانس نظام ہیں جبکہ مثال 4.3 غیر متجانس نظام ہے۔

خطی نظام میں $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = a_{11}(t)$ تا $\frac{\partial f_n}{\partial y_n} = a_{nn}(t)$ ہیں لہٰذا مسئلہ 4.2 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.3: خطی نظام کا مسئلہ وجودیت اور یکتائی
فرض کریں کہ کھلا وقفہ $\alpha < t < \beta$ پر، جس پر نقطہ t_0 پایا جاتا ہو، نظام 4.34 کے تمام a_{jk} اور g_j متغیر t کے استمراری تفاعل ہیں۔ایسی صورت میں اس وقفہ پر نظام 4.34 کا ایسا حل $\boldsymbol{y}$ موجود ہو گا جو ابتدائی شرائط مساوات 4.33 پر پورا اترے گا اور یہ حل یکتا ہو گا۔

ایک عدد متجانس سادہ تفرقی مساوات کی طرح مسئلہ خطی میل متجانس نظام کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔

مسئلہ 4.4: مسئلہ خطی میل
اگر $\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)}$ کسی کھلے وقفے پر متجانس خطی نظام 4.35 کے حل ہوں تب ان کا کوئی بھی خطی میل $\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}$ بھی اس وقفے پر اس نظام کا حل ہو گا۔

ثبوت: خطی میل کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 4.35 کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}' &= [c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}]' \\
&= c_1\boldsymbol{y}^{(1)\prime} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)\prime} \\
&= c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(2)} \\
&= \boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

□

خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظام کا نظریہ، ایک عدد خطی سادہ تفرقی مساوات کے نظریے سے بہت مشابہت رکھتا ہے جس پر حصہ 2.6 اور حصہ 2.7 میں غور کیا گیا ہے۔یہ دیکھنے کی خاطر ہم بالکل بنیادی تصورات اور حقائق پر غور کرتے ہیں۔

اساس، عمومی حل اور ورونسکی

متجانس نظام 4.35 کا کھلے وقفہ J پر حل کی **اساس** یعنی **بنیادی نظام**[43] سے مراد n عدد، J پر خطی طور غیر تابع حل، $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ کا سلسلہ ہے۔(یہاں کھلے وقفے کو J کہا گیا ہے چونکہ I اکائی قالب کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔) ان حل کے خطی میل

$$\boldsymbol{y}=c_1\boldsymbol{y}^{(1)}+\cdots+c_n\boldsymbol{y}^{(n)} \tag{4.36}$$

کو J پر مساوات 4.35 کا **عمومی حل** کہا جاتا ہے جہاں c_1 تا c_n اختیاری مستقل ہیں۔یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر مساوات 4.35 میں تمام a_{jk} کھلے وقفے پر استمراری ہوں تب اس وقفے پر مساوات 4.35 کے حل کی **اساس** موجود ہے لہٰذا اس کا **عمومی** حل موجود ہے جس میں، کھلے وقفے پر، تمام حل شامل ہیں۔

ہم کھلے وقفے پر n عدد حل کو $n\times n$ قالب کی قطاروں کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{y}^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{y}^{(n)}] \tag{4.37}$$

$\boldsymbol{Y}$ کے مقطع کو $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ کا **ورونسکی** کہتے ہیں۔

$$W(\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(n)})=\begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(n)}\\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \cdots & y_2^{(n)}\\ & & \vdots & \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \cdots & y_n^{(n)}\end{vmatrix} \tag{4.38}$$

درج بالا **ورونسکی** میں قطار $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ حل کی اساس ہیں جنہیں اجزاء کی صورت میں لکھا گیا ہے۔یہ حل صرف اور صرف اس صورت حل کی اساس ہوں گے جب ان کا ورونسکی کھلے وقفہ J پر کسی بھی نقطہ t_1 پر صفر کے برابر نہ ہو۔کھلے وقفے پر W یا تو کہیں بھی صفر کے برابر نہیں ہو گا اور یا یہ کھلے وقفے پر مکمل صفر کے برابر ہو گا۔(یہ بالکل مسئلہ 2.3 اور مسئلہ 3.3 کی طرح ہے۔)

اگر مساوات 4.36 میں دیے حل اساس یعنی **بنیادی نظام** ہوں تب قالب 4.37 **بنیادی قالب**[44] کہلاتا ہے۔سمتیہ قطار $\boldsymbol{c}=[c_1\ c_2\cdots c_n]^T$ کی مدد سے مساوات 4.36 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{c} \tag{4.39}$$

---

[43] fundamental system
[44] fundamental matrix

آئیں مساوات 4.38 کا حصہ 2.6 کے ساتھ تعلق جوڑیں۔فرض کریں کہ متجانس دو رتبی سادہ تفرقی مساوات کے حل y اور z ہیں۔یوں ورونسکی

$$W(y,z)=\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$$

ہو گا۔اس سادہ دو رتبی مساوات کو تفرقی مساوات کی نظام کی صورت میں لکھنے کی خاطر، حصہ 4.1 کے تحت، $y=y_1$ ، $y'=y_1'=y_2$ ، $z=z_1$ اور $z'=z_1'=z_2$ لکھنا ہو گا۔ایسا کرتے ہوئے ورونسکی درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے

$$W(y_1,z_1)=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

جو، علامتوں میں فرق کے علاوہ، ہو بہو مساوات 4.38 ہے۔

4.4 مستقل عددی سر والے نظام۔ سطح مرحلہ کی ترکیب

فرض کریں کہ متجانس خطی نظام

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{4.40}$$

کے عددی سر مستقل مقدار ہیں لہٰذا $n\times n$ قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ کے ارکان t پر منحصر نہیں ہوں گے۔ہم مساوات 4.40 کو حل کرنا چاہتے ہیں۔اب ہم جانتے ہیں کہ ایک عدد سادہ تفرقی مساوات $y'=ky$ کا حل $y=Ce^{kt}$ ہے لہٰذا ہم مساوات 4.40 کا حل

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}e^{\lambda t} \tag{4.41}$$

تصور کرتے ہیں۔تصوراتی حل اور اس کے تفرق $\boldsymbol{y}'=\lambda\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ کو مساوات 4.40 میں پر کرتے ہوئے ہمیں $\boldsymbol{y}'=\lambda\boldsymbol{x}e^{\lambda t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ ملتا ہے جس کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے امتیازی قدر مسئلہ

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \tag{4.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں مساوات 4.40 کے غیر صفر اہم حل مساوات 4.41 کی صورت رکھتے ہیں جہاں λ قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی قدر اور $\boldsymbol{x}$ اس کے مطابقتی امتیازی سمتیات ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{A}$ کا n عدد خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات کا سلسلہ پایا جاتا ہے۔عموماً مسائل میں ایسا ہی ہوتا ہے بالخصوص اگر $\boldsymbol{A}$ **تشاکل**[45] ہو $(a_{kj} = a_{jk})$ یا **منحرف تشاکل**[46] $(a_{kj} = -a_{jk})$ ہو اور یا اگر اس کے n عدد منفرد امتیازی اقدار پائے جاتے ہوں۔

ان خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات کے سلسلے کو $\boldsymbol{x}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{x}^{(n)}$ لکھتے ہیں جو امتیازی اقدار λ_1 تا λ_n کے مطابقتی سمتیات ہیں (جو منفرد ہو سکتے ہیں یا ان میں سے چند یا تمام یکساں ہو سکتے ہیں)۔یوں مساوات 4.41 طرز کے مطابقتی حل درج ذیل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(n)} e^{\lambda_n t} \tag{4.43}$$

مساوات 4.38 کی مدد سے ان کی ورونسکی $W(\boldsymbol{y}^{(1)}), \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)}$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{y}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)}) &= \begin{vmatrix} x_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} & x_1^{(2)} e^{\lambda_t} & \cdots & x_1^{(n)} e^{\lambda_n t} \\ x_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} & x_2^{(2)} e^{\lambda_2 t} & \cdots & x_2^{(n)} e^{\lambda_n t} \\ & \vdots & & \\ x_n^{(1)} e^{\lambda_1 t} & x_n^{(2)} e^{\lambda_2 t} & \cdots & x_n^{(n)} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} \\ &= e^{\lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} \\ & \vdots & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.44}$$

اب نا قوت نمائی تفاعل کبھی بھی صفر نہیں ہوتا اور درج بالا مساوات میں آخری مقطع کے قطار، خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات ہیں، لہٰذا یہ مقطع بھی غیر صفر ہے۔اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.5: عمومی حل
اگر مساوات 4.40 میں دیے نظام کے مستقل قالب $\boldsymbol{A}$ کے n عدد منفرد امتیازی سمتیات کا سلسلہ پایا جاتا ہو تب مساوات 4.43 میں دیے گئے مطابقتی حل $\boldsymbol{y}^{(1)}$ تا $\boldsymbol{y}^{(n)}$ مساوات 4.40 کے حل کی اساس ہوں گے جن سے درج ذیل مطابقتی عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \boldsymbol{x}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n \boldsymbol{x}^{(n)} e^{\lambda_n t} \tag{4.45}$$

---

[45] symmetric
[46] skew-symmetric

تشاکل یا منحرف تشاکل A کی صورت میں اور یا اگر A کے n عدد منفرد امتیازی سمتیات پائے جاتے ہوں تب A کے منفرد امتیازی سمتیات کا سلسلہ پایا جائے گا اور درج بالا مسئلے کا فرض کردہ شرط پورا ہو گا۔

سطح مرحلہ پر حل منحنی کا اظہار

ہم اب دو عدد مستقل عددی سر والے متجانس سادہ تفرقی مساوات کے نظام کی صورت میں مساوات 4.40 پر غور کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \tag{4.46}$$

ہم عموماً مساوات 4.46 کے دونوں حل بالمقابل t کو علیحدہ علیحدہ (شکل 4.3-الف کی طرح) کھینچتے ہیں۔ ہم انہیں حل

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

کو ایک ہی خط کی صورت میں (شکل 4.3-ب کی طرح) سطح مرحلہ پر بھی کھینچ سکتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے t کو بطور مقدار معلوم تصور کیا جاتا ہے لہٰذا ایسے خط کو منحنی مقدار معلوم[47] بھی کہتے ہیں۔ایسے منحنی کو مساوات 4.46 کا خط حرکت کہا جاتا ہے جبکہ $y - 1y_2$ سطح کو سطح مرحلہ کہتے ہیں۔ سطح مرحلہ کو مساوات 4.46 کے خطوط حرکت سے بھرنے سے مساوات 4.46 کا پیکر مرحلہ[48] حاصل ہوتا ہے۔

کمپیوٹر کے استعمال نے سطح مرحلہ پر حل کے خط حرکت کو اہمیت بخشی ہے۔پیکر مرحلہ تمام حل کی خفی تجزیہ میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔آئیں پیکر مرحلہ کی ایک مثال دیکھیں۔

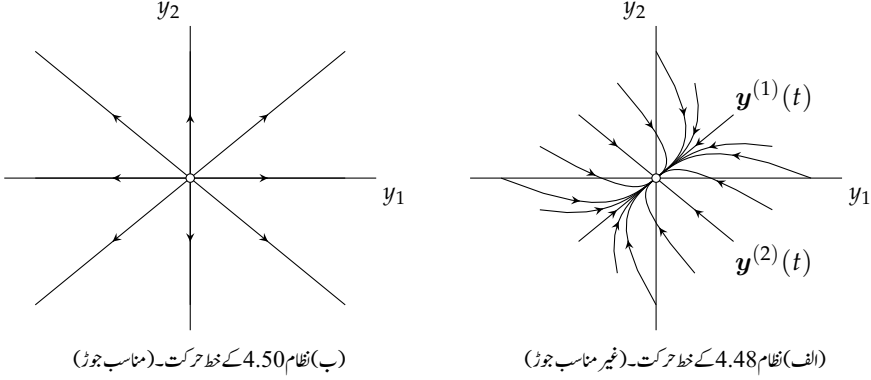
مثال 4.5: سطح مرحلہ پر خط حرکت
درج ذیل نظام کے حل کی منحنی کھینچیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned} \tag{4.48}$$

---

parametric curve[47]
phase portrait[48]

(الف) نظام 4.48 کے خط حرکت۔ (غیر مناسب جوڑ)

(ب) نظام 4.50 کے خط حرکت۔ (مناسب جوڑ)

شکل 4.5: غیر مناسب جوڑ اور مناسب جوڑ۔

حل: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ اور $\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x} e^{\lambda t}$ پر کر کے قوت نمائی تفاعل سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ ملتا ہے۔ امتیازی مساوات

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3) = 0$$

ہے۔ یوں امتیازی اقدار $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -3$ حاصل ہوتے ہیں۔ امتیازی سمتیات $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$ کے پہلے صف $(-2-\lambda)x_1 + x_2 = 0$ سے حاصل کرتے ہیں جس میں $\lambda = \lambda_1 = -1$ پر کرتے ہوئے $x_2 = x_1$ حاصل ہو گا جس سے امتیازی سمتیہ $x_2 = 1$ چنتے ہوئے x_1 ملتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $\lambda = \lambda_2 = -3$ پر کرتے ہوئے $x_2 = -x_1$ ملتا ہے لہٰذا $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = -1$ حاصل ہو گا اور یوں $\boldsymbol{x}^{(2)} = [1 \quad -1]^T$ ہو گا۔ ان سے عمومی حل لکھتے ہیں جس کے مختلف خط حرکت (یعنی پیکر حرکت) شکل 4.5-الف میں دکھائے گئے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \boldsymbol{y}^{(1)} + c_2 \boldsymbol{y}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

□

نظام کا نقطہ فاصل

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ نظام 4.46 کے تمام خط حرکت نقطہ $\boldsymbol{y} = 0$ سے گزرتے ہیں۔آئیں دیکھیں کہ ایسا کیوں ہے۔احصاء سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = \frac{y_2'\,\mathrm{d}t}{y_1'\,\mathrm{d}t} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2} \tag{4.49}$$

یوں ماسوائے نقطہ $P_0 : (0, 0)$ کے، ہر نقطہ $P : (y_1, y_2)$ کے ساتھ خط حرکت کا مماس $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}$ منسلک کیا جا سکتا ہے۔نقطہ P_0 پر مساوات 4.49 کا دایاں ہاتھ نا قابل معلوم قیمت $\frac{0}{0}$ ہو گا۔ایسا نقطہ P_0 جس پر $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}$ کی قیمت نا قابل معلوم ہو کو نظام 4.46 کا **نقطہ فاصل**[49] کہتے ہیں۔

نقطہ فاصل کے پانچ اقسام

نقطہ فاصل کے قریب، خط حرکت کی جیومیٹریائی صورت کو دیکھ کر نقطہ فاصل کی پانچ اقسام بیان کیے جا سکتے ہیں جنہیں **غیر مناسب جوڑ**[50] ، **مناسب جوڑ**[51] ، **نقطہ زین**[52] ، **وسط**[53] اور **نقطہ مرغولہ**[54] کہتے ہیں۔ان کی وضاحت درج ذیل پانچ مثالوں میں کی گئی ہے جہاں ان کی تعریف بھی پیش کی گئی ہیں۔

مثال 4.6: غیر مناسب جوڑ
ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر، دو خط حرکت کے علاوہ، تمام خط حرکت کی مماس کی ایک جیسی تحدیدی سمت پائی جاتی ہو **غیر مناسب جوڑ** کہلاتا ہے۔دو مختلف خط حرکت کا بھی نقطہ P_0 پر تحدیدی سمت پایا جاتا ہے البتہ یہ تحدیدی سمت مختلف ہو گا۔

نظام 4.48 کا $\boldsymbol{0}$ پر غیر مناسب جوڑ پایا جاتا ہے۔چونکہ e^{-t} کی نسبت سے e^{-3t} زیادہ تیزی سے گھٹتی ہے لہٰذا غیر مناسب جوڑ پر مشترکہ تحدیدی سمت، $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad 1]^T$ کی سمت ہے۔ دو غیر معمولی خط حرکت کی سمت $\boldsymbol{x}^{(2)} = [1 \quad -1]^T$ اور $-\boldsymbol{x}^{(2)} = [-1 \quad 1]^T$ کی سمتیں ہیں۔ □

مثال 4.7: مناسب جوڑ
ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر ہر خط حرکت کی تحدیدی سمت پائی جاتی ہو **مناسب جوڑ** کہلاتا ہے۔مناسب جوڑ پر ایسا خط حرکت ضرور ہو گا جس کی تحدیدی سمت $\boldsymbol{d}$ ہو جہاں $\boldsymbol{d}$ کوئی بھی سمت ہو سکتی ہے۔

critical point[49]
improper node[50]
proper node[51]
saddle point[52]
center[53]
spiral point[54]

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1\\ y_2' &= y_2\end{aligned} \tag{4.50}$$

کا مناسب جوڑ مبدا پر پایا جاتا ہے۔اس میں فرضی حل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ اور اس کا تفرق $\boldsymbol{y}' = \lambda \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ یعنی $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ حاصل ہوتا ہے۔اس کی امتیازی قدر، $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ کی صورت میں، امتیازی مساوات $(1-\lambda)^2 = 0$ سے $\lambda = 1$ حاصل ہوتی ہے۔مساوات $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ کے اجزاء $(1-\lambda)x_1 = 0$ اور $(1-\lambda)x_2 = 0$ میں حاصل امتیازی قدر پر کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ کے علاوہ امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کی کوئی بھی قیمت چنی جا سکتی ہے۔ یوں $[1 \quad 0]^T$ اور $[0 \quad 1]^T$ چنتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e^t + c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}e^t \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1e^t\\ y_2 &= c_2e^t\end{aligned} \quad \implies \quad c_1y_2 = c_2y_1$$

شکل 4.5-ب میں سطح حرکت پر پیکر مرحلہ اور مناسب جوڑ دکھائے گئے ہیں۔ □

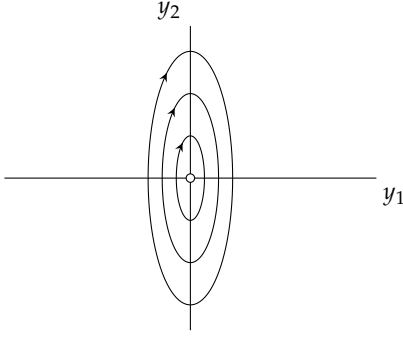
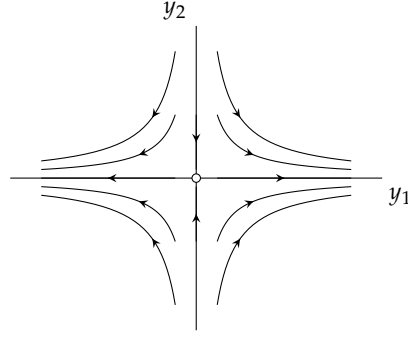
مثال 4.8: نقطہ زین

ایسا نقطہ فاصل P_0 جس پر دو عدد آمدی اور دو عدد رخصتی خط حرکت پائے جاتے ہوں **نقطہ زین**[55] کہلاتا ہے۔نقطہ فاصل کے قریب بقایا تمام خط حرکت اس نقطے کو نہیں چھوتے۔

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1\\ y_2' &= -y_2\end{aligned} \tag{4.51}$$

کا **نقطہ زین** مبدا پر پایا جاتا ہے۔اس نظام کے امتیازی مساوات $(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$ کے جذر $\lambda_1 = 1$ اور $\lambda_2 = -1$ ہیں۔جذر λ_1 کے لئے $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ کے دوسرے صف $0x_1(1-1)x_2 = 0$ میں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 0$ ملتا ہے جس سے امتیازی سمتیہ $[1 \quad 0]^T$ حاصل ہوتا ہے۔جذر λ_2 کے لئے پہلے صف سے امتیازی سمتیہ $[0 \quad 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ان سے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e^t + c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}e^{-t} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1e^t\\ y_2 &= c_2e^{-t}\end{aligned} \quad \implies \quad y_1y_2 = c \tag{4.52}$$

(الف) نظام 4.51 کے خط حرکت۔ (نقطہ زین)

(ب) نظام 4.53 کے خط حرکت۔ (وسط)

شکل 4.6: نقطہ زین اور وسط۔

عمومی حل ہذلولی[56] ہے جس کو شکل 4.6-الف میں دکھایا گیا ہے۔ □

مثال 4.9: وسط
ایسا نقطہ فاصل جسے لامتناہی بند خط حرکت گھیرتے ہوں وسط کہلاتا ہے۔

نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \quad \text{(الف)} \\ y_2' &= -9y_1 \quad \text{(ب)} \end{aligned} \tag{4.53}$$

میں $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ حل تصور کرتے ہوئے $\boldsymbol{y}$ اور $\boldsymbol{y}'$ کو درج بالا میں پر کر کے $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ملتا ہے۔اس سے $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ کی صورت میں امتیازی مساوات $\lambda^2 + 9 = 0$ حاصل ہو گا جس کے امتیازی اقدار $\lambda_1 = 3i$ اور $\lambda_2 = -3i$ ہیں۔ مساوات $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ کے پہلے صف میں λ_1 پر کرتے ہوئے $x_2 = 3ix_1$ ملتا ہے۔یوں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 3i$ حاصل ہو گا جس سے امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad 3i]^T$ ملتا ہے۔اسی طرح λ_2 کی مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(2)} = [1 \quad -3i]^T$ حاصل ہو گا۔یوں مخلوط عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \end{bmatrix} e^{3it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3i \end{bmatrix} e^{-3it} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{3it} + c_2 e^{-3it} \\ y_2 &= 3ic_1 e^{3it} - 3ic_2 e^{-3it} \end{aligned} \tag{4.54}$$

[55] نقطہ زین کے خط کی شکل عموماً گھوڑے کی زین سے مشابہت رکھتی ہے۔اسی سے اس نقطے کو نقطہ زین کہتے ہیں۔
[56] hyperbolic

حقیقی حل یولر مساوات[57] سے

$$y_1 = A\cos 3t + B\sin 3t$$
$$y_2 = 3B\cos 3t - 3A\sin 3t$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $A = c_1 + c_2$ اور $B = i(c_1 - c_2)$ ہیں۔

حقیقی حل کو مساوات 4.53 سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں اگر مساوات 4.53-الف کے بائیں ہاتھ اور مساوات -ب کے دائیں ہاتھ کو ضرب دیا جائے تو $-9y_1y_1'$ حاصل ہو گا جو مساوات-ب کے بائیں ہاتھ اور مساوات-الف کے دائیں ہاتھ کے حاصل ضرب y_2y_2' کے برابر $-9y_1y_1' = y_2y_2'$ ہو گا۔اس کا تکمل

$$\frac{9}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = c \tag{4.55}$$

ہے جو t سے پاک حقیقی حل ہے۔یہ ترخیم[58] کی نسل کی مساوات ہے جس کو شکل 4.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔

□

مثال 4.10: نقطہ مرغولہ

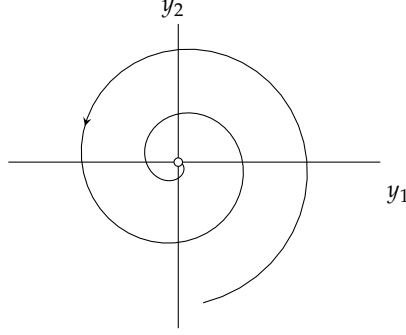
ایسا نقطہ فاصل جس کے گرد خط حرکت گھومتے ہوئے نقطہ فاصل تک آن پہنچنے کی کوشش کرے یا نقطہ فاصل سے نکل کر اس نقطے کے گرد گھومتے ہوئے دور ہٹتا جائے [59] کہلاتا ہے۔پہلی صورت میں لمحہ $t \to \infty$ پر خط حرکت نقطہ مرغولہ تک آن پہنچے گا۔

نظام

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} y \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \quad \text{(الف)} \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \quad \text{(ب)} \end{aligned} \tag{4.56}$$

کا نقطہ مرغولہ مبدا پر پایا جاتا ہے۔امتیازی مساوات $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ سے امتیازی اقدار $\lambda_1 = -1 + i$ اور $\lambda_2 = -1 - i$ حاصل ہوتے ہیں۔مساوات $(-1-\lambda)x_1 + x_2 = 0$ میں امتیازی قدر λ_1 پر کرتے ہوئے $-ix_1 + x_2 = 0$ ملتا ہے جس میں $x_1 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = i$ حاصل ہوتا ہے

[57] $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
[58] ellipse
[59] spiral point

y_2
y_1

شکل 4.7: نظام 4.56 کے خط حرکت۔(نقطہ مرغولہ)

اور یوں λ_1 کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix}^T$ ہو گا۔اسی طرح λ_2 کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix}^T$ حاصل ہوتا ہے۔ ان سے مخلوط عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}$$

مخلوط عمومی حل سے حقیقی حل حاصل کو یولر مساوات کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں۔ہم گزشتہ مثال کی طرح نسبتاً آسان طریقہ استعمال کرتے ہوئے حقیقی حل حاصل کرتے ہیں۔یوں مساوات 4.56-الف کو y_1 اور مساوات 4.56-ب کو y_2 سے ضرب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ

$$y_1 y_1' + y_2 y_2' = -(y_1^2 + y_2^2)$$

اب ہم نلکی محدد r اور t زیر استعمال لاتے ہیں جہاں $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ ہے۔ r کا t کے ساتھ تفرق $2rr' = 2y_1 y_1' + 2y_2 y_2'$ ہو گا لہٰذا درج بالا مساوات سے

$$rr' = -r^2, \implies \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\,\mathrm{d}t, \implies r = ce^{-t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ c کی کسی بھی قیمت کے لئے یہ مرغولی خط کی مساوات ہے جس کو شکل 4.7 میں دکھایا گیا ہے۔
□

مثال 4.11: انحطاطی جوڑ
بعض اوقات نظام کی امتیازی حل کی اساس نہیں پائی جاتی۔ایسے صورت میں انحطاطی جوڑ[60] پایا جاتا ہے۔انحطاطی جوڑ،

[60] degenerate node

مثال 4.6 تا مثال 4.8 کی طرح تشاکلی A (جس میں $a_{kj}=a_{jk}$ ہوتا ہے) کی صورت میں نہیں پایا جائے گا اور نا ہی یہ منحرف تشاکلی (جس میں $a_{kj}=-a_{jk}$ اور $a_{jj}=0$ ہوتا ہے)صورت میں پایا جائے گا۔ان کے علاوہ، مثال 4.9 اور مثال 4.10 کی طرح، کئی دیگر صورتوں میں بھی انحطاطی جوڑ نہیں پایا جاتا ہے۔انحطاطی جوڑ کی صورت میں جو ترکیب استعمال کی جاتی ہے اس کو درج ذیل نظام کی عمومی حل کے حصول کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{y} \tag{4.57}$$

حل: $\boldsymbol{A}$ منحرف تشاکلی نہیں ہے۔ہم اس کا حل $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{y}$ اور $\boldsymbol{y}'$ کو درج بالا میں پر کر کے e^{λ} سے تقسیم کرتے ہوئے $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$ ملتا ہے۔اس کی امتیازی مساوات

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2=0$$

سے دوہرا امتیازی قدر $\lambda=3$ حاصل ہوتا ہے۔مساوات $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ کے پہلے صف میں $\lambda=3$ پر کرتے ہوئے

$$(4-\lambda)x_1+x_2=0,\qquad\Longrightarrow\qquad x_1+x_2=0$$

ملتا ہے جس میں $x_1=1$ چننے سے $x_2=-1$ اور یوں امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}^{(1)}=[1 \quad -1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔

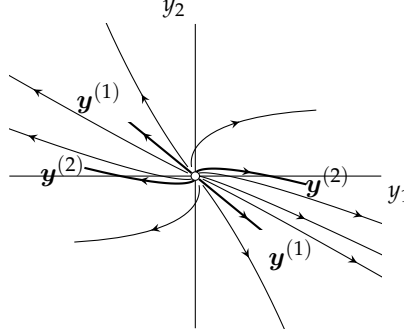
دوسرا حل

$$\boldsymbol{y}^{(2)}=\boldsymbol{x}te^{\lambda t}+\boldsymbol{u}e^{\lambda t}$$

فرض کرتے ہیں جہاں $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(1)}$ ، $\lambda=-3$ جبکہ $\boldsymbol{u}=[u_1 \quad u_2]^T$ مستقل ہے۔(اگر یہاں حصہ 2.2 کی طرح دوسرا حل صرف $\boldsymbol{x}te^{\lambda t}$ پر کیا جائے تو بات نہیں بنتی۔آپ ایسا کر کے تسلی کر لیں۔) فرض کردہ حل اور اس کے تفرق کو مساوات 4.57 میں پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(2)\prime}=\boldsymbol{x}e^{\lambda t}+\lambda\boldsymbol{x}te^{\lambda t}+\lambda\boldsymbol{u}e^{\lambda t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{(2)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}te^{\lambda t}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}e^{\lambda t}$$

دائیں ہاتھ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ ہے لہٰذا دونوں اطراف $\lambda\boldsymbol{x}te^{\lambda t}$ کٹ جائے گا۔بقایا مساوات کے دونوں اطراف کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\qquad\Longrightarrow\qquad(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}$$

شکل 4.8: نظام 4.57 کے خط حرکت۔(انحطاطی جوڑ)

ملتا ہے۔اس میں $x = x^{(1)}$ اور $\lambda = -3$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4-3 & 1 \\ -1 & 2-3 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \begin{matrix} u_1 + u_2 = 1 \\ -u_1 - u_2 = -1 \end{matrix}$$

انہیں حل کرتے ہوئے یکتا $\boldsymbol{u}$ حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ یوں $u_1 = 0$ چننے سے $u_2 = 1$ لہٰذا $\boldsymbol{u} = [0 \quad 1]^T$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح دوسرا حل جو $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1 \quad -1]^T$ سے خطی طور غیر تابع ہو حاصل ہوتا ہے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t} \tag{4.58}$$

ان حل کو شکل 4.8 میں دکھایا گیا ہے جہاں $\boldsymbol{y}^{(1)}$ اور $\boldsymbol{y}^{(2)}$ کو موٹی لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔یہاں مبدا پر واقع نقطہ فاصل کو عموماً انحطاطی جوڑ[61] کہا جاتا ہے۔ □

یہاں بتلاتا چلوں کہ، تین یا تین سے زائد تفرقی مساوات کے نظام جس کے سہ گنّا امتیازی قدر اور ایک عدد خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیہ پایا جاتا ہو کا دوسرا خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیہ مثال 4.11 کی طرح حاصل کیا جائے گا جبکہ اس کا تیسرا خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیہ درج ذیل فرض کرتے ہوئے حاصل ہو گا

$$\boldsymbol{y}^{(3)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}t^2e^{\lambda t} + \boldsymbol{u}te^{\lambda t} + \boldsymbol{v}e^{\lambda t} \tag{4.59}$$

[61] degenerate node

جہاں $\boldsymbol{v}$ کو

$$\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \tag{4.60}$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔یہاں $\boldsymbol{u}$ دوسرے خطی طور امتیازی سمتیہ سے لیا جائے گا۔

سوالات

سوال 4.16 تا سوال 4.25 کے حل دریافت کریں۔

سوال 4.16:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1+y_2\\ y_2' &= 3y_1+y_2 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1=c_1e^{-2t}+c_2e^{2t}$ ، $y_2=-c_1e^{-2t}+3c_2e^{2t}$

سوال 4.17:

$$\begin{aligned} y_1' &= 6y_1+y_2\\ y_2' &= -6y_1+y_2 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1=c_1e^{3t}+c_2e^{4t}$ ، $y_2=-3c_1e^{3t}-2c_2e^{4t}$

سوال 4.18:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1+y_2\\ y_2' &= 2y_1+2y_2 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1=c_1+c_2e^{3t}$ ، $y_2=-c_1+2c_2e^{3t}$

سوال 4.19:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1+2y_2\\ y_2' &= -2y_1+3y_2 \end{aligned}$$

جواب: $\boldsymbol{y}=c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^t+c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}te^t+c_2\begin{bmatrix}1\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}e^t$ جہاں $u_1=1$ چنا گیا ہے۔

سوال 4.20:

$$y_1' = 3y_1 + 3y_2$$
$$y_2' = -\frac{4}{3}y_1 - 2y_2$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$ ، $y_2 = -\frac{1}{3}c_1e^{2t} - \frac{4}{3}c_2e^{-t}$

سوال 4.21:

$$y_1' = -12y_1 - 5y_2$$
$$y_2' = \frac{56}{3}y_1 + 3y_2$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{-5t} + c_2e^{-4t}$ ، $y_2 = -\frac{7}{5}c_1e^{-5t} - \frac{8}{5}c_2e^{-4t}$

سوال 4.22:

$$y_1' = -y_1 + 2y_2$$
$$y_2' = -9y_1 + 5y_2$$

جوابات:

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}(1-i) \end{bmatrix} e^{(2-i3)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}(1+i) \end{bmatrix} e^{(2+i3)t}$$

جس سے یولر مساوات کی مدد سے درج ذیل حقیقی حل لکھا جا سکتا ہے جہاں $A = c_1 + c_2$ اور $B = -i(c_1 - c_2)$ ہیں۔

$$y_1 = e^{2t}(A\cos 3t + B\sin 3t)$$
$$y_2 = \tfrac{3}{2}e^{2t}[(B+A)\cos 3t + (B-A)\sin 3t]$$

سوال 4.23:

$$y_1' = 2y_2$$
$$y_2' = -y_1 + 3y_3$$
$$y_3' = -y_2$$

جوابات:

$$\boldsymbol{y}=c_1\begin{bmatrix}1\\-i\frac{\sqrt{5}}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}e^{-i\sqrt{5}t}+c_2\begin{bmatrix}1\\i\frac{\sqrt{5}}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}e^{i\sqrt{5}t}+c_3\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

سوال 4.24:

$$\begin{aligned}y_1'&=11y_1+2y_2\\y_2'&=-4y_1+5y_2\end{aligned}$$

جوابات: $y_1=c_1e^{9t}+c_2e^{7t}$ ، $y_2=-c_1e^{9t}-2c_2e^{7t}$

سوال 4.25:

$$\begin{aligned}y_1'&=y_1-10y_2-14y_3\\y_2'&=-10y_1+10y_2-4y_3\\y_3&=-14y_1-4y_2-2y_3\end{aligned}$$

جوابات:

$$\boldsymbol{y}=c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}e^{18t}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}e^{9t}+c_3\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}e^{-18t}$$

سوال 4.26 تا سوال 4.31 ابتدائی قیمت مسائل ہیں۔انہیں حل کریں۔

سوال 4.26:

$$\begin{aligned}y_1'&=-6y_1+2y_2\\y_2'&=-12y_1+5y_2\\y_1(0)&=2,\quad y_2(0)=1\end{aligned}$$

جوابات: $y_1=\frac{14}{5}e^{-3t}-\frac{4}{5}e^{2t}$ ، $y_2=\frac{21}{5}e^{-3t}-\frac{16}{5}e^{2t}$

سوال 4.27:

$$\begin{aligned}
y_1' &= -\frac{11}{3}y_1 + y_2 \\
y_2' &= -\frac{32}{3}y_1 + 3y_2 \\
y_1(0) &= -10, \quad y_2(0) = 2
\end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = \frac{43}{2}e^{\frac{t}{3}} - \frac{63}{2}e^{-t}$ ، $y_2 = 86e^{\frac{t}{3}} - 84e^{-t}$

سوال 4.28:

$$\begin{aligned}
y_1' &= -y_1 - 3y_2 \\
y_2' &= \frac{5}{3}y_1 + 5y_2 \\
y_1(0) &= 2, \quad y_2(0) = -1
\end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = \frac{1}{4}e^{4t} + \frac{7}{4}$ ، $y_2 = -\frac{5}{12}e^{4t} - \frac{7}{12}$

سوال 4.29:

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_1 \\
y_1(0) &= -1, \quad y_2(0) = 2
\end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{3}{2}e^{-t}$ ، $y_2 = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t}$

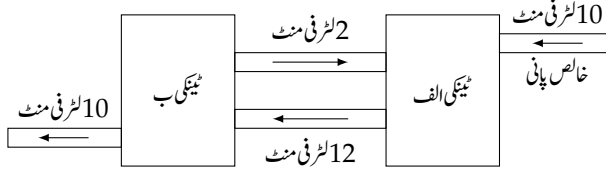
سوال 4.30:

$$\begin{aligned}
y_1' &= -y_2 \\
y_2' &= y_1 \\
y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = -1
\end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = \sin t$ ، $y_2 = -\cos t$

سوال 4.31:

$$\begin{aligned}
y_1' &= -y_1 + y_2 \\
y_2' &= y_1 - y_2 \\
y_1(0) &= -2, \quad y_2(0) = 1
\end{aligned}$$

10لٹر فی منٹ
2لٹر فی منٹ
خالص پانی
ٹینکی ب
ٹینکی الف
10لٹر فی منٹ
12لٹر فی منٹ

شکل 4.9: سوال 4.34 میں ٹینکیوں کا نظام۔

جوابات: $y_1 = -\frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}$ ، $y_2 = \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}$

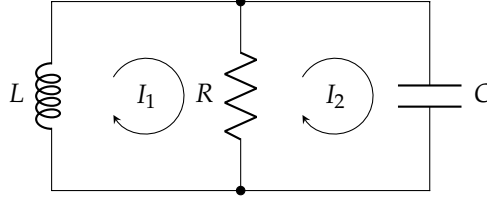
سوال 4.32 تا سوال 4.33 میں تفرقی مساوات تبدیل کرنے کو کہا گیا ہے۔ان میں y_1 کی عمومی مساوات دریافت کریں۔

سوال 4.32: آپ نے گزارش ہے کہ سوال 4.16 کے نظام سے دو رتبی مساوات حاصل کریں جس میں صرف y_1 اور اس کے تفرق پائے جاتے ہوں۔حاصل دو رتبی مساوات کو حل کرتے ہوئے y_1 کی عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات: پہلی مساوات کا تفرق لیتے ہوئے $y_1'' = -y_1' + y_2'$ ملتا ہے جس میں y_2' کی جگہ دوسری مساوات پر کرتے ہوئے $y_1'' = -y_1' + (3y_1 + y_2)$ حاصل ہوتا ہے۔اب پہلی مساوات سے y_2 اس میں پر کریں۔یوں $y_1'' = -y_1' + 3y_1 + (y_1' + y_1)$ یعنی $y_1'' = 4y_1$ ملتا ہے۔اس کا عمومی حل $y_1 = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t}$ ہے۔

سوال 4.33: یہاں سوال 4.31 کے نظام سے دو رتبی مساوات حاصل کریں جس میں صرف y_1 اور اس کے تفرق پائے جاتے ہوں۔حاصل دو رتبی مساوات کو حل کرتے ہوئے y_1 کی عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات: $y_1'' + 2y_1' = 0$ ، $y_1 = c_1 + c_2e^{-2t}$

سوال 4.34: ٹینکیوں میں محلول کی تیاری
دو عدد ٹینکیاں شکل 4.9 میں دکھائی گئی ہیں۔ٹینکی الف میں ابتدائی طور پر دو سو (200) لٹر پانی پایا جاتا ہے جس میں پچاس (50) کلو گرام نمک حل کی گئی ہے۔ٹینکی ب میں ابتدائی طور پر دو سو (200) لٹر خالص پانی پایا جاتا ہے۔پانی کے نظام کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ٹینکی الف میں نمک کی مقدار y_1 اور ٹینکی ب میں نمک کی مقدار y_2 کے لئے تفرقی مساوات کا نظام لکھیں۔اس نظام کو حل کریں۔

شکل 4.10: سوال 4.35 کا دور۔

جوابات: $y_1' = -\frac{12}{200}y_1 + \frac{2}{200}y_2$ ، $y_2' = \frac{12}{200}y_1 - \frac{12}{200}y_2$ ، $y_1 = 50e^{-\frac{3}{50}t}\cosh\frac{\sqrt{6}t}{100}$ ، $y_2 = 50\sqrt{6}e^{-\frac{3}{50}t}\sinh\frac{\sqrt{6}t}{100}$

سوال 4.35: مزاحمت، امالہ اور برق گیر کو شکل 4.10 میں متوازی جڑا دکھایا گیا ہے۔اس کی نمونہ کشی کرتے ہوئے تفرقی مساوات لکھتے ہوئے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کریں۔ $L = 2\,\mathrm{H}$ ، $R = 1\,\Omega$ اور $C = 0.5\,\mathrm{F}$ کی صورت میں I_1 اور I_2 کا عمومی حل دریافت کریں۔

جوابات:

$$LI_1' + (I_1 - I_2)R = 0$$
$$\frac{1}{C}\int I_2\,\mathrm{d}t + (I_2 - I_1)R = 0$$

پہلی مساوات سے نظام کی ایک مساوات $I_1' = -\frac{R}{L}I_1 + \frac{R}{L}I_2$ ملتی ہے۔دوسری مساوات کا تفرق لیتے ہوئے ترتیب دے کر آخر میں پہلی مساوات سے I_1' پر کرتے ہیں

$$\frac{I_2}{C} + (I_2' - I_1')R = 0 \implies I_2' = I_1' - \frac{I_2}{RC} \implies I_2' = \frac{R}{L}(-I_1 + I_2) - \frac{I_2}{RC}$$

جس سے تفرقی مساوات کے نظام کی دوسری مساوات $I_2' = -\frac{R}{L}I_1 + (\frac{R}{L} - \frac{1}{RC})I_2$ حاصل ہوتی ہے۔دی گئی قیمتیں پر کرتے ہوئے تفرقی مساوات کا نظام

$$I_1' = -0.5I_1 + 0.5I_2$$
$$I_2' = -0.5I_1 - 1.5I_2$$

ہو گا جس کا دوہرا جذر $\lambda = -1$ اور مطابقتی امتیازی سمتیہ $x^{(1)} = [1 \quad -1]^T$ ہے۔یوں مثال 4.11 کی طرز پر حل کرتے ہوئے $u_1 = 1$ چننے سے $u_2 = 1$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا درج ذیل اساس حاصل کرتے

ہیں

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$
$$\boldsymbol{y}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

جس سے عمومی حل $\boldsymbol{I} = c_1\boldsymbol{y}^{(1)} + c_2\boldsymbol{y}^{(2)}$ لکھا جائے گا۔

4.5 نقطہ فاصل کے جانچ پڑتال کا مسلمہ معیار۔استحکام

ہم مستقل عددی سر والے متجانس خطی نظام 4.61 پر گفتگو جاری رکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1' + a_{22}y_2 \end{aligned} \tag{4.61}$$

اب تک حصہ 4.4 میں ہم نے دیکھا کہ نسل حل $\boldsymbol{y} = [y_1(t) \quad y_2(t)]^T$ کے خطوط کو y_1y_2 سطح حرکت پر کھینچتے ہوئے عمومی جائزہ لیا جا سکتا ہے۔ اس سطح پر منحنی کو نظام 4.61 کا خط حرکت کہتے ہیں۔ تمام خط حرکت کو ملا کر پیکر مرحلہ حاصل ہوتا ہے۔

ہم دیکھ چکے کہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}e^{\lambda t}$ کو حل تصور کرتے ہوئے مساوات 4.61 میں پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{y}' = \lambda\boldsymbol{x}e^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}e^{\lambda t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو $e^{\lambda t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{4.62}$$

ملتا ہے۔یوں λ قالب $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی قدر اور $\boldsymbol{x}$ مطابقتی امتیازی سمتیہ ہونے کی صورت میں $\boldsymbol{y}(t)$ مساوات 4.61 کا (غیر صفر) حل ہو گا۔

گزشتہ حصے کے مثالوں سے واضح ہے کہ پیکر مرحلہ کی صورت کا دارومدار بڑی حد تک نظام 4.61 کی نقطہ فاصل کی قسم پر منحصر ہے جہاں نقطہ فاصل سے مراد ایسا نقطہ ہے جہاں $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}y_2}$ نا قابل معلوم قیمت $\frac{0}{0}$ ہو۔[مساوات

4.49 دیکھیں۔]

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = \frac{y_2' \,\mathrm{d}t}{y_1' \,\mathrm{d}t} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2} \tag{4.63}$$

حصہ 4.4 سے ہم یہ بھی جانتے ہیں نقطہ فاصل کے کئی اقسام پائے جاتے ہیں۔

موجودہ حصے میں ہم دیکھیں گے کہ نقطہ فاصل کی قسم کا تعلق امتیازی قدر سے ہے جو امتیازی مساوات

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \tag{4.64}$$

کے حل λ_1 اور λ_2 ہیں۔امتیازی مساوات دو درجی مساوات $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ ہے جس کے عددی سر p ، q اور ممیز[62] Δ درج ذیل ہیں۔

$$p = a_{11} + a_{22}, \quad q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Delta = p^2 - 4q \tag{4.65}$$

دو درجی مساوات کے حل الجبرا کی مدد سے $\lambda = \frac{1}{2}(p + \mp\sqrt{p^2 - 4q})$ یعنی

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(p + \sqrt{\Delta}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(p - \sqrt{\Delta}) \tag{4.66}$$

لکھتے ہیں۔ان امتیازی اقدار کو استعمال کرتے ہوئے امتیازی مساوات کو اجزائے ضربی کی صورت

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ p امتیازی اقدار کا مجموعہ ہے جبکہ q ان کا حاصل ضرب ہے۔اسی طرح مساوات 4.66 کی مدد سے $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\Delta}$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$p = \lambda_1 + \lambda_2, \quad q = \lambda_1\lambda_2, \quad \Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \tag{4.67}$$

ان نتائج سے نقطہ فاصل کی جانچ کے اصول طے کئے جا سکتے ہیں جنہیں جدول 4.1 میں پیش کیا گیا ہے۔ان اصولوں کو اسی حصے میں اخذ کیا جائے گا۔

---

[62] discriminant

جدول 4.1: امتیازی قدر سے نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

نام	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$	$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$	λ_1 اور λ_2 پر تبصرہ
(الف) جوڑ		$q > 0$	$\Delta \geq 0$	حقیقی۔یکساں علامتیں
(ب) نقطہ زین		$q < 0$		حقیقی۔آپس میں الٹ علامتیں
(پ) وسط	$p = 0$	$q > 0$		خالص خیالی عدد (حقیقی جزو صفر ہے)
(ت) نقطہ مرغولہ	$p \neq 0$		$\Delta < 0$	مخلوط عدد (حقیقی اور خیالی اجزاء غیر صفر ہیں)

استحکام

نقطہ فاصل کی درجہ بندی ان کی **استحکام**[63] کی بنیاد پر بھی کی جا سکتی ہے۔انجینئری کے علاوہ دیگر شعبوں میں بھی استحکام نہایت اہم تصور ہے۔ مستحکم نظام میں کسی لمحے پر معمولی تبدیلی یا خلل سے بعد کے تمام لمحات پر معمولی خلل ہی پایا جاتا ہے۔ نقطہ فاصل کے لئے درج ذیل تصورات اہم ہیں۔

تعریف: مستحکم، غیر مستحکم، مستحکم اور جاذب
اگر نظام 4.61 کے نقطہ فاصل P_0 کے قریب تمام خط حرکت مستقبل میں بھی P_0 کے قریب رہیں تب P_0 **مستحکم**[64] کہلائے گا۔ یوں اگر کسی بھی رداس ϵ کی ٹکیا D_ϵ کے لئے رداس σ کی ایسی ٹکیا D_σ موجود ہو، جہاں دونوں ٹکیوں کا وسط P_0 ہے، کہ ٹکیا D_σ میں (لمحہ $t = t_1$ کا مطابقتی) نقطہ P_1 پر پائے جانے والا، نظام 4.61 کا ہر خط حرکت، مستقبل میں ٹکیا D_ϵ میں رہتا ہو، تب P_0 کا نقطہ فاصل **مستحکم**[65][66] کہلائے گا۔[شکل 4.11-الف دیکھیں]

اگر P_0 مستحکم نہ ہو تب یہ **غیر مستحکم**[67] کہلاتا ہے۔

ایسا مستحکم P_0 جہاں وہ تمام خط حرکت جن کا کوئی بھی نقطہ، D_σ پر پایا جاتا ہو، آخر کار $(t \to \infty)$ P_0 کے قریب تر پہنچے **مستحکم اور جاذب**[68] کہلاتا ہے۔[شکل 4.11-ب دیکھیں۔]

استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی جدول 4.2 میں دی گئی ہے۔

---

[63] stability
[64] stable
[65] stable
[66] روسی ریاضی دان سکندر میکائل لیاپونو [1857-1918] کا مستحکم تفرقی مساوات پر کام بنیادی حیثیت رکھتا ہے۔استحکام کی یہ تعریف انہوں نے ہی پیش کی۔
[67] unstable
[68] stable and attractive

(الف) مستحکم نقطہ فاصل P_0 کی صورت میں خط حرکت D_ϵ میں رہتی ہے۔

(ب) مستحکم اور جاذب نقطہ فاصل P_0۔

شکل 4.11: نظام 4.61 کے نقطہ فاصل۔

جدول 4.2: استحکام کی بنیاد پر نقطہ فاصل کی درجہ بندی۔

استحکام کی قسم	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$
(الف) مستحکم اور جاذب	$p < 0$	$q > 0$
(ب) مستحکم	$p \leq 0$	$q > 0$
(پ) غیر مستحکم	$p > 0$ یا	$q < 0$

آئیں جدول 4.1 اور جدول 4.2 کو حاصل کریں۔ اگر $q = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ ہو تب دونوں امتیازی اقدار مثبت ہوں گے یا دونوں امتیازی اقدار منفی ہوں گے اور یا امتیازی اقدار جوڑی دار مخلوط ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ ہو تب دونوں امتیازی اقدار منفی ہوں گے یا (مخلوط جوڑی دار صورت میں) ان کا حقیقی جزو منفی ہو گا لہٰذا P_0 مستحکم اور جاذب ہو گا۔ جدول 4.2 کے بقایا دو نتائج کو آپ خود اسی طرح اخذ کر سکتے ہیں۔

$\Delta < 0$ کی صورت میں امتیازی قدر جوڑی دار مخلوط $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ اور $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ہوں گے۔ اب اگر $p = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha < 0$ ہو تب مستحکم، جاذب نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔ اس کے برعکس $p = 2\alpha > 0$ کی صورت میں غیر مستحکم نقطہ مرغولہ حاصل ہو گا۔

$p = 0$ کی صورت میں $\lambda_2 = -\lambda_1$ ہو گا اور یوں $q = \lambda_1 \lambda_2 = -\lambda_1^2$ ہو گا۔ اب اگر $q > 0$ ہو تب $\lambda_1^2 = -q < 0$ ہو گا لہٰذا λ_1 اور λ_2 خالص خیالی ہوں گے جن سے دوری حل[69] حاصل ہو گا۔ دوری حل کا خط حرکت ایسا بند دائرہ ہے جس کا وسط P_0 ہے۔

[69] periodic solutions

مثال 4.12: جدول 4.1 اور جدول 4.2 کا عملی استعمال

گزشتہ حصے کے مثال 4.6 میں نظام 4.48 یعنی $\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$ کی بات کی گئی جہاں $p = -4$، $q = 3$ اور $\Delta = 4$ ہیں۔یوں جدول 4.1-الف کے تحت نقطہ فاصل ایک جوڑ ہو گا۔جدول 4.2-الف کے تحت یہ جوڑ مستحکم اور جاذب ہے۔ □

مثال 4.13: اسپرنگ اور کمیت کی آزادانہ حرکت

اسپرنگ اور کمیت [حصہ 2.4 دیکھیں] کے نظام $my'' + cy' + ky = 0$ کا نقطہ فاصل دریافت کریں۔

حل: تفرقی مساوات کو معیاری صورت میں لکھنے کی خاطر m سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$ لکھتے ہیں۔دو رتبی مساوات سے تفرقی مساوات کا نظام حاصل کرنے کی خاطر [حصہ 4.1 دیکھیں] ہم $y_1 = y$ اور $y_2 = y'$ لیتے ہیں۔یوں $y_2' = y'' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2$ ہو گا۔اس طرح

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

لکھا جائے گا جس سے $p = -\frac{c}{m}$، $q = \frac{k}{m}$ اور $\Delta = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$ ملتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے جدول 4.1 اور جدول 4.2 سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں جہاں Δ اہم کردار ادا کرتا ہے۔

- [بلا تقصیر] $c = 0$، $p = 0$ اور $q > 0$ وسط دیتا ہے۔
- [کم مقصور] $c^2 < 4mk$، $p < 0$، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ مستحکم جاذب نقطہ مرغولہ دیتا ہے۔
- [فاصل تقصیر] $c^2 = 4mk$، $p < 0$، $q > 0$ اور $\Delta = 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔
- [زیادہ مقصور] $c^2 > 4mk$، $p < 0$، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ مستحکم جاذب جوڑ دیتا ہے۔

□

(الف) سوال 4.36 غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔

(ب) سوال 4.37 مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔

شکل 4.12: سوال 4.36 اور سوال 4.37 کے اشکال۔

سوالات

سوال 4.36 تا سوال 4.45 کے نقطہ فاصل کی قسم جدول 4.1 اور جدول 4.2 کی مدد سے دریافت کریں۔ان کے حقیقی عمومی حل حاصل کریں اور ان کے خط حرکت کمپیوٹر کی مدد سے کھینچیں۔[پہلے چار جوابات کے خط حرکت دکھائے گئے ہیں۔]

سوال 4.36:

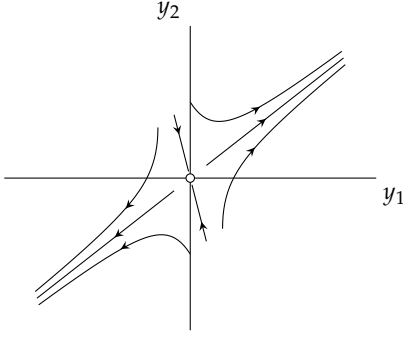
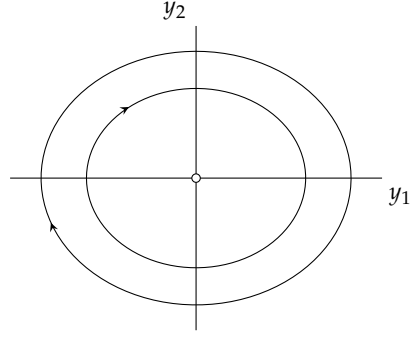
$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 \\
y_2' &= 3y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: غیر مستحکم، غیر مناسب جوڑ۔ $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ یعنی $y_1 = c_1 e^t$ ، $y_2 = c_2 e^{3t}$ ؛ شکل 4.12-الف۔

سوال 4.37:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -3y_1 \\
y_2' &= -5y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: مستحکم، جاذب، غیر مناسب جوڑ۔ $y_1 = c_1 e^{-3t}$ ، $y_2 = c_2 e^{-5t}$ ؛ شکل 4.12-ب۔

(الف) سوال 4.38 مستحکم وسط۔

(ب) سوال 4.39 غیر مستحکم، نقطہ زین۔

شکل 4.13: سوال 4.38 اور سوال 4.39 کے اشکال۔

سوال 4.38:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= -16y_1
\end{aligned}
$$

جوابات: مستحکم وسط۔ $y_1 = A\cos 4t + B\sin 4t$ ، $y_2 = 4B\cos 4t - 4A\sin 4t$ ؛ شکل 4.13-الف۔

سوال 4.39:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2y_1 + y_2 \\
y_2 &= 5y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1e^{-3t} + c_2e^{3t}$ ، $y_2 = -5c_1e^{-3t} + c_2e^{3t}$ ؛ شکل 4.13-ب۔

سوال 4.40:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -2y_1 - 2y_2 \\
y_2 &= 2y_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-2t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$ ، $y_2 = e^{-2t}(-B\cos 2t + A\sin 2t)$

سوال 4.41:

$$\begin{aligned} y_1 &= -10y_1 + 2y_2 \\ y_2 &= -15y_1 + y_2 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم اور جاذب جوڑ؛ $y_1 = c_1e^{-5t} + c_2e^{-4t}$ ، $y_2 = \frac{5}{2}c_1e^{-5t} + 3c_2e^{-4t}$

سوال 4.42:

$$\begin{aligned} y_1 &= -y_1 + y_2 \\ y_2 &= 2y_2 \end{aligned}$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}$ ، $y_2 = 3c_2e^{2t}$

سوال 4.43:

$$\begin{aligned} y_1 &= -y_1 + 2y_2 \\ y_2 &= 6y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

جوابات: غیر مستحکم نقطہ زین؛ $y_1 = c_1e^{-3t} + c_2e^{5t}$ ، $y_2 = -c_1e^{-3t} + 3c_2e^{5t}$

سوال 4.44:

$$\begin{aligned} y_1 &= 13y_1 - 3y_2 \\ y_2 &= 18y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

جوابات: غیر مستحکم جوڑ؛ $y_1 = c_1e^{7t} + c_2e^{4t}$ ، $y_2 = 2c_1e^{7t} + 3c_2e^{4t}$

سوال 4.45:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ y_2 &= -5y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

جوابات: مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ؛ $y_1 = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$ ، $y_2 = e^{-t}[-(A+2B)\cos 2t - (2A+B)\sin 2t]$

سوال 4.46 تا سوال 4.46 خط حرکت، دو رتبی سادہ تفرقی مساوات اور نقطہ فاصل کے بارے میں ہیں۔

سوال 4.46: قصری ارتعاش
$y''+4y'+5y=0$ کو حل کریں۔امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟

جواب: $y=e^{-2t}(A\cos t+B\sin t)$ ؛ مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ۔

سوال 4.47: ہارمونی ارتعاش
$y''+4y=0=0$ کو حل کریں۔امتیازی مساوات سے خط حرکت کی قسم دریافت کریں؟

جواب: $y=A\cos 2t+B\sin 2t$ ؛ مستحکم وسط۔

سوال 4.48: مقدار معلوم کا تبادلہ
مثال 4.12 میں متغیرہ $\tau=-t$ متعارف کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پڑے گا؟

جواب: اب $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ہو گا لہٰذا غیر مستحکم جوڑ پایا جائے گا۔

سوال 4.49: وسط میں خلل
سوال 4.38 میں $\boldsymbol{A}$ کو تبدیل کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}-0.12\boldsymbol{I}$ کرنے سے نقطہ فاصل پر کیا اثر پیدا ہو گا؟ $\boldsymbol{I}$ اکائی قالب ہے۔

جواب: اب $p=-0.2=\neq 0$ ، $q>0$ اور $\Delta<0$ ہیں لہٰذا غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے گا۔

سوال 4.50: وسط میں خلل
سوال 4.38 میں تمام a_{jk} کی جگہ $a_{jk}+b$ پر کریں۔ (الف) b کی ایسی قیمت دریافت کریں کہ نقطہ زین حاصل ہو۔اسی طرح b کی ایسی قیمتیں دریافت کریں جن پر (ب) مستحکم اور جاذب جوڑ، (پ) مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ اور (ت) غیر مستحکم نقطہ مرغولہ پایا جائے۔

جواب: مثلاً (الف) $b=-2$ ، (ب) $b=-1$ ، (پ) $b=-0.2$ ، (ت) $b=15$

4.6 کیفی تراکیب برائے غیر خطی نظام

کیفی تراکیب[70] سے مسئلے کو حل کئے بغیر حل کے بارے میں کیفی معلومات حاصل کی جاتی ہیں۔ایسے مسائل جن کا تحلیلی حل مشکل یا نا قابل حصول ہو، کے لئے یہ ترکیب خاص طور پر کار آمد ہے۔عملاً اہم کئی غیر خطی نظام

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2 &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned} \tag{4.68}$$

کے لئے یہ درست ہے۔

گزشتہ حصے میں سطح مرحلہ کی ترکیب خطی نظام کے لئے استعمال کیا گیا۔اس حصے میں اس ترکیب کو وسعت دے کر غیر خطی نظام کے لئے استعمال کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 4.68 خود مختار[71] ہے یعنی اس میں غیر تابع متغیرہ t صریحاً نہیں پایا جاتا۔(اس حصے میں تمام مثال خود مختار ہیں۔) ہم یہاں بھی حل کی نسل پیش کریں گے۔اعدادی ترکیب سے ایک وقت میں صرف ایک (تقریباً درست) حل حاصل ہوتا ہے۔ اس لحاظ سے سطح مرحلہ کی ترکیب زیادہ مفید ثابت ہوتی ہے۔

گزشتہ حصے کے چند تصورات اس حصے میں بھی درکار ہیں۔ان میں سطح حرکت (y_1y_2 سطح)، خط حرکت (مساوات 4.68 کا y_1y_2 سطح پر حل)، مساوات 4.68 کا پیکر مرحلہ (تمام خط حرکت کا مجموعہ)، اور مساوات 4.68 کا نقطہ فاصل (ایسا نقطہ (y_1, y_2) جہاں $f_1(y_1, y_2)$ اور $f_2(y_1, y_2)$ دونوں صفر کے برابر ہوں۔) کے تصورات شامل ہیں۔

مساوات 4.68 کے کئی نقطہ فاصل ہو سکتے ہیں۔ ان پر باری باری بات کی جائے گی۔مبدا سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل پر غور کرنے سے پہلے، تکنیکی آسانی کی خاطر، ایسے نقطہ فاصل کو گھمائے بغیر مبدا پر منتقل کیا جائے گا۔مبدا $(0, 0)$ سے ہٹ کر پائے جانے والے نقطہ فاصل $P_0 : (a, b)$ کو گھمائے بغیر مبدا $(0, 0)$ پر درج ذیل عمل سے منتقل کیا جاتا ہے۔

$$\tilde{y}_1 = y_1 - a, \quad \tilde{y}_2 = y_2 - b$$

اس عمل کے بعد نقطہ فاصل P_0 مبدا $(0, 0)$ پر پایا جائے گا۔یوں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہاں دیے گئے تمام مثالوں میں نقطہ فاصل کو مبدا پر منتقل کیا گیا ہے اور $\tilde{y}_1$ ، $\tilde{y}_2$ کی جگہ ہم y_1 اور y_2 ہی لکھیں گے۔ہم

---

[70] qualitative methods
[71] autonomous

یہ بھی فرض کرتے ہیں کہ نقطہ فاصل تنہا[72] ہے یعنی ایسے کسی بھی کافی حد تک چھوٹی ٹکیا جس کا وسط مبدا پر پایا جاتا ہو میں مساوات 4.68 کا صرف ایک عدد نقطہ فاصل پایا جاتا ہے۔ اگر مساوات 4.68 کے محدود تعداد میں نقطہ فاصل پائے جاتے ہوں تب ایسے تمام نقطہ فاصل خود بخود تنہا ہوں گے۔

غیر خطی نظام کو خطی بنانا

عموماً نظام 4.68 کو نقطہ فاصل $P_0:(0,0)$ کے قریب خطی تصور کرتے ہوئے نظام کی استحکام کی نوعیت دریافت کی جا سکتی ہے۔نظام 4.68 کو $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})$ لکھ کر $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})$ رد کرنے سے خطی نظام حاصل کیا جاتا ہے۔اس عمل کو تفصیلاً دیکھتے ہیں۔

ہم اگلے باب میں دیکھیں گے کہ عموماً تفاعل کو تسلسل $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح ایک سے زیادہ متغیرات پر مبنی تفاعل کے تسلسل بھی لکھے جا سکتے ہیں۔آئیں ایسے ہی چند تفاعل مثلاً

$$f_a(x)=2x^2+5x,\quad f_b(x,y)=2x^3-y^2+xy,\quad f_c(x,y)=2x^2-3y+5$$

میں آزاد متغیرات صفر کے برابر پر کریں۔ ایسا کرنے سے $f_a(0)=0$ ، $f_b(0,0)=0$ اور $f_c(0,0)=5$ ملتا ہے۔آزاد متغیرات صفر کے برابر پر کرنے سے صرف اس تفاعل کی قیمت غیر صفر حاصل ہو گی جس میں c_0 طرز کا بالکل علیحدہ مستقل پایا جاتا ہو جو متغیرات کے ساتھ ضرب نہ ہو۔

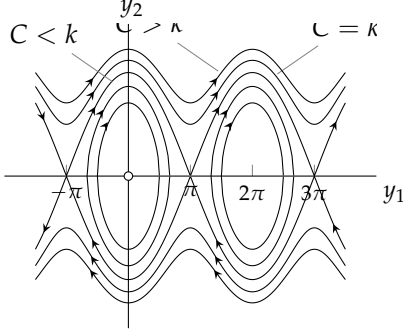
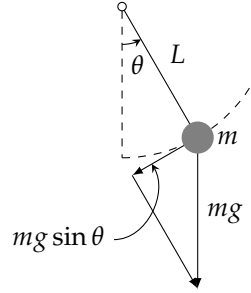
اب چونکہ P_0 نقطہ فاصل ہے لہٰذا $f_1(0,0)=0$ اور $f_2(0,0)=0$ ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ ان تفاعل میں c_0 طرز کا علیحدہ مستقل نہیں پایا جاتا لہٰذا ان کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں h_1 اور h_2 غیر خطی تفاعل ہیں۔

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})\quad\implies\quad\begin{aligned}y_1'&=a_{11}y_1+a_{12}y_2+h_1(y_1,y_2)\\y_2'&=a_{21}y_1+a_{22}y_2+h_2(y_1,y_2)\end{aligned}\tag{4.69}$$

چونکہ نظام 4.68 خود مختار [جس میں t صریحاً نہیں پایا جاتا] تفاعل ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ مستقل مقدار ہو گا۔ اب خطی بنانے کا مسئلہ[73] پیش کرتے ہیں جس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مسئلہ 4.6: خطی بنانا

اگر نظام 4.68 کے نقطہ فاصل $P_0:(0,0)$ کی پڑوس میں f_1 ، f_2 اور ان کے جزوی تفرق استمراری

[72] isolated
[73] linearization theorem

(الف) ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کی آزادانہ ارتعاش۔

(ب) پیکر مرحلہ۔

شکل 4.14: مثال 4.14 کے اشکال۔[C کی تفصیل مثال 4.17 میں دی جائے گی۔]

ہوں، اور مساوات 4.69 میں مقطع $\boldsymbol{A}$ غیر صفر $(|\boldsymbol{A}| \neq \boldsymbol{0})$ ہو تب نظام 4.68 کے نقطہ فاصل کی قسم اور استحکام وہی ہوں گی جو درج ذیل خطی کردہ نظام[74] کی ہوں گی

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \quad \implies \quad \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \tag{4.70}$$

البتہ $\boldsymbol{A}$ کے خالص خیالی یا برابر امتیازی قدر ہونے کی صورت میں نظام 4.68 کا نقطہ فاصل نظام 4.70 کے نقطہ فاصل کی قسم کا ہو سکتا ہے یا وہ نقطہ مرغولہ ہو سکتا ہے۔

مثال 4.14: ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کی آزادانہ ارتعاش۔ خطی بنانا
ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کو شکل 4.14-الف میں دکھایا گیا ہے۔ڈنڈے کی کمیت اور ہوا کی رکاوٹی قوت کو نظر انداز کرتے ہوئے نقطہ فاصل کا مقام اور اس کی نوعیت دریافت کریں۔ حل: پہلا قدم نمونہ کشی ہے۔متوازن مقام سے گھڑی کے الٹ رخ زاویائی فاصلہ θ ناپتے ہیں۔قوت ثقل mg کمیت پر نیچے رخ عمل کرتا ہے جس کی وجہ سے حرکت کی مماسی، بحالی قوت $mg\sin\theta$ پیدا ہوتی ہے جہاں $g = 0.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ثقلی اسراع ہے۔نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت بحالی قوت اور اسراعی قوت $mL\theta''$ جہاں $L\theta''$ اسراع ہے، ہر لمحہ برابر ہوں گے۔یوں ان دونوں قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔

$$mL\theta'' + mg\sin\theta = 0$$

[74] linearized system

دونوں اطراف کو mL سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\theta'' + k\sin\theta = 0, \qquad \left(k = \frac{g}{L}\right) \tag{4.71}$$

حاصل ہوتا ہے۔نہایت کم θ کی صورت میں $\sin\theta \approx \theta$ ہوتا ہے لہٰذا ایسی صورت میں درج بالا مساوات کو $\theta'' + k\theta = 0$ لکھ کر حل $\theta = A\cos\sqrt{k}t + B\sin\sqrt{k}t$ حاصل ہوتا ہے۔یہ کم θ کی صورت میں تقریباً درست جواب ہے البتہ بالکل درست جواب **بنیادی تفاعل**[75] کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے۔

دوسرا قدم **نقطہ فاصل** $(0,0)$ ، $(\mp 2\pi, 0)$ ، $(\mp 4\pi, 0)$ ، $\cdots$ کا حصول اور مسئلے کو خطی بنانا ہے۔تفرقی مساوات کا نظام حاصل کرنے کی خاطر ہم $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ لکھتے ہیں۔یوں مساوات 4.71 سے درج ذیل نظام حاصل ہوتا ہے جو نظام 4.68 کے طرز کا ہے۔

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) = y_2 \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) = -k\sin y_1 \end{aligned} \tag{4.72}$$

جہاں دونوں دائیں اطراف بیک وقت صفر کے برابر ہوں $y_2 = 0$ اور $\sin y_1 = 0$ وہاں نقطہ فاصل پایا جاتا ہے۔یوں لامحدود تعداد میں نقطہ فاصل $(n\pi, 0)$ پائے جاتے ہیں جہاں $n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$ ہے۔آئیں نقطہ فاصل $(0,0)$ پر غور کریں جہاں **مکلارن تسلسل**[76] سے

$$\sin y_1 = y_1 - \frac{y_1^3}{6} + - \cdots \approx y_1$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں نقطہ فاصل کی پڑوس میں $h = -\frac{y_1^3}{6} + - \cdots$ کو رد کرتے ہوئے نظام 4.72 کی خطی صورت

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2 &= -ky_1 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.73}$$

حاصل ہوتی ہے۔ $p = a_{11} + a_{22} = 0$ ، $q = |\boldsymbol{A}| = k = \frac{g}{L} (> 0)$ اور $\Delta = p^2 - 4q = -4k$ لکھتے ہوئے نقطہ فاصل کی قسم اور اس کا استحکام جانتے ہیں۔یوں جدول 4.1-پ کے تحت $(0,0)$ وسط ہے اور جدول 4.2 کے تحت یہ مستحکم ہے۔چونکہ $\sin y_1$ دوری تفاعل ہے لہٰذا تمام $(n\pi, 0)$ ، جہاں $n = \mp 2, \mp 4, \cdots$ ہے، بھی مستحکم وسط ہیں۔

---

[75] elementary function
[76] Maclaurin series

تیسرا قدم نقطہ فاصل $(\mp\pi, 0)$ ، $(\mp3\pi, 0)$ ، $(\mp5\pi, 0)$ $\cdots$ کا حصول اور مسئلے کو خطی بنانا ہے۔ہم نقطہ فاصل $(\pi, 0)$ پر غور کرتے ہیں۔یوں $\theta - \pi = y_1$ اور $(\theta - \pi)' = \theta' = y_2$ لیتے اور مکلارن تسلسل

$$\sin(\theta) = \sin(y_1 + \pi) = -\sin y_1 = -y_1 + \frac{y_1^3}{6} + - \cdots \approx -y_1$$

کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(\pi, 0)$ پر نظام 4.72 کی خطی کردہ صورت

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= ky_1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.74}$$

حاصل ہوتی ہے۔اب $p = 0$ ، $q = -k$ اور $\Delta = -4q = 4k$ ہیں جو غیر مستحکم نقطہ زین کو ظاہر کرتی ہے۔چونکہ $\sin y_1$ دوری تفاعل ہے لہٰذا تمام $(n\pi, 0)$ ، جہاں $n = \mp1, \mp3, \cdots$ ہے، غیر مستحکم نقطہ زین ہیں۔یہ نتائج شکل 4.14-ب کے عین مطابق ہیں۔ □

مثال 4.15: ہلکے ڈنڈے سے لٹکی کمیت کی تقصیری ارتعاش۔ خطی بنانا

نقطہ فاصل پر غور کی ترکیب کو مزید بہتر جاننے کی خاطر مثال 4.14 میں زاویائی رفتار کے راست متناسب قوت روک $c\theta'$ کا اثر شامل کرتے ہیں۔یوں مساوات 4.71 درج ذیل صورت اختیار کرے گی جس میں $c = 0$ سے مساوات 4.71 ہی ملتا ہے۔

$$\theta'' + c\theta' + k\sin\theta = 0, \qquad (k > 0), \quad (c \geq 0) \tag{4.75}$$

پہلے کی طرح $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ لکھتے ہوئے غیر خطی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -k\sin\theta - cy_2 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $\theta'' = y_2'$ لکھا گیا ہے۔اب بھی نقطہ فاصل $(0, 0)$ ، $(\mp\pi, 0)$ ، $\mp2\pi, 0$ ، $\cdots$ پر پائے جاتے ہیں۔آئیں نقطہ $(0, 0)$ پر غور کریں۔یہاں بھی $\sin y_1 \approx y_1$ لکھ کر $(0, 0)$ پر خطی نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -ky_1 - cy_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{4.76}$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ بالکل مثال 4.13 کی طرح ہے ماسوائے (مثبت) m کی موجودگی کے (اور ماسوائے y_1 کے مطلب میں فرق کے)۔ اس طرح بلا تقصیر $(c=0)$ صورت میں وسط حاصل ہوتا ہے جسے شکل 4.14 میں دکھایا گیا ہے جبکہ کم تقصیری صورت میں نقطہ **مرغولہ** حاصل ہوتا ہے، اور اسی طرح آپ تمام صورتیں حاصل کر سکتے ہیں۔

آئیں اب نقطہ فاصل $(\pi,0)$ پر غور کریں۔یوں $\theta-\pi=y_1$ اور $(\theta-\pi)'=\theta'=y_2$ کے علاوہ

$$\sin\theta=\sin(y_1+\pi)=-\sin y_1\approx -y_1$$

لکھ کر $(\pi,0)$ پر خطی نظام

$$\begin{aligned} y_1'&=y_2\\ y_2'&=ky_1-cy_2\end{aligned}\qquad\Longrightarrow\qquad \boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0&1\\k&-c\end{bmatrix}\boldsymbol{y} \tag{4.77}$$

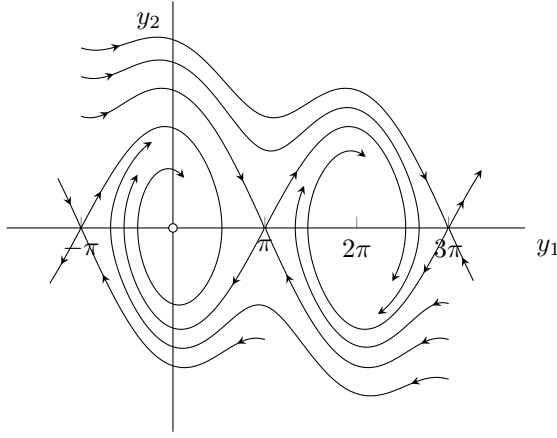
حاصل کرتے ہیں۔ گزشتہ حصے میں نقطہ فاصل کے جانچ کے مسلمہ معیار دیے گئے جن کے لئے

$$p=a_{11}+a_{22}=-c,\quad q=|\boldsymbol{A}|=-k,\quad \Delta=p^4-4q=c^2+4k$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں $(\pi,0)$ پر پائے جانے والے نقطہ فاصل کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

- بلا تقصیر $c=0$ ، $p=0$ ، $q<0$ اور $\Delta>0$ نقطہ زین دیگا۔[شکل 4.14-ب دیکھیں۔]
- تقصیری $c>0$ ، $p<0$ ، $q<0$ اور $\Delta>0$ نقطہ زین دیگا۔

چونکہ $\sin y_1$ دوری عرصہ 2π کا دوری تفاعل ہے لہٰذا $(\mp 2\pi,0)$ ، $(\mp 4\pi,0)$ ، $\cdots$ پر اسی قسم کا نقطہ فاصل پایا جائے گا جو $(0,0)$ پر پایا جاتا ہے اور اسی طرح $(-\pi,0)$ ، $(\mp 3\pi,0)$ ، $\cdots$ پر اسی قسم کا نقطہ فاصل پایا جائے گا جو $(\pi,0)$ پر پایا جاتا ہے۔

شکل 4.15 میں نظام 4.75 کے خط حرکت دکھائے گئے ہیں۔چونکہ قصری نظام میں توانائی کا ضیاع پایا جاتا ہے لہٰذا شکل 4.14 کے بند دائروں کی بجائے شکل 4.15 کے مرغولی خطوط حاصل ہوتے ہیں جو ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔مزید یہ کہ دوری لہری خطوط بھی کسی نہ کسی مقام پر نقطہ فاصل کے گرد گھومنا شروع کر دیتے ہیں۔ اس کے علاوہ اب قصری نظام میں نقطہ زین کو ملانے والے خط نہیں پائے جاتے۔ □

شکل 4.15: تقصیری ارتعاش۔ مثال 4.15

مثال 4.16: آبادی شکار اور شکاری۔ [مسئلہ لوٹکا-ولٹیرا]
یہاں لومڑی (شکاری) اور خرگوش (شکار) کی آبادی کے مسئلے پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم: ہم فرض کرتے ہیں کہ خرگوش کو جتنی خوراک چاہیے دستیاب ہے۔ یوں لومڑی کی غیر موجودگی میں ان کی تعداد $y_1' = ay_1$ کے تحت قوت نمائی طور پر بڑھے گی۔ لومڑی کی موجودگی میں (اتفاقی آمنے سامنے سے) خرگوش کی تعداد میں y_1y_2 کے راست متناسب کمی پیدا ہو گی۔یوں خرگوش کی تعداد $y_1' = ay_1 - by_1y_2$ سے حاصل ہو گی جہاں مستقل $a > 0$ اور $b > 0$ ہیں۔اسی طرح خرگوش کی غیر موجودگی میں لومڑی کی تعداد $y_2' = -ly_2$ کے تحت قوت نمائی طور پر گھٹے گی۔ خرگوش کی موجودگی میں (اتفاقی آمنے سامنے سے) لومڑی کی تعداد y_1y_2 کے راست متناسب بڑھے گی۔یوں خرگوش کی موجودگی میں $y_2' = -ly_2 + ky_1y_2$ لومڑی کی تعداد دے گا جہاں مستقل $l > 0$ اور $k > 0$ ہیں۔

یوں غیر خطی مسئلہ لوٹکا-ولٹیرا[77]

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(y_1, y_2) = ay_1 - by_1y_2 \\
y_2' &= f_2(y_1, y_2) = ky_1y_2 - ly_2
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

حاصل ہوتا ہے۔

[77] امریکی ماہر حیاتی طبیعیات الفرڈ جیمز لوٹکا [1880-1949] اور اطالوی ریاضی دان ویٹو ولٹیرا [1860-1940] نے شکار اور شکاری کے مسئلے کو پیش کیا۔

دوسرا قدم مسئلے کو خطی بنانا اور نقطہ فاصل $(0,0)$ کا حصول ہے۔ مساوات 4.78 کو دیکھ کر نقطہ فاصل مساوات

$$f_1(y_1,y_2) = y_1(a - by_2) = 0, \quad f_2(y_1,y_2) = y_2(ky_1 - l) = 0 \tag{4.79}$$

کے حل سے $(y_1,y_2) = (0,0)$ اور $(\frac{l}{k},\frac{a}{b})$ حاصل ہوتے ہیں۔ آئیں $(0,0)$ پر غور کریں۔ نقطہ $(0,0)$ کی پڑوس میں مساوات 4.78 میں $-by_1y_2$ اور ky_1y_2 کو نظر انداز کرتے ہوئے خطی نظام

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -l \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

حاصل ہوتا ہے جس کی امتیازی اقدار $\lambda_1 = a > 0$ اور $\lambda_2 = -l < 0$ کی علامتیں آپس میں الٹ ہیں لہٰذا $(0,0)$ پر نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

تیسرا قدم مسئلے کو خطی بنانا اور نقطہ فاصل $(\frac{l}{k},\frac{a}{b})$ کا حصول ہے۔ دوسرا نقطہ فاصل $(y_1,y_2) = (\frac{l}{k},\frac{a}{b})$ پر پایا جاتا ہے۔ اس نقطے کو $(0,0)$ منتقل کرنے کی خاطر ہم $y_1 = \tilde{y}_1 + \frac{l}{k}$ اور $y_2 = \tilde{y}_2 + \frac{a}{b}$ چنتے ہیں۔ یوں نقطہ فاصل $(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2) = (0,0)$ لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ $y_1 = \tilde{y}_1'$ اور $y_2' = \tilde{y}_2'$ ہیں لہٰذا نظام 4.78 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_1' &= \left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k}\right)\left[a - b\left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b}\right)\right] = \left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k}\right)(-b\tilde{y}_2) \\
\tilde{y}_2' &= \left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b}\right)\left[k\left(\tilde{y}_1 + \frac{l}{k}\right) - l\right] = \left(\tilde{y}_2 + \frac{a}{b}\right)k\tilde{y}_1
\end{aligned}$$

نقطہ $(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2) = (0,0)$ کی پڑوس میں $-b\tilde{y}_1\tilde{y}_2$ اور $k\tilde{y}_1\tilde{y}_2$ کو نظر انداز کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_1' &= -\frac{bl}{k}\tilde{y}_2 && \text{(الف)} \\
\tilde{y}_2' &= \frac{ak}{b}\tilde{y}_1 && \text{(ب)}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

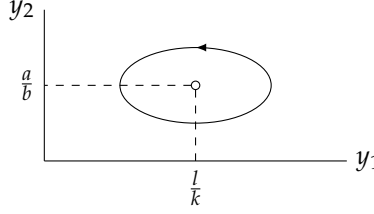
حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 4.80-الف کا بایاں ہاتھ ضرب مساوات-ب کا دایاں ہاتھ برابر ہو گا الف کا دایاں ضرب ب کا بایاں،

$$\frac{ak}{b}\tilde{y}_1'\tilde{y}_1 = -\frac{bl}{k}\tilde{y}_2'\tilde{y}_2 \implies \frac{ak}{b}\tilde{y}_1^2 + \frac{bl}{k}\tilde{y}_2^2 = C$$

y_2

$\frac{a}{b}$

$\frac{l}{k}$

y_1

شکل 4.16: شکار اور شکاری کی آبادی: ماحولیاتی توازن۔

جس کا تکمل لیتے ہوئے $\tilde{y}_1$ بالمقابل $\tilde{y}_2$ کا ترخیمی[78] تعلق حاصل کیا گیا ہے۔یوں $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ پر شکل 4.16 میں دکھایا گیا وسط پایا جاتا ہے۔

نسبتاً مشکل تجزیے سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ غیر خطی نظام 4.78 کا $(\frac{l}{k}, \frac{a}{b})$ پر وسط پایا جاتا ہے البتہ خط حرکت اس نقطے کے گرد غیر ترخیمی بند دائرہ بناتا ہے۔

شکل 4.16 کے دائیں کنارے پر خرگوش کی تعداد y_1 زیادہ سے زیادہ ہے جس کی وجہ سے لومڑی کی تعداد y_2 میں اضافے کی شرح بھی زیادہ سے زیادہ ہے۔اس خط پر گھڑی کی الٹی سمت چلتے ہوئے لومڑی کی زیادہ سے زیادہ آبادی حاصل ہوتی ہے۔اس مقام پر خرگوش کی تعداد اتنی کم ہو چکی ہوتی ہے کہ لومڑی کی بڑھتی تعداد کو خوراک پورا نہیں ہو پایا لہٰذا لومڑی کی آبادی گھٹنے شروع ہو جاتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں جانوروں کی دوری تعداد حالات کے مطابق مسلسل تبدیل ہوتی ہے۔

شکار اور شکاری کی دیگر مثالیں ملخ اور گھاس، ببر شیر اور زیبرا ہیں۔ □

4.6.1 سطح حرکت پر یک رتبی مساوات میں تبادلہ

سطح حرکت کی دوسری ترکیب خود مختار [جس میں t صریحاً نہیں پایا جاتا] دو رتبی سادہ تفرقی مساوات

$$F(y, y', y'') = 0$$

میں $y = y_1$ کو آزاد متغیرہ اور $y' = y_2$ لے کر y'' کو زنجیری تفرق سے

$$y'' = y_2' = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2$$

---

[78] elliptic

لکھ کر یک رتبی مساوات

$$F\left(y_1, y_2, \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2\right) = 0 \tag{4.81}$$

میں تبدیل کرنے پر مبنی ہے۔اس یک رتبی مساوات کو یا تو حل کرنا ممکن ہوتا ہے اور یا میدانِ ڈھلان کی مدد سے اس پر غور ممکن ہوتا ہے۔ آئیں مثال 4.14 پر اس ترکیب کی مدد سے غور کریں۔

مثال 4.17: بلا تقصیر ارتعاشی نظام کی یک رتبی تفرقی مساوات۔
مساوات 4.71 میں $\theta'' + k\sin\theta = 0$ ہے جس میں $\theta = y_1$ اور $\theta' = y_2$ (زاویائی رفتار) لیتے ہوئے

$$\theta'' = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2$$

لکھ کر $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2 = -k\sin y_1$ ملتا ہے جس کو علیحدگی متغیرات سے $y_2\,\mathrm{d}y_2 = -k\sin y_1\,\mathrm{d}y_1$ لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل

$$\frac{1}{2}y_2^2 = k\cos y_1 + C \tag{4.82}$$

دیتا ہے جہاں C تکمل کا مستقل ہے۔اس کو mL^2 سے ضرب دینے سے

$$\frac{1}{2}m(Ly_2)^2 - mL^2k\cos y_1 = mL^2C$$

حاصل ہوتا ہے جس کے تینوں اجزاء توانائی[79] کو ظاہر کرتے ہیں۔چونکہ y_2 زاویائی رفتار ہے لہٰذا Ly_2 لمحاتی رفتار اور $\frac{1}{2}m(Ly_2)^2$ حرکی توانائی[80] ہے۔درج بالا مساوات کا دوسرا جزو (بمع منفی علامت) مخفی توانائی[81] ہے جبکہ مساوات کا دایاں ہاتھ mL^2C کل توانائی ہے۔بلا تقصیر نظام میں توانائی کا ضیاع نہیں پایا جاتا لہٰذا حسب توقع کل توانائی مستقل مقدار ہے۔آئیں دیکھیں کہ حرکت کی نوعیت کل توانائی پر کیسے منحصر ہے۔

شکل 4.14-ب مختلف C کے لئے خط حرکت دیتی ہے۔ان خطوط کا دوری عرصہ 2π ہے۔ان میں ترخیمی بند دائرے اور لہر نما خطوط شامل ہیں جن کے مابین نقطہ زین [$(n\pi, 0)$ جہاں $n = \mp 1, \mp 3, \cdots$ ہے] سے

[79] energy
[80] kinetic energy
[81] potential energy

گزرتے ہوئے دو عدد خط حرکت پائے جاتے ہیں۔مساوات 4.82 کے تحت C کی کم سے کم قیمت $C = -k$ ہے جس پر $y_2 = 0$ اور $\cos y_1 = 1$ ہوں گے جو ساکن کمیت کو ظاہر کرتی ہے۔جس نقطے پر $y_2 = 0$ $\theta' =$ ہو اس نقطے پر حرت کی سمت تبدیل ہو کر الٹ ہو جائے گی لٰہذا مساوات 4.82 میں $y_2 = 0$ پر کرتے ہوئے $k \cos y_1 + C = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اب اگر $y_1 = \pi$ ہو تب $\cos y_1 = -1$ اور یوں $C = k$ ہو گا۔اس طرح اگر $-k < C < k$ ہو تب $|y_1| = |\theta| < \pi$ کی صورت میں کمیت کی حرکت کی سمت الٹ ہو گی اور C کی ان قیمتوں $(|C| < k)$ کے لئے کمیت ارتیاش پذیر ہو گا۔ترخیمی بند دائرے اس ارتعاشی حرکت کو ظاہر کرتے ہیں۔اس کے برعکس $C > k$ کی صورت میں $y_2 = 0$ ممکن نہیں ہے لٰہذا کمیت کی حرکت کی سمت الٹ نہیں ہو گی لٰہذا کمیت مبدا کے گرد گھومتا رہے گا جس کو لہری خط حرکت ظاہر کرتی ہیں۔ان دو صورتوں کے مابین $C = k$ پایا جاتا ہے جس کے خطوط نقطہ زین سے گزرتے ہیں۔انہیں شکل 4.14-ب میں دکھایا گیا ہے۔ □

دو رتبی مساوات کے تبادلے سے سطح حرکت پر (مثال 4.17 کی طرح) قابل حل یک رتبی مساوات کے علاوہ نا قابل حل مساوات بھی اہمیت کے حامل ہے۔ایسی صورت میں میدان ڈھال [حصہ 1.2 دیکھیں۔] کے ذریعہ نظام کے بارے میں معلومات حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔اس عمل کو ایک مشہور مثال کی مدد سے دیکھتے ہیں۔

مثال 4.18: منحصر بہ خود ارتعاش۔ مساوات ون در پول

ایسی طبعی نظام پائے جاتے ہیں جن میں معمولی ارتعاش کی صورت میں نظام کو توانائی فراہم ہوتی ہے جبکہ وسیع ارتعاش کی صورت میں نظام سے توانائی کا اخراج ہوتا ہے۔یوں وسیع ارتعاش کی صورت میں نظام قصری صورت اختیار کرتا ہے جبکہ کم ارتعاش کی صورت میں نظام میں منفی تقصیر (نظام کو توانائی کی فراہمی) پائی جاتی ہے۔ ہم طبعی وجوہات کی بنا توقع کرتے ہیں کہ ایسا نظام دوری طرز عمل رکھے گا، جو سطح حرکت پر بند دائرے کی صورت اختیار کرے گا جسے **تحدیدی دائرہ**[82] کہتے ہیں۔ایسی ارتعاش کو **مساوات ون در پول**[83]

$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0 \qquad (\mu > 0) \tag{4.83}$$

ظاہر کرتی ہے جہاں μ مثبت مستقل ہے۔یہ مساوات پہلی مرتبہ **خلا نلکی**[84] والے برقی ادوار پر غور کے دوران رو پذیر ہوئی۔یہ مساوات $\mu = 0$ کی صورت میں ہارمونی ارتعاش کی تفرقی مساوات $y'' + y = 0$ ہے۔ون در پول مساوات میں قصری جزو $-\mu(1 - y^2)$ ہے جہاں $\mu > 0$ ہے۔ یوں $y^2 < 1$ کی صورت میں منفی

---

[82] limit cycle
[83] van del Pol equation
[84] vacuum tube

تقصیری، $y^2=1$ کی صورت میں بلا تقصیر جبکہ $y^2>1$ کی صورت میں مثبت تقصیری (جس میں توانائی کا ضیاع ہو گا) نظام پایا جائے گا۔ نہایت کم μ کی صورت میں مساوات ون در پول اور $y''+y=0$ میں بہت کم فرق پایا جائے گا لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ سطح حرکت پر تحدیدی دائرہ تقریباً گول دائرہ ہو گا۔اگر μ کی قیمت زیادہ ہو تب تحدیدی دائرہ کی شکل غالباً مختلف ہو گی۔

اس مساوات کو یک رتبی مساوات میں تبدیل کرنے کی خاطر $y=y_1$ ، $y'=y_2$ اور $y''=\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2$ لکھتے ہوئے ون در پول مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}y_2-\mu(1-y_1^2)y_2+y_1=0 \tag{4.84}$$

سطح حرکت (y_1y_2 سطح) پر ہم میلان[85] خط $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}=K$ ہیں جہاں K مستقل مقدار ہے۔یوں ہم میلان خطوط درج ذیل ہوں گے

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1}=\mu(1-y_1^2)-\frac{y_1}{y_2}=K$$

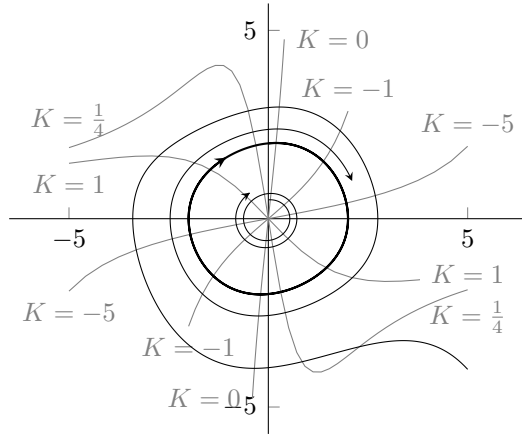
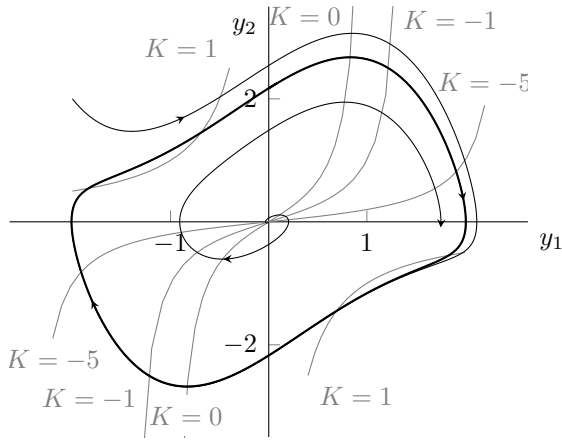
جن سے

$$y_2=\frac{y_1}{\mu(1-y_1^2)-K} \qquad \text{(شکل 4.17 اور شکل 4.18 دیکھیں۔)} \tag{4.85}$$

حاصل ہوتا ہے۔

شکل 4.17 میں μ کی کم قیمت $(\mu=0.1)$ کے لئے چند ہم میلان خطوط کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔اس کے علاوہ تحدیدی دائرے کو موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔تحدیدی دائرہ تقریباً گول ہے۔ ایک خط حرکت، جو تحدیدی دائرے کے باہر ہے، اور دوسرا خط حرکت، جو تحدیدی دائرے کے اندر ہے، کو تحدیدی دائرے تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔تحدیدی دائرہ اور نقطہ فاصل کے گرد بند دائرہ (وسط) میں فرق یہ ہے کہ تحدیدی دائرے تک خط حرکت پہنچتی ہے جبکہ وسط کا خط اسی دائرے پر پایا جاتا ہے۔ μ کی زیادہ قیمت پر تحدیدی دائرہ گول صورت نہیں رکھتا۔ شکل 4.18 میں μ کی زیادہ قیمت $(\mu=1)$ کے لئے تمام صورت حال دکھائی گئی ہے جہاں تحدیدی دائرہ گول نہیں ہے۔ □

مثال 4.19: تفرقی مساوات $y''+y-y^3=0$ سے نظام حاصل کریں۔اس نظام کے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔نقطہ فاصل کی نوعیت دریافت کریں۔

[85] isoclines

شکل 4.17: ون ڈر پول مساوات؛ $\mu = 0.1$ لیتے ہوئے دو خط حرکت کو تحدیدی دائرہ تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔

شکل 4.18: ون ڈر پول مساوات؛ $\mu = 1$ لیتے ہوئے دو خط حرکت کو تحدیدی دائرہ تک پہنچتے ہوئے دکھایا گیا ہے۔

حل: $y = y_1$ اور $y' = y'_1 = y_2$ لیتے ہوئے اور $y'' = y'_2$ لکھتے ہوئے دیے گئے دو رتبی مساوات سے نظام

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1 = y_2 \\ y'_2 &= f_2 = -y_1 + y_1^3 \end{aligned} \tag{4.86}$$

حاصل ہوتا ہے۔نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے حاصل ہوں گے۔ $f_1 = 0$ سے $y_2 = 0$ ملتا ہے جبکہ $f_2 = y_1(-1 + y_1^2) = 0$ سے $y_1 = 0$ اور $y_1 = \mp 1$ ملتے ہیں۔یوں نقطہ فاصل $(0,0)$ ، $-1,0$ اور $1,0$ ہیں۔نقطہ فاصل $(0,0)$ مبدا پر پایا جاتا ہے لہٰذا اس پر پہلے غور کرتے ہیں۔نقطہ فاصل کی نوعیت جاننے کی خاطر نظام کو خطی بناتے ہیں۔ایسا کوئی بھی جزو جو y^m یا $y_1^n y_2^q$ کی صورت میں لکھا گیا ہو، جہاں $m \neq 1$ جبکہ n اور q کوئی بھی مستقل ہو سکتے ہیں، غیر خطی ہو گا۔ان غیر خطی اجزاء کو رد کرنے سے خطی نظام حاصل ہوتا ہے۔یوں y'_2 کی مساوات میں y_1^3 کو رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= -y_1 \end{aligned} \quad \implies \quad \boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

حاصل ہو گا جس سے $p = a_{11} + a_{22} = 0$ ، $q = 1 > 0$ اور $\Delta = -4 < 0$ ملتے ہیں لہٰذا نقطہ $(0,0)$ مستحکم وسط ہے۔

آئیں اب نقطہ $(-1,0)$ پر غور کریں۔اس کو مبدا پر منتقل کرنے کی خاطر نظام 4.86 میں $\tilde{y}_1 = y_1 + 1$ یعنی $y_1 = \tilde{y}_1 - 1$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \tilde{y}'_1 &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}'_2 &= -(\tilde{y}_1 - 1) + (\tilde{y}_1 - 1)^3 \end{aligned} \implies \begin{aligned} \tilde{y}'_1 &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}'_2 &= 2\tilde{y}_1 - 3\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1^3 \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ غیر خطی اجزاء $\tilde{y}_1^2$ اور $\tilde{y}_1^3$ کو رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}'_1 &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}'_2 &= 2\tilde{y}_1 \end{aligned} \implies \tilde{\boldsymbol{y}}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}}$$

ملتا ہے۔اس سے $p = 0$ ، $q = -2 < 0$ اور $\Delta = 8 > 0$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا نقطہ $(-1,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

نقطہ $(1,0)$ پر غور کرنے کی خاطر اس کو مبدا پر منتقل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - 1$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ چنتے ہیں۔یوں نظام

$$\begin{aligned} \tilde{y}'_1 &= \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}'_2 &= 2\tilde{y}_1 + 3\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_1^3 \end{aligned}$$

ملتا ہے جس میں غیر خطی اجزاء $\tilde{y}_1^2$ اور $\tilde{y}_1^3$ رد کرتے ہوئے خطی نظام

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2\\ \tilde{y}_2' &= 2\tilde{y}_1\end{aligned} \implies \tilde{\boldsymbol{y}}' = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

ملتا ہے۔اس سے $p = 0$ ، $q = -2 < 0$ اور $\Delta = 8 > 0$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا نقطہ $(1, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔ □

سوالات

سوال 4.51 تا سوال 4.55 کو خطی بناتے ہوئے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔ نقطہ فاصل کی نوعیت جدول 4.1 اور جدول 4.2 کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 4.51: $\quad y_1' = 4y_1 - y_1^2, \quad y_2' = y_2$

جوابات: نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0, 0)$ اور $(4, 0)$ حاصل ہوتے ہیں۔ مسئلے کو $(0, 0)$ پر خطی بناتے ہوئے $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ لکھا جاتا ہے جس سے $p > 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta > 0$ ملتا ہے لہٰذا نقطہ $(0, 0)$ غیر مستحکم جوڑ ہے۔ نقطہ $(4, 0)$ کو مبدا پر منتقل کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - 4$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہیں اور مسئلے کو ($-\tilde{y}_1^2$ رد کرتے ہوئے) خطی بناتے ہوئے $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جو $p < 0$ ، $q < 0$ اور $\Delta > 0$ دیتا ہے جو غیر مستحکم نقطہ زین کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال 4.52: $\quad y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1 + \frac{2}{3}y_1^2$

جوابات: نقطہ فاصل $f_1 = f_2 = 0$ سے $(0, 0)$ اور $(\frac{3}{2}, 0)$ حاصل ہوتے ہیں۔ نقطہ $(0, 0)$ پر مسئلہ خطی بناتے ہوئے $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے جس سے $p = 0$ ، $q > 0$ اور $\Delta < 0$ ملتے ہیں لہٰذا نقطہ $(0, 0)$ مستحکم وسط ہے۔ نقطہ $(\frac{3}{2}, 0)$ کو مبدا پر منتقل کرنے کی خاطر $\tilde{y}_1 = y_1 - \frac{3}{2}$ اور $\tilde{y}_2 = y_2$ پر کرتے ہیں اور مسئلے کو ($\frac{2}{3}\tilde{y}_1^2$ رد کرتے ہوئے) خطی بنانے سے $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $(\frac{2}{3}, 0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.53: $y_1' = y_2, \quad y_2' = -2y_1 - y_1^2$
جوابات: مستحکم وسط $(0,0)$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.54: $y_1' = -y_1 + y_2 + y_1^2, \quad y_2' = -y_1 - y_2$
جوابات: $(0,0)$ پر مستحکم اور جاذب نقطہ مرغولہ پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,2)$ پر غیر مستحکم نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

سوال 4.55: $y_1' = -y_1 + y_2 - y_2^2, \quad y_2' = -y_1 - y_2$
جوابات: $(0,0)$ پر جاذب نقطہ مرغولہ پایا جاتا ہے جبکہ $(-2,2)$ پر غیر مستحکم نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

سوال 4.56 تا سوال 4.60 میں تفرقی مساوات سے نظام حاصل کریں۔اس نظام کے تمام نقطہ فاصل دریافت کریں۔نظام کو خطی بناتے ہوئے نقطہ فاصل کی نوعیت دریافت کریں۔

سوال 4.56: $y'' - 4y + y^3 = 0$
جوابات: نظام $y_1' = y_2$ اور $y_2' = 4y_1 - y_1^3$ حاصل ہوتا ہے۔ $(0,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین، $(-2,0)$ مستحکم وسط اور $(2,0)$ مستحکم وسط ہیں۔

سوال 4.57: $y'' + 4y - y^3 = 0$
جوابات: نظام $y_1' = y_2$ اور $y_2' = 4y_1 - y_1^3$ حاصل ہوتا ہے۔ $(0,0)$ مستحکم وسط، $(-2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین اور $(2,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہیں۔

سوال 4.58: $y'' + 4y + y^2 = 0$
جوابات: $(0,0)$ مستحکم وسط اور $(-4,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے۔

سوال 4.59: $y'' + \sin y = 0$
جوابات: $(0,0)$ اور $(\mp n2\pi,0)$ مستحکم وسط ہیں جہاں $n = 1,2,3,\cdots$ ہو سکتا ہے۔نقطہ $(\mp m\pi,0)$ غیر مستحکم نقطہ زین ہے جہاں $m = 1,3,5,\cdots$ ہو سکتا ہے۔

سوال 4.60: $y'' + \cos y = 0$
جوابات: نقطہ $(\frac{\pi}{2} \mp n2\pi,0)$ غیر مستحکم نقطہ نیز جبکہ $(-\frac{\pi}{2} \mp n2\pi,0)$ وسط ہیں جہاں $n = 1,2,3,\cdots$ ہو سکتا ہے۔آپ کو $-\cos(\mp\frac{\pi}{2} + \tilde{y}_1) = \sin(\mp\tilde{y}_1) \approx \mp\tilde{y}_1$ کی مدد لے سکتے ہیں۔

سوال 4.61: ریلے مساوات
$Y'' - \mu(1 - \frac{1}{3}Y'^2)Y' + Y = 0$ جہاں $\mu > 0$ ہے، ریلے مساوات[86] کہلاتی[87] ہے۔اس میں $y = Y'$ پر کرتے ہوئے تفرق لے کر وان در پول مساوات حاصل کریں۔

سوال 4.62: ڈفنگ مساوات
اسپرنگ اور کمیت کی مساوات $y'' + \omega_0^2 = 0$ میں غیر خطی قوت بحالی کی صورت میں ڈفنگ مساوات[88] $y'' + \omega_0^2 y + \beta y^3 = 0$ حاصل ہوتی ہے جہاں $|\beta|$ عموماً چھوٹی مقدار ہوتی ہے۔ $\beta > 0$ کو سخت اسپرنگ اور $\beta < 0$ کو نرم اسپرنگ کی صورت پکارا جاتا ہے۔ سطح حرکت پر خط حرکت کی مساوات دریافت کریں۔

جواب: $2y_2^2 + 2\omega_0^2 y_1^2 + \beta y_1^4 = K$ جہاں K مستقل مقدار ہے۔

سوال 4.63: خط حرکت
سادہ تفرقی مساوات $y'' - 9y + y^3 = 0$ کو نظام کی صورت میں لکھیں جس کو حل کرتے ہوئے y_2 بالمقابل y_1 کی مساوات حاصل کریں۔حاصل مساوات سے سطح حرکت پر چند خط حرکت کھینچیں۔

جواب: $2y_2^2 = 18y_1^2 - y_1^4 + K$ جہاں K مستقل مقدار ہے۔

4.7 سادہ تفرقی مساوات کے غیر متجانس خطی نظام

اس حصے میں غیر متجانس نظام

$$y' = Ay + g \qquad \text{(حصہ 4.3 دیکھیں)} \tag{4.87}$$

جہاں g غیر صفر سمتیہ ہے، کو حل کرنا سیکھتے ہیں۔ہم فرض کرتے ہیں کہ $g(t)$ اور $n \times n$ قالب $A(t)$ کے ارکان، محور t کے کھلے وقفہ J پر استمراری ہیں۔وقفہ J پر متجانس مساوات $y' = Ay$ کے عمومی حل $y^{(h)}(t)$ اور J پر مساوات 4.87 کے کسی بھی مخصوص حل $y^{(p)}(t)$ [جس میں کوئی مستقل نہیں پایا جاتا] سے مساوات 4.87 کا J پر عمومی حل

$$y = y^{(h)} + y^{(p)} \tag{4.88}$$

[86] Rayleigh equation
[87] لارڈ ریلے، جن کا اصل نام جان ولیم سٹرٹ ہے انگلستان کے ماہر طبیعیات اور ریاضی دان تھے۔
[88] Duffing equation

حاصل ہوتا ہے۔مسئلہ 4.3 کے تحت عمومی حل $\boldsymbol{y}$ میں J پر مساوات 4.87 کے تمام ممکنہ حل شامل ہیں۔

متجانس مساوات کے حل پر ہم گزشتہ حصوں میں غور کر چکے ہیں۔اس حصے میں غیر متجانس مساوات کے مخصوص حل کے حصول پر غور کرتے ہیں۔نا معلوم عددی سر کی ترکیب اور مقدار معلوم بدلنے کے طریقوں پر غور کرتے ہیں جنہیں ہم حصہ 2.7 اور حصہ 2.10 سے جانتے ہیں۔

4.7.1 نامعلوم عددی سر کی ترکیب

ایک عدد سادہ تفرقی مساوات کے حل میں استعمال ہونے کی طرح اب بھی یہ ترکیب اس صورت قابل استعمال ہو گی جب $\boldsymbol{A}$ کے ارکان مستقل مقدار ہوں جبکہ مستقل مقدار، t^m (جہاں m مثبت اعداد ہیں)، قوت نمائی، سائن اور کوسائن تفاعل کا کوئی بھی مجموعہ $\boldsymbol{g}$ ہو۔ایسی صورت میں مخصوص حل کو $\boldsymbol{g}$ کی طرح تصور کیا جاتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{g}=t^2$ ہونے کی صورت میں $\boldsymbol{y}^{(p)}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{w}t^2$ فرض کیا جائے گا۔ مساوات 4.87 میں $\boldsymbol{y}^{(p)}$ پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ حاصل کیے جاتے ہیں۔یہ حصہ 2.7 کی طرح ہے البتہ یہاں ترمیمی قاعدہ قدر مختلف ہے۔ آئیں ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کا استعمال دیکھیں۔

مثال 4.20: نا معلوم عددی سر کی ترکیب۔ترمیمی قاعدہ
درج ذیل مساوات کی عمومی حل حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{y}+\begin{bmatrix}-4\\ 3\end{bmatrix}e^{-3t} \tag{4.89}$$

حل:ہم صفحہ 238 پر مثال 4.5 میں مطابقتی متجانس مساوات کا حل

$$\boldsymbol{y}^{(h)}=c_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{-t}+c_2\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e^{-3t} \tag{4.90}$$

حاصل کر چکے ہیں۔چونکہ $\boldsymbol{A}$ کا $\lambda=-3$ امتیازی قدر ہے اور مساوات 4.89 میں دائیں جانب e^{-3t} پایا جاتا ہے لہٰذا اس جزو کو t سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{y}^{(p)}$ میں شامل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(p)}=\boldsymbol{u}te^{-3t}+\boldsymbol{v}e^{-3t} \tag{4.91}$$

$\boldsymbol{y}^{(p)}$ میں بائیں ہاتھ کا پہلا جزو حصہ 2.7 کا مماسی ترمیمی قاعدہ ہے، جو یہاں ناکافی ہے۔[آپ کوشش کر کے دیکھ سکتے ہیں]۔ مساوات 4.91 کو مساوات 4.89 میں پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}^{(p)\prime}=\boldsymbol{u}e^{-3t}-3\boldsymbol{u}te^{-3t}-3\boldsymbol{v}e^{-3t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}te^{-3t}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}e^{-3t}+\boldsymbol{g}$$

دونوں جانب te^{-3t} والے اجزاء کے عددی سر برابر ہوں گے لہٰذا $-3\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ ہو گا۔یوں $\boldsymbol{A}$ قالب کے امتیازی قدر $\lambda = -3$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ ہو گا۔اس طرح $\boldsymbol{u} = a[1 \quad -1]^T$ لکھا جا سکتا ہے جہاں a کوئی بھی غیر صفر مستقل ہو سکتا ہے۔بقایا اجزاء کے عددی سر برابر لکھ کر

$$\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g} \implies \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v_1 + v_2 \\ v_1 - 2v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= a + 4 \\ v_1 + v_2 &= -a - 3 \end{aligned}$$

دوسری مساوات کو پہلی سے منفی کرتے ہوئے $2a + 7 = 0$ یعنی $a = -\frac{7}{2}$ ملتا ہے۔یوں درج بالا میں پہلی مساوات $v_1 + v_2 = -\frac{7}{2} + 4 = \frac{1}{2}$ ہو گی جس میں $v_1 = k$ لیتے ہوئے $v_2 = \frac{1}{2} - k$ حاصل ہوتا ہے۔اس طرح $\boldsymbol{v} = [k \quad \frac{1}{2} - k]^T$ ہو گا۔ہم $k = 0$ چن سکتے ہیں۔ایسا ہی کرتے ہوئے عمومی حل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.92}$$

k کی قیمت تبدیل کرتے ہوئے دیگر حل لکھے جا سکتے ہیں مثلاً $k = 1$ لیتے ہوئے $\boldsymbol{v} = [1 \quad -\frac{1}{2}]^T$ حاصل ہو گا جس سے درج ذیل عمومی حل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.93}$$

□

مقدار معلوم بدلنے کی ترکیب

اس ترکیب سے غیر متجانس نظام

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{g}(t) \tag{4.94}$$

کو حل کیا جا سکتا ہے جہاں $A(t)$ متغیر مقدار ہیں اور $g(t)$ کوئی بھی تفاعل ہو سکتا ہے۔اگر t محور کے کسی کھلے وقفے J پر مطابقتی متجانس نظام کا عمومی حل $y^{(h)}$ معلوم ہو تب اس ترکیب کی مدد سے اس وقفے پر نظام 4.94 کا مخصوص حل $y^{(p)}$ حاصل کیا جاتا ہے۔آئیں مثال 4.20 کو اس ترکیب سے حل کریں۔

مثال 4.21: مقدار معلوم بدلنے کے طریقے سے حل
گزشتہ مثال کے نظام 4.89 کو مقدار معلوم بدلنے کی ترکیب سے حل کریں۔

$$y' = Ay + g = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-3t} \tag{4.95}$$

حل:متجانس مساوات کی امتیازی اقدار $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -3$ ہیں جن کے بالترتیب مطابقتی امتیازی سمتیات $[1 \quad 1]^T$ اور $[1 \quad -1]^T$ ہیں لہٰذا اساس $[e^{-t} \quad e^{-t}]^T$ ، $[e^{-3t} \quad -e^{-3t}]^T$ ہے جس سے متجانس مساوات کا حل $y^{(h)}$ لکھتے ہیں۔

$$y^{(h)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = Y(t)c \tag{4.96}$$

یہاں $Y(t) = [y^{(1)} \quad y^{(2)}]^T$ بنیادی قالب [حصہ 4.3 دیکھیں] ہے۔ حصہ 2.10 کی طرح ہم مستقل سمتیہ c کی جگہ متغیر سمتیہ u پر کرتے ہوئے مخصوص حل $y^{(p)}$ لکھتے ہیں۔

$$y^{(p)} = Y(t)u(t) \tag{4.97}$$

نظام 4.89 میں $y^{(p)}$ پر کرتے ہیں۔

$$Y'u + Yu' = AYu + g \tag{4.98}$$

اب چونکہ $y^{(1)}$ اور $y^{(2)}$ متجانس نظام کا حل ہے لہٰذا $y^{(1)\prime} = Ay^{(1)}$ اور $y^{(2)\prime} = Ay^{(2)}$ یعنی $Y' = AY$ ہو گا۔یوں $Y'u = AYu$ لکھ کر مساوات 4.98 سے $Yu' = g$ حاصل ہوتا ہے (اور چونکہ Y کا امتیازی مقطع دراصل ورونسکی [حصہ 4.1 دیکھیں] W ہے جو اساس کی صورت میں غیر صفر ہوتا ہے لہٰذا Y^{-1} حاصل کیا جا سکتا ہے) لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u' = Y^{-1}g \tag{4.99}$$

معکوس قالب کو مساوات 4.12 کی مدد سے حاصل کر کے

$$\boldsymbol{Y}^{-1} = \frac{1}{-2e^{-4t}} \begin{bmatrix} -e^{-3t} & -e^{-3t} \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} \\ e^{3t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{g}$ سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{u}'$ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{g} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} \\ e^{3t} & -e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}$ حاصل کرنے کی خاطر تکمل لیتے ہیں۔ تفرق کی طرح ہر جزو کا علیحدہ تکمل لیا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{u}(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{-2t} - 1) \\ -\frac{7}{2}t \end{bmatrix}$$

یوں مساوات 4.96 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y}^{(p)} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(e^{-2t} - 1) \\ -\frac{7}{2}t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{7}{2}te^{-3t} \\ \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{7}{2}te^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{7}{2}t \\ \frac{1}{4} + \frac{7}{2}t \end{bmatrix} e^{-3t} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} e^{-t}$$

گزشتہ مثال کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہاں مختلف مخصوص حل $\boldsymbol{y}^{(p)}$ حاصل ہوا ہے۔ یوں عمومی حل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)}$ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

ہم $c_1 - \frac{1}{4} = c^*$ لیتے ہوئے آخری جزو کو $\boldsymbol{y}^{(h)}$ میں ضم کر سکتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{(h)} + \boldsymbol{y}^{(p)} = c_1^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{-3t} \tag{4.100}$$

□

سوالات

سوال 4.64: ثابت کریں کہ مساوات 4.87 کے تمام حل مساوات 4.88 دیتا ہے۔

سوال 4.65 تا سوال 4.70 میں عمومی حل دریافت کریں۔جواب کو دیے گئے نظام میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کریں۔آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔

سوال 4.65:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2 + 2e^{-t} \\
y_2' &= 3y_1 - y_2 + 5e^{-t}
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{11}{12}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-t}$ ، $y_2 = c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{-2t} + \frac{11}{12}e^{2t} - \frac{9}{4}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t}$

سوال 4.66:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2 + e^{-2t} \\
y_2' &= 3y_1 - y_2 + 3e^{-2t}
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{3}{8}e^{-2t}$ ، $y_2 = c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{3}{2}te^{-2t} - \frac{3}{8}e^{-2t}$

سوال 4.67:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 + \sin(t) \\
y_2 &= -5y_1 - 6y_2 + \cos(t)
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{26}e^{-5t} + \frac{9}{13}\sin t - \frac{7}{13}\cos t$
$y_2 = -c_1 e^{-t} - 5c_2 e^{-5t} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{5}{26}e^{-5t} - \frac{6}{13}\sin t + \frac{9}{13}\cos t$

سوال 4.68:

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_2 + 2t \\ y_2' &= -1y_1 + 2y_2 + t \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = c_1(t+1)e^{3t} + c_2te^{3t} + \frac{t}{3}e^{3t} - \frac{t}{3}$

$y_2 = -c_1te^{3t} + c_2(1-t)e^{3t} + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{t}{3}e^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}$

سوال 4.69:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 + 2t^2 + 3 \\ y_2' &= 3y_1 + y_2 + t - 1 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + \frac{7}{16}e^{2t} - \frac{27}{16}e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{4}t + \frac{5}{4}$

$y_2 = 3c_1e^{2t} - c_2e^{-2t} + \frac{21}{16}e^{2t} + \frac{27}{16}e^{-2t} - \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{4}t - 3$

سوال 4.70:

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 - 4y_2 + 11t + 15 \\ y_2' &= 5y_1 + 6y_2 + 3e^{-t} - 15t - 20 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{t} + 10e^{2t} - 4e^{t} - 2e^{-t} - 3t - 4$

$y_2 = -\frac{5}{4}c_1e^{2t} - c_2e^{t} - \frac{25}{2}e^{2t} + 4e^{t} + e^{-t} + 5t + \frac{15}{2}$

سوال 4.71 تا سوال 4.76 ابتدائی قیمت مسائل ہیں۔انہیں حل کریں۔

سوال 4.71:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + \sin t \\ y_2' &= 3y_1 - 3y_2 \\ y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = 0 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = e^{-t}(\frac{32}{53\sqrt{7}}\sinh\sqrt{7}t + \frac{13}{53}\cosh\sqrt{7}t) - \frac{19}{53}\sin t - \frac{13}{53}\cos t$

$y_2 = e^{-t}(\frac{27}{53\sqrt{7}}\sinh\sqrt{7}t + \frac{6}{53}\cosh\sqrt{7}t) - \frac{21}{53}\sin t - \frac{6}{53}\cos t$

سوال 4.72:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -y_1 + y_2 + e^{-t} \\
y_2 &= 3y_1 + y_2 + t \\
y_1(0) = 0, &\quad y_2(0) = 1
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = \frac{19}{48}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{17}{16}e^{-2t} - \frac{t}{4}$ ، $y_2 = \frac{19}{16}e^{2t} - e^{-t} + \frac{17}{16}e^{-2t} - \frac{t}{4} - \frac{1}{4}$

سوال 4.73:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -3y_1 - 4y_2 + 2t^2 - t + 1 \\
y_2' &= 5y_1 + 6y_2 - t^2 + 2t \\
y_1(0) = 1, &\quad y_2(0) = -1
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = -4e^{2t} + 21e^{t} - 4t^2 - 11t - 16$ ، $y_2 = 5e^{2t} - 21e^{t} + \frac{7}{2}t^2 + 10t + 15$

سوال 4.74:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 + 6e^{3t} \\
y_2' &= -y_1 - e^{3t} \\
y_1(0) = 2, &\quad y_2(0) = 3
\end{aligned}
$$

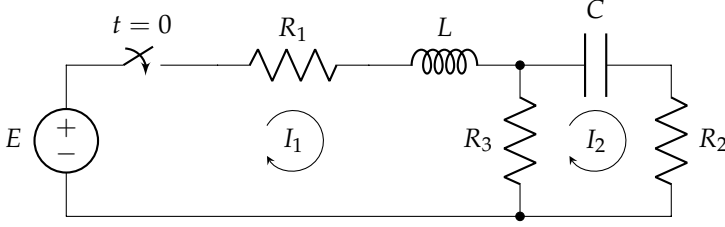
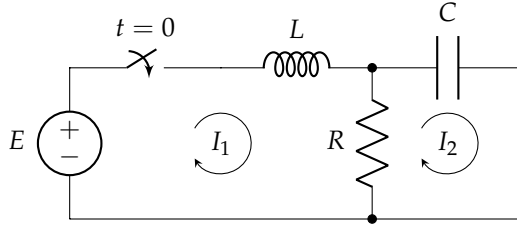
جوابات: $y_1 = 1.7e^{3t} + 0.3\cos t + 3.9\sin t$ ، $y_2 = -0.9e^{3t} + 3.9\cos t - 0.3\sin t$

سوال 4.75:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -3y_2 - 4\cos 5t \\
y_2' &= 3y_1 + 3\sin 5t \\
y_1(0) = -2, &\quad y_2(0) = 1
\end{aligned}
$$

جوابات: $y_1 = -\frac{11}{16}\sin 5t - \frac{19}{16}\sin 3t - 2\cos 3t$ ، $y_2 = -\frac{3}{16}\cos 5t - 2\sin 3t + \frac{19}{16}\cos 3t$

سوال 4.76:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -9y_2 + e^{t} \\
y_2 &= y_1 + e^{-t} \\
y_1(0) = -1, &\quad y_2(0) = 0
\end{aligned}
$$

شکل 4.19: مثال 4.77 اور مثال 4.78 کا برقی دور۔

شکل 4.20: مثال 4.79 اور مثال 4.80 کا برقی دور۔

جوابات: $y_1 = -\frac{1}{5}\cos 3t + \frac{1}{10}e^t - \frac{9}{10}e^{-t}$ ، $y_2 = -\frac{1}{15}\sin 3t + \frac{1}{10}e^t - \frac{1}{10}e^{-t}$

سوال 4.77: امالہ، برق گیر اور مزاحمتوں پر مبنی دور شکل 4.19 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر $E = 10\,\mathrm{V}$ ، $R_1 = 2\,\Omega$ ، $R_2 = 4\,\Omega$ ، $R_3 = 6\,\Omega$ ، $L = 2\,\mathrm{H}$ اور $C = 0.25\,\mathrm{F}$ ہوں اور لمحہ $t = 0$ پر منقطع سوئچ کو چالو کیا جائے تب I_1 اور I_2 کیا ہوں گے؟ ابتدائی رو اور ابتدائی ذخیرہ برقی بار صفر ہیں۔

جوابات: $I_1(t) = 5e^{-t} - \frac{25}{4}e^{-\frac{8}{5}t} + \frac{5}{4}$ ، $I_2(t) = 5e^{-t} - 5e^{-\frac{8}{5}t}$

سوال 4.78: اگر سوال 4.77 میں $E = 10\sin 5t$ وولٹ ہو تب I_1 اور I_2 کیا ہوں گے؟

جوابات: $I_1(t) = 0.388\sin 5t - 0.853\cos 5t - 0.962e^{-t} + 1.814e^{-\frac{8}{5}t}$ ،
$I_2(t) = 0.272\sin 5t - 0.49\cos 5t - 0.962e^{-t} + 1.451e^{-\frac{8}{5}t}$

سوال 4.79: شکل 4.20 میں $E = 20\,\mathrm{V}$ ، $R = 1\,\Omega$ ، $L = 4\,\mathrm{H}$ اور $C = 0.2\,\mathrm{F}$ ہیں۔ ابتدائی رو اور ابتدائی ذخیرہ برقی بار صفر ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے۔ رو دریافت کریں۔

جوابات: $I_1(t)=\frac{1}{4}e^{-\frac{5}{2}t}(-36\sqrt{5}\sinh\sqrt{5}t-80\cosh\sqrt{5}t)+20$ ، $I_2(t)=\sqrt{5}e^{-\frac{5}{2}t}\sinh\sqrt{5}t$

سوال 4.80: اگر سوال 4.79 میں $E=20\sin 2t$ ہو تب رو کیا ہوں گے؟

جوابات: $I_1(t)=e^{-\frac{5}{2}t}(2.625\sinh 2.236t+2.58\cosh 2.236t)+0.291\sin 2t-2.58\cos 2t$ ، $I_2(t)=e^{-\frac{5}{2}t}(-0.546\sinh 2.236t+0.256\cosh 2.236t)+0.93\sin 2t-0.256\cos 2t$

باب 5

طاقتی تسلسل سے سادہ تفرقی مساوات کا حل۔اعلٰی تفاعل

گزشتہ ابواب میں مستقل عددی سر والے خطی سادہ تفرقی مساوات کے حل حاصل کیے گئے جو **بنیادی تفاعل** تھے۔بنیادی تفاعل مثلاً $\sin 3t$ ، t^6 اور e^{2t} کو آپ احصاء[1] سے جانتے ہیں۔**متغیر عددی** سر والے سادہ تفرقی مساوات کے حل نسبتاً مشکل سے حاصل ہوتے ہیں اور یہ حل غیر بنیادی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ **لیژانڈر**، **بیسل** اور **بیش ہندسی** مساوات اس نوعیت کے سادہ تفرقی مساوات ہیں۔یہ مساوات اور ان کے حل **لیژانڈر تفاعل**، **بیسل تفاعل** اور **بیش ہندسی تفاعل** انجینئری میں نہایت اہم کردار ادا کرتے ہیں لہٰذا ان مساوات کو حل کرنے کے دو مختلف تراکیب پر غور کیا جائے گا۔

پہلی ترکیب میں مساوات کا حل **طاقتی تسلسل**[2] $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ کی صورت میں حاصل کیا جاتا ہے لہٰذا اس کو **ترکیب طاقتی تسلسل**[3] کہتے ہیں۔

طاقتی تسلسل کو $\ln x$ یا کسری طاقت x^r سے ضرب دیتے ہوئے دوسری ترکیب حاصل ہوتی ہے جو **ترکیب فروبنیوس**[4] کہلاتی ہے۔جہاں خالصتاً طاقتی تسلسل کی صورت میں حل لکھنا ممکن نہ ہو وہاں ترکیب فروبنیوس کار آمد ثابت ہوتا ہے لہٰذا یہ ترکیب زیادہ عمومی ہے۔

ایسے تمام اعلٰی حل جنہیں آپ احصاء سے نہیں جانتے **اعلٰی تفاعل**[5] کہلاتے ہیں۔

---

calculus[1]
power series[2]
power series method[3]
Frobenius method[4]
higher functions or special functions[5]

5.1 ترکیب طاقتی تسلسل

متغیر عددی سر والے خطی سادہ تفرقی مساوات کو عموماً ترکیب طاقتی تسلسل سے حل کرتے ہوئے طاقتی تسلسل کی صورت میں حل حاصل کیا جاتا ہے۔اس طاقتی تسلسل سے حل کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے، حل کا خط کھینچا جا سکتا ہے، کلیات ثابت کیے جا سکتے ہیں اور اسی طرح دیگر معلومات حاصل کی جا سکتی ہے۔اس حصے میں طاقتی تسلسل کے تصور پر غور کیا جائے گا۔

احصاء سے ہم جانتے ہیں کہ $x-x_0$ کا طاقتی تسلسل درج ذیل ہے

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots \tag{5.1}$$

جس میں x متغیر ہے جبکہ a_0 ، a_1 ، a_2 ، $\ldots$ تسلسل کے عددی سر[6] کہلاتے ہیں اور x_0 مستقل مقدار ہے جو تسلسل کا وسط[7] کہلاتا ہے۔جیسا مساوات 5.1 میں دکھایا گیا ہے، تسلسل کو عموماً علامت مجموعہ[8] ($\sum$) کی مدد سے مختصراً لکھا جاتا ہے جس میں اشاریہ[9] مختلف اجزاء کی نشاندہی کرتی ہے۔درج بالا مساوات میں m بطور اشاریہ استعمال کیا گیا ہے۔علامت مجموعہ کے نیچے $m=0$ اور اس کے اوپر ∞ مجموعے کی پہلے اور آخری جزو کی نشاندہی کرتے ہیں۔ تسلسل کا وسط صفر $(x_0=0)$ ہونے کی صورت میں x کا طاقتی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \tag{5.2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام متغیرات اور مستقل مقدار حقیقی ہے۔

طاقتی تسلسل سے مراد مساوات 5.1 یا مساوات 5.2 کا تسلسل ہے جس میں $x-x_0$ (یا x) کا منفی طاقت یا کسری طاقت نہیں پایا جاتا۔

مثال 5.1: مکلارن تسلسل در حقیقت میں طاقتی تسلسل ہیں

[6] coefficients
[7] center
[8] summation
[9] index

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1, \text{ہندسی تسلسل})$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots$$

□

ترکیب طاقتی تسلسل کا تصور

آپ نے درج بالا مثال میں کئی بنیادی تفاعل کے طاقتی تسلسل دیکھے۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ خطی سادہ تفرقی مساوات کا حل طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ ایک مثال کی مدد سے اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

مثال 5.2: طاقتی تسلسل حل

تفرقی مساوات $y' + y = 0$ کو ترکیب طاقتی تسلسل سے حل کریں۔

حل: پہلے قدم میں حل کو طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھ کر

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{5.3}$$

تسلسل کا جزو با جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} \tag{5.4}$$

انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots) + (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots) = 0$$

x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 3a_3)x^2 + \cdots = 0$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لٰہذا بائیں ہاتھ تمام اجزاء بھی صفر کے برابر ہوں گے۔

$$a_0 + a_1 = 0, \quad a_1 + 2a_2 = 0, \quad a_2 + 3a_3 = 0$$

ان سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_1 = -a_0, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3!}$$

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے حل 5.3 لکھتے ہیں جو قوت نمائی تفاعل e^{-x} کی مکلارن تسلسل ہے۔

$$y = a_0(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - \cdots) = a_0 e^{-x}$$

یہاں آپ $y'' + y = 0$ کو ترکیب طاقتی تسلسل سے حل کرتے ہوئے حل $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ حاصل کریں۔ □

اب اس ترکیب کے عمومی استعمال پر غور کرتے ہیں جبکہ اگلی مثال کے بعد اس کا جواز پیش کرتے ہیں۔پہلے قدم میں ہم خطی سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{5.5}$$

میں $p(x)$ اور $q(x)$ کو x کے تسلسل کی صورت (اور اگر حل $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت میں درکار ہو تب انہیں $x - x_0$ کی تسلسل کی صورت) میں لکھتے ہیں۔ اگر $p(x)$ اور $q(x)$ از خود کثیر رکنی ہوں تب پہلے قدم میں کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ دوسرے قدم میں حل کو مساوات 5.3 کی طرح تصور کرتے ہوئے مساوات 5.4 کی طرح y' اور درج ذیل y'' لکھتے ہوئے

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + 5 \cdot 4a_5 x^3 + \cdots = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} \tag{5.6}$$

مساوات 5.5 میں پر کریں۔تیسرے قدم میں x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہوئے، مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے، باری باری x^1 ، x^2 ، . . . کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کریں۔یوں تمام عددی سر کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہوئے اصل حل لکھیں۔

مثال 5.3: ایک مخصوص لیژانڈر مساوات
درج ذیل مساوات کروی تشاکل خاصیت رکھتی ہے۔اس کو حل کریں۔

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$$

حل:مساوات 5.3، مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کو درج بالا میں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}(1-x^2)(2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+5\cdot 4a_5x^3+6\cdot 5a_6x^4\cdots)\\ -2x(a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots)\\ +2(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots)=0\end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned}(2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+5\cdot 4a_5x^3+6\cdot 5a_6x^4\cdots)\\ +(-2a_2x^2-3\cdot 2a_3x^3-4\cdot 3a_4x^4-5\cdot 4a_5x^5-\cdots)\\ +(-2a_1x-2\cdot 2a_2x^2-3\cdot 2a_3x^3-4\cdot 2a_4x^4-\cdots)\\ +(2a_0+2a_1x+2a_2x^2+2a_3x^3+2a_4x^4+\cdots)=0\end{aligned}$$

ملتا ہے جس کو x کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(2a_2+2a_0)+(3\cdot 2a_3-2a_1+2a_1)x\\ +(4\cdot 3a_4-2a_2-2\cdot 2a_2+2a_2)x^2\\ +(5\cdot 4a_5-3\cdot 2a_3-3\cdot 2a_3+2a_3)x^3\\ +(6\cdot 5a_6-4\cdot 3a_4-4\cdot 2a_4+2a_4)x^4+\cdots=0\end{aligned}$$

مستقل مقدار سے شروع کرتے ہوئے باری باری x ، x^2 ، x^3 ، ...کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے بالترتیب a_2 ، a_3 ، a_4 ، ...کو a_0 اور a_1 کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}a_2&=-a_0\\ a_3&=0\\ a_4&=\frac{a_2}{3}=-\frac{a_0}{3}\\ a_5&=\frac{a_3}{2}=0\quad(\text{چونکہ } a_3=0 \text{ ہے})\\ a_6&=\frac{3}{5}a_4=-\frac{a_0}{5}\end{aligned}$$

ان عددی سروں کو مساوات 5.3 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$y = a_1 x + a_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \cdots)$$

جس میں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔یوں درج بالا عمومی حل دو عدد حل x اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \cdots$ پر مشتمل ہے جو لیژانڈر کثیر رکنی[10] $P_n(x)$ اور لیژانڈر تفاعل[11] $Q_n(x)$ کے رکن ہیں۔یہاں $x = P_1(x)$ اور $1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \cdots = -Q_1(x)$ ہیں جہاں منفی علامت روایتی ہے۔ n لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ[12] کہلاتا ہے۔یہاں $n = 1$ ہے لہٰذا لیژانڈر کثیر رکنی اور لیژانڈر تفاعل کا درجہ 1 ہے۔
□

نظریہ طاقتی تسلسل

مساوات 5.1 کے چند ارکان کا جزوی مجموعہ $s_n(x)$ لکھتے ہیں جس کو n جزوی مجموعہ[13] کہتے ہیں۔

$$s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \tag{5.7}$$

یہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ممکن ہے۔مساوات 5.1 سے $s_n(x)$ منفی کرنے سے بقایا $R_n(x)$ حاصل ہوتا ہے جس کو $a_n(x - x_0)^n$ کے بعد مساوات 5.1 کا بقایا[14] کہتے ہیں۔

$$R_n(x) = a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + \cdots \tag{5.8}$$

یوں ہندسی تسلسل

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

کے جزوی مجموعے اور نظیری بقایا درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1, & R_0 &= x + x^2 + x^3 + \cdots \\
s_1 &= 1 + x, & R_1 &= x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\
s_2 &= 1 + x + x^2, & R_2 &= x^3 + x^4 + x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

---

[10] Legendre polynomials
[11] Legendre function
[12] order
[13] nth partial sum
[14] remainder

اس طرح مساوات 5.1 کے ساتھ ہم جزوی مجموعوں $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ ... کی ترتیب وابستہ کرتے ہیں۔ اگر کسی $x = x_1$ کے لئے جزوی مجموعوں کی ترتیب مرتکز ہو مثلاً

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_1) = s(x_1)$$

تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر تسلسل 5.1 مرکوز[15] ہے جبکہ $s(x_1)$ کو تسلسل 5.1 کی قیمت[16] یا مجموعہ کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x_1 - x_0)^m$$

اس طرح کسی بھی n کے لئے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$s(x_1) = s_n(x_1) + R_n(x_1) \tag{5.9}$$

اس کے برعکس اگر $s_0(x)$ ، $s_1(x)$ ، $s_2(x)$ ، ... کی ترتیب غیر مرکوز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_1$ پر مساوات 5.1 منفرج[17] ہے۔

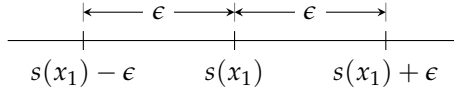
مرکوز تسلسل کی صورت میں، کسی بھی مثبت ϵ کے لئے ایسا N (جس کی قیمت ϵ پر منحصر ہے) پایا جاتا ہے کہ ہم تمام $n > N$ کے لئے مساوات 5.9 سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\left|R_n(x_1)\right| = \left|s(x_1) - s_n(x_1)\right| < \epsilon \qquad n > N \text{ تمام} \tag{5.10}$$

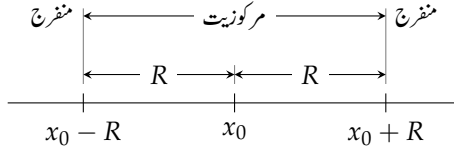
جیومیٹریائی طور (شکل 5.1 دیکھیں) پر اس کا مطلب ہے کہ $s_n(x_1)$ جہاں $n > N$ ہے $s(x_1) - \epsilon$ اور $s(x_1) + \epsilon$ کے درمیان پایا جاتا ہے۔ عملاً اس کا مطلب ہے کہ مرکوز تسلسل کی صورت میں x_1 پر مساوات 5.1 کا مجموعہ $s(x_1)$ تقریباً $s_n(x_1)$ کے برابر ہو گا۔ مزید یہ کہ $s(x_1)$ اور $s_n(x_1)$ میں فرق کو ہم n بڑھا کر جتنا کم بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔

طاقتی تسلسل کہاں مرکوز ہوتا ہے؟ تسلسل 5.1 میں $x = x_0$ پر a_0 کے علاوہ تمام اجزاء صفر ہو جاتے ہیں لہٰذا تسلسل کی قیمت a_0 ہو گی۔ یوں $x = x_0$ پر تسلسل a_0 پر مرکوز ہوتی ہے۔ کبھی کبھار x کے واحد اسی قیمت پر تسلسل مرتکز ہو گا۔ اگر x کی دیگر قیمتوں کے لئے بھی تسلسل مرتکز ہو تب x کی یہ قیمتیں ارتکازی

[15] converge
[16] value or sum
[17] divergent

$s(x_1) - \epsilon$ $\quad$ $s(x_1)$ $\quad$ $s(x_1) + \epsilon$

شکل 5.1: غیر مساوات 5.10 کی شکل۔

منفرج — مرکوزیت — منفرج

$x_0 - R$ $\quad$ x_0 $\quad$ $x_0 + R$

شکل 5.2: ارتکازی وقفہ 5.11 جس کا وسط x_0 ہے۔

وقفہ[18] کہلاتا ہے۔ یہ وقفہ محدود ہو سکتا ہے۔ محدود وقفہ جس کا وسط x_0 ہے کو شکل 5.2 میں دکھایا گیا ہے۔یوں طاقتی تسلسل 5.1 ارتکازی وقفے کے اندر تمام x پر مرکوز ہو گا یعنی درج ذیل مساوات پر پورا اترنے والے x پر تسلسل مرکوز ہو گا

$$|x - x_0| < R \tag{5.11}$$

جبکہ $|x - x_0| > R$ پر تسلسل منفرج ہو گا۔ارتکازی وقفہ لامتناہی بھی ہو سکتا ہے اور ایسی صورت میں طاقتی تسلسل x کی تمام قیمتوں پر مرکوز ہو گا۔

شکل 5.2 میں R رداسِ ارتکاز[19] کہلاتا ہے۔(مخلوط طاقتی تسلسل کی صورت میں ارتکازی وقفہ گول ٹکیا ہوتا ہے جس کا رداس R ہو گا)۔ اگر تسلسل تمام x پر مرکوز ہو تب ہم $R = \infty$ یعنی $\frac{1}{R} = 0$ لکھتے ہیں۔

رداس ارتکاز کی قیمت کو تسلسل کے عددی سر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کلیات سے حاصل کیا جا سکتا ہے، پس شرط یہ ہے کہ ان کلیات میں حد (lim) موجود اور غیر صفر ہو۔اگر یہ حد لامتناہی ہو تب تسلسل 5.1 صرف وسط x_0 پر مرکوز ہو گا۔

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m \to \infty} \sqrt[m]{|a_m|}} \tag{5.12}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m \to \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|} \tag{5.13}$$

---

[18] convergence interval
[19] convergence radius

مثال 5.4: رداس ارتکاز ∞ ، 1 اور 0
تینوں تسلسل میں $m \to \infty$ لیتے ہوئے رداس ارتکاز R دریافت کرتے ہیں۔

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{m!}} = \frac{1}{m+1} \to 0, \quad R \to \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \cdots, \quad \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1, \quad R = 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m! x^m = 1 + x + 2x^2 + \cdots, \quad \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \left|\frac{(m+1)!}{m!}\right| = m + 1 \to \infty, \quad R \to 0$$

لامتناہی رداس ارتکاس $R \to \infty$ سب سے بہتر اور کارآمد صورت ہے جبکہ $R = 0$ بے کار صورت ہے۔عموماً تسلسل کا رداس ارتکاز محدود ہوتا ہے۔ □

درج بالا مثال میں $\frac{1}{1-x}$ کے طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز $R = 1$ حاصل ہوا جہاں تسلسل کا وسط $x_0 = 0$ ہے۔مساوات 5.11 کے تحت $|x| < 1$ کے لئے طاقتی تسلسل تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کو ظاہر کرتی ہے۔آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔نقطہ $x = 0.2$ پر تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-0.2} = 1.25$ ہے جبکہ اس کے تسلسل میں $x = 0.2$ پر کرتے ہوئے بتدریج ارکان کی تعداد بڑھاتے ہوئے مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \qquad \text{ایک رکن} \\
1 + 0.2 &= 1.2 \\
1 + 0.2 + 0.2^2 &= 1.24 \\
1 + 0.2 + 0.2^2 + 0.2^3 &= 1.248 \\
1 + 0.2 + 0.2^2 + 0.2^3 + 0.2^4 &= 1.2496 \qquad \text{پانچ ارکان}
\end{aligned}$$

طاقتی تسلسل کے پانچ ارکان کا مجموعہ تفاعل کی اصل قیمت کے $\frac{1.2496}{1.25} \times 100 = 99.968$ فی صد ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ، مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کی قیمت اصل قیمت پر مرکوز ہوتی ہے۔بالکل اسی طرح رداس ارتکاز کے اندر کسی بھی x پر تسلسل سے تفاعل کی قیمت، اصل قیمت کے قریب سے قریب تر، حاصل کی جا سکتی ہے۔

رداس ارتکاز کے باہر تسلسل منفرج ہے۔آئیں رداس ارتکاز کے باہر $x = 1.2$ پر تفاعل اور تسلسل کی قیمت حاصل

کریں۔تفاعل کی قیمت $\frac{1}{1-1.2} = -5$ حاصل ہوتی ہے جبکہ مجموعہ لیتے ہوئے ارکان کی تعداد بڑھا کر دیکھتے ہیں۔

$$1 = 1$$
$$1 + 1.2 = 2.2$$
$$1 + 1.2 + 1.2^2 = 3.64$$
$$1 + 1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 = 5.368$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مجموعے میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے تسلسل کا مجموعہ اصل قیمت پر مرکوز ہونے کی بجائے اصل قیمت سے منتشر ہوتا نظر آتا ہے۔یوں رداس ارتکاز کے باہر نقطہ x پر یہ تسلسل اصل تفاعل کو ظاہر نہیں کرتا۔ہم کہتے ہیں کہ رداس ارتکاز کے باہر یہ تسلسل منفرج ہے۔

ہم نے رداس ارتکاز کی اہمیت کو تفاعل $\frac{1}{1-x}$ کی مدد سے سمجھا جس کی قیمت ہم تفاعل سے ہی حاصل کر سکتے تھے۔طاقتی تسلسل کی اہمیت اس موقع پر ہو گی جب تفاعل کو کسی بھی بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔

اگر سادہ تفرقی مساوات

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{5.14}$$

میں $p(x)$ ، $q(x)$ اور $r(x)$ کے طاقتی تسلسل (ٹیلر تسلسل) پائے جاتے ہوں تب اس مساوات کا طاقتی تسلسل حل پایا جاتا ہے۔ایسا تفاعل $f(x)$ جس کو $x - x_0$ کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جس کا مثبت رداس ارتکاز پایا جاتا ہو، x_0 پر تحلیلی[20] کہلاتا ہے ورنہ اس نقطے کو غیر تحلیلی کہیں گے (مثال 5.5 دیکھیں)۔اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ بیان کرتے ہیں جس میں مساوات 5.14 معیاری صورت میں ہے یعنی یہ y'' سے شروع ہوتا ہے۔اگر دو رتبی تفرقی مساوات غیر معیاری صورت میں پائی جاتی ہو، یعنی اس میں $h(x)y''$ پایا جاتا ہو تب مساوات کو $h(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے اس کی معیاری صورت حاصل کریں اور درج ذیل مسئلے میں اس معیاری صورت میں لکھی تفرقی مساوات کو استعمال کریں۔

مسئلہ 5.1: طاقتی تسلسل حل کی وجودیت
اگر مساوات 5.14 میں p ، q اور r نقطہ $x = x_0$ پر تحلیلی ہوں، تب مساوات 5.14 کا ہر حل $x = x_0$ پر تحلیلی ہو گا اور اس کو $x - x_0$ کی ایسی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا جس کا رداس ارتکاز $R > 0$ ہو۔

---

[20] analytic

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔(دھیان رہے کہ ہو سکتا ہے کہ ایسا نقطہ x محور پر نہ پایا جاتا ہو بلکہ مخلوط سطح پر پایا جاتا ہو۔)

مسئلہ 5.1 میں رداس ارتکاز کی لمبائی x_0 سے کم از کم اس قریب ترین نقطے (یا نقطوں) تک ہو گی جہاں p ، q اور r میں سے کوئی ایک مخلوط سطح پر غیر تحلیلی ہو۔

مثال 5.5: تفاعل غیر تحلیلی ہونے کی کئی وجوہات ممکن ہیں۔اس کی چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

- تفاعل غیر معین ہو سکتا ہے مثلاً $f(x)=\frac{1}{x-x_0}$ جس کی قیمت $x=x_0$ پر غیر معین ہے۔
- تفاعل غیر استمراری ہو سکتا ہے مثلاً

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geq x_0\\ 0 & x<x_0\end{cases}$$

- تفاعل استمراری ہونے کے باوجود غیر ہموار[21] ہو سکتا ہے۔ایسا تفاعل جس کے تمام تفرق $x=x_0$ پر پائے جاتے ہوں ہموار کہلاتا ہے۔درج ذیل تفاعل کا دورتبی تفرق $x=x_0$ پر نہیں پایا جاتا۔

$$f(x)=\begin{cases}(x-x_0)^2 & x\geq x_0\\ -(x-x_0)^2 & x<x_0\end{cases}$$

تفاعل ہموار ہونے کے باوجود اس کا ٹیلر تسلسل نقطہ $x=x_0$ پر منفرج ہو سکتی مثلاً

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

اس ہموار تفاعل کے تمام تفرق نقطہ $x=0$ پر صفر کے برابر ہیں لہٰذا اس کا ٹیلر تسلسل صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے جو تفاعل کو ظاہر نہیں کر سکتی۔

□

---

[21] not smooth

طاقتی تسلسل پر مختلف عمل

طاقتی تسلسل کی ترکیب میں ہم طاقتی تسلسل کا تفرق، مجموعہ اور حاصل ضرب لیتے ہوئے، (مثال 5.3 کی طرح) x کی ہر ایک طاقت کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے تسلسل کے عددی سر معلوم کرتے ہیں۔یہ چار اعمال درج ذیل وجوہات کی بنا ممکن ہیں۔ ان اعمال کا ثبوت طاقتی تسلسل کے باب میں دیا جائے گا۔

(الف) تسلسل کے ارکان کا تفرق۔ طاقتی تسلسل کے ہر رکن کا انفرادی تفرق لیا جا سکتا ہے۔اگر طاقتی تسلسل

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-x_0)^m$$

$|x-x_0|<R$ پر مرکوز ہو، جہاں $R<0$ ہے، تب ہر رکن کا انفرادی تفرق لے کر حاصل تسلسل بھی انہیں x پر مرکوز ہو گا اور یہ تسلسل ان x پر تفرق y' کو ظاہر کرے گا۔

$$y'(x)=\sum_{m=1}^{\infty}ma_m(x-x_0)^{m-1}\qquad(|x-x_0|<R)$$

اسی طرح دو رتبی، تین رتبی اور بلند رتبی تفرقات بھی حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

(ب) تسلسل کے ارکان کا مجموعہ۔ دو عدد طاقتی تسلسل کے ارکان کو جمع کرتے ہوئے ان کا مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر طاقتی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-x_0)^m \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty}b_m(x-x_0)^m \tag{5.15}$$

کے رداس ارتکاز مثبت ہوں اور تسلسل کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور $g(x)$ ہوں تب تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty}(a_m+b_m)(x-x_0)^m$$

بھی مرکوز ہو گا اور یہ $f(x)+g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(پ) تسلسل کے ارکان کا حاصل ضرب۔ دو عدد طاقتی تسلسل کو رکن با رکن ضرب دی جا سکتی ہے۔فرض کریں کہ مساوات 5.15 میں دیے گئے تسلسل کے رداس ارتکاز مثبت ہیں اور ان کے انفرادی مجموعے $f(x)$ اور

$g(x)$ ہیں۔اب پہلے تسلسل کے ہر رکن کو دوسرے تسلسل کے ہر رکن کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے $x-x_0$ کے یکساں طاقت کو اکٹھے کرتے ہوئے حاصل تسلسل

$$a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)(x-x_0)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)(x-x_0)^2+\cdots$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}(a_0b_m+a_1b_{m-1}+\cdots+a_mb_0)(x-x_0)^m$$

مرکوز ہو گا اور $f(x)g(x)$ کو دونوں تسلسل کے مشترک ارتکازی وقفے کے اندر ہر x پر ظاہر کرے گا۔

(ت) تمام عددی سروں کا صفر کے برابر ہونا۔ (طاقتی تسلسل کا مسئلہ مماثل۔) اگر طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز مثبت اور وقفہ ارتکاز پر تسلسل کا مجموعہ مکمل صفر ہو تب اس تسلسل کا ہر عددی سر صفر کے برابر ہو گا۔

سوالات

سوال 5.1 تا سوال 5.4 میں رداس ارتکاز دریافت کریں۔

سوال 5.1: $\sum_{\infty}^{m=0}(m+1)mx^m$

جواب: $R=1$

سوال 5.2: $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^m}{k^m}$

جواب: $R=k$

سوال 5.3: $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$

جواب: $R=\infty$

سوال 5.4: $\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^m x^m$

جواب: $R=\frac{4}{3}$

سوال 5.5 تا سوال 5.8 کو قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب طاقتی تسلسل حل کریں۔

سوال 5.5: $y'=-2xy$

جواب: $y=a_0(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+-\cdots)=a_0e^{-x^2}$

سوال 5.6: $y''+y=0$
جواب: $y=a_0+a_1x-\frac{a_0}{2}x^2-\frac{a_1}{6}x^3+-\cdots=a_0\cos x+a_1\sin x$

سوال 5.7: $(1-x)y'=y$
جواب: $y=a_0(1+x+x^2+x^3+\cdots)=-\frac{a_0}{1-x}$

سوال 5.8: $xy'-3y=k$ جہاں k مستقل مقدار ہے
جواب: $y=cx^3-\frac{k}{3}$

سوال 5.9 تا سوال 5.13 کو ترکیب طاقتی تسلسل سے قلم و کاغذ کی مدد سے حل کریں۔ تفرقی مساوات کے بعض اوقات جوابات میں اجزاء کی تعداد لامحدود ہوتی ہے، بعض اوقات جواب میں x کے صرف طاق یا صرف جفت طاقتیں پائی جاتی ہیں اور بعض اوقات جواب کی ایک قوسین میں اجزاء کی تعداد محدود ہوتی ہے۔

سوال 5.9: $y''-y'+xy=0$
جواب: $y=a_0(1-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{240}+\cdots)+a_1(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{24}-\cdots)$

سوال 5.10: $y''-y'-xy=0$
جواب: $y=a_0(1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{144}+\cdots)+a_1(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{8}+\frac{x^5}{20}+\cdots)$

سوال 5.11: $y''-y'-x^2y=0$
جواب: $y=a_0(1+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{60}+\cdots)+a_1(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots)$

سوال 5.12: $y''-xy'-x^2y=0$
جواب: $y=a_0(1+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{90}+\cdots)+a_1(x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\cdots)$

سوال 5.13: $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$
جواب: $y=a_0(1-3x^2)+a_1(x-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-\cdots)$ ؛ جواب کی پہلی قوسین لامحدود اجزاء پر مشتمل نہیں ہے۔

سوال 5.14: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی
$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{s}{s+1}x^{s+1}$ کے پہلے جزو کی نشاندہی $s=0$ کرتا ہے۔اس مجموعے میں $k=s+1$ پر کرتے ہوئے نیا

مجموعہ حاصل کریں جس میں علامت مجموعہ کے اندر x^m پایا جاتا ہو۔اس عمل کو منتقلی اشاریہ[22] کہتے ہیں۔حاصل مجموعے کے پہلے رکن کی نشاندہی کیا کرتی ہے؟

جواب: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k} x^k$ ؛ پہلا رکن کی نشاندہی $k=1$ کرتا ہے۔

سوال 5.15: علامت مجموعہ کی اشاریہ کی منتقلی
مجموعہ $\sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{p+2}{(p+1)!} x^{p+3}$ میں اشاریہ کو یوں منتقل کریں کہ علامت مجموعہ کے اندر x^m ہو۔

جواب: $\sum\limits_{m=5}^{\infty} \frac{m-1}{(m-2)!} x^m$

سوال 5.16 تا سوال 5.19 کو ترکیب طاقتی تسلسل کی مدد سے حل کریں۔ابتدائی معلوم کو استعمال کرتے ہوئے، حاصل حل میں x^3 تک کے (اور اس رکن کو شامل کرتے ہوئے) اجزاء لیتے ہوئے مستقل a_0 (اور a_1) دریافت کریں۔دیے گئے نقطہ x_1 پر مجموعے کی قیمت دریافت کریں۔جوابات میں نقطہ اعشاریہ کے بعد تین ہندسوں تک جواب لکھیں۔

سوال 5.16:

$$y' + 9y = 2, \quad y(0) = 6, \quad x_1 = 1$$

جوابات: $y = a_0 + (2 - 9a_0)x + \frac{81a_0 - 18}{2}x^2 - \frac{243a_0 - 54}{2}x^3 + \cdots$ ، $a_0 = 6$ ، $y(1) = -514$

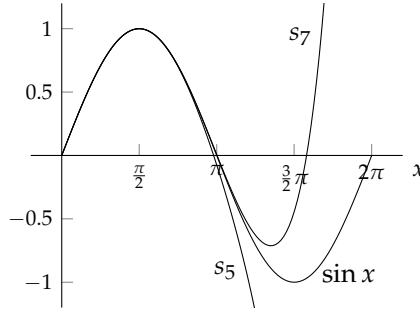
سوال 5.17:

$$y'' + 4xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad x_1 = 0.1$$

جوابات: $y = a_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} - \cdots) + a_1(x - \frac{5x^3}{6} + \cdots)$ ، $a_0 = 1$ ، $a_1 = 1$ ، $y(0.1) = 1.094$

سوال 5.18:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{3}{2}, \quad x_1 = 0.5$$

[22] shifting index

شکل 5.3: سوال 5.20 کا خط۔ $\sin x$ کے علاوہ جزوی مجموعہ s_5 اور s_7 دکھائے گئے ہیں۔

جوابات: $y = a_0(1 - 6x^2 + 3x^4 + \cdots) + a_1(x - \frac{5x^3}{3})$ ، $a_0 = 0$ ، $a_1 = -\frac{3}{2}$ ، $y(0.5) = -0.437$

سوال 5.19:

$$(x-4)y' = xy, \quad y(1) = 5, \quad x_1 = 2$$

جوابات: $y = a_0(1 - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{256} + \cdots)$ ، $a_0 = 5.827$ ، $y(2) = 2.307$

سوال 5.20: کمپیوٹر کا استعمال
طاقتی تسلسل سے تفاعل کی قیمت جزوی تسلسل سے حاصل کی جاتی ہے۔تفاعل $\sin x$ کے تسلسل سے بذریعہ کمپیوٹر، تسلسل میں اجزاء کی تعداد مختلف لیتے ہوئے سائن کا خط کھینچیں۔آپ دیکھیں گے کہ کم اجزاء لینے سے اصل تفاعل (یعنی $\sin x$) اور تسلسل میں فرق بہت جلد واضح ہوتا ہے جبکہ زیادہ تعداد میں اجزاء لینے سے یہ فرق دیر بعد نمودار ہوتا ہے۔

جوابات: شکل 5.3 میں $\sin x$ کا جزوی مجموعہ s_5 اور s_7 کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔

5.2 لیژانڈر مساوات۔لیژانڈر کثیر رکنی

لیژانڈر تفرقی مساوات[23][24]

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \qquad (n \text{ مستقل ہے}) \tag{5.16}$$

[23] فرانسیسی ریاضی دان اڈریان مری لیژانڈر [1752-1833] نے اعلیٰ تفاعل، بیضوی تکمل اور اعدادی نظریہ پر کام کیا۔
[24] Legendre's equation

طبیعیات کے اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک ہے جو متعدد مسائل، بالخصوص کرہ کے سرحدی قیمت مسئلوں، میں سامنے آتی ہے۔

مساوات میں مقدار معلوم n کی قیمت اصل مسئلے کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے لہٰذا مساوات 5.16 در حقیقت سادہ تفرقی مساوات کی **نسل** کو ظاہر کرتی ہے۔ ہم نے لیژانڈر مساوات، جس میں $n = 1$ تھا، کو مثال 5.3 میں حل کیا (جس کو ایک مرتبہ دوبارہ دیکھیں)۔ مساوات 5.16 کے کسی بھی حل کو **لیژانڈر تفاعل**[25] کہتے ہیں۔ لیژانڈر تفاعل اور ایسے دیگر اعلٰی تفاعل، جو احصاء میں نہیں پائے جاتے، کے مطالعہ کو **نظریہ اعلٰی تفاعل**[26] کہتے ہیں۔ دیگر اعلٰی تفاعل اگلے حصوں میں سامنے آئیں گے۔

مساوات 5.16 کو $1 - x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ نقطہ $x = 0$ پر **تحلیلی** تفاعل ہیں [مثال 5.6 دیکھیں] لہٰذا لیژانڈر مساوات پر مسئلہ 5.1 کا اطلاق ہوتا ہے اور اس کا حل طاقتی تسلسل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ طاقتی تسلسل

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{5.17}$$

اور اس کے تفرقات کو مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے مستقل $n(n+1)$ کو k لکھتے ہوئے

$$(1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2x\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + k\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

یعنی

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m - \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} k a_m x^m = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہاں آپ مثال 5.3 کی طرح مجموعوں کے چند ابتدائی ارکان لکھ کر آگے بڑھ سکتے ہیں یا پھر درج ذیل طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ تمام مجموعوں کو x کی یکساں طاقت کی صورت (x^s) میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $s = m - 2$ یعنی $m = s + 2$ پر کرتے ہیں جبکہ بقایا تین مجموعوں میں m کی جگہ s پر کرتے ہیں۔ یوں پہلے مجموعے کا پہلا رکن $m = 2$ اب $s = 0$ ہو گا اور a_m کی جگہ a_{s+2} لکھا جائے گا۔

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+2)(s+1)a_{s+2}x^s - \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)a_s x^s - \sum_{s=1}^{\infty} 2s a_s x^s + \sum_{s=0}^{\infty} k a_s x^s = 0 \tag{5.18}$$

---

[25] Legendre function
[26] special functions theory

درج بالا مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہٰذا مساوات کا بایاں ہاتھ بھی صفر کے برابر ہو گا اور یوں x کے ہر طاقت کے عددی سروں کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا۔یوں x^0 کے عددی سر سے شروع کرتے ہوئے باری باری x^1 ، x^2 ، $\dots$ کے عددی سر صفر کے برابر لکھتے ہیں۔مساوات 5.18 کا دوسرا مجموعہ x^2 اور تیسرا مجموعہ x^1 سے شروع ہوتا ہے لہٰذا ان میں x^0 نہیں پایا جاتا ہے۔یوں پہلے اور چوتھے مجموعوں سے x^0 کے عددی سر جمع کرتے ہوئے صفر کے برابر پر کرتے ہیں

$$2 \cdot 1 a_2 + n(n+1) a_0 = 0 \tag{5.19}$$

جہاں k کی جگہ واپس $n(n+1)$ لکھا گیا ہے۔اسی طرح x^1 پہلے، تیسرے اور چوتھے مجموعوں میں پایا جاتا ہے جن سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$3 \cdot 2 a_3 + [-2 + n(n+1)] a_1 = 0 \tag{5.20}$$

بلند طاقتی اجزاء x^2 ، x^3 ، $\dots$ تمام مجموعوں میں پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کے لئے x^s کے عددی سروں کا مجموعہ لکھتے ہیں۔

$$(s+2)(s+1) a_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + n(n+1)] a_s = 0 \tag{5.21}$$

چکور قوسین $[\cdots]$ کے اندر قوسین کو کھول کر ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
-s(s-1) - 2s + n(n+1) &= -s^2 + s - 2s + n^2 + n = n^2 - s^2 + n - s \\
&= (n-s)(n+s) + n - s \\
&= (n-s)(n+s+1)
\end{aligned}$$

لہٰذا مساوات 5.21 سے

$$a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)} a_s \qquad (s = 0, 1, \cdots) \tag{5.22}$$

حاصل ہوتا ہے جو کلیہ توالی[27] کہلاتا ہے۔کلیہ توالی کی مدد سے، a_0 اور a_1 کے علاوہ، بقایا تمام عددی سر، دو قدم پچھلی عددی سر استعمال کرتے ہوئے دریافت کیے جاتے ہیں۔یوں a_0 اور a_1 اختیاری مستقل ہیں۔کلیہ توالی کو بار بار استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{n(n+1)}{2!} a_0 & a_3 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1 \\
a_4 &= -\frac{(n-2)(n+3)}{4 \cdot 3} a_2 & a_5 &= -\frac{(n-3)(n+4)}{5 \cdot 4} a_3 \\
&= \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} a_0 & &= \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} a_1 \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

---

[27] recurrence relation, recursion formula

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں مساوات 5.17 میں پر کرتے ہوئے حل لکھتے ہیں

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \tag{5.23}$$

جہاں

$$y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \cdots \tag{5.24}$$

اور

$$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - + \cdots \tag{5.25}$$

ہیں۔یہ تسلسل $|x| < 1$ کے لئے مرکوز ہیں۔بعض اوقات تسلسل کا کوئی عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور یوں کلیہ توالی کے تحت اگلے تمام عددی سر بھی صفر ہوں گے اور یوں تسلسل محدود ارکان پر مشتمل ہوتا ہے۔چونکہ مساوات 5.24 میں x کی طاقتیں جفت ہیں جبکہ مساوات 5.25 میں x کے طاقتیں طاق ہیں لہٰذا $\frac{y_1}{y_2}$ مستقل مقدار نہیں ہو سکتا ہے اور یوں y_1 اور y_2 آپس میں خطی تعلق نہیں رکھتے لہٰذا یہ خطی طور غیر تابع حل ہیں۔یوں مساوات 5.23 کھلے وقفہ $-1 < x < 1$ پر عمومی حل ہے۔

دھیان رہے کہ $x = \mp 1$ پر $1 - x^2 = 0$ ہو گا لہٰذا سادہ تفرقی مساوات کی معیاری صورت میں عددی سر غیر تحلیلی ہوں گے۔یوں حیرانی کی بات نہیں ہے کہ تسلسل 5.24 اور تسلسل 5.24 کا ارتکازی وقفہ وسیع نہیں ہے ماسوائے اس صورت میں جب اجزاء کی تعداد محدود ہونے کی بنا تسلسل کثیر رکنی کی صورت اختیار کرے۔

کثیر رکنی حل۔لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$

طاقتی تسلسل کے تخفیف سے کثیر رکنی حاصل ہوتی ہے جس کا حل، ارتکازی شرط کے قید سے آزاد، تمام x کے لئے پایا جاتا ہے۔ایسے اعلٰی تفاعل جو سادہ تفرقی مساوات کے حل ہوتے ہیں میں یہ صورت عموماً پائی جاتی ہے جن سے مختلف نسل کے اہم کثیر رکنی حاصل ہوتے ہیں۔لیژانڈر مساوات میں n کی قیمت غیر منفی عدد صحیح ہونے کی صورت میں $s = n$ پر مساوات 5.22 صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا $a_{n+2} = 0$ ہو گا اور یوں $a_{n+4} = 0$ ، $a_{n+6} = 0$ ، $\cdots$ ہوں گے۔جفت n کی صورت میں y_1 کثیر رکنی ہو گا جبکہ طاق n کی صورت میں y_2 کثیر رکنی ہو گا۔ان کثیر رکنی کو مستقل مقدار سے ضرب دیتے ہوئے لیژانڈر کثیر رکنی[28] حاصل ہوتی ہیں جنہیں $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔روایتی طور پر اس مستقل مقدار کو درج ذیل طریقے سے چنا جاتا ہے۔

---

[28] Legendre polynomial

تسلسل میں x^n کے عددی سر a_n کو

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \qquad \text{مثبت عدد ہے } n \tag{5.26}$$

چننا [مثال 5.7 دیکھیں] جاتا ہے (جبکہ $n = 0$ کی صورت میں $a_n = 1$ چننا جاتا ہے)۔ مساوات 5.22 کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے دیگر عددی سر حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$a_s = -\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)} a_{s+2} \qquad (s \le n-2) \tag{5.27}$$

کثیر رکنی میں x کی بلند تر طاقت کے عددی سر a_n کو مساوات 5.26 کے تحت چننے سے $x = 1$ پر تمام P_n کی قیمت اکائی $[P_n(1) = 1]$ حاصل ہوتی ہے [شکل 5.4 دیکھیں]۔یہی a_n یوں چننے کی وجہ ہے۔مساوات 5.27 میں $s + 2 = n$ یعنی $s = n - 2$ پر کرتے ہوئے مساوات 5.26 سے a_n پر کرتے ہیں۔

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

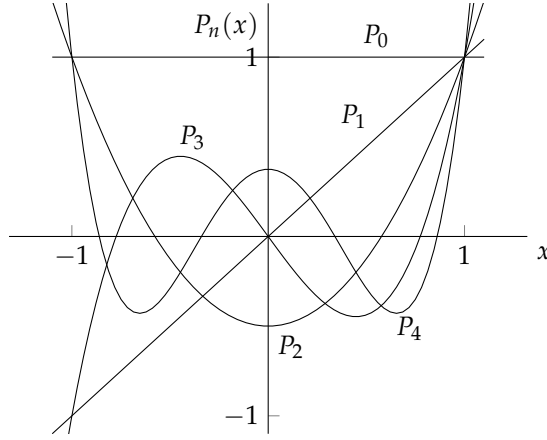
شمار کنندہ میں $(2n)! = 2n(2n-1)(2n-2)!$ اور نسب نما میں $(n!)^2$ کو $n!n!$ لکھ کر اس میں $n! = n(n-1)!$ اور $n! = n(n-1)(n-2)!$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2^n n(n-1)! n(n-1)(n-2)!} \\ &= -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!} \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں $n(n-1)2n(2n-1)$ کٹ جاتے ہیں۔اسی طرح

$$\begin{aligned} a_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2} \\ &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!} \end{aligned}$$

اور دیگر عددی سر حاصل کیے جا سکتے ہیں۔یوں درج ذیل عمومی کلیہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} \qquad (n - 2m \ge 0) \tag{5.28}$$

شکل 5.4: لیژانڈر کثیر رکنی۔

ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے لیژانڈر تفرقی مساوات 5.16 کا کثیر رکنی حل

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \\
&= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + - \cdots
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

حاصل ہوتا ہے۔اب $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ عدد صحیح ہو گا اور M اس عدد صحیح کے برابر ہو گا [مثال 5.8 دیکھیں]۔درج بالا n درجی لیژانڈر کثیر رکنی[29] کہلاتا ہے اور اس کو $P_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چند پہلے لیژانڈر کثیر رکنی جنہیں شکل 5.4 میں دکھایا گیا ہے درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$ وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر آپس میں قائمہ الزاویہ[30] ہیں۔یہ خصوصیت فوریئر لیژانڈر تسلسل کے لئے ضروری ہے جن پر اسی باب میں غور کیا جائے گا۔

---

[29] Legendre polynomial
[30] orthogonal

مثال 5.6: لیژانڈر مساوات 5.16 $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت میں لکھتے ہوئے ثابت کریں کی اس کے عددی سر $x=0$ پر تحلیلی ہیں۔

حل: لیژانڈر مساوات کو $1-x^2$ سے تقسیم کرتے ہوئے $y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{n(n+1)}{1-x^2}=0$ حاصل ہوتا ہے جس کے عددی سر $\frac{-2x}{1-x^2}$ اور $\frac{n(n+1)}{1-x^2}$ ہیں جن کی مکلارن تسلسل درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{1-x^2}&=n(n+1)(1+x^2+x^4+\cdots)\\ \frac{-2x}{1-x^2}&=-2(x+x^3+x^5+\cdots)\end{aligned}$$

پہلی تسلسل کا $\frac{a_{m+1}}{a_m}=1$ ہیں لہٰذا اس کا رداس ارتکاز $R=1$ ہے۔دوسری تسلسل کا بھی $\frac{a_{m+1}}{a_m}=1$ اور $R=1$ ہیں۔یوں دونوں تسلسل تحلیلی ہیں۔ □

مثال 5.7: درج ذیل مساوات کے بائیں ہاتھ سے اس کا دایاں ہاتھ حاصل کریں۔

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}$$

حل: پہلے $n=3$ کے لئے حل کرتے ہیں۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں شمار کنندہ میں طاق اعداد (جو طاق مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو ایک طرف اور جفت اعداد (جو جفت مقامات پر پائے جاتے ہیں) کو دوسری طرف منتقل کرتے ہوئے ہر جفت عدد سے 2 کا ہندسہ نکالا گیا ہے۔

$$\frac{(2\cdot3)!}{2^3(3!)^2}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2^3(3\cdot2\cdot1)^2}=\frac{6\cdot4\cdot2\cdot5\cdot3\cdot1}{2^3(3!)^2}=\frac{2^3(3\cdot2\cdot1)\cdot5\cdot3\cdot1}{2^3(3!)^2}=\frac{5\cdot3\cdot1}{3!}$$

شمار کنندہ میں اعداد کو ترتیب دیتے ہوئے اور اس میں سب سے بڑے عدد 5 کو $2\cdot3-1$ لکھتے ہوئے

$\frac{1\cdot 3\cdot(2\cdot 3-1)}{3!}$ لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں یہی سب کچھ عمومی عددی صحیح n کے لئے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdots 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^n(n!)^2}\\
&= \frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^n(n!)^2}\\
&= \frac{2^n n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^n(n!)^2}\\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{n!}\\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}
\end{aligned}$$

□

مثال 5.8: لیژانڈر کثیر رکنی مجموعہ [مساوات 5.29] کی بالائی حد M ہے۔ M کی قیمت دریافت کریں۔

حل: مساوات 5.22 لیژانڈر کثیر رکنی کے عددی سر دیتی ہے جس کے تحت $s=n$ پر عددی سر صفر ($a_{n+2}=0$) کے برابر ہو گا اور یوں بقایا عددی سر a_{n+4}، a_{n+6}، ... بھی صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں کثیر رکنی میں x کی زیادہ سے زیادہ طاقت n ہو گی۔ اس طرح $n=5$ کی صورت میں a_5x^5، a_3x^3 اور a_1x^1 پایا جائے گا جبکہ $n=8$ کی صورت میں a_8x^8، a_6x^6، a_4x^4، a_2x^2 اور a_0 پائے جائیں گے۔ آپ نے دیکھا کہ طاق n کی صورت میں کثیر رکنی میں کل $\frac{n-1}{2}$ پائے گئے جبکہ جفت n کی صورت میں ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ تھی۔ یوں طاق n کی صورت میں $M=\frac{n-1}{2}$ اور جفت n کی صورت میں $M=\frac{n}{2}$ ہو گا جہاں M عدد صحیح ہے۔ □

مثال 5.9: (کلیہ روڈریگیس)

تفاعل $(x^2-1)^n$ کو الکراجی کے مسئلہ ثنائی[31] سے پھیلا کر اس کا n رتبی تفرق لیں۔ حاصل جواب کی مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ حاصل کریں جس کو کلیہ روڈریگیس[32] کہتے ہیں۔

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \tag{5.31}$$

---

[31] binomial theorem ابو بکر ابن محمد ابن الحسین الکراجی [953-1029] ایرانی ریاضی دان۔

[32] Rodrigues' formula فرانسیسی ریاضی دان بنجامن اولانڈے روڈریگیس [1794-1851]

حل: $(x^2-1)^n$ کو مسئلہ الکراجی سے پھیلاتے ہوئے $n+1$ ارکان ملتے ہیں۔

$$y=(x^2-1)^n=(x^2)^n+\frac{n}{1!}(x^2)^{n-1}(-1)^1+\frac{n(n-1)}{2!}(x^2)^{n-2}(-1)^2+\cdots \\ +\frac{n(n-1)}{2!}(x^2)^2(-1)^{n-2}+\frac{n}{1!}(x^2)(-1)^{n-1}+(-1)^n \tag{5.32}$$

اس مساوات کا آخری رکن مستقل مقدار $(-1)^n$ ہے جبکہ اس رکن سے ایک پہلے رکن میں x^2 پایا جاتا ہے۔یوں y' لینے سے آخری رکن صفر ہو جائے گا لہٰذا y' میں n ارکان رہ جائیں گے۔ y' کے آخری رکن میں x^1 پایا جائے گا۔ y'' لینے سے یہ رکن مستقل مقدار ہو جائے گا جبکہ ارکان کی تعداد میں مزید کمی رو نما نہیں ہو گی۔اسی طرح y''' لینے سے ایک اور رکن کم ہو جائے گا اور $n-1$ ارکان رہ جائیں گے۔ y'''' لینے سے ارکان کی تعداد میں کمی پیدا نہیں ہو گی۔یوں ہر دو مرتبہ تفرق لینے سے تعداد اکائی کی پیدا ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ n رتبی تفرق $y^{(n)}$ لینے کے بعد ارکان کی تعداد $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ ہو گی جس کو ہم M سے ظاہر کرتے ہیں اور جو صحیح عدد ہو گا۔

مساوات 5.32 کو مجموعے کی صورت میں لکھتے ہیں جس میں $m=0$ تا $m=n$ ارکان یعنی $n+1$ ارکان ہیں۔

$$y=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!(x^2)^{n-m}(-1)^m}{(n-m)!m!}=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!(-1)^m}{(n-m)!m!}x^{2n-2m} \tag{5.33}$$

اب $z=x^{2n-2m}$ پر نظر رکھیں۔اس کے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
z'&=(2n-2m)x^{2n-2m-1}=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-1)!}x^{2n-2m-1}\\
z''&=(2n-2m)(2n-2m-1)x^{2n-2m-2}=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-2)!}x^{2n-2m-2}\\
z'''&=(2n-2m)(2n-2m-1)(2n-2m-2)x^{2n-2m-3}=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-3)!}x^{2n-2m-3}\\
&\vdots\\
z^{(k)}&=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-k)!}x^{2n-2m-k}\\
z^{(n)}&=\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-n)!}x^{2n-2m-n}=\frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!}x^{n-2m}
\end{aligned}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.33 کا n رتبی تفرق لکھتے ہیں

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] = \sum_{m=0}^{M} \frac{n!(-1)^m}{(n-m)!m!} \frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!} x^{n-2m}$$

جس کا مساوات 5.29 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]$$

□

مثال 5.10: روڈریگیس مساوات 5.31 استعمال کرتے ہوئے n مرتبہ تکمل بالحصص لیتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

حل: فرض کریں کہ $y = (x-1)^3$ ہے۔یوں $y' = 3(x-1)^2$ ، $y'' = 3 \cdot 2(x-1)$ ، $y''' = 3 \cdot 2 \cdot 1$ اور $y^{(4)} = 0$ ہوں گے جن سے $y(1) = 0$ ، $y'(1) = 0$ ، $y''(1) = 0$ ، $y'''(1) = 3!$ اور $y(1)^{(4)} = 0$ حاصل ہوتے ہیں۔اس سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $y_1 = (x-1)^n$ کی صورت میں

$$y_1 = (x-1)^n, \quad y_1^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!}(x-1)^{n-m}, \quad y_1^{(m)}(1) = n!\,\delta_{n,m} \tag{5.34}$$

اور $y_2 = (x+1)^n$ کی صورت میں

$$y_2 = (x-1)^n, \quad y_2^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!}(x+1)^{n-m}, \quad y_2^{(m)}(-1) = n!\,\delta_{n,m} \tag{5.35}$$

ہو گا جہاں $\delta_{n,m}$ کی تعریف درج ذیل ہے (یعنی $m = n$ کی صورت میں $\delta = 1$ جبکہ $m \neq n$ کی صورت میں $\delta = 0$ ہے)۔

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \tag{5.36}$$

مساوات 5.34 کہتی ہے کہ $y_1 = (x-1)^n$ کے تمام تفرقات کی قیمت $x = 1$ پر صفر ہو گی ماسوائے n رتبی تفرق، جس کی قیمت $n!$ ہو گی۔ مساوات 5.35 یہی کچھ $y_2 = (x+1)^n$ کے بارے میں $x = -1$ پر کہتی ہے۔

اب اگر $X = (x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n = y_1 y_2$ ہو تب کلیہ لیبنٹز[33] سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^m X}{\mathrm{d}x^m} = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \overbrace{\frac{\mathrm{d}^{m-s} y_1}{\mathrm{d}x^{m-s}}}^{M} \cdot \overbrace{\frac{\mathrm{d}^s y_2}{\mathrm{d}x^s}}^{N}$$

اگر $m \neq n$ ہو، اور بالخصوص اگر $m < n$ ہو، تب مساوات 5.34 کہتی ہے کہ $M(x=1) = 0$ ہو گا جبکہ مساوات 5.35 کہتی ہے کہ تب $N(x=-1) = 0$ ہو گا۔ان نتائج کی بنا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^m X}{\mathrm{d}x^m} = 0 \tag{5.37}$$

مساوات 5.31 کو استعمال کرتے ہوئے $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n[(x^2-1)^n]}{\mathrm{d}x^n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+1} X}{\mathrm{d}x^{n+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

ہو گا جہاں تکمل بالحصص استعمال کیا گیا ہے۔مساوات 5.37 کے تحت $\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\Big|_{1} = \frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\Big|_{-1} = 0$ ہے لہٰذا آخری قدم پر تکمل کے باہر تمام حصہ صفر کے برابر ہے اور یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{-1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+1} X}{\mathrm{d}x^{n+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1} X}{\mathrm{d}x^{n-1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{-1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\frac{\mathrm{d}^{n+1} X}{\mathrm{d}x^{n+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-2} X}{\mathrm{d}x^{n-2}}\bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+2} X}{\mathrm{d}x^{n+2}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-2} X}{\mathrm{d}x^{n-2}}\,\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

---

[33] Leibniz formula

جہاں دوبارہ تکمل بالحصص لیا گیا ہے۔ پہلی کی طرح اب بھی تکمل کا باہر والا حصہ صفر کے برابر ہے۔ اسی طرح بار بار تکمل بالحصص لیتے ہوئے ہر بار بیرونی حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ یوں s مرتبہ تکمل لیتے اور بیرونی حصے کو صفر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^s}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+s} X}{\mathrm{d}x^{n+s}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-s} X}{\mathrm{d}x^{n-s}} \,\mathrm{d}x$$

آخر کار $s = n$ ہو گا اور یوں درج ذیل حاصل ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}^0 X}{\mathrm{d}x^0} = X$ لکھا گیا ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n+n} X}{\mathrm{d}x^{n+n}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-n} X}{\mathrm{d}x^{n-n}} \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{2n} X}{\mathrm{d}x^{2n}} \cdot X \,\mathrm{d}x$$

$X = (x^2-1)^n$ کا الکراجی ثنائی تسلسل مساوات 5.32 دیتی ہے جس کا $2n$ رتبی تفرق لینے سے، پہلے رکن کے علاوہ، تمام ارکان صفر کے برابر ہو جاتے ہیں۔ یوں اس کا $2n$ رتبی تفرق $\frac{\mathrm{d}^{2n} X}{\mathrm{d}x^{2n}} = (2n)!$ ہو گا جس سے درج بالا تکمل یوں

$$\int_{-1}^{1} P_n^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x \tag{5.38}$$

لکھا جاتا ہے۔ آئیں $\int X \,\mathrm{d}x$ کو تکمل بالحصص کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} (x-1)^n (x+1)^n \,\mathrm{d}x \\ &= (x-1)^n \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} n(x-1)^{n-1} \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر ہے۔ اسی طرح بار بار تکمل بالحصص لیتے ہوئے ہر مرتبہ تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ s مرتبہ تکمل بالحصص لیتے ہوئے اور تکمل کے باہر حصے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} X \,\mathrm{d}x &= (-1)^s \int_{-1}^{1} [n(n-2)\cdots(n-s+1)](x-1)^{n-s} \frac{(x+1)^{n+s}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+s)} \,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^s \int_{-1}^{1} \frac{n!(x-1)^{n-s}}{(n-s)!} \frac{n!(x+1)^{n+s}}{(n+s)!}\end{aligned}$$

آخر کار $s=n$ ہو گا جس پر درج ذیل لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} X\,\mathrm{d}x &= (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{n!(x-1)^{n-n}}{(n-n)!}\frac{n!(x+1)^{n+n}}{(n+n)!}\\ &= \frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n)!}\int_{-1}^{1}(x+1)^{2n}\\ &= \frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n)!}\frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_{-1}^{1}\\ &= \frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n)!}\frac{2^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

جہاں $0!=1$ (مساوات 5.94) پر کیا گیا ہے۔درج بالا نتیجے کو مساوات 5.38 میں پر کرتے ہیں

$$\int_{-1}^{1} P_n^2\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n)!}\frac{2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} \tag{5.39}$$

جہاں منفی ایک کا جفت طاقت اکائی کے برابر $[(-1)^{2n}=1]$ ہے۔ □

مثال 5.11: درج ذیل ثابت کریں جہاں $n \neq m$ ہے۔

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n \neq m) \tag{5.40}$$

حل: فرض کریں کہ $X=(x^2-1)^n$ اور $Y=(x^2-1)^m$ ہیں۔ یوں مساوات 5.31 کے تحت $P_n=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}$ اور $P_m=\frac{1}{2^m m!}\frac{\mathrm{d}^m Y}{\mathrm{d}x^m}$ ہوں گے لہٰذا

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n X}{\mathrm{d}x^n}\cdot\frac{\mathrm{d}^m Y}{\mathrm{d}x^m}\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔چونکہ n اور m برابر نہیں ہیں لہٰذا ان میں ایک کی قیمت دوسرے سے کم ہو گی۔ہم فرض کرتے ہیں کہ $n<m$ ہے۔ گزشتہ مثال کی طرح، درج بالا کو بار بار تکمل بالحصص سے حل کرتے ہوئے، ہر بار تکمل کے باہر حصہ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور آخر کار درج ذیل ملتا ہے۔ مساوات 5.36 کے تحت Y کا صرف اور صرف m رتبی تفرق غیر صفر ہے درج ذیل صفر کے برابر ہے۔

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n P_m\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1}\frac{(n!)^2}{(m-n)!}\frac{\mathrm{d}^{m-n} Y}{\mathrm{d}x^{m-n}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\frac{(n!)^2}{(m-n)!}\frac{\mathrm{d}^{m-n+1} Y}{\mathrm{d}x^{m-n+1}}\bigg|_{-1}^{1} = 0\end{aligned}$$

□

مثال 5.12: پیداکار تفاعل

الکراجی کے مسئلہ ثنائی سے $\frac{1}{\sqrt{1-v}}$ کا تسلسل لکھ کر اس میں $v = 2xu - u^2$ پر کریں۔ ان میں u^0 ارکان کا مجموعہ حاصل کریں۔اسی طرح u^1 ارکان کا مجموعہ،اور u^2 ارکان کا مجموعہ، . . . حاصل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ ان مجموعوں کا عددی سر بالترتیب P_0 ، P_1 ، P_2 ، . . . ہو گا یعنی

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)u^n \tag{5.41}$$

حل: آئیں P_0 ، P_1 اور P_2 کے لئے حل کریں۔ دیے تفاعل کا الکراجی ثنائی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$(1-v)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{v^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3v^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5v^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7v^4}{2^4 \cdot 4!} + \cdots$$

چونکہ u^2 کا عدد سر P_2 ہو گا اور درج بالا تسلسل کے پہلے تین ارکان میں کے بعد u کے زیادہ بلند طاقت پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم تسلسل کے پہلے تین ارکان پر نظر رکھتے ہیں۔اس تسلسل میں $v = 2xu - u^2$ پر کرتے ہوئے درکار نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
(1-v)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{(2xu-u^2)^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3(2xu-u^2)^2}{2^2 \cdot 2!} + \cdots \\
&= 1 + (xu - \frac{u^2}{2}) + \frac{3}{8}(4x^2u^2 + u^4 - 4xu^3) + \cdots \\
&= \underbrace{1}_{P_0} + \underbrace{(x)}_{P_1} u + \underbrace{\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)}_{P_2} u^2 + \cdots
\end{aligned}$$

□

سوالات

سوال 5.21 تا سوال 5.26 لیژانڈر کثیر رکنی اور تفاعل پر مبنی ہیں۔

سوال 5.21: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n = 0$ لیتے ہوئے $P_0(x) = 1$ حاصل کریں۔

جواب: چونکہ لیژانڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقت کے x پائے جاتے ہیں للذا $n = 0$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n = 0$ پر کرتے اور مساوات 5.94 کی مدد سے $0! = 1$ لیتے ہوئے $P_0(x) = 1$ ملتا ہے۔

سوال 5.22: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 میں $n = 1$ لیتے ہوئے $P_1(x)$ حاصل کریں۔

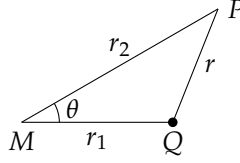
جواب: چونکہ لیژانڈر کثیر رکنی میں مثبت طاقتی x پائے جاتے ہیں للذا $n = 1$ کی صورت میں مساوات 5.29 کا پہلا رکن $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$ ہی پایا جائے گا جس میں $n = 1$ پر کرتے ہوئے $P_1(x) = x$ ملتا ہے۔

سوال 5.23: لیژانڈر کثیر رکنی مساوات 5.29 سے $P_3(x)$ تا $P_5(x)$ حاصل کریں جنہیں مساوات 5.30 میں پیش کیا گیا ہے۔

سوال 5.24: $P_0(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کا حل ہے۔

جوابات: $n = 0$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$ ہو گی اور $y = P_0 = 1$ ، $y' = P_0' = 0$ اور $y'' = P_0'' = 0$ ہوں گے۔ y ، y' اور y'' کو مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1 - x^2)(0) - 2x(0)$ یعنی 0 حاصل ہوتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.25: $P_1(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کا حل ہے۔

جوابات: $n = 1$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی شکل $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ہو گی جبکہ $y = P_1 = x$ ، $y' = P_1' = 1$ اور $y'' = P_1'' = 0$ ہیں۔ y ، y' اور y'' کو مساوات

شکل 5.5: نقطہ برقی بار کا برقی میدان [سوال 5.27]۔

کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے $(1-x^2)(0)-2x(1)+2(x)$ یعنی 0 ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.26: $P_3(x)$ کو لیژانڈر مساوات 5.16 میں پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ لیژانڈر مساوات کے حل ہیں۔

جوابات: $n=3$ کی صورت میں لیژانڈر مساوات 5.16 کی صورت $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$ ہو گی جبکہ $y=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ ، $y'=\frac{1}{2}(15x^2-3)$ اور $y''=15x$ ہیں جنہیں مساوات کے بائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے

$$(1-x^2)(15x)-2x[\tfrac{1}{2}(15x^2-3)]+12[\tfrac{1}{2}(5x^3-3x)]$$

یعنی 0 ملتا ہے جو تمام x پر مساوات کے دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔یہ حل کی درستگی کا ثبوت ہے۔

سوال 5.27: نظریہ مخفی توانائی

آپ نقطہ برقی بار کے برقی میدان سے بخوبی واقف ہیں۔شکل 5.5 میں محدد کے مبدا M سے ہٹ کر نقطہ بار Q پایا جاتا ہے جس کا عمومی مقام P پر برقی دباو $V=\frac{Q}{4\pi\epsilon r}=\frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}}$ ہے۔ $\frac{Q}{4\pi\epsilon}$ کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات 5.41 کی استعمال سے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}}=\frac{1}{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}P_m(\cos\theta)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m \tag{5.42}$$

جواب: $r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta=r_2^2[1-2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\cos\theta+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2]$ لکھتے ہوئے $u=\frac{r_1}{r_2}$ اور $x=\cos\theta$ لیتے ہوئے حل کریں۔

سوال 5.28: درج ذیل ثابت کریں۔مساوات 5.41 کو استعمال کریں۔

$$P_n(1)=1,\quad P_n(-1)=(-1)^n,\quad P_{2n+1}(0)=0$$

سوال 5.29: **بونٹ کلیہ توالی**
مساوات 5.41 کا u تفرق لے کر دوبارہ مساوات 5.41 کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل بونٹ کلیہ توالی[34] حاصل کریں[35]۔

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x),\qquad n=1,2,\cdots \tag{5.43}$$

جواب: مساوات 5.41 کا یک رتبی تفرق $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}$ لیتے ہوئے دوبارہ مساوات 5.41 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\frac{-\frac{1}{2}(-2x+2u)}{(1-2xu+u^2)\sqrt{1-2xu+u^2}}=\sum nP_nu^{n-1}\\
&\implies \frac{x-u}{1-2xu+u^2}\sum P_nu^n=\sum nP_nu^{n-1}\\
&\implies x\sum P_nu^n-\sum P_nu^{n+1}=\sum nP_nu^{n-1}-2x\sum nP_nu^n+\sum nP_nu^{n+1}
\end{aligned}$$

اب دونوں جانب u^n کے عددی سر برابر لیتے ہیں۔

$$xP_n-P_{n-1}=(n+1)P_{n+1}-2xnP_n+(n-1)P_{n-1}$$

اس کو ترتیب دے کر درکار نتیجہ $(n+1)P_{n+1}=(2n+1)xP_n-nP_{n-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.30: **شریک لیژانڈر تفاعل**
درج ذیل مساوات

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \tag{5.44}$$

میں $y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u(x)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مساوات حاصل کریں۔

$$(1-x^2)u''-2(m+1)xu'+[n(n+1)-m(m+1)]u=0 \tag{5.45}$$

صفحہ 106 پر دیے مساوات 2.36 کی مدد سے لیژانڈر مساوات 5.16 کا m رتبی تفرق $\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$ لیتے ہوئے ثابت کریں کہ درج بالا مساوات کا حل

$$u=\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$$

---

[34] Bonnet's recursion
[35] اوسیاں بونٹ [1849-1917] فرانسیسی ریاضی دان۔

ہے جس کے شریک $y(x)$ کو $P_n^m(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کو **شریک لیژانڈر تفاعل**[36] کہتے ہیں۔

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m} \tag{5.46}$$

شریک لیژانڈر تفاعل کوانٹم میکانیات[37] میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

جواب: مساوات 5.44 میں $y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u$ پر کرنے سے مساوات 5.45 حاصل ہوتی ہے۔ باقی حصے کو اب حل کرتے ہیں۔ لیژانڈر مساوات 5.16 کا m رتبی تفرق صفحہ 106 پر دی مساوات 2.36 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جہاں $D^{m-1}[y'] = D^m[y]$ ، $D^m[y''] = D^{m+2}[y]$ ، ... ہو گا۔ یوں مساوات کے بائیں ہاتھ کو

$$D^m[(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y] = -D^m[(x^2-1)y''] - 2D^m[xy'] + n(n+1)D^m[y]$$

لکھتے ہیں جس میں

$$\begin{aligned}
D^m[(x^2-1)y''] &= (x^2-1)D^m[y''] + 2mxD^{m-1}[y''] + m(m-1)D^{m-2}[y''] \\
&= (x^2-1)D^{m+2}[y] + 2mxD^{m+1}[y] + m(m-1)D^m[y] \\
D^m[xy'] &= xD^m[y'] + mD^{m-1}[y'] = xD^{m+1}[y] + mD^m[y] \\
D^m[y] &= D^m[y]
\end{aligned}$$

پر کرتے ہوئے

$$(1-x^2)D^{m+2}[y] - 2(m+1)xD^{m+1}[y] + [n(n+1) - m(m+1)]D^m[y]$$

ملتا ہے جس میں $D^m[y] = y^m = u$ ، $D^{m+1} = y^{m+1} = u'$ اور $D^{m+2} = y^{m+2} = u''$ لیتے ہوئے

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ابتدائی مساوات کا دایاں ہاتھ صفر تھا۔ اس مساوات کا حل $u = y^m$ ہے جہاں y از خود لیژانڈر مساوات کا حل ہے یعنی $u = \frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}$ ہے۔

سوال 5.31: گزشتہ سوال میں شریک لیژانڈر تفاعل کا حل P_n^m حاصل کیا گیا۔ مساوات 5.31 کی مدد سے اس کو لکھیں۔

جواب: $P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}[(x^2-1)^n]$

---

[36] associated Legendre's functions
[37] quantum mechanics

5.3 مبسوط طاقتی تسلسل۔ترکیب فروبنیوس

کئی نہایت اہم دو رتبی سادہ تفرقی مساوات، مثلاً **بیسل تفاعل** (جس پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا)، کے عددی سر تحلیلی [حصہ 5.1 میں تعریف دی گئی ہے] نہیں ہیں۔اس کے باوجود انہیں تسلسل (طاقتی تسلسل ضرب لوگارتھم یا طاقتی تسلسل ضرب x کی کسری طاقت، ...) سے حل کرنا ممکن ہے۔ اس ترکیب کو **ترکیب فروبنیوس**[38] کہتے ہیں[39]۔ درج ذیل مسئلہ طاقتی ترکیب کو وسعت دیتے ہوئے ترکیب فروبنیوس کا استعمال ممکن بناتا ہے۔

مسئلہ 5.2: ترکیب فروبنیوس
$x=0$ پر تحلیلی $b(x)$ اور $c(x)$ کوئی بھی تفاعل ہو سکتے ہیں۔ایسی صورت میں سادہ تفرقی مساوات

$$y''+\frac{b(x)}{x}y'+\frac{c(x)}{x^2}y=0 \tag{5.47}$$

کا کم از کم ایک حل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots) \qquad (a_0\neq 0) \tag{5.48}$$

جہاں r حقیقی یا مخلوط عدد ہو سکتا ہے (اور r یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ $a_0\neq 0$ ہو)۔

مساوات 5.47 کا دوسرا حل بھی پایا جاتا ہے (اور یہ دو حل آپس میں خطی طور غیر تابع ہوں گے) جو مساوات 5.48 کی طرز کا ہو سکتا ہے (جس میں r مختلف ہو گا اور تسلسل کے عددی سر بھی مختلف ہوں گے) اور یا اس میں لوگارتھمی جزو پایا جائے گا۔

اس مسئلے میں x کی جگہ $x-x_0$ بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں x_0 کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔مسئلے میں $a\neq 0$ کا مطلب ہے کہ بذریعہ تجزی قوسین سے x کی بلند تر ممکنہ طاقت بذریعہ تجزی باہر نکالی جاتی ہے۔

بیسل تفاعل کو مساوات 5.47 کی طرز پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x^2-v^2}{x^2}y=0 \qquad (\text{مقدار معلوم ہے } v)$$

[38] Frobenius method
[39] جرمن ریاضی دان فرڈینانڈ گیوگ فروبنیوس [1849-1917]

جس میں $b(x)=1$ اور $c(x)=x^2-v^2$ دونوں $x=0$ پر تحلیلی ہیں لہٰذا اس پر درج بالا مسئلہ لاگو ہو گا۔ سادہ طاقتی تسلسل سے بیسل تفاعل کا حل ممکن نہیں ہے۔

مساوات 5.48 میں طاقتی تسلسل x کی ایسی طاقت سے ضرب دی گئی ہے جو منفی یا کسری ہو سکتا ہے۔ یاد رہے کہ غیر منفی طاقت کے x پر مبنی تسلسل کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔

مسئلہ فروبنیوس کے ثبوت کے لئے اعلیٰ مخلوط تجزیہ[40] درکار ہے لہٰذا اسے پیش نہیں کیا جائے گا۔

اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے p اور q تحلیلی ہوں تب x_0 **غیر نادر نقطہ**[41] کہلائے گا۔

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

اگر $x=x_0$ درج بالا مساوات کا نادر نقطہ ہو اور $(x-x_0)p$ اور $(x-x_0)^2q$ نقطہ $x=x_0$ پر تحلیلی ہوں تب x_0 **منظم نادر نقطہ**[42] کہلاتا ہے ورنہ اس کو **غیر منظم نادر نقطہ**[43] کہتے ہیں۔

اسی طرح اگر x_0 پر درج ذیل مساوات کے h ، p اور q تحلیلی ہوں اور $h\neq 0$ ہو (تا کہ ہم تفرقی مساوات کو h سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل کر سکیں) تب x_0 **منظم نقطہ**[44] کہلائے گا ورنہ اسے **نادر نقطہ**[45] کہیں گے۔

$$\tilde{h}(x)y''+\tilde{p}(x)y'+\tilde{q}(x)y=0$$

مثال 5.13: مساوات $(x+1)y''+2xy'-3y=0$ کو $x+1$ سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جس سے $p=\frac{2x}{x+1}$ اور $q=-\frac{3}{x+1}$ ملتے ہیں جو $x=-1$ پر غیر تحلیلی ہیں۔ یوں $x=-1$ مساوات کا نادر نقطہ ہے۔ اب $(x+1)p=2x$ اور $(x+1)^2q=-3(x+1)$ دونوں $x=-1$ پر تحلیلی ہیں لہٰذا $x=-1$ منظم نادر نقطہ ہے۔ □

---

[40] advanced complex analysis
[41] regular point
[42] regular singular point
[43] irregular singular point
[44] regular point
[45] singular point

اشاری مساوات حل ظاہر کرتی ہے

آئیں مساوات 5.47 کو ترکیب فروبنیوس سے حل کریں۔ مساوات 5.47 کو x^2 سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$x^2y'' + xb(x)y' + c(x)y = 0 \tag{5.49}$$

چونکہ $b(x)$ اور $c(x)$ تحلیلی ہیں لہٰذا انہیں طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, \quad c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$$

اور اگر b یا(اور) c کثیر رکنی ہوں تب b یا(اور) c کو جوں کا توں رہنے دیا جاتا ہے۔ مساوات 5.48 کا جزو در جزو تفرق لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} y &= a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \cdots \\ y' &= ra_0x^{r-1} + (r+1)a_1x^r + (r+2)a_2x^{r+1} + \cdots \\ y'' &= r(r-1)a_0x^{r-2} + (r+1)(r)a_1x^{r-1} + (r+2)(r+1)a_2x^r + \cdots \end{aligned} \tag{5.50}$$

مساوات 5.4 اور مساوات 5.6 کی مساوات 5.50 سے موازنہ کریں۔طاقتی تسلسل $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ کے تفرق $y' = \sum_{m=1}^{\infty} mc_m x^{m-1}$ کا پہلا رکن $m = 1$ اور اس کے دو رتبی تفرق کا پہلا رکن $m = 2$ ہے جبکہ موجودہ دونوں تفرقی تسلسل کا پہلا رکن $m = 0$ ہے۔

درج بالا تفرقات کو نہایت خوش اسلوبی کے ساتھ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r-1} = x^{r-1}[ra_0 + (r+1)a_1x + \cdots] \\ y'' &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-2} = x^{r-2}[r(r-1)a_0 + (r+1)ra_1x + \cdots] \end{aligned} \tag{5.51}$$

ان تمام کو مساوات 5.49 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x^r[r(r-1)a_0 + \cdots] + (b_0 + b_1x + \cdots)x^r(ra_0 + \cdots) \\ + (c_0 + c_1x + \cdots)x^r(a_0 + a_1x + \cdots) = 0 \end{aligned} \tag{5.52}$$

اب ہم x^r ، x^{r+1} ، x^{r+2} ، . . . کے عددی مجموعوں کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں۔ایسا کرنے سے الجبرائی مساوات کا نظام حاصل ہوتا ہے۔سب سے کم طاقت x^r ہے جس کا عددی سر درج ذیل ہے۔

$$[r(r-1)+b_0r+c_0]a_0=0$$

چونکہ مسئلہ فروبنیوس کے تحت $a_0 \neq 0$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$r(r-1)+b_0r+c_0=0 \qquad \text{(اشاری مساوات)} \tag{5.53}$$

اس دو درجی الجبرائی مساوات کو سادہ تفرقی مساوات 5.47 کی **اشاری مساوات**[46] کہتے ہیں۔

ترکیب فروبنیوس سے تفرقی مساوات کے حل کی اساس حاصل ہوتی ہے جن میں ایک حل مساوات 5.48 کی طرز کا ہو گا جس میں r کی قیمت درج بالا اشاری مساوات کا جذر ہو گا۔دوسرے حل کی تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں جنہیں اشاری مساوات سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

- پہلی صورت:اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق (مثبت اور حقیقی) عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، . . .) کے برابر نہیں ہے۔
- دوسری صورت:اشاری مساوات کے دو یکساں جذر پائے جاتے ہیں۔
- تیسری صورت:اشاری مساوات کے دو عدد ایسے منفرد جذر پائے جاتے ہیں جن میں فرق (مثبت اور حقیقی) عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ، . . .) کے برابر ہے۔

پہلی صورت میں جوڑی دار مخلوط جذر $r_1=a+ib$ اور $r_2=\bar{r_1}=a-ib$ شامل ہیں چونکہ ان کا فرق $r_1-r_2=i2b$ خیالی عدد ہے جو حقیقی عدد صحیح نہیں ہے۔ مسئلہ 5.3 (جسے ضمیمے میں ثابت کیا گیا ہے) اساس کی صورت دیتی ہے جہاں ارتکاز کا عمومی ثبوت نہیں دیا گیا ہے۔ہاں انفرادی تسلسل کی مرکوزیت عام طریقے سے ثابت کی جا سکتی ہے۔ دوسری صورت میں لوگارتھمی جزو کا ہونا لازم ہے جبکہ تیسری صورت میں ہو سکتا ہے کہ لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہو یا نہ پایا جاتا ہو۔

مسئلہ 5.3: ترکیب فروبنیوس۔ حل کی اساس۔ تین صورتیں۔
فرض کریں کہ سادہ تفرقی مساوات 5.47 مسئلہ 5.2 پر پورا اترتی ہے اور اشاری مساوات 5.53 کے جذر r_1 اور r_2 ہیں تب درج ذیل تین صورتیں پائی جائیں گی۔

[46] indicial equation

پہلی صورت: اشاری مساوات کے دو منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ،...) کے برابر نہیں ہے۔ایسی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \tag{5.54}$$

اور

$$y_2(x) = x^{r_2}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots) \tag{5.55}$$

ہو گی جہاں مساوات 5.52 میں بالترتیب $r = r_1$ اور $r = r_2$ پر کرتے ہوئے عددی سر حاصل کیے جائیں گے۔

دوسری صورت: یکساں جذر $r_1 = r_2 = r$ کی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \qquad [r = \frac{1}{2}(1 - b_0)] \tag{5.56}$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^r(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots) \qquad (x > 0) \tag{5.57}$$

ہو گی۔

تیسری صورت: اشاری مساوات کے دو منفرد جذروں میں فرق عدد صحیح (1 ، 2 ، 3 ،...) کے برابر ہے۔ ایسی صورت میں حل کی اساس

$$y_1(x) = x^{r_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \tag{5.58}$$

(پہلی صورت کی طرح) اور

$$y_2(x) = K y_1(x)\ln x = x^{r_2}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots) \qquad [r = \frac{1}{2}(1 - b_0)] \tag{5.59}$$

ہے جہاں جذر یوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1 - r_2 > 0$ ہو (یعنی زیادہ قیمت کے جذر کو r_1 کہتے ہیں) اور K کی قیمت صفر بھی ہو سکتی ہے۔اگر $K = 0$ ہو تب دوسرا حل بھی پہلے حل کی طرح لکھنا ممکن ہو گا (مثال 5.17 دیکھیں)۔ بعض اوقات r_2 استعمال کرتے ہوئے حل y_2^* کے دو حصے پائے جائیں گے۔اس کا ایک حصہ در حقیقت میں r_1 سے حاصل حل y_1 ہی ہو گا جبکہ دوسرا حصہ نیا حل ہو گا یعنی $y_2^* = y_2 + k y_1$ لہٰذا اساس لکھتے ہوئے y_1 اور y_2 لیا جائے گا (سوال 5.36 کا جواب دیکھیں)۔

5.3.1 عملی استعمال

اشاری مساوات 5.53 کے جذر دریافت کرنے کے بعد ترکیب فروبنیوس بالکل طاقتی ترکیب کی طرح ہے۔ مساوات 5.54 تا مساوات 5.59 محض حل کی صورت دیتے ہیں جبکہ دوسرا حل عموماً تخفیف رتبہ (حصہ 2.1) کی ترکیب سے زیادہ آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے۔

اشاری مساوات کے جذر حاصل کرنے کے بعد (زیادہ قیمت کی جذر) r_1 سے پہلا حل $y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ حاصل کریں۔

$r_1 - r_2$ عدد صحیح (یعنی $1, 2, 3, \cdots$) کے برابر نہ ہونے کی صورت میں دوسرا حل (کم قیمت کی جذر) r_2 کو استعمال کرتے ہوئے $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل ہو گا۔

$r_1 = r_2$ کی صورت میں دوسرے حل میں لوگارتھمی جزو پایا جائے گا۔ایسی صورت میں دوسرا حل $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل نہیں ہو گا لہٰذا دوسرا حل تخفیف رتبہ کی مدد سے حاصل کیا جائے گا۔

$r_1 - r_2$ عدد صحیح (یعنی $1, 2, 3, \cdots$) کے برابر ہونے کی صورت میں کبھی کبھار $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ سے حاصل ہو گا ورنہ اس میں لوگارتھمی جزو پایا جائے گا اور اس حل کو بذریعہ تخفیف رتبہ حاصل کیا جائے گا۔آپ پہلے $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ ہی استعمال کرتے ہوئے حل حاصل کرنے کی کوشش کریں۔

$y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ حاصل کرتے ہوئے تین ممکنہ صورتیں پیدا ہوتی ہیں (اس حصے کے سوالات کے جوابات دیکھیں)۔پہلی صورت میں ایسا تسلسل y_2 حاصل ہوتی ہے جس میں صرف ایک عدد اختیاری مستقل پایا جاتا ہو لہٰذا عمومی حل y_1 اور y_2 کا مجموعہ ہو گا۔دوسری صورت میں تسلسل کو $ay_1 + by_2^*$ لکھنا ممکن ہو گا جہاں a اور b اختیاری مستقل ہوں گے لہٰذا اس حل میں y_1 بھی شامل ہے۔اس طرح عمومی حل $ay_1 + by_2^*$ ہو گا۔تیسری صورت میں $y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ کے عددی سر حاصل کرنا ممکن نہیں ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ دوسرے حل میں لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے لہٰذا تخفیف رتبہ سے حل حاصل کیا جائے گا۔

مثال 5.14: یولر کوشی مساوات۔پہلی، دوسری اور تیسری صورتیں۔ بلا لوگارتھمی جزو
مساوات یولر کوشی (حصہ 2.5)

$$x^2y'' + b_0xy' + c_0y = 0 \qquad (b_0 \text{ اور } c_0 \text{ مستقل ہیں})$$

میں $y = x^r$ پر کرنے سے درج ذیل ذیلی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$r(r-1) + b_0 r + c_0 = 0$$

جو اشاری مساوات ہے [اور $y = x^r$ مساوات 5.48 کی ایک صورت ہے]۔ دو منفرد جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^{r_1}$ ، $y_2 = x^{r_2}$ حاصل ہوتی ہے جبکہ دوہری جذر کی صورت میں اساس $y_1 = x^r$ ، $y_2 = x^r \ln x$ حاصل ہوتی ہے۔مساوات یولر کوشی کی صورت میں تیسری صورت نہیں پائی جاتی۔ □

مثال 5.15: دوسری صورت۔ (دوہرا جذر)
درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0 \tag{5.60}$$

(یہ بیش ہندسی[47] مساوات کی ایک مخصوص صورت ہے۔)

حل دیے گئے مساوات کو $x(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہوئے تفرقی مساوات کی معیاری صورت حاصل ہوتی ہے جو مسئلہ 5.2 کے شرائط پر پورا اترتی ہے۔یوں مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.51 کو مساوات 5.60 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r} &- \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1} \\ + 3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r} &- \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0\end{aligned} \tag{5.61}$$

x کی کمتر طاقت x^{r-1} ، جو دوسرے اور چوتھے مجموعے میں پایا جاتا ہے، کے عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$[-r(r-1) - r]a_0 = 0 \quad \implies \quad r^2 = 0$$

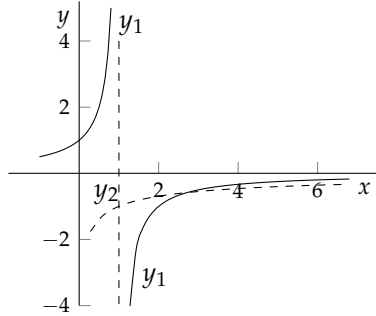
اشاری مساوات کا دوہرا جذر $r = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

پہلا حل: مساوات 5.61 میں $r = 0$ پر کرتے ہوئے x^s کی عددی سر کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$s(s-1)a_s - (s+1)sa_{s+1} + 3sa_s - (s+1)a_{s+1} + a_s = 0$$

[47] hypergeometric equation

شکل 5.6: مثال 5.15 کے حل۔

$a_{s+1}=a_s$ ملتا ہے۔یوں $a_0=a_1=a_2=\cdots$ ہو گا لہٰذا $a_0=1$ چنتے ہوئے درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$y_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}x^m=\frac{1}{1-x}\qquad (|x|<1)$$

دوسرا حل: دوسرا حل بذریعہ تخفیف رتبہ (حصہ 2.1) حاصل کرتے ہیں۔یوں $y_2=uy_1$ اور اس کے تفرقات کو مساوات میں پر کرتے ہوئے (صفحہ 87 پر) مساوات 2.15 ملتا ہے جس کو یہاں استعمال کرتے ہیں۔یہاں $p=\frac{3x-1}{x(x-1)}$ ہے لہٰذا

$$\int p\,\mathrm{d}x=\int\frac{3x-1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=2\ln(x-1)+\ln x$$

ہو گا اور یوں مساوات 2.15 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$u'=v=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p\,\mathrm{d}x}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2x}=\frac{1}{x},\quad u=\ln x,\quad y_2=uy_1=\frac{\ln x}{1-x}$$

y_1 اور y_2 جنہیں شکل میں دکھایا گیا ہے وقفہ $1<x<0$ اور $\infty<x<1$ پر خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا اس وقفے پر یہ حل کی اساس ہیں۔ □

مثال 5.16: لوگارتھمی جزو والا دوسرا حل

درج ذیل سادہ تفرقی مساوات حل کریں۔

$$(x^2-x)y''-xy'+y=0 \tag{5.62}$$

حل: مساوات 5.48 اور اس کے تفرقات مساوات 5.51 کو مساوات 5.62 میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2-x)\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-2}-x\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}=0$$

x^2 اور x کو مجموعوں کے اندر لے جاتے ہوئے اور x کی یکساں طاقتوں کو اکٹھے کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r-1)^2 a_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1}=0 \tag{5.63}$$

x کی کم تر طاقت x^{r-1} ، جو $m=0$ پر کرنے سے دوسرے مجموعے سے ملتا ہے، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرنے سے

$$r(r-1)=1$$

یعنی $r_1=1$ اور $r_2=0$ ملتے ہیں (جذر یوں لکھے جاتے ہیں کہ $r_1-r_2>0$ ہو۔) جن میں فرق عدد صحیح کے برابر ہے لہٰذا یہ تیسری صورت ہے۔

پہلا حل: مساوات 5.63 کو یکساں طاقت کی صورت میں لکھنے کی خاطر پہلے مجموعے میں $m=s$ اور دوسرے مجموعے میں $s=m-1$ یعنی $m=s+1$ پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+r-1)^2 a_s x^{s+r}-\sum_{s=-1}^{\infty}(s+r+1)(s+r)a_{s+1}x^{s+r}=0 \tag{5.64}$$

x^{s+r} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے

$$a_{s+1}=\frac{(s+r-1)^2}{(s+r+1)(s+r)}a_s$$

ملتا ہے جس میں $r=1$ پر کرتے ہوئے

$$a_{s+1}=\frac{s^2}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s=0,1,\cdots) \tag{5.65}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے $a_1=0$ ، $a_2=0$ ، $\cdots$ حاصل ہوتے ہیں۔ یوں $a_0=1$ چنتے ہوئے پہلا حل $y_1=a_0x^{r_1}=x$ ملتا ہے۔

دوسرا حل: ترکیب تخفیف رتبہ (حصہ 2.1) استعمال کرتے ہوئے $y_2 = uy_1 = xu$ لیتے ہیں۔اس طرح $y_2' = u + u'x$ اور $y_2'' = xu'' + 2u'$ ہوں گے۔انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$(x^2 - x)(xu'' + 2u') - x(xu' + u) + xu = 0$$

اس میں xu کٹ جاتا ہے۔بقایا مساوات کو x سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$(x^2 - x)u'' + (x - 2)u' = 0$$

اس کو جزوی کسری پھیلاو کی مدد سے لکھتے ہوئے تکمل لیتے ہیں۔(تکمل کا مستقل صفر چنا گیا ہے۔)

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{x-2}{x^2-x} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}, \quad \ln u' = \ln\left|\frac{x-1}{x^2}\right|$$

اس کو قوت نمائی طور پر لکھتے ہوئے تکمل لیتے ہیں۔(تکمل کا مستقل صفر چنتے ہیں۔)

$$u' = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad u = \ln x + \frac{1}{x}, \quad y_2 = uy_1 = x \ln x + 1$$

y_1 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں اور y_2 میں لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے۔یوں مثبت x پر یہ حل کی اساس ہیں۔ □

ترکیب فروبنیوس سے بیشتر ہندسی مساوات حل ہوتا ہے جس کے حل میں کئی اہم تفاعل شامل ہیں۔بعض اوقات دی گئی مساوات کو مساوات 5.47 کی صورت میں لانے میں دشواری پیش آتی ہے۔یوں

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$$

کو $x(x-1)$ سے تقسیم کرتے ہوئے $y'' + \frac{3x-1}{x(x-1)}y' + \frac{1}{x(x-1)}y = 0$ ملتا ہے جس کے آخری جزو کو $\frac{x}{x}$ سے ضرب دیتے ہوئے $y'' + \frac{3x-1}{x(x-1)}y' + \frac{x}{x^2(x-1)}y = 0$ ملتا ہے جو درکار صورت ہے جس میں $p = \frac{3x-1}{x-1}$ اور $q = \frac{x}{x-1}$ ہیں۔

ترکیب فروبنیوس کو استعمال کرتے ہوئے عموماً اتنا کافی ہوتا ہے کہ مساوات کو $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ شکل میں لایا جائے۔ درج ذیل سوالات حل کرتے ہوئے ایسا ہی کریں۔

مسئلہ 5.2 میں x کی جگہ $x - x_0$ بھی ممکن ہے جہاں x_0 مساوات کا نادر نقطہ ہے۔یوں عمومی تفرقی مساوات

$$(x - x_0)^2\alpha(x)y'' + (x - x_0)\beta(x)y' + \gamma(x)y = 0 \tag{5.66}$$

جس میں $\alpha(x)$ ، $\beta(x)$ اور $\gamma(x)$ تحلیلی ہوں (لہٰذا انہیں درج لکھا جا سکتا ہے)

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots, \quad \beta = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots, \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots$$

کو ترکیب فروبنیوس سے حل کرتے ہوئے اشاری مساوات

$$\alpha_0 r^2 + (\beta_0 - \alpha_0) r + \gamma_0 = 0 \tag{5.67}$$

حاصل ہو گی۔مساوات 5.66 کو $\alpha(x)$ سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.47 طرز کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.66 میں $x_0 = 0$ پر کرنے سے مساوات 5.47 حاصل ہوتی ہے۔مساوات 5.66 کا حل

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m \tag{5.68}$$

لکھ کر حاصل کیا جائے گا۔

مثال 5.17: تیسری صورت میں بعض اوقات r_2 سے حل نہیں لکھا جا سکتا ہے۔
اشاری مساوات کے جذر میں فرق عدد صحیح ہونے کی صورت میں کبھی کبھار دوسرا حل $y_2 = x^{r_2} \sum c_m x^m$ نہیں لکھا جا سکتا ہے۔اس مثال میں اس بات کی وضاحت ہو گی۔آئیں درج ذیل مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$2xy'' - 4y' - y = 0$$

اس مساوات میں $y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$ اور اس کے تفرقات

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1}, \quad y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-2}$$

پر کرتے ہوئے

$$2x \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-2} - 4 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

یعنی

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2(m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} 4(m+r) c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

ملتا ہے۔تینوں مجموعوں سے x^{r-1} باہر نکالتے ہوئے کاٹتے ہیں۔

$$x^{r-1}\sum_{m=0}^{\infty}2(m+r)(m+r-1)c_m x^m-\sum_{m=0}^{\infty}4(m+r)c_m x^m-\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+1}=0$$

پہلے اور دوسرے مجموعے میں $s=m$ اور تیسرے مجموعے میں $s=m+1$ پر کرتے ہیں تا کہ x کے تمام طاقت یکساں لکھیں جائیں۔

$$\sum_{s=0}^{\infty}2(s+r)(s+r-1)c_s x^s-\sum_{s=0}^{\infty}4(s+r)c_s x^s-\sum_{s=1}^{\infty}c_{s-1}x^s=0$$

آپ نے دیکھا کہ تیسرے مجموعے کا پہلا رکن اب $s=1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔پہلے دو مجموعوں کا پہلا پہلا رکن مجموعے کے باہر لکھتے ہیں تا کہ تمام مجموعوں کا پہلا رکن ایک ہی جگہ سے شروع ہو۔

$$\begin{aligned}2(0+r)(0+r-1)c_0x^0+\sum_{s=1}^{\infty}2(s+r)(s+r-1)c_s x^s\\-4(0+r)c_0x^0-\sum_{s=1}^{\infty}4(s+r)c_s x^s-\sum_{s=1}^{\infty}c_{s-1}x^s=0\end{aligned}$$

یوں تمام مجموعوں کا پہلا رکن $s=1$ ظاہر کرے گا۔تینوں مجموعوں کو اکٹھا لکھتے ہیں

$$\underbrace{[2r(r-1)-4r]}_{2r(r-3)}c_0+\sum_{s=1}^{\infty}[2(s+r)(s+r-1)c_s-4(s+r)c_s-c_{s-1}]x^s=0 \tag{5.69}$$

جہاں پہلا رکن اشاری مساوات $2r(r-3)=0$ دیتا ہے جس کے جذر $r_1=3$ اور $r_2=0$ ہیں۔(یاد رہے کہ بڑی مقدار کے جذر کو r_1 لکھا جاتا ہے اور اسی کی مدد سے پہلا حل حاصل کیا جاتا ہے۔)

مساوات 5.69 میں $r=r_1=3$ پر کرتے ہوئے

$$[2\cdot3(3-1)-4\cdot3]c_0+\sum_{s=1}^{\infty}[2(s+3)(s+3-1)c_s-4(s+3)c_s-c_{s-1}]x^s=0$$

یعنی

$$\sum_{s=1}^{\infty}[2s(s+3)c_s-c_{s-1}]x^s=0$$

ملتا ہے جس سے درج ذیل کلیہ توالی لکھی جا سکتا ہے۔

$$c_s = \frac{1}{2s(s+3)}c_{s-1} \qquad (s \geq 1)$$

اس کو استعمال کرتے ہوئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{2\cdot 1(1+3)}c_0 = \frac{1}{2\cdot 1(4)}c_0 \\
c_2 &= \frac{1}{2\cdot 2(2+3)}c_1 = \frac{1}{2\cdot 2(2+3)}\cdot\frac{1}{2\cdot 1(4)}c_0 = \frac{1}{2^2(2\cdot 1)(5\cdot 4)}c_0 \\
&= \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2^2(2\cdot 1)(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}c_0 = \frac{6}{2^2(2\cdot 1)(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}c_0 \\
c_3 &= \frac{1}{2\cdot 3(3+3)}c_2 = \frac{1}{2\cdot 3(6)}\cdot\frac{6}{2^2(2\cdot 1)(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}c_0 \\
&= \frac{6}{2^3(3\cdot 2\cdot 1)(6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}c_0 \\
&\vdots \\
c_s &= \frac{6}{2^s s!(s+3)!}c_0
\end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ آخری کلیہ $s=0$ اور $s=1$ کے لئے بھی کار آمد ہے لہٰذا ہم عمومی کلیہ توالی

$$c_s = \frac{6}{2^s s!(s+3)!}c_0 \qquad (s = 0, 1, 2, \cdots)$$

اور پہلا حل

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{6}{2^m m!(m+3)!}c_0 x^m = c_0 x^3 \sum_{m=0}^{\infty}\frac{6}{2^m m!(m+3)!}x^m$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں $r = r_2 = 0$ کو استعمال کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل کرنے کی کوشش کریں۔ مساوات 5.69 میں $r = 0$ پر کرتے ہوئے

$$[2\cdot 0(0-1) - 4\cdot 0]c_0 + \sum_{s=1}^{\infty}[2(s+0)(s+0-1)c_s - 4(s+0)c_s - c_{s-1}]x^s = 0$$

ملتا ہے جس میں c_0 کا عددی سر صفر کے برابر ہے جبکہ x_s کے عددی سر سے درج ذیل کلیہ توالی لکھا جا سکتا ہے۔

$$c_s = \frac{1}{2s(s-3)} c_{s-1}$$

اس کلیہ توالی کو استعمال کرتے ہوئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{2 \cdot 1(1-3)} c_0 \\
c_2 &= \frac{1}{2 \cdot 2(2-3)} c_1 = \frac{1}{2 \cdot 2(2-3)} \frac{1}{2 \cdot 1(1-3)} c_0 \\
c_3 &= \frac{1}{2 \cdot 3 \underbrace{(3-3)}_{=0}} c_2 = \frac{1}{2 \cdot 3(3-3)} \frac{1}{2 \cdot 2(2-3)} \frac{1}{2 \cdot 1(1-3)} c_0 = \frac{c_0}{0}
\end{aligned}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $c_0 \neq 0$ کی صورت میں $c_3 = \infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ c_0 صفر نہیں ہو سکتا۔ایسا ہونے سے تمام عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں جو $y_2 = 0$ دیگا۔اشاری مساوات کے جذر میں فرق عدد صحیح ہونے کی صورت میں ہر بار ایک عددی سر $\frac{c_0}{0}$ حاصل ہو گا جس کی بنا چھوٹا جذر استعمال کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ □

سوالات

سوال 5.32 تا سوال 5.44 کی اساس کو ترکیب فروبنیوس سے حاصل کریں۔ حاصل تسلسل کو بطور تفاعل پہچاننے کی کوشش کریں۔

سوال 5.32: $x^2y'' + 4xy' + (x^2+2)y = 0$

جواب: $y_1 = x^{-1}(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \cdots)$ ، $y_2 = x^{-1}(x - \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{360} - + \cdots)$

سوال 5.33: $xy'' + 2y' + xy = 0$

جواب: $y_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \cdots = \frac{\sin x}{x}$ ، $y_2 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \cdots = \frac{\cos x}{x}$

سوال 5.34: $(x-1)^2y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$

جواب:اس طرز کی مساوات میں بہتر ہوتا ہے کہ $X = x - x_0 = x - 1$ اور $Y(X)$ استعمال کیا جائے جس

سے درج بالا مساوات $X^2Y'' - 2XY' + 2Y = 0$ لکھی جاتی ہے۔حل کرنے کے بعد واپس x کا استعمال کریں۔ $r_1 = 2$ ، $r_2 = 1$ ہیں۔ $r = r_1 = 2$ استعمال کرتے ہوئے تمام عددی سر صفر کے برابر حاصل ہوتے ہیں جبکہ $r = r_2 = 1$ استعمال کرتے ہوئے حل $y = (x-1)^1[c_0 + c_1(x-1)]$ ملتا ہے جس میں دو عدد اختیاری مستقل ہیں لہٰذا یہ عمومی حل ہے۔یوں اساس $y_1 = x - 1$ اور $y_2 = (x-1)^2$ ہے۔

سوال 5.35: $y'' + xy' + (1 - \frac{2}{x^2})y = 0$

جواب: $r_1 = 0$ $r_2 = -3$ ہیں جن میں عددی صحیح فرق پایا جاتا ہے جو تیسری صورت ہے۔یوں r_1 استعمال کرتے ہوئے $y_1 = c_2(x^2 - \frac{3}{10}x^4 + \frac{3}{56}x^6 - \frac{1}{144}x^8 + \cdots)$ حاصل ہوتا ہے جبکہ r_2 استعمال کرتے ہوئے $y_2 = c_2x^{-1}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.36: $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$

جواب: $r_1 = 0$ اور $r_2 = -2$ ہیں۔ r_1 کو استعمال کرتے ہوئے

$$y_1 = x^0(1 - \tfrac{1}{6}x^4 + \tfrac{1}{120}x^8 + \cdots) = \tfrac{\sin x^2}{x^2}$$

ملتا ہے جبکہ r_2 کو استعمال کرتے ہوئے

$$y_2^* = c_0(\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{24} + \cdots) + c_2(1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{120} - \cdots)$$

ملتا ہے جہاں آخری قوسین در حقیقت y_1 ہی ہے لہٰذا اساس لکھتے ہوئے اس حصے کو رد کیا جاتا ہے۔اس طرح اساس درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - \tfrac{1}{6}x^4 + \tfrac{1}{120}x^8 + \cdots = \tfrac{\sin x^2}{x^2} \\ y_2 &= \frac{1}{x^2} - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^6 + \cdots = \tfrac{\cos x^2}{x^2} \end{aligned}$$

سوال 5.37: $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$

جواب: $r_1 = r_2 = 3$ ہے جو دوسری صورت ہے۔یوں پہلا حل $y_1 = x^3$ ملتا ہے جبکہ دوسرا حل بذریعہ تخفیف رتبہ ($y_2 = x^3u$ پر کرتے ہوئے) $y_2 = x^3 \ln x$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.38: $xy'' + y' - xy = 0$

جواب: $r_1 = r_2 = 0$ ملتا ہے۔ $y_1 = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \cdots$ ، $y_2 = y_1 \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{8 \cdot 16} - \cdots$

سوال 5.39: $x^2y'' + xy' - 4y = 0$
جواب: $r_1 = 2$ ، $r_2 = -2$ میں فرق عدد صحیح ہے۔ r_1 کو استعمال کرتے ہوئے $y_1 = x^2$ ملتا ہے۔اگر آپ r_2 کو استعمال کرتے ہوئے y_1 کی طرز کا حل حاصل کرنا چاہیں تو آپ کو $y_2 = x^{-2}(c_0 + c_4x^4) = c_0x^{-2} + c_4x^2$ ملتا ہے جس میں x^2 درحقیقت y_1 ہے جسے رد کرتے ہوئے اساس میں $y_2 = \frac{1}{x^2}$ لکھا جائے گا۔

سوال 5.40: $x^2y'' + 6xy' + (6 - 4x^2)y = 0$
جواب: $r_1 = -2$ ، $r_2 = -3$ ہیں۔ r_1 سے $y_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{15}x^2 + \cdots = \frac{\sinh 2x}{2x^3}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ r_2 سے $y = c_0(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}x + \cdots) + c_1y_1$ ملتا ہے لہٰذا $y_2 = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}x + \cdots$ لکھا جائے گا یعنی $y_2 = \frac{\cosh 2x}{x^3}$ ہے۔

سوال 5.41: $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$
جواب: $r_1 = r_2 = 0$ ہے جو دوسری صورت ہے۔اساس $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x$ اور $y_2 = e^x \ln x$ ہیں۔

سوال 5.42: $xy'' + (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$
جواب: $r_1 = r_2 = 0$ جبکہ $y_1 = e^{-x}$ اور $y_2 = e^{-x} \ln x$ ہیں۔

سوال 5.43: $y'' + (x - 1)y = 0$
جواب: $r_1 =$ اور $1-$ $r_2 =$ ہیں۔ r_1 سے ایسا تسلسل ملتا ہے جس میں دو عدد اختیاری مستقل پائے جاتے ہیں لہٰذا اس تسلسل کو دو عدد تفاعل میں لکھتے ہوئے اساس $y_1 = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{30} + \cdots$ اور $y_2 = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} - \cdots$ حاصل ہوتی ہے۔

سوال 5.44: $xy'' + (2 - 2x)y' + (x - 2)y = 0$
جواب: $r_1 = 0$ اور $r_2 = -1$ ہیں۔ r_1 استعمال کرتے ہوئے $y_1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots = e^x$ ملتا ہے۔دوسرا حل $y_2 = uy_1$ لکھ کر تخفیف رتبہ کی استعمال سے $y_2 = \frac{e^x}{x}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 5.45: گاوسی بیش ہندسی مساوات
درج ذیل تفرقی مساوات

$$x(1 - x)y'' + [c - (a + b + 1)x]y' - aby = 0 \tag{5.70}$$

جہاں a ، b اور c مستقل ہیں گاوس بیش ہندسی مساوات[48] کہلاتی ہے۔ثابت کریں کہ اس کی اشاری مساوات کے جذر $r_1 = 0$ اور $r_2 = 1 - c$ ہیں۔ثابت کریں کہ $r = r_1 = 0$ کے لئے ترکیب فروبنیوس کے استعمال سے درج ذیل حل ملتا ہے جہاں $c \neq 0, -1, -2, \cdots$ ہے۔

$$y_1(x) = 1 + \frac{ab}{1!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots \tag{5.71}$$

یہ تسلسل بیش ہندسی تسلسل[49] کہلاتی ہے جس کا مجموعہ عموماً $F(a, b, c; x)$ لکھا اور بیش ہندسی تفاعل[50] پکارا جاتا ہے۔

سوال 5.46: ثابت کریں کہ $|x| < 1$ کے لئے تسلسل 5.71 مرتکز ہے۔

جواب: $1 = \left|\frac{(a+m)(b+m)}{(m+1)!(c+m)} \frac{m!(c+m-1)}{(1+m-1)(b+m-1)}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| \lim_{m\to\infty}$ ہے لٰہذا $R < 1$ ہو گا۔

سوال 5.47: بیش ہندسی تفرقی مساوات کا حل مساوات 5.71 مستقل a اور b کی کن قیمتوں پر کثیر رکنی کی صورت اختیار کرے گا۔

جواب: $a = 0, -1, -2, -\cdots$ اور $b = 0, -1, -2, -\cdots$

سوال 5.48: $a = b = c = 1$ کی صورت میں تسلسل 5.71 سے ہندسی تسلسل[51] حاصل کریں۔

جواب: $F(1, 1, 1; x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

سوال 5.49: ثابت کریں کہ $F(1, 1, 1; x) = F(1, b, b; x) = F(a, 1, a; x)$ یعنی ہندسی تسلسل ہے۔اسی سے تفاعل $F(a, b, c; x)$ کا نام بیش ہندسی تفاعل نکلا ہے۔

[48] Gauss' hypergeometric equation
[49] hypergeometric series
[50] hypergeomitric function
[51] geometric series

سوال 5.50: ثابت کریں کہ سوال 5.45 میں $r_2 = 1 - c$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.70 کا دوسرا حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے جہاں $c \neq 2, 3, 4, 7 \cdots$ ہے۔

$$y_2(x) = x^{1-c}\left(1 + \frac{(a-c+1)(b-c+1)}{1!(-c+2)}x + \frac{(a-c+1)(a-c+2)(b-c+1)(b-c+2)}{2!(-c+2)(-c+3)}x^2 + \cdots\right) \tag{5.72}$$

سوال 5.51: ثابت کریں کہ مساوات 5.72 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y_2(x) = x^{1-c}F(a-c+a, b-c+1, 2-c; x) \tag{5.73}$$

سوال 5.52: ثابت کریں کہ $c \neq 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3 \mp \cdots$ کی صورت میں مساوات 5.70 کے حل کی اساس مساوات 5.71 اور مساوات 5.72 ہیں۔

سوال 5.53: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= F(-n, b, b; -x)\\
(1-x^n) &= 1 - nxF(1-n, 1, 2; x)\\
\tan^{-1} x &= xF(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}; -x^2)\\
\sin^{-1} x &= xF(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; x^2)\\
\ln(1+x) &= xF(1, 1, 2; -x)\\
\ln\frac{1+x}{1-x} &= 2xF(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}; x^2)
\end{aligned}$$

سوال 5.54: درج ذیل مساوات میں A ، B ، C ، D اور K مستقل ہیں، $\dot{y}$ سے مراد $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ ہے اور $t^2 + At + B$ کے منفرد جذر t_1 اور t_2 ہیں۔

$$(t^2 + At + B)\ddot{y} + (Ct + D)\dot{y} + Ky = 0 \tag{5.74}$$

اس مساوات میں نیا متغیر $x = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ پر کرتے ہوئے بیش ہندسی مساوات حاصل کریں جس میں

$$Ct_1 + D = -c(t_2 - t_1), \quad C = a + b + 1, \quad K = ab$$

ہوں گے۔

جواب: چونکہ t^2+At+B کے منفرد ($t_2 \neq t_1$) جذر t_1 اور t_2 ہیں لہٰذا $t^2+At+B=(t-t_1)(t-t_2)$ لکھا جا سکتا ہے۔اب نیا متغیرہ $x=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ لیتے ہوئے $t=(t_2-t_1)x+t_1$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$t-t_1=(t_2-t_1)x, \quad t-t_2=(t_2-t_1)(x-1),$$
$$(t-t_1)(t-t_2)=(t_2-t_1)^2x(x-1), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t_2-t_1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{(t_2-t_1)^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

ہوں گے جنہیں دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$x(1-x)y''-\left(\frac{Ct_1+D}{t_2-t_1}+Cx\right)y'-Ky=0 \tag{5.75}$$

ملتا ہے۔

سوال 5.55 تا سوال 5.57 کے عمومی حل بیش ہندسی تفاعل کی صورت میں دریافت کریں۔

سوال 5.55: $2x(1-x)y''-(1+5x)y'-y=0$
جواب: $y=c_1F(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2};x)+c_2x^{\frac{3}{2}}F(\frac{5}{2},2,\frac{5}{2};x)$

سوال 5.56: $4(t^2-3t+2)\ddot{y}-2\dot{y}+y=0$
جواب: $y=c_1F(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2};t-1)+c_2(t-1)^{\frac{1}{2}}$

سوال 5.57: $2(t^2-5t+6)\ddot{y}+(2t-3)\dot{y}-8y=0$
جواب: $y=c_1F(2,-2,-\frac{1}{2};t-2)+c_2(t-2)^{\frac{3}{2}}F(\frac{7}{2},-\frac{1}{2},\frac{5}{2};t-2)$

5.4 مساوات بیسل اور بیسل تفاعل

اہم ترین سادہ تفرقی مساوات میں سے ایک **بیسل مساوات**[52]

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{5.76}$$

ہے جہاں ν[53] حقیقی مستقل ہے جس کی قیمت صفر یا مثبت ہو گی۔یہ مساوات عموماً نلکی تشاکلی مسائل میں سامنے آتی ہے۔بیسل مساوات کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت $y'' + \frac{1}{x}y' + (\frac{x^2-\nu^2}{x^2})y = 0$ حاصل ہوتی ہے جو مسئلہ 5.2 پر پورا اترتی ہے۔یوں بیسل مساوات کے حل کو ترکیب فروبنیوس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} \qquad (a_0 \neq 0) \tag{5.77}$$

مساوات 5.77 اور اس کے یک رتبی اور دو رتبی تفرقات کو مساوات 5.76 میں پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

x^{s+r} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر لکھتے ہوئے $c_0, c_1, \cdots$ حاصل کرتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x^{s+r} پہلے، دوسرے اور تیسرے مجموعوں میں $m = s$ پر کرنے اور تیسرے مجموعے میں $m = s-2$ پر کرنے سے ملتے ہیں۔یوں $s = 0$ اور $s = 1$ کی صورت میں تیسرا مجموعہ کوئی حصہ نہیں ڈالے گا جبکہ $s = 2$ کی صورت میں چاروں مجموعے حصہ ڈالیں گے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} r(r-1)a_0 + ra_0 - \nu^2 a_0 &= 0 \qquad (s=0) \\ (r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - \nu^2 a_1 &= 0 \qquad (s=1) \\ (s+r)(s+r-1)a_s + (s+r)a_s + a_{s-2} - \nu^2 a_s &= 0 \qquad (s = 2, 3, \cdots) \end{aligned} \tag{5.78}$$

چونکہ $a_0 \neq 0$ ہے لہٰذا مساوات 5.78 کی پہلی مساوات سے **اشاری مساوات**

$$(r+\nu)(r+\nu) = 0 \tag{5.79}$$

حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $r_1 = \nu (\geq 0)$ اور $r_2 = -\nu$ ہیں۔

---

[52] Bessel's equation

[53] ν یونانی حرف تہجی نیو ہے۔

توالی عددی سر؛ $r = r_1 = \nu$

دوسری مساوات 5.78 میں $r = \nu$ پر کرتے ہوئے $(2\nu+1)a_1 = 0$ ملتا ہے۔اب چونکہ ν غیر منفی ہے لہٰذا $2\nu + 1$ صفر کے برابر نہیں ہو سکتا اور یوں $a_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔تیسری مساوات 5.78 میں $r = \nu$ پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(s+2\nu)sa_s + a_{s-2} = 0 \tag{5.80}$$

چونکہ $a_1 = 0$ اور $\nu \geq 0$ ہے لہٰذا مساوات 5.80 سے $s_3 = 0$ ، $s_5 = 0$ ، $\cdots$ حاصل ہوتے ہیں۔ یوں تمام طاق عددی سر صفر کے برابر ہیں۔جفت عددی سر حاصل کرنے کی خاطر مساوات 5.80 میں $s = 2m$ پر کرتے ہوئے

$$(2m+2\nu)2ma_{2m} + a_{2m-2} = 0$$

یعنی

$$a_{2m} - \frac{1}{2^2m(\nu+m)}a_{2m-2}, \qquad m = 1,2,3,\cdots \tag{5.81}$$

ملتا ہے۔مساوات 5.81 سے c_2 ، c_4 ، $\cdots$ لکھتے ہیں

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)} \\
a_4 &= -\frac{a_2}{2^2 2(\nu+2)} = \frac{a_0}{2^4 2!(\nu+1)(\nu+2)}
\end{aligned}$$

اور یوں عمومی کلیہ

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}, \qquad m = 1,2,\cdots \tag{5.82}$$

حاصل ہوتا ہے۔

عددی صحیح $\nu = n$ کی صورت میں بیسل تفاعل $J_n(x)$

ν کی عدد صحیح قیمت کو روایتی طور پر n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں $\nu = n$ کی صورت میں مساوات 5.82 درج ذیل لکھی جائے گی

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}, \qquad m = 1,2,\cdots \tag{5.83}$$

جس میں a_0 اختیاری مستقل ہے۔مساوات 5.83 پر مبنی تسلسل میں بھی اختیاری مستقل a_0 پایا جائے گا۔ہم اختیاری مستقل کی قیمت $a_0 = 1$ چن سکتے ہیں البتہ اس سے بہتر قیمت

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!} \tag{5.84}$$

ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.83 کو

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m! n! (n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$

یعنی

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m! (n+m)!}, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{5.85}$$

لکھا جا سکتا ہے۔آپ نے دیکھا کہ $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ چننے سے بڑھتی ضربیہ $(n+1)(n+2)\cdots(n+m)$ کو نہایت عمدگی کے ساتھ عدد ضربیہ[54] $(n+m)!$ میں ضم کیا گیا ہے۔درج بالا عددی سر کو تسلسل 5.77 میں پر کرتے ہوئے، اور یہ ذہن میں رکھتے ہوئے کہ $c_1 = 0$ ، $c_3 = 0$ ، $\cdots$ ہیں، بیسل مساوات 5.76 کا مخصوص حل $J_n(x)$

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m! (n+m)!} \qquad (n \geq 0) \tag{5.86}$$

ملتا ہے جو رتبہ n **بیسل تفاعل کی پہلی قسم**[55] کہلاتی ہے۔بیسل تفاعل 5.86 تمام x کے لئے مرتکز ہے یعنی (جیسا آپ عددی سر کی شرح $\frac{a_{m+1}}{a_m}$ سے ثابت کر سکتے ہیں) اس کا رداس ارتکاز لامتناہی $R = \infty$ ہے۔یوں $J_n(x)$ تمام x کے لئے معین ہے۔عددی سر کے نسب نما میں عدد ضربیہ $(n+m)!$ کی بنا تسلسل بہت تیزی سے مرکوز ہوتی ہے۔

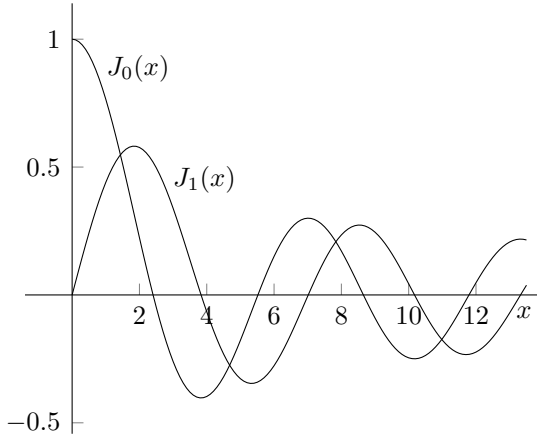
مثال 5.18: بیسل تفاعل $J_0(x)$ اور $J_1(x)$

مساوات 5.86 میں $n = 0$ پر کرتے ہوئے رتبہ 0 کا **بیسل تفاعل** $J_0(x)$

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2 (1!)^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} + - \cdots \tag{5.87}$$

---

[54] factorial

[55] Bessel function of the first kind of order n

شکل 5.7: بیسل تفاعل کی پہلی قسم۔ J_0 ، J_1

حاصل ہوتا ہے (شکل 5.7 دیکھیں) جو کوسائن تفاعل کی مانند ہے۔اسی طرح مساوات 5.86 میں $n = 1$ پر کرتے ہوئے رتبہ 1 کا **بیسل تفاعل** $J_1(x)$

$$J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1} m!(m+1)!} = x - \frac{x^3}{2^3 1!2!} + \frac{x^5}{2^5 2!3!} - \frac{x^7}{2^7 3!4!} + - \cdots \tag{5.88}$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 5.7 دیکھیں) جو سائن تفاعل کی مانند ہے لیکن جیسا آپ دیکھیں گے بیسل تفاعل کے صفر یکساں فاصلوں پر نہیں پائے جاتے ہیں اور x بڑھانے سے تفاعل کا حیطہ کم ہوتا جاتا ہے۔ مساوات 5.76 کو x^2 سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری صورت $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0$ ملتی ہے جس پر توجہ دیں۔ x کی زیادہ قیمت پر $\frac{1}{x}$ اور $\frac{\nu^2}{x^2}$ کو رد کرتے ہوئے بیسل مساوات سے $y'' + y = 0$ حاصل ہوتا ہے جس کے حل $\cos x$ اور $\sin x$ ہیں۔آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{y'}{x}$ بطور تقصیری مستقل کردار ادا کرتے ہوئے بیسل تفاعل کا حیطہ گھٹانے میں مدد دے گی۔ زیادہ x کی صورت میں درج ذیل ثابت کیا جا سکتا ہے

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \tag{5.89}$$

جہاں $\sim$ کو **متقاربی برابر**[56] پڑھیں اور جس کا مطلب ہے کہ کسی بھی قطعی n پر دونوں اطراف کی شرح، $x \to \infty$ پر اکائی کے برابر ہو گی۔

[56] asymptotically equal

مساوات 5.89 کم $x(>0)$ کی صورت میں بھی بہترین ثابت ہوتی ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے $J_0(x)$ کے ابتدائی تین صفر 2.356 ، 5.498 اور 8.639 حاصل ہوتے ہیں جبکہ ان کی حقیقی قیمتیں بالترتیب 2.405 ، 5.520 اور 8.654 ہیں۔دونوں جوابات میں فرق 0.049 ، 0.022 اور 0.015 ہے۔ □

بیسل تفاعل جہاں $\nu \geq 0$ کوئی بھی قیمت ہو سکتی ہے۔گیما تفاعل

گزشتہ حصے میں ہم نے عدد صحیح $\nu = n$ کی صورت میں بیسل مساوات کا ایک حل دریافت کیا۔آئیں اب کسی بھی قیمت کے $\nu > 0$ کے لئے بیسل تفاعل کا عمومی حل تلاش کریں۔مساوات 5.84 میں ہم نے $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ چنا جبکہ موجودہ صورت میں ہم

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{5.90}$$

چنتے ہیں جہاں گیما تفاعل[57] Γ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\Gamma(\nu+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\nu \, \mathrm{d}t \qquad (\nu > -1) \tag{5.91}$$

دھیان رہے کہ بائیں ہاتھ $\nu + 1$ جبکہ دائیں ہاتھ تکمل کے اندر ν لکھا گیا ہے۔تکمل بالحصص سے

$$\Gamma(\nu+1) = -e^{-t} t^\nu \Big|_0^\infty + \nu \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} \, \mathrm{d}t = 0 + \nu\Gamma(\nu)$$

یعنی گیما تفاعل کا بنیادی تعلق

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu) \tag{5.92}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 5.91 میں $\nu = 0$ پر کرنے سے

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, \mathrm{d}t = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

ملتا ہے۔اس طرح مساوات 5.92 سے $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1!$ ، $\Gamma(3) = 3\Gamma(2) = 2!$ اور یوں

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.93}$$

---

[57] gamma function

حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ عدد ضربی درحقیقت گیما تفاعل کی ایک مخصوص صورت ہے۔یوں عدد صحیح $\nu = n$ کی صورت میں مساوات 5.90 سے مساوات 5.84 ہی حاصل ہوتی ہے۔

گیما تفاعل سے $0!$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $\Gamma(n+1) = n!$ ہے لہٰذا

$$0! = \Gamma(1) = 1 \tag{5.94}$$

کے برابر ہے۔

مساوات 5.90 استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.83 کو لکھتے ہیں۔

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$$

اب مساوات 5.92 کے تحت $(\nu+1)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+2)$ ، $(\nu+2)\Gamma(\nu+2) = \Gamma(\nu+3)$ وغیرہ لکھے جا سکتے ہیں اور یوں

$$(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+m+1)$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(\nu+m+1)} \tag{5.95}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے $r = r_1 = \nu$ کی صورت میں بیسل مساوات 5.76 کا مخصوص حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$J_{\nu}(x) = x^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(\nu+m+1)} \tag{5.96}$$

$J_{\nu}(x)$ کو رتبہ ν **بیسل تفاعل کی پہلی قسم**[58] کہتے ہیں۔

جیسا آپ شرح عدد سر کی ترکیب سے ثابت کر سکتے ہیں، مساوات 5.96 تمام x پر مرتکز ہے۔

مثال 5.19: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{5.97}$$

---

[58] Bessel function of order ν

حل: مساوات 5.91 میں $\nu = -\frac{1}{2}$ پر کرتے ہوئے

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t$$

ملتا ہے جس میں متغیرہ تبدیل کرتے ہوئے $t = u^2$ استعمال کرتے ہیں۔

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} \, \mathrm{d}u$$

اب ہم ایک ترکیب استعمال کرتے ہیں (جس کو ذہن نشین کرنا سود مند ثابت ہو گا)۔ درج بالا میں u کی جگہ w بھی لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرتے ہوئے

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-w^2} \, \mathrm{d}w$$

ملتا ہے۔درج بالا دو مساوات کو آپس میں ضرب دیتے ہیں۔

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = 4 \int_0^\infty e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \int_0^\infty e^{-w^2} \, \mathrm{d}w = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+w^2)} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}w$$

یہ تکمل کارتیسی محور کے ربع اول پر حاصل کیا گیا ہے۔اس تکمل کو نلکی محور r اور θ استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں $u = r\cos\theta$ اور $w = r\sin\theta$ لیتے ہیں۔ چھوٹا رقبہ $\mathrm{d}u \, \mathrm{d}w = r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$ لکھا جائے گا۔ربع اول میں r کے حدود 0 تا ∞ اور θ کے حدود 0 تا $\frac{\pi}{2}$ ہیں۔

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right|_0^\infty \mathrm{d}\theta = 4 \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} = \pi$$

ملتا ہے۔دونوں اطراف کا جذر لینے سے $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ملتا ہے۔ □

خواص بیسل تفاعل

بیسل تفاعل انتہائی زیادہ تعلقات پر پورا اترتے ہیں۔آئیں درج ذیل تعلقات کو بیسل تسلسل سے اخذ کریں۔

$$[x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x) \tag{5.98}$$

$$[x^{-\nu} J_\nu(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \tag{5.99}$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \tag{5.100}$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x) \tag{5.101}$$

مساوات 5.98 ثابت کرتے ہیں۔مساوات 5.96 کو x^{ν} سے ضرب دیتے ہوئے

$$x^{\nu}J_{\nu}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+2\nu}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)}$$

تفرق لے کر مساوات 5.92 سے $\Gamma(\nu+m+1)=(\nu+m)\Gamma(\nu+m)$ لکھ کر ترتیب دیتے ہیں۔

$$[x^{\nu}J_{\nu}(x)]'=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+2\nu)(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(m+\nu)(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu}m!(\nu+m)\Gamma(\nu+m)}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+2\nu-1}}{2^{2m+\nu-1}m!\Gamma(\nu+m)}=x^{\nu}x^{\nu-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu-1}m!\Gamma(\nu+m)}=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$$

آخری قدم مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $\nu-1$ پر کر کے موازنہ کرتے ہوئے لکھا گیا ہے۔

آئیں اب مساوات 5.99 ثابت کریں۔مساوات 5.96 کو $x^{-\nu}$ سے ضرب دینے سے x^{ν} کٹ جاتا ہے۔

$$x^{-\nu}J_{\nu}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)}$$

تفرق لے کر $m!=m(m-1)!$ لکھ کر ترتیب دیتے ہیں۔

$$[x^{-\nu}J_{\nu}(x)]'=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu}m(m-1)!\Gamma(\nu+m+1)}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m+\nu-1}(m-1)!\Gamma(\nu+m+1)}$$

دھیان رہے کہ تفرق کے بعد تسلسل کا پہلا رکن $m=1$ سے ظاہر کیا جائے گا۔(آپ $x^{-\nu}J_{\nu}$ کے تسلسل کو پھیلا کر لکھ کر تفرق لیتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ پہلا رکن $m=1$ ہے)۔ درج بالا تسلسل میں $s=m-1$ یعنی $m=s+1$ پر کرتے ہیں۔

$$[x^{-\nu}J_{\nu}(x)]'=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}x^{2s+1}}{2^{2s+\nu+1}s!\Gamma(\nu+s+2)}=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

آخری قدم مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $\nu+1$ پر کر کے موازنہ کرتے ہوئے لکھا گیا ہے۔

اب مساوات 5.100 اور مساوات 5.100 ثابت کرتے ہیں۔مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nu x^{\nu-1}J_{\nu}+x^{\nu}J_{\nu}'=x^{\nu}J_{\nu-1}$$
$$-\nu x^{-\nu-1}J_{\nu}+x^{-\nu}J_{\nu}'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}$$

پہلی مساوات کو x^{ν} اور دوسری مساوات کو $x^{-\nu}$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\nu x^{-1}J_\nu + J_\nu' = J_{\nu-1}$$
$$-\nu x^{-1}J_\nu + J_\nu' = -J_{\nu+1}$$

ان کو جمع اور تفریق کرتے ہوئے درج ذیل (درکار) مساوات ملتے ہیں۔

$$2J_\nu' = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}$$
$$\frac{2\nu}{x}J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}$$

مثال 5.20: مساوات 5.98 تا مساوات 5.101 کا استعمال
درج ذیل کو J_0 اور J_1 کی صورت میں حاصل کریں۔

$$\int_1^2 x^{-3}J_4(x)\,\mathrm{d}x$$

حل: مساوات 5.99 میں $\nu = 3$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

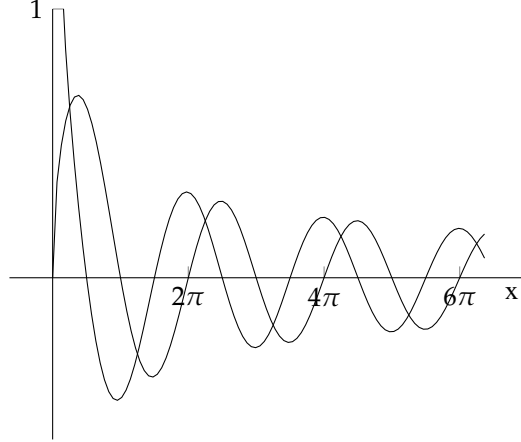
$$I = \int_1^2 x^{-3}J_4(x)\,\mathrm{d}x = -x^{-3}J_3(x)\Big|_1^2$$

مساوات 5.100 میں $\nu = 2$ پر کرتے ہوئے $J_3 = \frac{4}{x}J_2 - J_1$ اور $\nu = 1$ پر کرتے ہوئے $J_2 = \frac{2}{x}J_1 - J_0$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $J_3 = \frac{4}{x}(\frac{2}{x}J_1 - J_0) - J_1$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں تکمل کی قیمت

$$I = -x^{-3}[4x^{-1}(2x^{-1}J_1 - J_0) - J_0]\Big|_1^2 = -\frac{1}{8}J_1(2) + \frac{1}{4}J_0(2) + 7J_1(1) - 4J_0(1)$$

ہو گی۔ □

مثال 5.21: درج ذیل (شکل 5.8) ثابت کریں۔

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$
$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \tag{5.102}$$

شکل 5.8: بیسل تفاعل $J_{\frac{1}{2}}(x)$ اور $J_{-\frac{1}{2}}(x)$

حل: بیسل تسلسل 5.96 میں $\nu=\frac{1}{2}$ پر کرتے ہوئے ہیں۔

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\frac{1}{2}}m!\Gamma(\frac{1}{2}+m+1)}=\sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1}m!\Gamma(m+\frac{3}{2})}$$

نسب نما میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں آخری قدم پر مساوات 5.97 استعمال کی گئی ہے۔

$$\begin{aligned}2^m m! &= 2m(2m-2)(2m-4)\cdots 4\cdot 2\\ 2^{m+1}\Gamma(m+\tfrac{3}{2}) &= 2^{m+1}(m+\tfrac{1}{2})(m-\tfrac{1}{2})\cdots\tfrac{3}{2}\cdot\Gamma(\tfrac{1}{2})\\ &=(2m+1)(2m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے نسب نما میں

$$2^{2m+1}m!\Gamma(m+\tfrac{3}{2})=(2m+1)2m(2m-1)(2m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}=(2m+1)!\sqrt{\pi}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

مساوات 5.98 استعمال کرتے ہوئے

$$[\sqrt{x}J_{\frac{1}{2}}(x)]' = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x = \sqrt{x}J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں دائیں ہاتھ کے مساوات کو لیتے ہوئے $\sqrt{x}$ سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.102 کی دوسری مساوات ملتی ہے۔ □

عمومی حل۔ خطی طور تابعیت

بیسل مساوات 5.76 کے عمومی حل کے لئے $J_v(x)$ کے علاوہ خطی طور غیر تابع دوسرا حل بھی درکار ہے۔ غیر عدد صحیح ν کی صورت میں دوسرا حل $r_2 = -\nu$ (اشاری مساوات 5.79) استعمال کرتے ہوئے حاصل ہو گا۔ یوں دوسرا خطی طور غیر تابع حل مساوات 5.96 میں ν کی جگہ $-\nu$ پر کرنے سے حاصل ہو گا۔

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu}m!\Gamma(m-\nu+1)} \tag{5.103}$$

ν غیر عدد صحیح ہونے کی صورت میں J_ν اور $J_{-\nu}$ خطی طور غیر تابع ہیں۔ یوں غیر عدد صحیح ν کی صورت میں $x \neq 0$ پر مساوات بیسل کا عمومی حل

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x) \tag{5.104}$$

ہو گا۔

ν عدد صحیح ہونے کی صورت میں $J_n(x)$ اور $J_{-n}(x)$ کا تعلق

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{5.105}$$

ہے لہٰذا یہ خطی طور تابع ہیں اور ان سے عمومی حل نہیں لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں مساوات 5.105 کو ثابت کریں۔

ثبوت: مساوات 5.103 میں ν کی قیمت کو عدد صحیح کے قریب تر لانے سے گیما تفاعل کی قیمت (صفحہ 1684 پر شکل ب.5) لامتناہی کی طرف بڑھتی ہے۔ یوں $\nu = n$ کی صورت میں مساوات 5.103 کے ابتدائی n ارکان کے عددی سر، گیما تفاعل کی قیمت لامتناہی ہونے کی بنا، صفر ہوں گے اور یوں تسلسل $m = n$ سے شروع ہو گا۔ مساوات 5.93 کے تحت $\Gamma(m-n+1) = (m-n)!$ ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جائے گا

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n}m!(m-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+s}x^{2s+n}}{2^{2s+n}(n+s)!s!} \qquad (m = n+s)$$

جو $(-1)^n J_n(x)$ ہے۔

□

اگلے حصے میں $\nu = n$ کی صورت میں مساوات بیسل کا عمومی حل، بیسل تفاعل کی دوسری قسم Y_ν کی مدد سے، حاصل کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 5.58: ثابت کریں کہ $J_n(x)$ تمام x کے لئے مرتکز ہے۔

جواب: $\frac{1}{2^2(m+1)(n+m+1)} = \frac{2^{2m+n}m!(n+m)!}{2^{2m+2+n}(m+1)!(n+m+1)!} = \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|$ ہے لٰہذا $\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|_{m\to\infty} = 0$ اور یوں $R \to \infty$ ہو گا۔

سوال 5.59 تا سوال 5.68 کے عمومی حل، جہاں ممکن ہو، J_ν اور $J_{-\nu}$ استعمال کرتے ہوئے لکھیں۔ جہاں اضافی معلومات دی گئی ہوں، وہاں اس کو استعمال کرتے ہوئے بیسل مساوات کی صورت حاصل کریں۔

سوال 5.59: $x^2y'' + xy'(x^2 - \frac{4}{9})y = 0$
جواب: چونکہ $\nu = \frac{2}{3}$ ہے جو غیر عدد صحیح ہے لٰہذا عمومی حل $y = c_1 J_{\frac{2}{3}} + c_2 J_{-\frac{2}{3}}$ ہے۔

سوال 5.60: $xy'' + y' + \frac{1}{4}y \qquad (z = \sqrt{x})$
جواب: $y = c_1 J_0(\sqrt{x})$

سوال 5.61: $xy'' + y' + \frac{x}{4}y = 0 \qquad (z = \frac{x}{2})$
جواب: $y = c_1 J_0(\frac{x}{2})$

سوال 5.62: $x^2y'' + xy'(\frac{x^2}{9} - \frac{1}{9})y = 0 \qquad (z = \frac{x}{3})$
جواب: $y = c_1 J_{\frac{1}{3}}(\frac{x}{3}) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}(\frac{x}{3})$

سوال 5.63: $y'' + (e^{2x} - 16)y = 0, \qquad (z = e^x)$
جواب: $y = c_1 J_4(e^x)$

سوال 5.64: $x^2y'' + xy'(\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad (z = \lambda x)$
جواب: $y = c_1 J_\nu(\lambda x) + c_2 J_{-\nu}(\lambda x)$ جہاں $\nu \neq 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$

سوال 5.65: $\quad (z=3x) \qquad x^2y''+xy'+(9x^2-1)y=0,$
جواب: $y=c_1J_1(3x)$

سوال 5.66: $\quad (z=2x-1) \qquad (x-\frac{1}{2})^2y''+(x-\frac{1}{2})y'+4x(x-1)y=0$
جواب: $y=c_1J_1(2x-1)$

سوال 5.67: $\quad y=x^{-\nu}u \qquad xy''+(2\nu+1)y'+xy=0,$
جواب: $y=x^{-\nu}(c_1J_\nu(x)+c_2J_{-\nu}(x))$ جہاں $\nu\neq 0,\mp1,\mp2,\cdots$

سوال 5.68: $\quad z=\sqrt{x} \qquad y=u\sqrt{x}, \qquad x^2y''+\frac{1}{4}(x+\frac{3}{4})y=0,$
جواب: $y=c_1\sqrt{x}J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x})+c_2\sqrt{x}J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})$

سوال 5.69: مساوات 5.100 اور مساوات 5.102 سے درج ذیل ثابت کریں۔

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right), \quad J_{-\frac{3}{2}}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x}+\sin x\right) \tag{5.106}$$

سوال 5.70: کیا آپ مساوات 5.100 اور مساوات 5.102 سے اخذ کر سکتے ہیں کہ $\nu=\mp\frac{1}{2},\mp\frac{3}{2},\mp\frac{5}{2},\cdots$ کی صورت میں $J_\nu(x)$ بنیادی تفاعل ہیں۔

جواب: جی ہاں۔

سوال 5.71: باہم پیچاں صفر
مساوات 5.98، مساوات 5.99 اور مسئلہ رول[59] استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $J_n(x)$ کے کسی بھی دو متواتر صفروں کے مابین $J_{n+1}(x)$ کا ایک صفر پایا جاتا ہے۔

جواب: مسئلہ رول کہتا ہے کہ کسی بھی حقیقی قابل تفرق تفاعل کے دو متواتر برابر قیمت کے نقطوں کے مابین کم از کم ایک ایسا نقطہ (نقطہ فاصل) پایا جاتا ہے جس پر تفاعل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔ اگر $J_n(x)$ کے دو متواتر صفر x_1 اور x_2 پر پائے جاتے ہوں تب ہم $x_1^{-n}J_n(x_1)=x_2^{-n}J_n(x_2)=0$ لکھ سکتے ہیں۔ یوں مسئلہ رول کے تحت x_1 اور x_2 کے مابین کسی نقطے پر تفاعل $x^{-n}J_n(x)$ کا تفرق صفر $[x^{-n}J_n(x)]'=0$ ہو گا جو مساوات 5.99 کے استعمال سے ایسے نقطے پر $x^{-n}J_{n+1}(x)=0$ یعنی $J_{n+1}(x)=0$ دیتا ہے۔ اسی طرح

[59] Rolle's theorem

اگر $J_{n+1}(x)$ کے دو متواتر صفر x_3 اور x_4 پر پائے جاتے ہوں تب $J_{n+1}(x_3) = J_{n+1}(x_4) = 0$ اور $x_3^{n+1}J_{n+1}(x_3) = x_4^{n+1}J_{n+1}(x_4) = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں مسئلہ رول کے تحت x_3 اور x_4 کے مابین کسی نقطے پر $[x^{n+1}J_{n+1}(x)]' = 0$ ہو گا جس سے مساوات 5.98 کے تحت ایسے نقطے پر $x^{n+1}J_n(x) = 0$ یعنی $J_n(x) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں ثابت ہوا کہ J_{n+1} کے دو متواتر صفر x_3 اور x_4 کے مابین $J_n(x)$ کا صفر پایا جاتا ہے جبکہ $J_n(x)$ کے دو متواتر صفر x_1 اور x_2 کے مابین $J_{n+1}(x)$ کا صفر پایا جاتا ہے۔

سوال 5.72: تفرقی مساوات سے یک رتبی تفرق کا اخراج
درج ذیل تفرقی مساوات میں $y(x) = u(x)v(x)$ پر کرتے ہوئے ایسا $v(x)$ دریافت کریں کہ حاصل تفرقی مساوات میں یک رتبی کا تفرق نہ پایا جاتا ہو۔حاصل تفرقی مساوات بھی حاصل کریں۔

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

جوابات: $v = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ اور مساوات $u'' + [q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p']u = 0$ میں u' نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 5.73: گزشتہ سوال میں تفرقی مساوات سے یک رتبی تفرق کا اخراج کیا گیا۔ثابت کریں کہ مساوات بیسل 5.76 سے یک رتبی تفرق کا اخراج $y = \frac{u}{\sqrt{x}}$ پر کرتے ہوئے ہو گا جس سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہو گی۔

$$x^2u'' + (x^2 + \tfrac{1}{4} - \nu^2)u = 0 \tag{5.107}$$

سوال 5.74: مساوات 5.107 کا عمومی حل $\nu = \frac{1}{2}$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $u = A\cos x + B\sin x$ ہے لہٰذا $y = \frac{u}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}(A\cos x + B\sin x)$ ہو گا۔

سوال 5.75 تا سوال 5.80 مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 کی مدد سے حل ہوں گے۔

سوال 5.75: ثابت کریں $J_0'(x) = -J_1(x), \quad J_1'(x) = J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}, \quad J_2'(x) = \frac{1}{2}[J_1(x) - J_3(x)]$

سوال 5.76: بیسل مساوات 5.76 کو مساوات 5.98 اور مساوات 5.99 سے حاصل کریں۔

سوال 5.77: درج ذیل ثابت کریں

$$\int x^{\nu} J_{\nu-1}(x)\,\mathrm{d}x = x^{\nu} J_{\nu}(x) + c$$
$$\int x^{-\nu} J_{\nu+1}\,\mathrm{d}x = -x^{-\nu} J_{\nu}(x) + c$$
$$\int J_{\nu+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int J_{\nu-1}(x)\,\mathrm{d}x - 2J_{\nu}(x)$$

سوال 5.78: $\int J_3(x)\,\mathrm{d}x$

جواب: مساوات 5.101 میں $\nu = 2$ پر کر کے تکمل $\int J_3\,\mathrm{d}x = \int J_1\,\mathrm{d}x - 2J_2$ ہو گا اور مساوات 5.99 میں $\nu = 0$ پر کرتے ہوئے تکمل $\int J_1\,\mathrm{d}x = -J_0$ دیتا ہے لہٰذا $\int J_3\,\mathrm{d}x = -J_0 - 2J_2 + c$

سوال 5.79: تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے حل کریں۔ $\int x^3 J_0(x)\,\mathrm{d}x$

جواب: $\int x^3 J_0\,\mathrm{d}x = \int x^2 (xJ_0)\,\mathrm{d}x = x^2(xJ_1) - 2\int x^2 J_1\,\mathrm{d}x = x^3 J_1 - 2x^2 J_2 + c$

سوال 5.80: تکمل بالحصص سے حل کریں۔ $\int x^2 J_0\,\mathrm{d}x$

جواب: $\int x^2 J_0\,\mathrm{d}x = x^2 J_1 + xJ_0 - \int J_0\,\mathrm{d}x$ ، جہاں $\int J_0\,\mathrm{d}x$ کسی بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے بلکہ اس کی قیمت جدول کی مدد سے لکھی جاتی ہے۔

5.5 بیسل تفاعل کی دوسری قسم۔عمومی حل

بیسل مساوات 5.76 کا کسی بھی ν کے لئے عمومی حل حاصل کرنے کی خاطر **بیسل تفاعل کی دوسری قسم**[60] $Y_{\nu}(x)$ حاصل کرتے ہیں۔شروع $\nu = n = 0$ سے کرتے ہیں۔

$n = 0$ کی صورت میں مساوات بیسل کو x سے تقسیم کرتے ہوئے

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{5.108}$$

[60] Bessel function of the second kind

لکھا جا سکتا ہے اور اشاری مساوات 5.53 سے دوہرا جذر $r = 0$ ملتا ہے جو صفحہ 325 پر مسئلہ فروبنیوس میں بتلائی گئی دوسری صورت کو ظاہر کرتی ہے۔یوں مساوات 5.108 کا ایک حل $J_0(x)$ ہو گا جبکہ اس کا دوسرا حل مساوات 5.57 میں $r = 0$ پر کرتے ہوئے

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m \tag{5.109}$$

لکھا جائے گا۔مساوات 5.109 اور اس کے تفرقات

$$y_2' = J_0' \ln x + \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m A_m x^{m-1}$$
$$y_2'' = J_0'' \ln x + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) A_m x^{m-2}$$

کو مساوات 5.108 میں پر کرتے ہیں (اگرچہ آخری مجموعے کا پہلا رکن $m = 2$ لکھنا چاہیے، البتہ $m = 1$ پر دیا گیا مجموعہ صفر دیتا ہے لہٰذا مجموعے کا پہلا رکن $m = 1$ لکھنا ممکن ہے)۔اب چونکہ J_0 تفرقی مساوات کا حل ہے لہٰذا تین لوگارتھمی ارکان کا مجموعہ $(xJ_0'' + J_0' + xJ_0) \ln x$ صفر کے برابر ہو گا اور یوں بقایا درج ذیل ہو گا۔

$$2J_0' + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} m A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0$$

اس میں پہلے اور دوسرے مجموعوں کو جمع کرتے ہوئے $\sum m^2 A_m x^{m-1}$ لکھ کر جبکہ J_0' کی طاقتی تسلسل کو مساوات 5.87 کا جزو در جزو تفرق لیتے اور $\frac{m!}{m} = (m-1)!$ استعمال کرتے ہوئے

$$J_0'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m x^{2m-1}}{2^{2m} (m!)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m! (m-1)!}$$

لکھ کر درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-2} m! (m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0 \tag{5.110}$$

اس مساوات میں x^0 کمتر طاقت، جو صرف دوسرے مجموعے میں پایا جاتا ہے، کے عددی سر کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے $A_1 = 0$ ملتا ہے۔اب x^{2s} کے عددی سروں، جو پہلے تسلسل میں نہیں پایا جاتا، کے مجموعے کو صفر کے برابر لکھتے ہیں۔

$$(2s+1)^2 A_{2s+1} + A_{2s-1} = 0, \qquad (s = 1, 2, \cdots)$$

اب چونکہ $A_1 = 0$ ہے لہٰذا $A_3 = 0$ ، $A_5 = 0$ ، $\cdots$ ہوں گے۔

x^{2s+1} کے عددی سروں کے مجموعے کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے $s = 0$ کے لئے

$$-1 + 4A_2 = 0, \quad \implies \quad A_2 = \frac{1}{4}$$

جبکہ بقایا s پر

$$\frac{(-1)^{s+1}}{2^{2s}(s+1)!s!} + (2s+2)^2 A_{2s+2} + A_{2s} = 0, \quad (s = 1, 2, \cdots)$$

لکھا جائے گا۔اس سے $s = 1$ کے لئے

$$\frac{1}{8} + 16A_4 + A_2 = 0 \quad \implies \quad A_4 = -\frac{3}{128}$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ عمومی طور پر

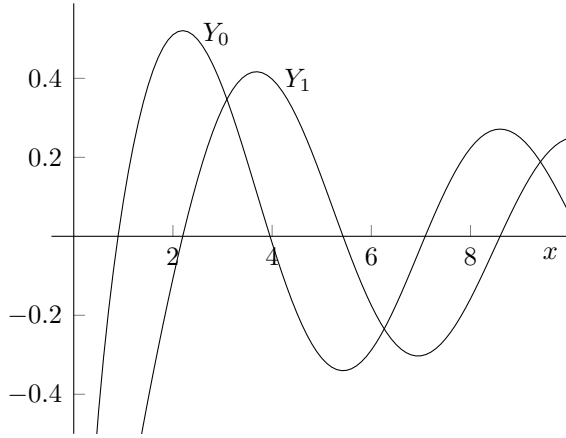
$$A_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right), \quad (m = 1, 2, \cdots) \tag{5.111}$$

ملتا ہے۔قوسین میں بند قیمت کو h_m لکھ کر،

$$h_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \tag{5.112}$$

مساوات 5.111 اور $A_1 = A_3 = \cdots = 0$ کو مساوات 5.109 میں پر کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y_2(x) &= J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m} \\ &= J_0(x)\ln x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{128}x^4 + \frac{11}{13\,824}x^6 - + \cdots \end{aligned} \tag{5.113}$$

چونکہ J_0 اور y_2 خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا یہ مساوات بیسل 5.76 کی حل کی اساس ہیں۔ہم J_0 اور y_2 سے کوئی بھی مخصوص حل، $a(y_2 + bJ_0)$ جہاں $a(\neq 0)$ اور b مستقل ہیں، لکھتے ہوئے اساس کی مختلف صورتیں حاصل کر سکتے ہیں۔روایتی طور پر $a = \frac{2}{\pi}$ اور $b = \gamma - \ln 2$ چننے جاتے ہیں جہاں

شکل 5.9: بیسل تفاعل کے دوسرے اقسام۔

$\gamma = 0.577\,215\,664\,90\cdots$ **مستقل یولر**[61] کہلاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے جہاں s کی قیمت لامتناہی کو چھونے کی کوشش کرتی ہے۔

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s} - \ln s \tag{5.114}$$

اس طرح لکھا گیا دوسرا حل رتبہ صفر **بیسل تفاعل کی دوسری قسم**[62] (شکل 5.9) یا رتبہ صفر **نیومن تفاعل**[63] کہلاتا[64] اور $Y_0(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right] \tag{5.115}$$

لکھا جائے گا جہاں h_m کی قیمت مساوات 5.112 دیتی ہے۔ جیسا شکل 5.9 میں دکھایا گیا ہے کم قیمت کی مثبت x پر Y_0 کی صورت $\ln x$ کی طرح ہے اور $x \to \infty$ پر $Y_0(x) \to \infty$ ہو گا۔

$\nu = n = 1, 2, \cdots$ کے لئے بھی بالکل اسی طرح، مساوات 5.59 سے شروع کرتے ہوئے دوسرا حل حاصل کیا جاتا ہے۔ان میں بھی لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے۔

[61] Euler constant
[62] Bessel function of the second kind of order zero
[63] Neumann's function of order zero
[64] کارل نیومن [1832-1925] جرمنی کے ریاضی دان اور ماہر طبیعیات۔

دوسرے حل کا دارومدار اس حقیقت پر ہے کہ آیا ν کا رتبہ عدد صحیح ہے یا نہیں۔اس پیچیدگی سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر دوسرے حل کو درج ذیل بیان کیا جاتا ہے جو تمام ν کے لئے قابل استعمال ہے۔

$$
\begin{aligned}
Y_\nu(x) &= \frac{1}{\sin \nu\pi}[J_\nu(x)\cos \nu x - J_{-\nu}(x)] \qquad \text{(الف)}\\
Y_n(x) &= \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) \qquad \text{(ب)}
\end{aligned}
\tag{5.116}
$$

درج بالا تفاعل کو رتبہ ν **بیسل تفاعل کی دوسری قسم**[65] یا رتبہ ν **نیومن تفاعل** کہتے ہیں۔

آئیں اب ثابت کریں کہ J_ν اور Y_ν تمام ν اور تمام $x(>0)$ کے لئے خطی طور غیر تابع ہیں۔

غیر عددی صحیح رتبہ ν کے لئے چونکہ $J_\nu(x)$ اور $J_{-\nu}(x)$ بیسل مساوات کے حل ہیں لہٰذا $Y_\nu(x)$ بھی بیسل مساوات کا حل ہے۔اب چونکہ ایسی ν کے لئے $J_\nu(x)$ اور $J_{-\nu}(x)$ خطی طور غیر تابع ہیں اور $Y_\nu(x)$ میں $J_{-\nu}(x)$ پایا جاتا ہے لہٰذا $J_\nu(x)$ اور $Y_\nu(x)$ خطی طور غیر تابع ہوں گے۔مزید یہ کہ مساوات 5.116-ب کو ثابت کیا جا سکتا ہے لہٰذا عدد صحیح رتبہ کے لئے $Y_n(x)$ بیسل مساوات کا حل ہے۔آپ دیکھیں گے کہ $Y_n(x)$ کی تسلسل میں لوگارتھمی جزو پایا جاتا ہے لہٰذا $J_n(x)$ اور $Y_n(x)$ خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ $Y_n(x)$ کی تسلسل لکھنے کی خاطر $J_\nu(x)$ کی تسلسل 5.96 اور $J_{-\nu}(x)$ کی تسلسل 5.103 کو مساوات 5.116-الف میں پر کرتے ہوئے $\nu \to n$ کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
Y_n(x) = \frac{2}{\pi}J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right) &+ \frac{x^n}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(h_m+h_{m+n})}{2^{2m+n}m!(m+n)!}x^{2m}\\
&- \frac{x^{-n}}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n}m!}x^{2m}
\end{aligned}
\tag{5.117}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $x>0$ اور $n=0,1,\cdots$ جبکہ

$$
h_0 = 0, \quad h_s = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{s} \qquad (s=1,2,\cdots)
$$

ہیں اور $n=0$ کی صورت میں مساوات 5.117 میں آخری مجموعے کی جگہ صفر لکھا جاتا ہے۔رتبہ صفر $n=0$ پر مساوات 5.117 عین مساوات 5.115 کی صورت اختیار کرتی ہے۔اس کے علاوہ درج ذیل ثابت کیا جا سکتا ہے۔

$$
Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \tag{5.118}
$$

---

[65] Bessel function of the second kind of order ν

ان نتائج کو درج ذیل مسئلے میں پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 5.4: مساوات بیسل کا عمومی حل
تمام ν کے لئے مساوات بیسل کا عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$y(x)=c_1J_\nu(x)+c_2Y_\nu(x) \tag{5.119}$$

بعض اوقات حقیقی x کے لئے مساوات بیسل کے مخلوط حل درکار ہوتے ہیں۔ایسی صورت میں درج ذیل خطی طور غیر تابع مخلوط حل استعمال کیے جاتے ہیں جنہیں رتبہ ν **بیسل تفاعل کی تیسری قسم**[66] یا رتبہ ν پہلی اور دوسری **ہینکل تفاعل**[67] کہا[68] جاتا ہے۔

$$\begin{aligned}H_\nu^1(x)&=J_\nu(x)+iY_\nu(x)\\ H_\nu^2(x)&=J_\nu(x)-iY_\nu(x)\end{aligned} \tag{5.120}$$

سوالات

سوال 5.81 تا سوال 5.89 کا عمومی حل J_ν اور Y_ν کی صورت میں حاصل کریں۔بتلائیں کہ کن سوالات میں Y_ν کی جگہ $J_{-\nu}$ استعمال کرنا ممکن ہے۔دی گئی اضافی معلومات استعمال کریں۔

سوال 5.81: $x^2y''+xy'+(x^2-25)y=0$
جواب: $y=c_1J_5(x)+c_2Y_5(x)$ ؛ چونکہ ν عدد صحیح ہے لٰہذا $J_{-5}(x)$ قابل استعمال نہیں ہے۔

سوال 5.82: $x^2y''+xy'+(x^2-3)$
جواب: $y=c_1J_{\sqrt{3}}+c_2Y_{\sqrt{3}}(x)$ ؛ چونکہ ν عدد صحیح نہیں ہے لٰہذا $J_{-\sqrt{3}}(x)$ قابل استعمال ہے۔

سوال 5.83: $9x^2y''+9xy'+(z^{\frac{2}{3}}-\frac{9}{4})y=0, \qquad x=z^3$
جواب: $y=c_1J_{\frac{3}{2}}(x^{\frac{1}{3}})+c_2Y_{\frac{3}{2}}(x^{\frac{1}{3}})$

---

[66] Bessel function of the third kind of order ν
[67] Hankel functions
[68] ہرمن ہینکل [1839-1873] جرمنی کے ریاضی دان۔

سوال 5.84: $x^2y'' + xy' + (4x^4 - \frac{16}{9})y = 0, \qquad z = x^2$
جواب: $y = c_1 J_{\frac{2}{3}}(x^2) + c_2 Y_{\frac{2}{3}}(x^2)$

سوال 5.85: $9x^2y'' + 9xy' + (4x^{\frac{4}{3}} - 25)y = 0, \qquad z = x^{\frac{2}{3}}$
جواب: $y = c_1 J_{\frac{5}{2}}(x^{\frac{2}{3}}) + c_2 Y_{\frac{5}{2}}(x^{\frac{2}{3}})$

سوال 5.86: $y'' + k^2x^2y = 0, \qquad (y = u\sqrt{x}, \quad z = \frac{kx^2}{2})$
جواب: $y = \sqrt{x}[c_1 J_{\frac{1}{4}}(\frac{kx^2}{2}) + c_2 Y_{\frac{1}{4}}(\frac{kx^2}{2})]$

سوال 5.87: $xy'' - 5y' + xy = 0, \qquad y = x^3u$
جواب: $y = x^3[c_1 J_3(x) + c_2 Y_3(x)]$

سوال 5.88: $xy'' - y' + xy = 0, \qquad y = xu$
جواب: $y = x[c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)]$

سوال 5.89: $xy'' + 5y' + xy = 0, \qquad y = \frac{u}{x^2}$
جواب: $y = \frac{1}{x^2}[c_1 J_2(x) + c_2 Y_2(x)]$

سوال 5.90: ترمیم شدہ رتبہ ν بیسل تفاعل کی پہلی قسم
ترمیم شدہ رتبہ ν بیسل تفاعل کی پہلی قسم کی تعریف $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$ ہے جہاں $i = \sqrt{-1}$ ہے۔ثابت کریں کہ $I_\nu(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات پر پورا اترتا ہے۔

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0 \tag{5.121}$$

جواب: $I_\nu(x)$ کو دیے گئے مساوات میں پر کرتے ہوئے $0 = 0$ حاصل کریں۔یہی ثبوت ہے۔

سوال 5.91: ترمیم شدہ بیسل تفاعل
$I_\nu(x)$ کی درج ذیل صورت حاصل کریں۔

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(m + \nu + 1)} \tag{5.122}$$

سوال 5.92: $I_\nu(x)$ حقیقی ہے
ثابت کریں کہ حقیقی x اور حقیقی ν کے لئے $I_\nu(x)$ حقیقی ہے۔ثابت کریں کہ $x \neq 0$ ہوتے ہوئے $I_\nu(x) \neq 0$ ہو گا۔ ثابت کریں کہ $I_{-n}(x) = I_n(x)$ کے برابر ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔

سوال 5.93: ترمیم شدہ بیسل تفاعل
ثابت کریں کہ تفاعل $K_\nu(x)$ ، جسے ترمیم شدہ بیسل تفاعل کی تیسری (بعض اوقات دوسری) قسم کہتے ہیں،

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right] \tag{5.123}$$

تفرقی مساوات 5.121 کا حل ہے۔

سوال 5.94: ہینکل تفاعل
ثابت کریں کہ ہینکل تفاعل 5.120 مساوات بیسل کے حل کی اساس ہیں۔

5.6 قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ

لیژانڈر تفاعل (حصہ 5.2) اور بیسل تفاعل کی ایک خاصیت جسے قائمیت[69] کہتے ہیں انجینئری حساب میں نمایاں کردار ادا کرتی ہے۔اس حصے میں قائمیت سے وابستہ تصورات اور علامت نویسی سیکھتے ہیں۔اگلے حصے میں ایسی سرحدی قیمت مسائل (سٹیورم لیوویل مسائل) پر غور کیا جائے گا جن کے حل قائمہ الزاویہ تفاعل کا سلسلہ دیتے ہیں۔ان مسائل پر غور کے دوران حاصل نتائج کو استعمال کرتے ہوئے لیژانڈر تفاعل اور بیسل تفاعل پر غور کیا جائے گا۔

آئیں پہلے تفاعل کی قائمیت کی تعریف پیش کرتے ہیں۔فرض کریں کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ پر حقیقی قیمت تفاعل $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ معین ہیں اور اس وقفے پر ان تفاعل کے حاصل ضرب $g_m(x)g_n(x)$ کا تکمل موجود ہے۔اس تکمل کو روایتی طور پر (g_m, g_n) لکھا جاتا ہے۔

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.124}$$

---

[69] orthogonality

اگر درج بالا تکمل صفر کے برابر ہو تب تفاعل $g_m(x)$ اور $g_n(x)$ وقفہ $a \le x \le b$ پر **قائمہ الزاویہ**[70] کہلاتے ہیں۔

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) \, \mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n) \tag{5.125}$$

حقیقی قیمت تفاعل کا سلسلہ $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $g_3(x)$ ، $\cdots$ اس صورت وقفہ $a \le x \le b$ پر **قائمہ الزاویہ سلسلہ**[71] کہلائے گا جب اس وقفے پر یہ تمام تفاعل معین اور تمام تکمل (g_m, g_n) موجود ہوں اور اس سلسلے میں تمام ممکنہ منفرد جوڑیوں کے یہ تکمل صفر کے برابر ہوں۔

(g_m, g_m) کے غیر صفر جذر کو g_m کا **معیار**[72] کہتے ہیں جسے عموماً $\|g_m\|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^2(x) \, \mathrm{d}x} \tag{5.126}$$

ہم پوری بحث کے دوران درج ذیل فرض کریں گے۔

عمومی مفروضہ: تمام تفاعل جن پر غور کیا جا رہا ہو محدود ہیں، جن تکمل پر غور کیا جا رہا ہو وہ موجود ہیں اور معیار غیر صفر ہیں۔

ظاہر ہے کہ وقفہ $a \le x \le b$ پر ایسے قائمہ الزاویہ سلسلہ g_1 ، g_2 ، $\cdots$ جن میں ہر تفاعل کا معیار اکائی (1) ہو درج ذیل تعلقات پر پورا اترتے ہیں۔

$$(g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \quad (m = 1, 2, \cdots) \\ 1 & m = n \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases} \tag{5.127}$$

ایسے سلسلے کو وقفہ $a \le x \le b$ پر **معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ**[73] کہتے ہیں۔

کسی بھی قائمہ الزاویہ سلسلے کے ہر تفاعل کو، زیر غور وقفے پر، اس تفاعل کے معیار سے تقسیم کرتے ہوئے معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

---

[70] orthogonal
[71] orthogonal set
[72] norm
[73] orthonormal set

مثال 5.22: تفاعل $g_m(x) = \sin mx$ جہاں $m = 1, 2, \cdots$ کا سلسلہ وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر قائمہ الزاویہ ہے کیونکہ ان تفاعل کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (ضمیمہ ب میں مساوات ب.11)۔

$$\begin{aligned}(g_m, g_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx \quad (m \neq n)\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x \, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)\, dx = 0\end{aligned} \tag{5.128}$$

ان تفاعل کا معیار $\|g_m\| = \sqrt{\pi}$ ہے۔

$$\|g_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

یوں اس سلسلے سے درج ذیل معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}$$

□

مثال 5.23: کوسائن تفاعل $\cos mx$ کے سلسلے کو بھی مثال 5.22 کی طرح قائمہ الزاویہ ثابت کیا جا سکتا ہے۔مزید تمام $m, n = 0, 1, \cdots$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x \, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x \, dx = 0$$

یوں ظاہر ہے کہ درج ذیل سلسلہ وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر قائمہ الزاویہ ہے

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \cdots$$

جس سے درج ذیل معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots$$

□

قائمہ الزاویہ سلسلہ استعمال کرتے ہوئے مختلف تفاعل کو تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔فرض کریں کہ وقفہ $b \le x \le 1$ پر $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $\cdots$ کوئی بھی قائمہ الزاویہ سلسلہ ہے۔اب فرض کریں کہ $f(x)$ کوئی

بھی تفاعل ہے جس کو ان $g(x)$ کا ایسا تسلسل

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x)=c_1 g_1(x)+c_2 g_2(x)+\cdots \tag{5.129}$$

لکھنا ممکن ہو جو مرکوز ہو۔اس تسلسل کو $f(x)$ کی **عمومی فوریئر تسلسل**[74] کہتے ہیں جبکہ c_1 ، c_2 ، $\cdots$ کو ان قائمہ الزاویہ سلسلے کے لحاظ سے تسلسل کے **فوریئر مستقل**[75] کہتے ہیں۔

قائمیت کی بنا ان مستقل کو نہایت آسانی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔مساوات 5.129 کے دونوں اطراف کو $g_m(x)$ (معین m) سے ضرب دیتے ہوئے وقفہ $a \le x \le b$ پر تکمل لینے سے درج ذیل ملتا ہے جہاں فرض کیا گیا ہے کہ جزو در جزو تکمل لیا جا سکتا ہے۔

$$(f,g_m)=\int_a^b f g_m \,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty} c_n (g_n,g_m)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b g_n g_m \,\mathrm{d}x$$

بائیں ہاتھ جن تکملات میں $n=m$ ہو، وہ $(g_n,g_m)=\|g_m\|^2$ کے برابر ہوں گے جبکہ قائمیت کی بنا باقی تمام تکملات صفر کے برابر ہوں گے لہٰذا

$$(f,g_m)=c_m \|g_m\|^2 \tag{5.130}$$

ہو گا اور یوں فوریئر مستقل کا درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$c_m=\frac{(f,g_m)}{\|g_m\|^2}=\frac{1}{\|g_m\|^2}\int_a^b f(x) g_m(x)\,\mathrm{d}x \qquad (m=1,2,\cdots) \tag{5.131}$$

مثال 5.24: فوریئر تسلسل

مساوات 5.129 کو مثال 5.23 کے معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ کی صورت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx) \tag{5.132}$$

---

[74] generalized Fourier series
[75] Fourier constants

اور مساوات 5.131 اب درج ذیل دے گا۔

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \qquad (n = 1, 2, \cdots)
\end{aligned} \tag{5.133}
$$

اب اگر تسلسل 5.132 مرکوز ہو تب یہ $f(x)$ کا **فوریئر تسلسل** کہلائے گا اور a_0 ، a_n ، b_n اس کے **فوریئر عددی سر**[76] کہلائیں گے۔کلیات 5.133 کو ان عددی سر کے **یولر کلیات**[77] کہتے ہیں۔ □

ایسے کئی اہم سلسلے پائے جاتے ہیں جو از خود قائمہ الزاویہ نہیں ہیں البتہ ان کے حقیقی تفاعل g_1 ، g_2 ، $\cdots$ درج ذیل پر پورا اترتے ہیں جہاں $p(x)$ کوئی غیر صفر تفاعل ہے۔

$$
\int_a^b p(x) g_m(x) g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n) \tag{5.134}
$$

ہم کہتے ہیں کہ ایسا سلسلہ وقفہ $a \le x \le b$ پر **تفاعل قدر**[78] $p(x)$ کے لحاظ سے قائمہ الزاویہ ہے۔ g_m کے معیار کی تعریف اب درج ذیل ہے۔

$$
\|g_m\| = \sqrt{\int_a^b p(x) g_m^2\,\mathrm{d}x} \tag{5.135}
$$

اگر سلسلے کے ہر تفاعل g_m کا معیار اکائی (1) ہو تب وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل قدر $p(x)$ کے لحاظ سے یہ سلسلہ معیاری قائمہ الزاویہ کہلائے گا۔

ہم $h_m = \sqrt{p} g_m$ اور $h_n = \sqrt{p} g_n$ لکھ کر مساوات 5.134 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$
\int_a^b h_m(x) h_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n)
$$

اور یوں ظاہر ہے کہ h_m تفاعل قائمہ الزاویہ ہیں۔

[76] Fourier coefficients
[77] Euler formulae
[78] weight function

اگر تفاعل قدر $p(x)$ کے لحاظ سے، وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $\cdots$ قائمہ الزاویہ ہوں اور اگر کسی تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل عمومی فوریئر تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو (مساوات 5.129 دیکھیں)

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots \tag{5.136}$$

تب اس سلسلے کے لحاظ سے فوریئر مستقل c_1 ، c_2 ، $\cdots$ کو بھی پہلے کی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے بس فرق اتنا ہے کہ اب مساوات 5.136 کے دونوں اطراف کو (g_m کی بجائے) pg_m سے ضرب دے کر آگے بڑھا جائے گا۔ باقی سب کچھ پہلے کی طرح حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں تفاعل کا معیار اب مساوات 5.135 دے گی۔

$$c_m = \frac{1}{\left\|g_m\right\|^2} \int_a^b p(x) f(x) g_m(x) \,\mathrm{d}x \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{5.137}$$

سوالات

سوال 5.95 تا سوال 5.104 میں ثابت کریں کہ دیے گئے وقفے پر دیا گیا سلسلہ قائمہ الزاویہ ہے۔ معیاری قائمہ الزاویہ سلسلہ بھی دریافت کریں۔

سوال 5.95: $0 \le x \le 2\pi \qquad 1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \cdots,$

جوابات: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}$

سوال 5.96: $0 \le x \le \pi \qquad \sin x, \sin 2x, \sin 3x,\ \cdots,$

جوابات: $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 3x,\ \cdots$

سوال 5.97: $-1 \le x \le 1 \qquad \sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x,\ \cdots,$

جوابات: $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x,\ \cdots$

سوال 5.98: $0 \le x \le \pi \qquad 1,\ \cos 2x,\ \cos 4x,\ \cos 6x,\ \cdots,$

جوابات: $\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 4x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 6x,\ \cdots$

سوال 5.99: $0 \le x \le T \qquad 1,\ \cos \frac{2n\pi}{T} x, \quad (n = 1, 2, \cdots),$

جوابات: $\frac{1}{\sqrt{T}},\ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2n\pi}{T} x,$

سوال 5.100: $\sin \frac{2n\pi}{T}x, \quad (n=1,2,\cdots), \qquad 0 \le x \le T$
جوابات: $\sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2n\pi}{T}x,$

سوال 5.101: (حصہ 5.2 کے لیژانڈر تفاعل) $-1 \le x \le 1$ ، $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots,$
جوابات: $\frac{P_0}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}P_1, \sqrt{\frac{5}{2}}P_2, \sqrt{\frac{7}{2}}P_3$

سوال 5.102: ایسے a_0 ، b_0 ، $\cdots$ ، c_2 دریافت کریں کہ وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر g_1 ، g_2 اور g_3 معیاری قائمہ الزاویہ ہوں۔ حاصل جواب کا لیژانڈر تفاعل کے ساتھ موازنہ کریں۔ $g_1 = a_0, g_2 = b_0 + b_1 x, g_3 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

سوال 5.103: ثابت کریں کہ اگر وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $\cdots$ قائمہ الزاویہ ہوں تب وقفہ $\frac{a-k}{c} \le t \le \frac{b-k}{c}$ پر تفاعل $g_1(ct+k)$ ، $g_2(ct+k)$ ، $\cdots$ قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

سوال 5.104: سوال 5.103 کے نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے سوال 5.95 سے سوال 5.99 کا نتیجہ حاصل کریں۔

5.7 مسئلہ سٹیورم لیوویل

انجینئری حساب میں کئی اہم قائمہ الزاویہ سلسلوں کے تفاعل وقفہ $a \le x \le b$ پر بطور درج ذیل دو رتبی تفرقی مساوات کے حل سامنے آتے ہیں

$$[r(x)y']' + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0 \tag{5.138}$$

جو درج ذیل شرائط پر پورا اترتے ہیں۔

$$\begin{aligned} &\text{(الف)} \quad k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \qquad (k_1 \text{ اور } k_2 \text{ بیکوقت صفر نہیں ہو سکتے ہیں}) \\ &\text{(ب)} \quad l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0 \qquad (l_1 \text{ اور } l_2 \text{ بیکوقت صفر نہیں ہو سکتے ہیں}) \end{aligned} \tag{5.139}$$

یہاں λ مقدار معلوم ہے جبکہ k_1 ، k_2 ، l_1 اور l_2 حقیقی مستقل ہیں۔

مساوات 5.138 کو **مساوات سٹیورم لیوویل**[79] کہتے ہیں۔ مساوات 5.139 وقفے کے آخری سروں a اور b سے تعلق رکھتے ہیں لہٰذا انہیں **سرحدی شرائط** کہتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ لیژانڈر، بیسل اور دیگر مساوات کو مساوات 5.138 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ تفرقی مساوات اور سرحدی شرائط مل کر **سرحدی مسئلہ**[80] دیتے ہیں۔ مساوات 5.138 اور مساوات 5.139 کے سرحدی مسئلے کو **سٹیورم لیوویل مسئلہ**[81] کہتے ہیں۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ λ کی کسی بھی قیمت کے لئے سٹیورم لیوویل مسئلے کا غیر اہم صفر حل $y \equiv 0$ پایا جاتا ہے جو پورے وقفے پر $y(x) = 0$ دیتا ہے۔ اگر غیر صفر اہم حل $y \not\equiv 0$ موجود ہوں تو انہیں **امتیازی تفاعل** یا **امتیازی تفاعل**[82] کہتے ہیں اور λ کی ان قیمتوں جن کے لئے مسئلے کا حل موجود ہو کو **امتیازی قدر** یا **آئگن قدر**[83] کہتے ہیں۔

مثال 5.25: درج ذیل سٹیورم لیوویل مسئلے کے امتیازی قدر اور امتیازی تفاعل دریافت کریں۔

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$$

حل: λ کی منفی قیمتوں $\lambda = -v^2$ کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y(x) = c_1 e^{vx} + c_2 e^{-vx}$$

دیے گئے سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے $c_1 = c_2 = 0$ اور $y \equiv 0$ ملتا ہے جو امتیازی تفاعل نہیں ہے۔ $\lambda = 0$ کی صورت میں بھی یہی صورت حال پائی جاتی ہے۔ مثبت $\lambda = v^2$ کے لئے تفرقی مساوات کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$y(x) = A\cos vx + B\sin vx$$

پہلی سرحدی شرط سے $y(0) = A = 0$ ملتا ہے۔ دوسری سرحدی شرط سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$y(\pi) = B\sin v\pi = 0 \quad \implies \quad v = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$$

$v = 0$ سے $y \equiv 0$ ملتا ہے جبکہ $B = 1$ لیتے ہوئے $\lambda = v^2 = 1, 4, 9, \cdots$ کے لئے

$$y(x) = \sin vx \qquad v = 1, 2, 3, \cdots$$

---

[79] Sturm-Liouville equation
[80] boundary problem
[81] سوئزرلینڈ کے ریاضی دان جیکویس چارلس فرانکوئس سٹیورم [1803-1882] اور فرانسیسی ریاضی دان یوسف لیوویل [1809-1882]
[82] eigenfunctions
[83] eigenvalue

ملتا ہے۔ یوں اس مسئلے کے امتیازی اقدار $\lambda = v^2$ ہیں جہاں $v = 1, 2, \cdots$ ہیں اور ان کے مطابقتی امتیازی تفاعل $y(x) = \sin vx$ ہیں۔

□

سٹیورم لیوویل مسئلہ درج ذیل قائمیت کی خاصیت رکھتا ہے۔

مسئلہ 5.5: امتیازی تفاعل کی قائمیت
فرض کریں کہ مساوات 5.138 میں دیے گئے سٹیورم لیوویل مسئلے میں p ، q ، r اور r' حقیقی قیمت تفاعل ہیں جو وقفہ $a \le x \le b$ پر استمراری ہیں۔فرض کریں کہ دو منفرد امتیازی قدر λ_m اور λ_n کے لئے مساوات 5.138 میں دیے گئے سٹیورم لیوویل مسئلے کے مطابقتی حل $y_m(x)$ اور $y_n(x)$ ہیں۔ اس وقفے پر تفاعل قدر p کے لحاظ سے y_m اور y_n قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

اگر $r(a) = 0$ ہو تب مساوات 5.139-الف کی ضرورت نہیں ہو گی لہٰذا اس کو مسئلے سے نکالا جا سکتا ہے۔ اسی طرح اگر $r(b) = 0$ تب مساوات 5.139-ب کی ضرورت نہیں ہو گی لہٰذا اس کو مسئلے سے نکالا جا سکتا ہے۔اگر $r(a) = r(b)$ ہو تب مساوات 5.139 کی جگہ درج ذیل شرط لکھی جا سکتی ہے۔

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b) \tag{5.140}$$

ثبوت: چونکہ y_m اور y_n اس مسئلے کے حل ہیں لہٰذا یہ مساوات 5.138 پر پورا اترتے ہیں اور یوں درج ذیل لکھی جا سکتی ہیں۔

$$\begin{aligned}(ry_m')' + (q + \lambda_m p)y_m = 0\\ (ry_n')' + (q + \lambda_n p)y_n = 0\end{aligned}$$

پہلی مساوات کو y_n اور دوسری مساوات کو $-y_m$ سے ضرب دے کر ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n)py_m y_n &= y_m(ry_n')' - y_n(ry_m')'\\ &= [(ry_n')y_m - (ry_m')y_n]'\end{aligned}$$

آپ آخری مساوات $[(ry_n')y_m - (ry_m')y_n]'$ کو کھول کر پہلی مساوات حاصل کرتے ہوئے اس کی درستگی ثابت کر سکتے ہیں۔چونکہ قیاس کے تحت r اور r' استمراری ہیں جبکہ y_m اور y_n مسئلے کے حل ہیں لہٰذا $[(ry_n')y_m - (ry_m')y_n]'$ استمراری ہے۔وقفہ $a \le x \le b$ پر اس کا تکمل لیتے ہیں

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b py_m y_n \,\mathrm{d}x = \Big[r(y_n' y_m - y_m' y_n)\Big]_a^b \tag{5.141}$$

جہاں دایاں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہے۔

$$r(b)[y_n'(b)y_m(b) - y_m'(b)y_n(b)] - r(a)[y_n'(a)y_m(a) - y_m'(a)y_n(a)] \tag{5.142}$$

پہلی صورت: اگر $r(a) = 0$ اور $r(b) = 0$ ہوں تب مساوات 5.142 صفر کے برابر ہو گی لہٰذا مساوات 5.141 کا بایاں ہاتھ بھی صفر ہو گا اور چونکہ y_m اور y_n منفرد ہیں ہمیں مساوات 5.139 میں دیے گئے سرحدی شرائط کے استعمال کے بغیر درج ذیل قائمیت ملتی ہے۔

$$\int_a^b p y_m y_n \, \mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n) \tag{5.143}$$

دوسری صورت: اگر $r(b) = 0$ لیکن $r(a) \neq 0$ ہو تب مساوات 5.142 کا بایاں حصہ صفر کے برابر ہو گا۔ آئیں مساوات 5.142 کے دائیں حصے پر غور کرتے ہیں۔ مساوات 5.139-الف کے تحت

$$\begin{aligned} k_1 y_n(a) + k_2 y_n'(a) &= 0 \\ k_1 y_m(a) + k_2 y_m'(a) &= 0 \end{aligned}$$

ہو گا۔ فرض کریں کہ $k_2 \neq 0$ ہے۔ یوں پہلی مساوات کو $y_m(a)$ اور دوسری مساوات کو $-y_n(a)$ سے ضرب دے کر ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$k_2[y_n'(a)y_m(a) - y_m'(a)y_n(a)] = 0$$

اب چونکہ $k_2 \neq 0$ ہے لہٰذا قوسین میں بند تفاعل صفر کے برابر ہو گا۔ اب قوسین میں بند تفاعل عین مساوات 5.142 کے دائیں حصے میں قوسین میں بند حصہ ہے لہٰذا مساوات 5.142 صفر کے برابر ہو گی اور یوں مساوات 5.141 سے مساوات 5.143 ملتی ہے۔

تیسری صورت: اگر $r(a) = 0$ لیکن $r(b) \neq 0$ ہو تب بالکل دوسری صورت کی طرح مساوات 5.143 حاصل کی جا سکتی ہے۔

چوتھی صورت: اگر $r(a) \neq 0$ اور $r(b) \neq 0$ ہوں تب مساوات 5.139 کے دونوں شرائط استعمال کرتے ہوئے دوسری اور تیسری صورت کی طرز پر مساوات 5.143 حاصل ہو گی۔

پانچویں صورت: اگر $r(a) = r(b)$ ہو تب مساوات 5.142 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$r(b)[y_n'(b)y_m(b) - y_m'(b)y_n(b) - y_n'(a)y_m(a) + y_m'(a)y_n(a)]$$

جو پہلی کی طرح مساوات 5.139 کے استعمال سے صفر کے برابر ثابت ہوتا ہے۔یہاں ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 5.140 کی مدد سے بھی درج بالا صفر کے برابر ثابت ہوتی ہے لہٰذا ہم مساوات 5.139 کی جگہ مساوات 5.140 کی شرط استعمال کر سکتے ہیں۔یوں مساوات 5.141 سے مساوات 5.143 ملتی ہے اور مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 5.26: مثال 5.25 کے تفرقی مساوات کو مساوات 5.138 کے طرز پر لکھتے ہوئے $r = 1$، $q = 0$ اور $p = 1$ ملتے ہیں۔مسئلہ 5.5 کے تحت وقفہ $0 \le x \le \pi$ پر اس کے امتیازی تفاعل قائمہ الزاویہ ہوں گے۔ □

مثال 5.27: فوریئر تسلسل
آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ مثال 5.24 میں پائے جانے والے درج ذیل تفاعل

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots$$

درج ذیل سٹیورم لیوویل مسئلے کے امتیازی تفاعل ہیں

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(\pi) = y(-\pi), \quad y'(\pi) = y'(-\pi)$$

لہٰذا مسئلہ 5.5 کے تحت وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر یہ آپس میں قائمہ الزاویہ سلسلہ دیتے ہیں۔اس مثال کے سرحدی شرائط مساوات 5.140 کی طرز کے ہیں۔ □

ایسی عمومی فوریئر تسلسل جس میں (قائمہ الزاویہ) امتیازی تفاعل کا سلسلہ استعمال ہو **امتیازی تفاعلی پھیلاؤ**[84] کہلاتی ہے۔

مسئلہ 5.6: حقیقی امتیازی اقدار
اگر سٹیورم لیوویل مسئلہ جسے مساوات 5.138 اور مساوات 5.139 میں پیش کیا گیا ہے، مسئلہ 5.5 کے شرائط پر پورا اترتا ہو اور پورے وقفہ $a \le x \le b$ پر p مثبت ہو (یا اس پورے وقفے پر p منفی ہو) تب اس سٹیورم لیوویل مسئلے کے تمام امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔

---

[84] eigenfunction expansion

ثبوت : فرض کریں کہ اس سٹیورم لیوویل مسئلے کا $\lambda = \alpha + i\beta$ امتیازی قدر ہے جس کا مطابقتی امتیازی تفاعل درج ذیل ہے جہاں α ، β ، u اور v حقیقی ہیں۔

$$y(x) = u(x) + iv(x) \tag{5.144}$$

اس کو مساوات 5.138 میں پر کرتے ہوئے

$$(ru' + irv')' + (q + \alpha p + i\beta p)(u + iv) = 0$$

ملتا ہے جس کے حقیقی اور خیالی حصوں کو علیحدہ علیحدہ کرتے ہوئے درج ذیل دو مساوات ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(ru')' + (q + \alpha p)u - \beta pv &= 0\\(rv')' + (q + \alpha p)v - \beta pu &= 0\end{aligned}$$

پہلی مساوات کو v اور دوسری مساوات کو $-u$ سے ضرب دے کر مجموعہ لیتے ہیں

$$\begin{aligned}-\beta(u^2 + v^2)p &= u(rv')' - v(ru')'\\&= [(rv')u - (ru')v]'\end{aligned}$$

جس کا $x = a$ تا $x = b$ تکمل درج ذیل ہے۔

$$-\beta \int_a^b (u^2 + v^2)p \,\mathrm{d}x = \Big[r(uv' - u'v)\Big]_a^b$$

مسئلہ 5.5 کی ثبوت کی طرز پر، سرحدی شرائط استعمال کرتے ہوئے دایاں ہاتھ صفر کے برابر ملتا ہے۔چونکہ y امتیازی تفاعل ہے لہٰذا $u^2 + v^2 \not\equiv 0$ ہو گا۔اب y اور p استمراری ہیں اور پورے وقفے پر $p > 0$ ہے (یا پورے وقفے پر $p < 0$ ہے) لہٰذا تکمل کا بایاں ہاتھ صفر نہیں ہو سکتا ہے۔یوں $\beta = 0$ ہو گا لہٰذا $\lambda = \alpha$ حقیقی ہو گا۔یوں مسئلے کا ثبوت پورا ہوتا ہے۔

□

مثال 5.26 اور مثال 5.27 کے امتیازی اقدار مسئلہ 5.6 کے تحت حقیقی ہیں۔

سوالات

سوال 5.105: مثال 5.25 کے لئے مسئلہ 5.5 ثابت کریں۔

سوال 5.106: مسئلہ 5.5 میں تیسری اور چوتھی صورت کا ثبوت مکمل کریں۔

سوال 5.107: اگر مساوات 5.138 اور مساوات 5.139 میں دیے گئے مسئلے کی امتیازی قدر λ_0 اور مطابقتی امتیازی تفاعل $y = y_0$ ہوں تب ثابت کریں کہ λ_0 کا مطابقتی امتیازی تفاعل $y = \alpha y_0$ بھی ہو گا جہاں α غیر صفر اختیاری مستقل ہے۔(اس خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے ایسے امتیازی تفاعل دریافت کئے جا سکتے ہیں جن کا معیار اکائی ہو۔)

سوال 5.108 تا سوال 5.115 میں دیے گئے سٹیورم لیوویل مسئلوں کے امتیازی قدر اور امتیازی تفاعل دریافت کریں۔

سوال 5.108: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(l) = 0$
جوابات: $y_n = \sin \frac{n\pi x}{l}$ ، $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہیں۔چونکہ $n = 0$ سے $y = 0$ ملتا ہے جو امتیازی تفاعل نہیں ہے لہٰذا $n = 0$ جواب میں شامل نہیں کیا جائے گا۔

سوال 5.109: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y'(l) = 0$
جوابات: $y_n = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ ، $\lambda = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہیں۔

سوال 5.110: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y(l) = 0$
جوابات: $y_n = \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ ، $\lambda = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہیں۔

سوال 5.111: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y'(l) = 0$
جوابات: $y_n = \cos \frac{n\pi x}{l}$ ، $\lambda = \left[\frac{n(2n+1)\pi}{l}\right]^2$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہیں۔

سوال 5.112: $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)$
جوابات: $y_n = \cos nx$ ، $\lambda = n^2$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہیں۔

سوال 5.113: $(xy')' + \lambda x^{-1} y = 0, \quad y(1) = 0, y(e) = 0$
جوابات: $y_n = \sin(n\pi \ln|x|)$ ، $\lambda = n^2\pi^2$ جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے۔

سوال 5.114: $(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda+1)y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$
جوابات: $y_n = e^{-x}\sin nx$ ، $\lambda = n^2$ جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے۔

سوال 5.115: ثابت کریں کہ مسئلہ سٹیورم لیوویل

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0$$

کے حل مساوات $\sin\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$ سے حاصل کیے جاتے ہیں۔اس مساوات کے کتنے حل ممکن ہیں۔

جواب: لاتعداد

سوال 5.116: ایسا سٹیورم لیوویل مسئلہ دریافت کریں جس کے امتیازی تفاعل درج ذیل ہوں۔

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x \cdots$$

جواب: $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, y'(\pi) = 0$

5.8 قائمیت لیژانڈر کثیر رکنی اور بیسل تفاعل

لیژانڈر مساوات (مساوات 5.16) کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad \lambda = n(n+1) \tag{5.145}$$

لہٰذا یہ مساوات سٹیورم لیوویل (حصہ 5.7) ہے جہاں $r = 1 - x^2$ ، $q = 0$ اور $p = 1$ ہیں۔ چونکہ $x = \mp 1$ پر $r = 0$ ہے لہٰذا سرحدی شرائط کے بغیر وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر اس سے مسئلہ سٹیورم لیوویل حاصل ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $n = 0, 1, 2, \cdots$ پر اس مسئلے کے حل لیژانڈر کثیر رکنی $P_n(x)$ ہیں لہٰذا یہ امتیازی تفاعل ہیں جو مسئلہ 5.5 کے تحت قائمہ الزاویہ ہوں گے یعنی

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (m \neq n) \tag{5.146}$$

اور ان امتیازی تفاعل کا معیار مساوات 5.39 دیتی ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\|P_m\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_m^2(x)\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{2}{2m+1}} \qquad m = 0, 1, \cdots \tag{5.147}$$

بیسل تفاعل (حصہ 5.4) جو مساوات بیسل (مساوات 5.76) پر پورا اترتے ہیں کے اہم انجینئری استعمال پائے جاتے ہیں مثلاً دائری سطح کی ارتعاش جس پر اس کتاب میں غور کیا جائے گا۔ مساوات بیسل کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$s^2\ddot{J}_n + s\dot{J}_n + (s^2 - n^2)J_n = 0$$

جہاں تفاعل کا s کے ساتھ تفرق کو نقطہ ظاہر کرتا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ n غیر منفی عدد صحیح ہے۔ $s = \lambda x$ لیتے ہوئے جہاں λ غیر صفر مستقل ہے ہم $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\lambda}$ اور زنجیری تفرق سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں جہاں $'$ سے مراد x کے ساتھ تفرق ہے۔

$$\dot{J}_n = \frac{J_n'}{\lambda}, \quad \ddot{J}_n = \frac{J_n''}{\lambda^2}$$

انہیں مساوات بیسل میں پر کر کے

$$x^2J_n''(\lambda x) + xJ_n'(\lambda x) + (\lambda^2x^2 - n^2)J_n(\lambda x) = 0$$

ملتا ہے جس کو x سے تقسیم کر کے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$[xJ_n'(\lambda x)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x\right)J_n(\lambda x) = 0 \tag{5.148}$$

جو n کی ہر معین قیمت کے لئے ایک مساوات سٹیورم لیوویل دیتا ہے جہاں مقدار معلوم کو λ کی بجائے λ^2 لکھا گیا ہے اور

$$p(x) = x, \quad q(x) = -\frac{n^2}{x}, \quad r(x) = x$$

ہیں۔چونکہ $x = 0$ پر $r(x) = 0$ ہے لہٰذا مسئلہ 5.5 کے تحت وقفہ $0 \le x \le R$ پر مساوات 5.148 کے وہ حل جو درج ذیل سرحدی شرط پر پورا اترتے ہوں تفاعل قدر $p(x) = x$ کے لحاظ سے قائمہ الزاویہ سلسلہ دیں گے۔(یہاں دھیان رہے کہ $n \neq 0$ کی صورت میں تفاعل q نقطہ $x = 0$ پر غیر استمراری ہے البتہ اس کا مسئلہ 5.5 کے ثبوت پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔)

$$J_n(\lambda R) = 0 \tag{5.149}$$

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $J_n(s)$ کے لامحدود تعداد کے حقیقی صفر پائے جاتے ہیں۔ $J_n(s)$ کے مثبت صفروں کو $\alpha_{1n} < \alpha_{2n} < \alpha_{3n} \cdots$ ، سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں مساوات 5.149 کی شرط تب پوری ہو گی جب

$$\lambda R = \alpha_{mn} \quad \implies \quad \lambda = \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R} \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{5.150}$$

ہو جس سے درج ذیل مسئلہ ملتا ہے۔

مسئلہ 5.7: بیسل تفاعل کی قائمیت
بیسل تفاعل $J_n(\lambda_{1n}x)$ ، $J_n(\lambda_{2n}x)$ ، $J_n(\lambda_{3n}x)$ ، $\cdots$، جہاں مساوات 5.150 λ_{mn} دیتی ہے، وقفہ $0 \le x \le R$ پر تفاعل قدر $p(x) = x$ کے لحاظ سے ہر معین $n = 0, 1, \cdots$ کے لئے قائمہ الزاویہ سلسلہ دیتے ہیں یعنی:

$$\int_0^R xJ_n(\lambda_{mn}x)J_n(\lambda_{kn}x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad (k \neq m) \tag{5.151}$$

یوں ہمیں لامحدود تعداد کے قائمہ الزاویہ سلسلے حاصل ہوتے ہیں جہاں n کی ہر معین قیمت ایک منفرد سلسلہ دیتی ہے۔

چونکہ $p(x) = x$ ہے لہٰذا مساوات 5.135 تا مساوات 5.137 کے تحت اگر کسی ایک ایسے سلسلے کے امتیازی تفاعل کی فوریئر تسلسل کی صورت میں کسی تفاعل $f(x)$ کو لکھنا ممکن ہو تو یہ فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$f(x) = c_1J_n(\lambda_{1n}x) + c_2J_n(\lambda_{2n}x) + \cdots \tag{5.152}$$

اس کو **فوریئر بیسل تسلسل**[85] کہتے ہیں۔ہم اب درج ذیل ثابت کرتے ہیں جہاں $\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$ ہے۔

$$\|J_n(\lambda_{mn}x)\|^2 = \int_0^R xJ_n^2(\lambda_{mn}x)\,\mathrm{d}x = \frac{R^2}{2}J_{n+1}^2(\lambda_{mn}R) \tag{5.153}$$

یوں مساوات 5.152 کے عددی سر c_m مساوات 5.137 سے درج ذیل اخذ ہوتے ہیں۔

$$c_m = \frac{2}{R^2J_{n+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^R xf(x)J_n(\lambda_{mn}x)\,\mathrm{d}x \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{5.154}$$

اب مساوات 5.153 ثابت کرتے ہیں۔مساوات 5.148 کو $2xJ_n'(\lambda x)$ سے ضرب دے کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\{[xJ_n'(\lambda x)]^2\}' + (\lambda^2x^2 - n^2)\{J_n^2(\lambda x)\}' = 0$$

جس کا 0 تا R تکمل لیتے ہیں۔

$$[xJ_n'(\lambda x)]^2\Big|_0^R = -\int_0^R (\lambda^2x^2 - n^2)\{J_n^2(\lambda x)\}'\,\mathrm{d}x \tag{5.155}$$

---
[85] Fourier Bessel series

مساوات 5.99 میں x اور ν کی جگہ بالترتیب s اور n لکھتے ہوئے اور s کے ساتھ تفرق کو نقطہ سے ظاہر کرتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$-ns^{-n-1}J_n(s) + s^{-n}\dot{J}_n(s) = -s^{-n}J_{n+1}(s)$$

اس کو s^{n+1} سے ضرب دے کر اور $s = \lambda x$ لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں $'$ سے مراد x کے ساتھ تفرق ہے۔

$$\lambda x J_n'(\lambda x)\frac{1}{\lambda} = nJ_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)$$

اس طرح مساوات 5.155 کا بایاں ہاتھ

$$\Big[[nJ_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)]^2\Big]_{x=0}^{R}$$

کے برابر ہو گا۔اب $\lambda = \lambda_{mn}$ کی صورت میں $J_n(\lambda R) = 0$ ہو گا اور $n = 1, 2, \cdots$ کی صورت میں $J_n(0) = 0$ ہو گا لہٰذا بایاں ہاتھ درج ذیل ملتا ہے۔

$$\lambda_{mn}^2 R^2 J_{n+1}^2(\lambda_{mn}R) \tag{5.156}$$

مساوات 5.155 کے دائیں ہاتھ کا تکمل بالحصص درج ذیل دیتا ہے۔

$$-\Big[(\lambda^2x^2 - n^2)J_n^2(\lambda x)\Big]_0^R + 2\lambda^2\int_0^R xJ_n^2(\lambda x)\,\mathrm{d}x \tag{5.157}$$

$\lambda = \lambda_{mn}$ کی صورت میں اس کا پہلا حصہ $x = R$ پر صفر کے برابر ہے۔چونکہ $n = x = 0$ پر $\lambda^2x^2 - n^2 = 0$ ہے جبکہ $x = 0$ اور $n = 1, 2, \cdots$ کی صورت میں $J_n(\lambda x) = 0$ ہے لہٰذا یہ حصہ $x = 0$ پر بھی صفر کے برابر ہو گا۔اس نتیجے اور مساوات 5.156 سے مساوات 5.153 اخذ ہوتا ہے۔

سوالات

سوال 5.117 تا سوال 5.120 میں دیے گئے کثیر رکنی کو لیژانڈر کثیر رکنی کو صورت میں لکھیں۔(مساوات 5.30 کی مدد لیں۔)

سوال 5.117: $1, x, x^2, x^3, x^4$

جوابات:

$$1 = P_0(x),\ x = P_1(x),\ x^2 = \tfrac{1}{3}P_0(x) + \tfrac{2}{3}P_2(x),\ x^3 = \tfrac{3}{5}P_1(x) + \tfrac{2}{5}P_3(x),$$
$$x^4 = \tfrac{1}{5}P_0(x) + \tfrac{4}{7}P_2(x) + \tfrac{8}{35}P_4(x)$$

سوال 5.118: $3x^2 + 2x$
جواب: $2P_2(x) + 2P_1(x) + P_0(x)$

سوال 5.119: $5x^3 + 6x^2 - x - 1$
جواب: $2P_3(x) + 4P_2(x) + 2P_1(x) + P_0(x)$

سوال 5.120: $35x^4 - 15x^3 + 6x^2 - 2x - 10$
جواب: $8P_4(x) - 6P_3(x) + 42P_2(x) - 11P_1(x) - P_0(x)$

سوال 5.121 تا سوال 5.123 میں دیے گئے تفاعل کی لیژانڈر فوریئر تسلسل وقفہ $-1 < x < 1$ پر دریافت کریں۔

سوال 5.121:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

جواب: مساوات 5.136 میں g_m کی جگہ P_n اور $p = 1$ پر کرتے ہوئے تفاعل $f(x)$ کی لیژانڈر فوریئر تسلسل $f = c_0P_0 + c_1P_1 + c_2P_2 + \cdots$ لکھی جائے گی۔ مساوات 5.39 اور مساوات 5.30 استعمال کرتے ہوئے یوں مساوات 5.137 سے تسلسل کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{\|P_0\|^2}\int_0^1 P_0(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 1\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4} \\
c_1 &= \frac{1}{\|P_1\|^2}\int_0^1 P_1(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 x\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} \\
c_2 &= \frac{1}{\|P_2\|^2}\int_0^1 P_2(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2-1)x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

یوں لیژانڈر فوریئر تسلسل $f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) + \cdots$ ہو گا۔

سوال 5.122:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

جواب: $f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \cdots$

سوال 5.123:

$$f(x) = |x| \qquad -1 < x < 1$$

جواب: $f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) + \cdots$

سوال 5.124: ثابت کریں کہ تفاعل قدر $\sin\theta$ کے لحاظ سے $n = 0, 1, \cdots$ کی صورت میں $P_n(\cos\theta)$ وقفہ $0 < \theta < \pi$ پر قائمہ الزاویہ تفاعل ہوں گے۔

سوال 5.125 تا سوال 5.130 ہرمائٹ کثیر رکنی[86] He_n سے متعلق سوالات ہیں جن کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{He}_0 = 1, \quad \mathrm{He}_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-\frac{x^2}{2}}), \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{5.158}$$

توجہ رہے کہ دیگر اعلیٰ تفاعل کی طرح ہرمائٹ کثیر رکنی[87] کو بھی کئی طریقوں سے ظاہر کیا جاتا ہے لہٰذا طبیعیات کے میدان میں ہرمائٹ کثیر رکنی H_n^* کی تعریف درج ذیل دی جاتی ہے۔

$$\mathrm{H}_0^* = 1, \quad \mathrm{H}_n^* = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n\, e^{-x^2}}{\mathrm{d}x^n}$$

سوال 5.125: ہرمائٹ کثیر رکنی کی درج بالا تعریف سے درج ذیل لکھیں۔

$$\mathrm{He}_1(x) = x,\ \mathrm{He}_2(x) = x^2 - 1,\ \mathrm{He}_3(x) = x^3 - 3x,\ \mathrm{He}_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

سوال 5.126: ثابت کریں کہ مکلارن تسلسل

$$e^{tx - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) t^n$$

کے عددی سر اور ہرمائٹ کثیر رکنی کا تعلق $\mathrm{He}_n(x) = n! a_n(x)$ ہے۔(آپ $tx - \frac{t^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2}$ لکھ سکتے ہیں۔) درج بالا کا بایاں ہاتھ یعنی $e^{tx - \frac{t^2}{2}}$ ہرمائٹ کثیر رکنی کا پیدا کار تفاعل کہلاتا ہے۔

---

[86] فرانسیسی ریاضی دان چارلس ہرمائٹ [1822-1901]
[87] Hermite polynomials

سوال 5.127: ثابت کریں کہ ہرمائٹ کثیر رکنی درج ذیل تعلق پر پورا اترتے ہیں۔(اشارہ۔ ہرمائٹ کثیر رکنی کی تعریف مساوات 5.158 کا تفرق لیں۔)

$$\mathrm{He}_{n+1}(x) = x\,\mathrm{He}_n(x) - \mathrm{He}'_n(x)$$

سوال 5.128: ہرمائٹ کثیر رکنی کے پیدا کار تفاعل (سوال 5.126) کا x کے ساتھ تفرق لیتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathrm{He}'_n(x) = n\,\mathrm{He}_{n-1}(x)$$

اس کلیے کے ساتھ سوال 5.127 میں دیے گئے کلیہ میں n کی جگہ $n-1$ استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\mathrm{He}_n(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

$$y'' - xy' + ny = 0$$

سوال 5.129: سوال 5.128 میں دیا گیا تفرقی مساوات استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $w = e^{-\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{He}_n(x)$ درج ذیل مساواتِ ویبر[88] کا حل ہے۔

$$w'' + (n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)w = 0, \qquad n = 0, 1, \cdots$$

سوال 5.130: ثابت کریں کہ وقفہ $-\infty < x < \infty$ (x محور) پر تفاعل قدر $p(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ کے لحاظ سے ہرمائٹ کثیر رکنی قائمہ الزاویہ ہیں۔(اشارہ۔ سوال 5.128 میں دیے گئے کلیے کا تکمل بالحصص لیں۔)

سوال 5.131 تا سوال 5.135 لاگیغ کثیر رکنی[89] پر مبنی ہیں۔لاگیغ کثیر رکنی[90] درج ذیل تفاعل کو کہتے ہیں۔

$$\mathrm{L}_0 = 1, \quad \mathrm{L}_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n(x^n e^{-x})}{\mathrm{d}x^n}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

سوال 5.131: لاگیغ کثیر رکنی کی درج بالا تعریف سے درج ذیل لکھیں۔

$$\mathrm{L}_1(x) = 1 - x,\ \mathrm{L}_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2,\ \mathrm{L}_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

---

[88] جرمن ریاضی دان ہائنرک ویبر [1842-1913]

[89] Laguerre polynomials

[90] فرانسیسی ریاضی دان ایڈمنڈ نیکولس لاگیغ [1834-1886]

سوال 5.132: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathrm{L}_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n}{m} x^m = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{4} x^2 - + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

سوال 5.133: لاگیغ تفاعل $\mathrm{L}_n(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

$n = 0, 1, 2, 3$ کے لئے اس حقیقت کی تصدیق کریں۔

سوال 5.134: تکمل لیتے ہوئے ثابت کریں کہ مثبت x محور یعنی وقفہ $0 \le x < \infty$ پر تفاعل قدر $p(x) = e^{-x}$ کے لحاظ سے L_0 ، $\mathrm{L}_1(x)$ اور $\mathrm{L}_2(x)$ قائمہ الزاویہ ہیں۔

سوال 5.135: ثابت کریں کہ مثبت x محور یعنی وقفہ $0 \le x < \infty$ پر تفاعل قدر $p(x) = e^{-x}$ کے لحاظ سے تمام لاگیغ تفاعل قائمہ الزاویہ ہیں۔(اشارہ۔ وقفہ $0 \le x < \infty$ پر تفاعل $e^{-x}\mathrm{L}_m(x)\mathrm{L}_n(x)$ کے تکمل پر غور کریں جہاں $m < n$ ہے۔چونکہ L_m میں بلند تر طاقت والا جزو x^m ہے لہٰذا اس سے اخذ کریں کہ اتنا کافی ہو گا کہ وقفہ $0 \le x < \infty$ پر $e^{-x}x^k\mathrm{L}_n(x)$ کا تکمل صفر کے برابر ثابت کیا جائے، جہاں $k < n$ ہے۔بار بار تکمل بالحصص سے ایسا ثابت کریں۔

جواب:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}x^k\mathrm{L}_n(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^k \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{k}{n!}\int_0^\infty x^{k-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x \\
&= \cdots = (-1)^k \frac{k!}{n!}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x \\
&= 0 \quad \text{اگر} \quad (n > k)
\end{aligned}$$

سوال 5.136 تا سوال 5.138 چیبیشف کثیر رکنی[91] پر مبنی ہیں جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{T}_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x), \quad \mathrm{U}_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\cos^{-1}x]}{\sqrt{1-x^2}} \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{5.159}$$

$\mathrm{T}_n(x)$ چیبیشف کثیر رکنی[92] کی پہلی قسم اور $\mathrm{U}_n(x)$ اس کی دوسری قسم کہلاتے ہیں۔

---

[91] روسی ریاضی دان پفنوٹی لووچ چیبیشف [1821-1894]
[92] Tchebichef polynomials', first and second kind

سوال 5.136: چیبیشف تفاعل (مساوات 5.159) سے درج ذیل لکھیں۔

$$\mathrm{T}_0 = 1,\ \mathrm{T}_1(x) = x,\ \mathrm{T}_2(x) = 2x^2 - 1,\ \mathrm{T}_3(x) = 4x^3 - 3x,$$
$$\mathrm{U}_0 = 1,\ \mathrm{U}_1(x) = 2x,\ \mathrm{U}_2(x) = 4x^2 - 1,\ \mathrm{U}_3(x) = 8x^3 - 4x,$$

سوال 5.137: ثابت کریں کہ چیبیشف تفاعل $\mathrm{T}_n(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

$$(1 - x^2)\mathrm{T}_n'' - x\mathrm{T}_n' + n^2\mathrm{T}_n = 0$$

جواب: $v(\theta) = \cos n\theta$ تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\theta^2} + n^2 v = 0$ پر پورا اترتا ہے۔ $x = \cos\theta$ کا استعمال کریں۔

سوال 5.138: ثابت کریں کہ چیبیشف تفاعل T_n وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر تفاعل قدر $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ کے لحاظ سے قائمہ الزاویہ ہیں۔ (اشارہ۔ تکمل لیتے ہوئے $\cos^{-1} x = \theta$ لکھیں۔)

سوال 5.139 تا سوال 5.144 میں دیے گئے تفاعل $f(x)$ کا وقفہ $0 < x < R$ پر درج ذیل صورت کی فوریئر بیسل تسلسل دریافت کریں۔

$$f(x) = c_0 J_0(\lambda_{10}x) + c_0 J_0(\lambda_{20}x) + c_0 J_0(\lambda_{30}x) + \cdots$$

سوال 5.139:

$$f(x) = 1 \quad \text{اشارہ۔ مساوات 5.98 کا استعمال کریں}$$

جواب: مساوات 5.154 سے عددی سر لکھ کر $v = 1$ لیتے ہوئے مساوات 5.98 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c_m &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_{m0})} \int_0^R x J_0\left(\frac{\alpha_{m0}}{R}x\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{\alpha_{m0}^2 J_1^2(\alpha_{m0})} \int_0^{\alpha_{m0}} w J_0(w)\, \mathrm{d}w \\
&= \frac{2}{\alpha_{m0} J_1(\alpha_{m0})} \\
f(x) &= 2\left(\frac{J_0(\lambda_{10})x}{\alpha_{10} J_1(\alpha_{10})} + \frac{J_0(\lambda_{20})x}{\alpha_{20} J_1(\alpha_{20})} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

سوال 5.140:

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < a \\ 0 & a < x < R \end{cases}$$

جواب: $c_m = \frac{2akJ_1\left(\frac{\alpha_{m0}}{R}a\right)}{\alpha_{m0}RJ_1^2(\alpha_{m0})}$

سوال 5.141:

اشارہ۔ مساوات 5.98 استعمال کرتے ہوئے تکمل بالحصص لیں $\quad (R = 1) \quad f(x) = 1 - x^2,$

جواب: $c_m = \frac{4J_2(\alpha_{m0})}{\alpha_{m0}^2 J_1^2(\alpha_{m0})}$

سوال 5.142:

$$f(x) = x^2$$

جواب: $c_m \frac{2R^2}{\alpha_{m0}J_1(\alpha_{m0})}\left[1 - \frac{2J_2(\alpha_{m0})}{\alpha_{m0}J_1(\alpha_{m0})}\right]$

سوال 5.143: ثابت کریں کہ $f(x) = x^n$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہے کو وقفہ $0 < x < 1$ پر درج ذیل فوریئر بیسل تسلسل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$x^n = \frac{2J_n(\alpha_{1n}x)}{\alpha_{1n}J_{n+1}(\alpha_{1n})} + \frac{2J_n(\alpha_{2n}x)}{\alpha_{2n}J_{n+1}(\alpha_{2n})} + \cdots$$

سوال 5.144: تفاعل $f(x) = x^3$ کو وقفہ $0 < x < 2$ پر J_3 کی فوریئر بیسل تسلسل سے ظاہر کریں۔

جواب: $x^3 = 16\left[\frac{J_3(\frac{\alpha_{13}}{2}x)}{\alpha_{13}J_4(\alpha_{13})} + \frac{J_3(\frac{\alpha_{23}}{2}x)}{\alpha_{23}J_4(\alpha_{23})} + \cdots\right]$

باب 6

لاپلاس تبادلہ

لاپلاس بدل کی ترکیب سے ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) تفرقی مساوات حل کیے جاتے ہیں۔یہ ترکیب تین قدم پر مشتمل ہے۔

- پہلا قدم: ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) تفرقی مساوات کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے سادہ ضمنی مساوات حاصل کی جاتی ہے۔
- دوسرا قدم: ضمنی مساوات کو خالصتاً الجبرائی طور پر حل کیا جاتا ہے۔
- تیسرا قدم: ضمنی مساوات کے حل کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے اصل حل حاصل کیا جاتا ہے۔

یوں لاپلاس بدل تفرقی مساوات کے مسئلے کو سادہ الجبرائی مسئلہ میں تبدیل کرتا ہے۔تیسرے قدم پر الٹ لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے عموماً ایسی جدول کا سہارا لیا جاتا ہے جس میں تفاعل اور تفاعل کے الٹ لاپلاس بدل درج ہوں۔اس باب کے آخر میں ایسا جدول (جدول 6.2) دکھایا گیا ہے۔

انجینئری میں لاپلاس بدل کی ترکیب اہم کردار ادا کرتی ہے، بالخصوص ان مسائل میں جہاں جبری تفاعل غیر استمراری ہو، مثلاً جب جبری تفاعل کچھ وقفے کے لئے کار آمد ہو یا جبری تفاعل غیر سائن نما دہراتا تفاعل ہو۔

اب تک غیر متجانس مساوات کا عمومی حل حاصل کرتے ہوئے پہلے مطابقتی متجانس مساوات کا حل اور پھر غیر متجانس مساوات کا مخصوص حل حاصل کیا جاتا رہا۔لاپلاس بدل کی ترکیب میں عمومی حل ایک ہی بار میں حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح لاپلاس بدل استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت (سرحدی قیمت) مسائل کے حل میں عمومی حل حاصل کرنے کے بعد ابتدائی (سرحدی) شرائط پر کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی چونکہ حل یہ شرائط شامل ہوتے ہیں۔

6.1 لاپلاس بدل۔الٹ لاپلاس بدل۔خطیت

فرض کریں کہ تفاعل $f(t)$ تمام $t \geq 0$ پر معین ہے۔ ہم $f(t)$ کو e^{-st} سے ضرب دیتے ہوئے، t کے ساتھ، 0 تا ∞ ، تکمل لیتے ہیں۔ اگر ایسا تکمل موجود ہو تو یہ s پر منحصر ہو گا لہٰذا اس کو $F(s)$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t \tag{6.1}$$

تفاعل $F(s)$ کو تفاعل $f(t)$ کا **لاپلاس بدل**[1] کہا جاتا ہے اور اس کو $\mathcal{L}(f)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t \tag{6.2}$$

$f(t)$ سے $F(s)$ کے حصول کو **لاپلاس تبادلہ**[2] کہتے ہیں۔

اسی طرح $f(t)$ کو $F(s)$ کا **الٹ لاپلاس بدل**[3] کہتے ہیں جسے $\mathcal{L}^{-1}(F)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) \tag{6.3}$$

علامت نویسی

اصل تفاعل کو چھوٹے لاطینی حرف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ لاپلاس بدل کو اسی حرف تہجی کی بڑی صورت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں $f(t)$ کا بدل $F(s)$ ہو گا اور $g(t)$ کا لاپلاس بدل $G(s)$ ہو گا۔

مثال 6.1: تفاعل $f(t) = 1$ ، جہاں $t \geq 0$ ہے، کا لاپلاس بدل مساوات 6.2 سے بذریعہ تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st} \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty$$

ہو گا جو $s > 0$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

---

[1] Laplace transform
[2] Laplace transformation
[3] inverse Laplace transform

تکمل 6.2 کی علامت پر آسائش ضرور ہے لیکن اس پر مزید غور کی ضرورت ہے۔اس تکمل کا وقفہ لامتناہی ہے۔ایسے تکمل کو غیر مناسب تکمل[4] کہتے ہیں اور حزب تعریف، اس کی قیمت درج ذیل اصول کے تحت حاصل کی جاتی ہے۔

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

یوں اس مثال میں اس آسائش علامت کا مطلب درج ذیل ہے۔

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{s}e^0\right] = \frac{1}{s}, \quad (s > 0)$$

اس پورے باب میں تکمل کی یہی علامت استعمال کی جائے گی۔ □

مثال 6.2: تفاعل $f(t) = e^{at}$ جہاں $t \geq 0$ اور a مستقل ہے کا لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ دریافت کریں۔

حل: مساوات 6.2 سے

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t}\bigg|_0^\infty$$

ملتا ہے۔اب اگر $s - a > 0$ ہو (یعنی s کی قیمت a سے زیادہ چننی گئی ہو۔) تب درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

□

اگرچہ ہم بالکل اسی طرز پر دیگر تفاعل کے لاپلاس بدل بذریعہ تکمل حاصل کر سکتے ہیں، حقیقت میں لاپلاس تبادلہ کے ایسی کئی خواص ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے دیگر لاپلاس بدل نہایت عمدگی کے ساتھ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔لاپلاس تبادلہ کی ایک خاصیت خطیت ہے جس سے مراد درج ذیل ہے۔

---

[4] improper integral

مسئلہ 6.1: لاپلاس تبادلہ کی خطیت
لاپلاس تبادلہ خطی عمل ہے۔یوں ایسے تفاعل $f(t)$ اور $g(t)$، جن کے لاپلاس بدل موجود ہوں، کے عمومی مجموعے کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)]=a\mathcal{L}[f(t)]+b\mathcal{L}[g(t)]$$

ثبوت: لاپلاس تبادلہ کی تعریف سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[af(t)+bg(t)]&=\int_0^\infty e^{-st}[af(t)+bg(t)]\,\mathrm{d}t\\&=a\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+b\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,\mathrm{d}t\\&=a\mathcal{L}[f(t)]+b\mathcal{L}[g(t)]\end{aligned}$$

□

مثال 6.3: آئیں تفاعل $f(t)=\cosh at$ کا لاپلاس بدل مسئلہ 6.1 اور مثال 6.2 کی مدد سے لکھیں۔
چونکہ $\cosh at=\frac{1}{2}(e^{at}+e^{-at})$ ہے لہٰذا

$$\mathcal{L}(\cosh at)=\frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at})+\frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right)=\frac{s}{s^2-a^2}$$

ہو گا جہاں $s>a\ge 0$ چنا گیا ہے۔ □

مثال 6.4: آئیں تفاعل $\sinh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔چونکہ $\sinh at=\frac{1}{2}(e^{at}-e^{-at})$ ہے لہٰذا مسئلہ خطیت سے تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(\sinh at)=\frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at})-\frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right)=\frac{a}{s^2-a^2}$$

□

مثال 6.5: $\cos\omega t$ اور $\sin\omega t$ کے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جدول 6.1: چند بنیادی تفاعل $f(t)$ اور ان کے لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$

شمار	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$	شمار	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	1	$\frac{1}{s}$	7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
3	t^2	$\frac{2!}{s^3}$	9	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
4	t^n $(n=1,2,\cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
5	t^a $(a>0)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	11	$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

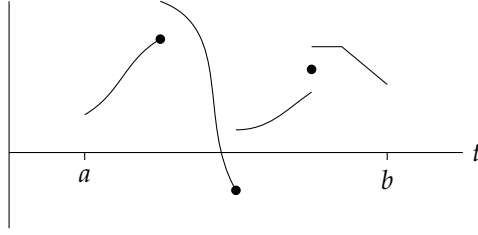
حل: انہیں $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})$ اور $\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})$ لکھ کر لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{j\omega t}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{j\omega t}) - \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

□

جدول 6.1 میں چند اہم بنیادی تفاعل اور ان کے لاپلاس بدل دیے گئے ہیں (اس باب کے آخر میں جدول 6.2 میں مزید لاپلاس جوڑیاں پیش کی گئی ہیں)۔اس جدول میں دیے لاپلاس بدل جاننے کے بعد ہم تقریباً ان تمام تفاعل کے بدل، لاپلاسی خواص سے حاصل کر پائیں گے، جو ہمیں درکار ہوں گے۔

جدول 6.1 میں پہلا، دوسرا اور تیسرا کلیہ چوتھے کلیے سے اخذ کیے جا سکتے ہیں جبکہ چوتھا کلیہ از خود پانچویں کلیہ میں مساوات 5.93 استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(n+1) = n!$ لکھ کر حاصل کیا جا سکتا ہے، جہاں n غیر منفی $n \geq 0$ عدد صحیح ہے۔ پانچواں کلیہ، لاپلاس بدل کی تعریف مساوات 6.2

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^\infty e^{-st} t^a \, \mathrm{d}t$$

شکل 6.1: ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(t)$ ۔ غیر استمراری مقام پر تفاعل کی قیمت کو نقطوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

میں $st = x$ پر کرتے ہوئے مساوات 5.91 کے استعمال سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^a \frac{\mathrm{d}x}{s} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^a \,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a+1)}{s+1}, \qquad (s > 0)$$

لاپلاس بدل کی وجودیت اور یکتائی

اگر تمام $t \geq 0$ کے لئے، کسی مستقل k اور M پر تفاعل f **بڑھنے کی پابندی**

$$\left|f(t)\right| \leq Me^{kt} \tag{6.4}$$

پر پورا اترتا ہو، تب اس کا لاپلاس بدل موجود ہو گا۔ہم کہتے ہیں کہ نہایت تیزی سے نہ بڑھنے والے تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا۔

$f(t)$ کا استمراری ہونا ضروری نہیں ہے البتہ اس کا **ٹکڑوں میں استمراری**[5] ہونا لازم ہے۔ اگر محدود وقفہ $a \leq t \leq b$ جس پر $f(t)$ معین ہو، کو کئی ایسے ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے پر $f(t)$ استمراری ہو اور t کا اندرون ٹکڑے سے ٹکڑے کے (دونوں) سروں تک پہنچنے پر $f(t)$ کی قیمت کا حد[6] محدود حاصل ہو تب $f(t)$ **ٹکڑوں میں استمراری** کہلائے گا۔ ایسی صورت میں، جیسا شکل 6.1 میں دکھایا گیا ہے، محدود **چھلانگ**[7] پائے جائیں گے جو غیر استمراری صورت کی واحد وجہ ہو گی۔ عموماً عملی مسائل اسی نوعیت کے ہوتے ہیں۔درج ذیل مسئلہ بھی اسی نوعیت کا ہے۔

مسئلہ 6.2: مسئلہ وجودیت لاپلاس بدل
اگر نصف محور $t \geq 0$ کے ہر محدود وقفے پر تفاعل $f(t)$ معین اور ٹکڑوں میں استمراری ہو اور مساوات 6.4

---
[5] piecewise continuous
[6] limit
[7] jumps

پر، تمام $t \geq 0$ اور کسی مستقل M اور k کے لئے، پورا اترتا ہو تب لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ تمام $s > k$ کے لئے موجود ہو گا۔

ثبوت: چونکہ $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہے لہٰذا t محور کے کسی بھی محدود وقفے پر $e^{-st}f(t)$ قابل تکمل ہے۔ مساوات 6.4 کو دیکھ کر، $s > k$ تصور کرتے ہوئے (جو درج ذیل آخری تکمل میں درکار ہے)، لاپلاس بدل کی وجودیت کا ثبوت حاصل کرتے ہیں۔

$$\left|\mathcal{L}(f)\right| = \left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\infty \left|f(t)\right| e^{-st}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^\infty Me^{kt}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{s-k}$$

□

کسی بھی تفاعل کا مساوات 6.4 میں دیے گئے شرط پر پورا اترنے کو با آسانی دیکھا جا سکتا ہے، مثلاً $\cosh t < e^t$ یا $t^n < n!e^t$ (چونکہ $\frac{t^n}{n!}$ مکلارن تسلسل کا ایک رکن ہے)۔ ایسا تفاعل جو مساوات 6.4 پر پورا نہ اترتا ہو کی مثال e^{t^2} ہے۔آپ سوال 6.15 میں دیکھیں گے کہ مسئلہ 6.2 میں دیے گئے شرائط لاپلاس بدل کی وجودیت کے لئے کافی ہیں نا کہ لازمی ہیں۔

یکتائی

اگر کسی تفاعل کا لاپلاس بدل موجود ہو تو یہ بدل یکتا ہو گا۔اسی طرح اگر (حقیقی مثبت محور پر معین) دو تفاعل کے لاپلاس بدل یکساں ہوں تب یہ تفاعل، کسی بھی مثبت لمبائی کے وقفے پر، آپس میں مختلف نہیں ہو سکتے ہیں، البتہ تنہا نقطوں پر ان کی قیمت غیر یکساں ہو سکتی ہے۔یوں ہم کہہ سکتے ہیں کہ الٹ لاپلاس بدل یکتا ہے۔ بالخصوص دو ایسے استمراری تفاعل جن کا لاپلاس بدل یکساں ہو، آپس میں مکمل طور پر یکساں ہوں گے۔

سوالات

سوال 6.1 تا سوال 6.8 میں لاپلاس بدل حاصل کریں۔ a اور b کو مستقل تصور کریں۔

سوال 6.1: $2t - 3$
جواب: $\frac{2}{s^2} - \frac{3}{s}$

سوال 6.2: $(at+b)^2$
جواب: $a(\frac{b}{s^2}+\frac{2a}{s^3})+b(\frac{b}{s}+\frac{a}{s^2})$

سوال 6.3: $\sin 2\pi t$
جواب: $\frac{2\pi}{s^2+4\pi^2}$

سوال 6.4: $\sin^2 2\pi t$
جواب: $\frac{8\pi^2}{s(s^2+16\pi^2)}$

سوال 6.5: $e^{-3t}\sin 4t$
جواب: $\frac{4}{(s+3)^2+16}$

سوال 6.6: $e^{2t}\cos 3t$
جواب: $\frac{s-2}{(s-2)^2+9}$

سوال 6.7: $\cos(2t-\frac{\pi}{3})$
جواب: $\frac{\frac{s}{2}+\sqrt{3}}{s^2+4}$

سوال 6.8: $2\sin(5t+\pi)$
جواب: $\frac{-10}{s^2+25}$

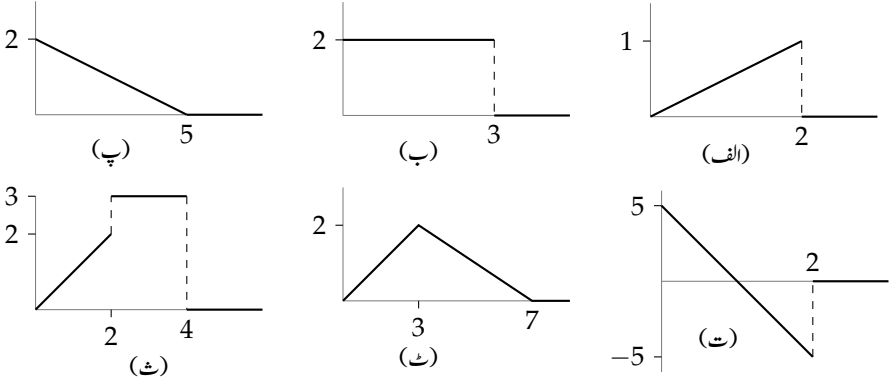
سوال 6.9: شکل 6.2-الف میں ٹکڑوں میں استمراری تفاعل دکھایا گیا ہے۔تمام ٹکڑوں کی ریاضی مساوات حاصل کریں۔ تکمل 6.2 کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1-e^{-2s}(2s+1)}{2s^2}$

سوال 6.10: شکل 6.2-ب میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2}{s}(1-e^{-3s})$

سوال 6.11: شکل 6.2-پ میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2e^{-5s}+10s-2}{5s^2}$

شکل 6.2: سوال 6.9 تا سوال 6.9 کے اشکال۔

سوال 6.12: شکل 6.2-ت میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{5(s+1)e^{-2s}+5(s-1)}{s^2}$

سوال 6.13: شکل 6.2-ٹ میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{4-7e^{-3s}+3e^{-7s}}{6s^2}$

سوال 6.14: شکل 6.2-ث میں دیے گئے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1+(s-1)e^{-2s}-3se^{-4s}}{s^2}$

سوال 6.15: وجودیت
تفاعل $\frac{1}{\sqrt{t}}$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔ایسا کرتے ہوئے $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ (مساوات 5.97) کا استعمال کریں۔
اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ مسئلہ 6.2 میں دیے شرائط کافی ہیں نا کہ لازمی۔

جواب: $\frac{\sqrt{\pi}}{s}$

سوال 6.16: e^{at} کا لاپلاس بدل $\cosh at$ اور $\sinh at$ کے لاپلاس بدل سے حاصل کریں۔

جواب: $e^{at}=\sinh at+\cosh at$ لکھ کر جواب $\frac{1}{s-a}$ ملتا ہے۔

سوال 6.17: پیمائشی فیتہ میں ردوبدل
ثابت کریں کہ اگر $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ہو تب $\mathcal{L}[f(ct)] = \frac{F(\frac{s}{c})}{c}$ ہو گا جہاں c مستقل ہے۔اس کلیے کو استعمال کرتے ہوئے $\mathcal{L}(\cos t)$ سے $\mathcal{L}(\cos \omega t)$ حاصل کریں۔

جواب: مساوات 6.2 استعمال کرتے ہوئے کلیہ ثابت ہو گا۔

سوال 6.18: الٹ لاپلاس بدل کی خطیت
$\mathcal{L}$ کی خطیت کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\mathcal{L}^{-1}$ خطی ہے۔

سوال 6.19 تا سوال 6.26 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.19: $\frac{0.5s+1.3}{s^2+1.69}$
جواب: $\sin(1.3t) + 0.5\cos(1.3t)$

سوال 6.20: $\frac{4s+1}{s^2-16}$
جواب: $\frac{1}{8}(17e^{4t} + 15e^{-4t})$

سوال 6.21: $\frac{s}{m^2s^2+n^2}$
جواب: $\frac{\cos\frac{nt}{m}}{m^2}$

سوال 6.22: $\frac{1}{(s+3)(s-2)}$
جواب: $\frac{1}{5}(e^{2t} - e^{-3t})$

سوال 6.23: $\frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^5}$
جواب: $t^2 + \frac{t^4}{8}$

سوال 6.24: $\frac{3s+8}{s^2-9}$
جواب: $\frac{1}{6}(17e^{3t} + e^{-3t})$

سوال 6.25: $\frac{s-1}{s^2-s-6}$
جواب: $\frac{1}{5}(2e^{3t} + 3e^{-2t})$

سوال 6.26: $\frac{1}{(s-a)(s+b)}$
جواب: $\frac{1}{a+b}(e^{at} - e^{-bt})$

6.2 تفرقات اور تکملات کے لاپلاس بدل۔سادہ تفرقی مساوات

لاپلاس بدل کو استعمال کرتے ہوئے سادہ تفرقی مساوات اور ابتدائی قیمت مسائل حل کیے جاتے ہیں۔لاپلاس بدل کے استعمال سے احصائی اعمال کی جگہ الجبرائی اعمال استعمال کیے جاتے ہیں۔یوں $f(t)$ کا تفرق، $F(s)$ کو s سے ضرب دینے کے (تقریباً) مترادف ہو گا جبکہ $f(t)$ کا تکمل، $F(s)$ کو s سے تقسیم کرنے کے مترادف ہو گا۔

مسئلہ 6.3: $f(t)$ کی تفرق کا لاپلاس بدل
اگر $f(t)$ تمام $t \geq 0$ پر استمراری ہو، مساوت 6.4 پر پورا اترتا ہو اور $f'(t)$ نصف محور $t \geq 0$ کے ہر محدود وقفے پر ٹکڑوں میں استمراری ہو تب، $s > k$ کی صورت میں، $f'(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا جو درج ذیل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0) \qquad (s > k) \tag{6.5}$$

ثبوت : ہم یہ فرض کرتے ہوئے کہ f' بھی استمراری ہے مساوات 6.5 ثابت کرتے ہیں۔یوں لاپلاس بدل کی تعریف (مساوات 6.2) اور تکمل بالحصص سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = f(0) + sF(s)$$

چونکہ $f(t)$ مساوات 6.4 پر پورا اترتی ہے لہٰذا $s > k$ کی صورت میں $t = \infty$ پر $e^{-st}f(t)$ صفر دیگا جبکہ $t = 0$ پر یہ $f(0)$ دیگا۔آخری تکمل $\mathcal{L}(f) = F(s)$ کے برابر ہے جس کا حل، $s > k$ کی صورت میں، مسئلہ 6.2 کے تحت موجود ہے۔یوں $\mathcal{L}(f')$ کا حل موجود ہے۔

اگر f' ٹکڑوں میں استمراری ہو تب درج بالا ثبوت میں تکمل کو ایسے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے کہ ہر ٹکڑے (وقفے) پر f' استمراری ہو۔ سوال 6.40 میں اس پر غور کیا گیا ہے۔

□

f'' پر مساوات 6.5 لاگو کر کے حاصل جواب میں مساوات 6.5 پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f'') = s\mathcal{L}(f') - f'(0) = s[s\mathcal{L}(f) - f(0)] - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) \tag{6.6}$$

اسی ترکیب کو f''' پر لاگو کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}(f''') = s^3\mathcal{L}(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \tag{6.7}$$

ملتا ہے۔اس ترکیب کو بار بار استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 6.4: بلند رتبی تفرق f^n
اگر $f(t)$ اور اس کے تفرقات $f'(t)$ ، $f''(t)$ ، $\cdots$ ، $f^{(n-1)}(t)$ تمام $t \geq 0$ پر استمراری ہوں، مساوات 6.4 پر پورا اترتے ہوں اور $f^{(n)}(t)$ نصف محور $t \geq 0$ کے ہر محدود وقفے پر ٹکڑوں میں استمراری ہو تب، $s > k$ کی صورت میں، $f^{(n)}(t)$ کا لاپلاس بدل موجود ہو گا جو درج ذیل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{6.8}$$

مثال 6.6: تفاعل $f(t) = t^2$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f' = 2t$ اور $f'' = 2$ ہیں۔یوں $f(0) = 0$ ، $f'(0) = 0$ اور $f''(0) = 2$ ملتے ہیں۔اب $\mathcal{L}(2) = \frac{2}{s}$ ہے لہٰذا مساوات 6.6 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو جدول 6.1 کے عین مطابق ہے۔

$$\mathcal{L}(f'') = \mathcal{L}(2) = \frac{2}{s} = s^2\mathcal{L}(f), \quad \implies \quad \mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$$

عموماً کسی بھی تفاعل کا لاپلاس بدل کئی مختلف طریقوں سے حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ □

مثال 6.7: تفاعل $f(t) = \sin^2 t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f(0) = 0$ ہے جبکہ $f' = 2\sin t\cos t = \sin 2t$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 6.5 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2+4} = s\mathcal{L}(f) \quad \implies \quad \mathcal{L}(f) = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

□

مثال 6.8: تفاعل $f(t) = t\sin\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: $f(0) = 0$ ہے جبکہ

$$f'(t) = \sin\omega t - \omega t\cos\omega t, \quad f'(0) = 0,$$
$$f''(t) = 2\omega\cos\omega t - \omega^2 t\sin\omega t = 2\omega\cos\omega t - \omega^2 f(t)$$

ہیں۔یوں مساوات 6.6 استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}(f'') = 2\omega\mathcal{L}(\cos\omega t) - \omega^2\mathcal{L}(f) = s^2\mathcal{L}(f)$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل پر کرتے

$$(s^2+\omega^2)\mathcal{L}(f) = 2\omega\mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{2\omega s}{s^2+\omega^2}$$

ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(t\sin\omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

□

مثال 6.9: تفاعل $f(t) = t\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

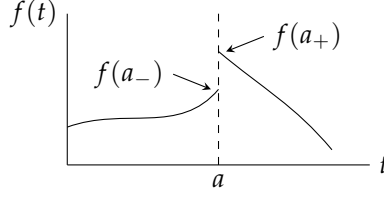
حل:ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f(t) = t\cos\omega t, \quad f(0) = 0$$
$$f'(t) = \cos\omega t - \omega t\sin\omega t, \quad f'(0) = 1$$
$$f''(t) = -2\omega\sin\omega t - \omega^2 f(t)$$

یوں مساوات 6.6 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'') &= s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - sf'(0)\\ &= s^2F(s) - 1\end{aligned}$$

ساتھ ہی ساتھ f'' کی مساوات کا لاپلاس بدل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'') &= \mathcal{L}[-2\omega\sin\omega t - \omega^2 f(t)]\\ &= -\frac{2\omega^2}{s^2+\omega^2} - \omega^2F(s)\end{aligned}$$

شکل 6.3: ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(t)$ (مثال 6.10)

ان دونوں جوابات کو برابر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$F(s) = \mathcal{L}[t\cos\omega t] = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \tag{6.9}$$

□

مثال 6.10: استمراری $f(t)$ کی صورت میں $f'(t)$ کا لاپلاس بدل مسئلہ 6.3 دیتی ہے۔آئیں ٹکڑوں میں استمراری $f(t)$ کی صورت میں $f'(t)$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔شکل 6.3 کے تفاعل میں $t = a(>0)$ پر تفاعل غیر استمراری ہے جبکہ بقایا تمام شرائط وہی ہیں جو مسئلہ 6.3 میں تھے۔اس تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

شکل 6.3 میں دکھایا گیا تفاعل $t = a$ غیر استمراری ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $t = a$ پر تفاعل چھلانگ[8] لگاتا ہے یا کہ تفاعل میں $t = 0$ پر چھلانگ پائی جاتی ہے۔نقطہ چھلانگ تک بائیں جانب سے پہنچتے ہوئے تفاعل کے قیمت کی حد[9] کو $f(a_-)$ لکھا جاتا ہے جبکہ نقطہ چھلانگ تک دائیں جانب سے پہنچتے ہوئے تفاعل کے قیمت کی حد کو $f(a_+)$ لکھا جاتا ہے۔یوں $t = a$ پر تفاعل کی چھلانگ $f(a_+) - f(a_-)$ ہو گی۔

لاپلاس بدل کی تعریف (مساوات 6.2) سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں تکمل کو ایسے ٹکڑوں (وقفوں) میں تقسیم کیا گیا ہے کہ ہر وقفے پر $f(t)$ استمراری ہے۔

$$\mathcal{L}(f') = \int_{a_+}^{\infty} e^{-st} f' \, \mathrm{d}t + \int_0^{a_-} e^{-st} f' \, \mathrm{d}t$$

---

jump[8]
limit[9]

پہلے تکمل کا ابتدائی حد a_+ ہے جو $t=a$ کے دائیں طرف کو ظاہر کرتی ہے جہاں تفاعل کی قیمت $f(a_+)$ ہے۔اسی طرح دوسری تکمل کا اختتامی حد a_- ہے جس پر تفاعل کی قیمت $f(a_-)$ ہے۔انہیں شکل میں دکھایا گیا ہے۔ تکمل بالحصص سے

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f') &= e^{-st}f(t)\Big|_{a_+}^{\infty} + s\int_{a_+}^{\infty} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t + e^{-st}f(t)\Big|_{0}^{a_-} + s\int_{0}^{a_-} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -e^{-sa}f(a_+) + s\int_{a_+}^{\infty} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t + e^{-sa}f(a_-) - f(0) + s\int_{0}^{a_-} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= s\int_{0}^{\infty} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t - f(0) - e^{-sa}[f(a_+) - f(a_-)] \\
&= sF(s) - f(0) - e^{-sa}[f(a_+) - f(a_-)]
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں e^{-st} استمراری ہونے کی بدولت $e^{-sa_+} = s^{-sa_-} = s^{-sa}$ ہے۔ □

مثال 6.11: تفرقی مساوات

درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

حل: پہلا قدم ضمنی مساوات کا حصول ہے۔نا معلوم تفاعل $y(t)$ کا لاپلاس بدل $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ لکھ کر مساوات 6.5 اور مساوات 6.6 میں دیے گئے ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y') &= sY - y(0) = sY - 2 \\
\mathcal{L}(y'') &= s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2s + 1
\end{aligned}$$

انہیں دیے گئے تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔ Y کی مساوات کو ضمنی مساوات[10] کہتے ہیں۔

$$s^2Y + 3sY + 2Y = 2s + 5$$

دوسرا قدم ضمنی مساوات کا الجبرائی حل ہے۔موجودہ ضمنی مساوات کو

$$(s+1)(s+2)Y = 2s + 5$$

[10] subsidiary equation

لکھ کر جزوی کسری پھیلاو کی مدد سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$Y = \frac{2s+5}{(s+1)(s+2)} = \frac{3}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

تیسرا قدم الٹ لاپلاس بدل حاصل کرنا ہے۔جدول 6.1 سے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right] = 3e^{-t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-2t}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں خطیت (مسئلہ 6.1) استعمال کرتے ہوئے دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلے کا حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = 3e^{-t} - e^{-2t}$$

□

درج بالا مثال میں آپ نے دیکھا کہ لاپلاس بدل سے تفرقی مساوات کے حل میں شروع سے ابتدائی قیمتیں مسئلے کا حصہ بنتی ہیں۔

تفاعل کے تکمل کا لاپلاس بدل

ہم نے دیکھا کہ تفاعل کے تفرق کا لاپلاس بدل، اصل تفاعل کے لاپلاس بدل کو s سے ضرب دینے کے (تقریباً) مترادف ہے۔چونکہ تکمل اور تفرق آپس میں الٹ اعمال ہیں لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ تفاعل کے تکمل کا لاپلاس بدل، اصل تفاعل کے لاپلاس بدل تقسیم s ہو گا۔

مسئلہ 6.5: $f(t)$ کی تکمل کا لاپلاس بدل
اگر $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہو اور مساوات 6.4 پر پورا اترتا ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] \qquad (s>0,\, s>k) \tag{6.10}$$

ثبوت: فرض کریں کہ $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہے اور مساوات 6.4 پر پورا اترتی ہے۔اب گر منفی k کے لئے مساوات 6.4 کی شرط پوری ہوتی ہو تب مثبت k کے لئے بھی یہ شرط پوری ہو گی۔ہم فرض کرتے ہیں کہ k مثبت ہے لٰہذا تکمل

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{6.11}$$

استمراری ہو گا اور مساوات 6.4 کے استعمال سے

$$\left|g(t)\right| \le \int_0^t \left|f(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \le M\int_0^t e^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{M}{k}(e^{kt}-1) \qquad (k>0)$$

لکھا جا سکتا ہے۔مزید ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $f(t)$ غیر استمراری ہو، $g'(t) = f(t)$ ہو گا۔اس طرح $g'(t)$ ہر محدود وقفے پر ٹکڑوں میں استمراری ہو گا لٰہذا مسئلہ 6.3 کے تحت

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) \qquad (s>k)$$

ہو گا۔اب مساوات 6.11 سے $g(0) = 0$ ملتا ہے لٰہذا $\mathcal{L}(f) = s\mathcal{L}(g)$ ہو گا جو مساوات 6.10 ہی ہے۔

□

مساوات 6.10 میں $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ لکھ کر اور اطراف بدل کر، الٹ لاپلاس بدل لینے سے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{6.12}$$

حاصل ہوتا ہے جو مساوات 6.10 کی جڑواں مساوات ہے۔

مثال 6.12: $\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$ کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے تفاعل $f(t)$ حاصل کریں۔

حل: جدول 6.1

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega}\sin\omega t$$

دیتی ہے۔یوں مسئلہ 6.5 استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right]=\frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau \,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$$

حاصل ہو گا۔مسئلہ 6.5 ایک مرتبہ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right]=\frac{1}{\omega^2}\int_0^t (1-\cos\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$$

□

سوالات

سوال 6.27: $\sin^2 t$ کا لاپلاس بدل مثال 6.7 میں حاصل کیا گیا۔یہاں $\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$ لکھ کر لاپلاس بدل دوبارہ حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1}{2}[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}]=\frac{2}{s(s^2+4)}$

سوال 6.28: $\cos^2 t$ کا لاپلاس بدل مثال 6.7 کی طرز پر حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

سوال 6.29: $\cos^2 t=1-\sin^2 t$ لکھ کر $\cos^2 t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

سوال 6.30: ہم نے مثال 6.12 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کیا۔اسی کو درج ذیل لکھ کر دوبارہ الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}=\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)$$

سوال 6.31: مسئلہ 6.3 استعمال کرتے ہوئے $\sin \omega t$ کے لاپلاس بدل سے $\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.32: تفاعل $f(t) = \sin \omega t$ کا لاپلاس بدل بذریعہ مساوات 6.6 حاصل کریں۔

جواب: $f(0) = 0$ ہے جبکہ $f' = \omega \cos \omega t$ اور $f'' = -\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 f$ ہیں۔یوں $f'(0) = \omega$ ملتا ہے۔ مساوات 6.6 سے $\mathcal{L}(f'') = -\omega^2 \mathcal{L}(f) = s^2 \mathcal{L}(f) - s(0) - \omega$ لکھا جائے گا جس سے جدول 6.1 میں دیا گیا جواب $\mathcal{L}(f) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ملتا ہے۔

سوال 6.33: تفاعل $f(t) = \cos \omega t$ کا لاپلاس بدل بذریعہ مساوات 6.6 حاصل کریں۔جدول سے جواب دیکھیں۔

سوال 6.34: مسئلہ 6.4 استعمال کرتے ہوئے $f(t) = t^n$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں جہاں t عدد صحیح ہے۔

جواب:چونکہ $f(0) = 0$ ، $f'(0) = 0$ ، $\cdots$ ، $f^{(n-1)}(0) = 0$ ہیں جبکہ $f^n = n!$ ہے لہٰذا مسئلہ 6.4 سے $\mathcal{L}(f^n) = s^n F(s)$ لکھا جائے گا جبکہ $\mathcal{L}(f^{(n)}) = \mathcal{L}(n!) = \frac{n!}{s}$ ہے۔یوں $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 6.35: ہم نے مثال 6.9 میں $t \cos \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کیا۔اسی طرز پر $t \sin \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

سوال 6.36: $t \sinh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$

سوال 6.37: $t \cosh at$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$

سوال 6.38: مثال 6.9 اور سوال 6.35 میں بالترتیب $t\cos\omega t$ اور $t\sin\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کیا گیا۔انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t) \tag{6.13}$$

جواب: $t\sin\omega t$ کے بدل سے $\mathcal{L}^{-1}\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}=t\sin\omega t$ لکھا جا سکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے مسئلہ 6.5 سے $\mathcal{L}^{-1}\frac{2\omega}{(s^2+\omega^2)^2}=\int_0^t\tau\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau$ ملتا ہے۔دائیں ہاتھ تکمل بالحصص سے $\frac{\sin\omega t}{\omega^3}-\frac{t\cos\omega t}{\omega^2}$ ملتا ہے۔ان نتائج کو اکٹھے کرتے ہوئے درکار جواب حاصل ہوتا ہے۔

سوال 6.39: درج ذیل ثابت کریں۔سوال 6.38 کی طرز پر حل کریں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t) \tag{6.14}$$

سوال 6.40: $f'(t)$ میں محدود چھلانگ نقطہ t_1 ، t_2 ، $\cdots$ ، t_n پر پائے جاتے ہیں جبکہ $f(t)$ استمراری ہے۔ $t_1<t_2<\cdots<t_n$ لیتے ہوئے مسئلہ 6.3 ثابت کریں۔

جواب:

$$\mathcal{L}(f')=\int_0^{t_{1-}}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t+\int_{t_{1+}}^{t_{2-}}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t+\int_{t_{2+}}^{t_{3-}}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t+\cdots+\int_{t_{n+}}^{\infty}e^{-st}f'\,\mathrm{d}t$$

لکھ کر تکمل بالحصص حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')=\;&e^{-st}f(t)\Big|_0^{t_{1-}}+s\int_0^{t_{1-}}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+e^{-st}f(t)\Big|_{t_{1+}}^{t_{2-}}+s\int_{t_{1+}}^{t_{2-}}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t\\&+e^{-st}f(t)\Big|_{t_{2+}}^{t_{3-}}+s\int_{t_{2+}}^{t_{3-}}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+\cdots+e^{-st}f(t)\Big|_{t_{n+}}^{\infty}+s\int_{t_{n+}}^{\infty}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.15}$$

اب $f(t)$ استمراری ہے لہٰذا مساوات 6.15 میں متعدد تکملات کو یکجا کیا جا سکتا ہے

$$s\int_0^{t_{1-}}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+s\int_{t_{1+}}^{t_{2-}}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+\cdots+s\int_{t_{n+}}^{\infty}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t=s\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$$

جبکہ بقایا اجزاء سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}e^{(-st_{1-})}f(t_{1-})-f(0)+e^{(-st_{2-})}f(t_{2-})-e^{(-st_{1+})}f(t_{1+})+e^{(-st_{3-})}f(t_{3-})\\-e^{(-st_{2+})}f(t_{2+})+\cdots+e^{(-\infty)}f(\infty)-e^{(-st_{n+})}f(t_{n+})\end{aligned}$$

چونکہ $f(t)$ استمراری ہے لہٰذا $e^{(-st_{m-})}f(t_{m-})=e^{(-st_{m+})}f(t_{m+})=e^{(-st_m)}f(t_m)$ ہو گا۔یوں $e^{(-st_{1-})}f(t_{1-})$ اور $-e^{(-st_{1+})}f(t_{1+})$ آپس میں کٹ جائیں گے۔اسی طرح بقایا اجزاء بھی آپس میں کٹ جاتے ہیں۔پہلے دو اجزاء میں سے $f(0)$ بچتا ہے جبکہ $f(t)$ محدود تفاعل ہونے کی بنا $e^{-\infty}f(\infty)=0$ ہو گا۔اس طرح مسئلہ 6.3 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

سوال 6.41 تا سوال 6.51 کو مسئلہ 6.5 کی مدد سے حل کریں۔

سوال 6.41: $\frac{1}{s^2+s}$
جواب: $1-e^{-t}$

سوال 6.42: $\frac{6}{s^2+4s}$
جواب: $\frac{3}{2}(1-e^{-4t})$

سوال 6.43: $\frac{3}{s^2-9s}$
جواب: $\frac{1}{3}(e^{9t}-1)$

سوال 6.44: $\frac{9}{s^3+9s}$
جواب: $1-\cos 3t$

سوال 6.45: $\frac{4}{s^2(s+2)}$
جواب: $e^{-2t}+2t-1$

سوال 6.46: $\frac{4}{s^3(s+2)}$
جواب: $-\frac{e^{-2t}}{2}+t^2-t+\frac{1}{2}$

سوال 6.47: $\frac{12}{s(s^2+4)}$
جواب: $3-3\cos 2t$

سوال 6.48: $\frac{12}{s^2(s^2+4)}$
جواب: $3t-\frac{3}{2}\sin 2t$

سوال 6.49: $\frac{32}{s(s^2-16)}$
جواب: $2\cosh 4t - 2$

سوال 6.50: $\frac{32}{s^2(s^2-16)}$
جواب: $\frac{1}{2}\sinh 4t - 2t$

سوال 6.51: $\frac{6}{s^4(s^2+1)}$
جواب: $6\sin t + t^3 - 6t$

لاپلاس بدل استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت سوالات 6.52 تا 6.58 حل کریں۔

سوال 6.52: $y'' + \pi^2 y = 0, \quad y(0) = 1,\, y'(0) = 0$
جواب: $y = \cos \pi t$

سوال 6.53: $y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A,\, y'(0) = B$
جواب: $y = A\cos\omega t + \frac{B}{\omega}\sin\omega t$

سوال 6.54: $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1,\, y'(0) = -1$
جواب: $y = 4e^{2t} - 3e^{3t}$

سوال 6.55: $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 2,\, y'(0) = 1$
جواب: $y = e^{2t} + e^{-t}$

سوال 6.56: $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 2,\, y'(0) = 1$
جواب: $y = (2-t)e^{t}$

سوال 6.57: $y'' - ky' = 0, \quad y(0) = 2,\, y'(0) = k,\, k > 0$
جواب: $y = 1 + e^{kt}$

سوال 6.58: $y'' + ky' - 2k^2 y = 0, \quad y(0) = 2,\, y'(0) = 2k$
جواب: $y = 2e^{kt}$

سوال 6.59: جبری، بلا تقصیر ارتعاش
ثابت کریں کہ درج ذیل

$$y'' + \omega^2 y = r(t)$$

کے ضمنی مساوات کا حل درج ذیل ہے جہاں $r(t)$ کا لاپلاس بدل $R(s)$ ہے۔ ω مستقل ہے اور $r(t)$ جبری تفاعل ہے۔

$$Y(s) = \frac{sy(0) + y'(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{R(s)}{s^2 + \omega^2}$$

دھیان رہے کہ جواب کا پہلا جزو صرف اور صرف ابتدائی معلومات پر منحصر ہے جبکہ جواب کے دوسرے جزو پر ابتدائی معلومات کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

6.3 s محور پر منتقلی، t محور پر منتقلی،اکائی سیڑھی تفاعل

اب تک ہم لاپلاس بدل کے کئی خواص جان چکے ہیں۔ اس حصے میں دو مزید خصوصیات پیش کیے جائیں گے جنہیں s محور پر منتقلی (مسئلہ 6.6) اور t محور پر منتقلی (مسئلہ 6.7) کہتے ہیں۔

مسئلہ 6.6: s محور پر منتقلی؛ منتقلی کا پہلا مسئلہ
اگر $f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s)$ ہو جہاں $s > k$ ہے، تب $e^{at}f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s-a)$ ہو گا جہاں $s - a > k$ ہے۔یوں اگر

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

ہو تب

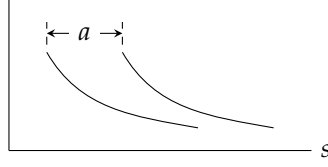
$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

ہو گا۔یوں اصل تفاعل کو e^{at} سے ضرب دینا، لاپلاس بدل میں s کی جگہ $s-a$ پر کرنے کے مترادف ہے یعنی لاپلاس بدل s محور پر اپنی جگہ سے سرک کر نئی جگہ منتقل ہو جاتا ہے (شکل 6.4 دیکھیں)۔

ثبوت : لاپلاس بدل کی تعریف

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

استعمال کرتے ہوئے s کی جگہ $s-a$ پر کرتے ہیں۔

□

شکل 6.4: منتقلی کا پہلا مسئلہ، s محور پر منتقلی

$$F(s-a)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-st}[e^{at}f(t)]\,\mathrm{d}t=\mathcal{L}[e^{at}f(t)]$$

مثال 6.13: قصری ارتعاش
جدول 6.1 میں $\cos\omega t$ اور $\sin\omega t$ کے بدل کو استعمال کرتے ہوئے جدول میں گیارہ اور بارہ شمار پر دیے گئے لاپلاس بدل کو مسئلہ 6.6 کی مدد سے فوراً لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t]=\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\qquad \mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\mathcal{L}(f)=\frac{4s+24}{s^2+2s+101}$$

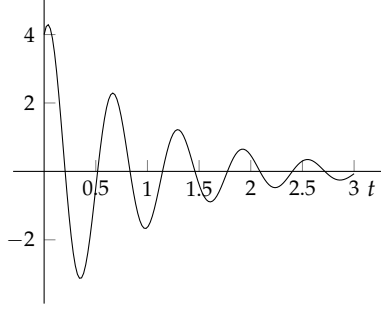
حل: اس کو درکار صورت

$$f=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4(s+1)+2(10)}{(s+1)^2+10^2}\right]=4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+10^2}\right]+2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)^2+10^2}\right]$$

میں لاتے ہوئے الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں

$$f=e^{-t}(4\cos 10t+2\sin 10t)$$

جسے شکل 6.5 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ قصری ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے۔ □

مثال 6.14: منتقلی کا پہلا مسئلہ استعمال کرتے ہوئے جدول 6.1 میں درج تفاعل t^n ، $\sin\omega t$ اور

شکل 6.5: قصری ارتعاش (مثال 6.13)

$\cos \omega t$ کو e^{at} سے ضرب دے کر لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}[e^{at}t^n] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$
$$\mathcal{L}[e^{at}\sin \omega t] = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}[e^{at}\cos \omega t] = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$$

□

مثال 6.15: قصری آزاد ارتعاش

چھت سے لٹکی لچکدار اسپرنگ کے نچلے سرے سے کمیت $m = 3$ لٹکائی گئی ہے۔اسپرنگ کا ینگ مقیاس لچک $k = 6$ ہے۔کمیت کے ساکن مقام سے فاصلہ $y(t)$ ہے۔کمیت کو ابتدائی طور پر $y(0) = 4$ پر رکھ کر اس کو ابتدائی رفتار $y'(0) = -3$ دی جاتی ہے۔فرض کریں کہ کمیت کی رفتار کے راست متناسب قصری قوت عمل کرتی ہے جہاں قصری مستقل $c = 12$ کے برابر ہے۔کمیت کی حرکت دریافت کریں۔

حل: کمیت کی حرکت کو درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ بیان کرتا ہے

$$y'' + 2y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 4,\ y'(0) = -3$$

جس کا ضمنی مساوات

$$s^2Y - 4s + 3 + 2(sY - 4) + 4Y = 0$$

ہے۔ ضمنی مساوات کا حل لکھتے ہیں۔

$$Y = \frac{4s+5}{s^2+2s+4} = \frac{4(s+1)}{(s+1)^2+3} + \frac{1}{(s+1)^2+3}$$

اب ہم جانتے ہیں کہ

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3}\right) = \cos\sqrt{3}t, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{s^2+3}\right) = \sin\sqrt{3}t$$

ہیں لہٰذا مسئلہ 6.6 کی مدد سے حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-t}(4\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t)$$

□

t محور پر منتقلی، اکائی سیڑھی تفاعل

منتقلی کے پہلے مسئلے میں ہم نے دیکھا کہ تفاعل $f(t)$ کو e^{at} سے ضرب دینا، لاپلاس بدل میں s کی جگہ $s-a$ لکھنے کے مترادف ہے۔اب ہم منتقلی کا دوسرا مسئلہ (مسئلہ 6.7) پیش کرتے ہیں جس کے تحت تفاعل $f(t)$ میں t کی جگہ $t-a$ پر کرنا، لاپلاس بدل $F(s)$ کو (تقریباً) e^{-as} سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔

مسئلہ 6.7: t محور پر منتقلی؛ منتقلی کا دوسرا مسئلہ
اگر تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل $F(s)$ ہو تب $e^{-as}F(s)$ ، جہاں $a>0$ ہے، درج ذیل تفاعل کا لاپلاس بدل ہو گا۔

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ f(t-a) & t>a \end{cases}$$

ہیوی سائیڈ سیڑھی تفاعل[11]، جسے شکل 6.6 میں دکھایا گیا ہے، کی تعریف[12] درج ذیل ہے۔ہیوی سائیڈ سیڑھی تفاعل کو **اکائی سیڑھی تفاعل**[13] بھی کہتے ہیں۔

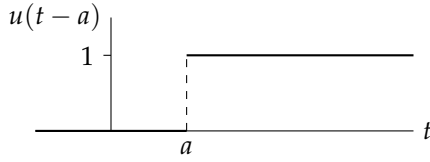
$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t>a \end{cases} \tag{6.16}$$

---

[11] Heaviside step function

[12] الیور ہیوی سائیڈ [1850-1925] خود لکھ پڑھ کر برقی مہندس، ریاضی دان اور ماہر طبیعیات بنے۔ یہ انگلستانی تھے۔

[13] unit step function

$u(t-a)$
1
a t

شکل 6.6: اکائی سیڑھی تفاعل $u(t-a)$

$t < a$ پر اکائی سیڑھی تفاعل کی قیمت صفر ہے جبکہ $t > a$ پر اس کی قیمت اکائی ہے۔ عین $t = a$ پر اکائی سیڑھی تفاعل غیر معین[14] ہے اور یہاں اس میں اکائی کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔

اکائی سیڑھی تفاعل کو زیر استعمال لاتے ہوئے ہم $\tilde{f}(t)$ کو $f(t-a)u(t-a)$ لکھ سکتے ہیں جس کی مثال شکل 6.7 میں دکھائی گئی ہے۔ اس طرح مسئلہ 6.7 کہتا ہے کہ

$$e^{-as}F(s) = \mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] \tag{6.17}$$

جسے الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = f(t-a)u(t-a) \tag{6.18}$$

ثبوت: مسئلہ 6.7 کا ثبوت
لاپلاس بدل کی تعریف سے

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $\tau + a = t$ پر کرتے ہوئے

$$e^{-as}F(s) = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,\mathrm{d}t$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اگر اندرون تکمل مقدار کی قیمت وقفہ $t = 0$ تا $t = a$ کے درمیان صفر کے برابر ہو تب اس تکمل کے حدود کو 0 تا ∞ لکھا جا سکتا ہے۔ یہی کچھ اندرونِ تکمل کو $u(t-a)$ سے ضرب دیتے ہوئے کرنا ممکن ہے لہٰذا درج بالا کو

$$e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]$$

undefined[14]

$f(t-a)$

$\leftarrow a \rightarrow$

a

t

$f(t) = \sin t$

t

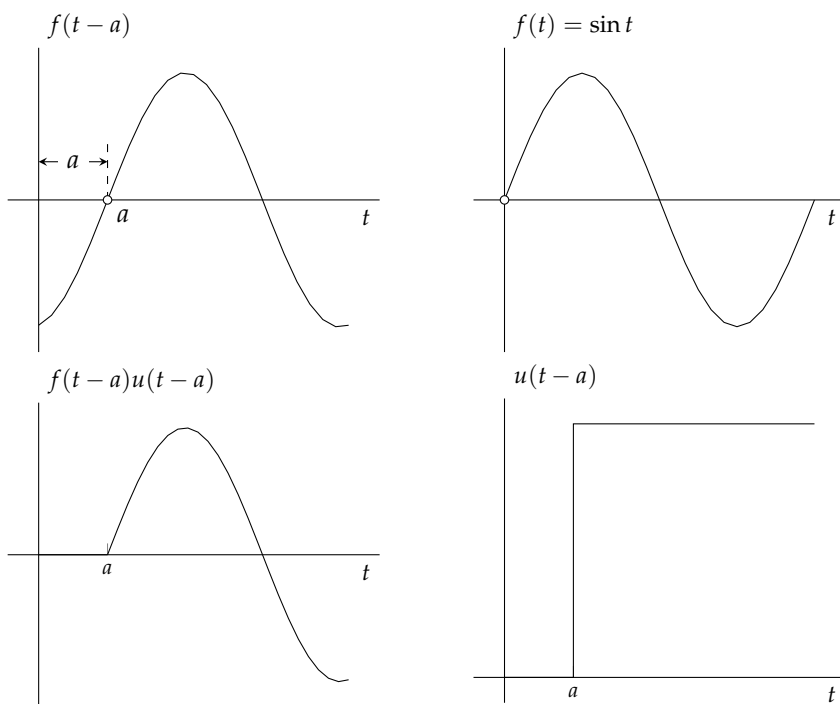
$f(t-a)u(t-a)$

a

t

$u(t-a)$

a

t

شکل 6.7: $f(t-a)u(t-a)$ جہاں $f(t) = \sin t$ ہے۔

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اکائی سیڑھی تفاعل نہایت اہم تفاعل ہے۔آئیں اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔لاپلاس بدل کی تعریف سے

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st}u(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_0^a e^{-st}0\,\mathrm{d}t + \int_a^\infty e^{-st}1\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_a^\infty$$

لکھتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے جہاں $s > 0$ ہے۔

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s} \qquad (s > 0) \tag{6.19}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $a = 0$ کی صورت میں $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$ ملتا ہے۔

لاپلاس بدل کی عملی استعمال

لاپلاس بدل کے بارے میں اب ہم اتنا جانتے ہیں کہ اس کو استعمال کرتے ہوئے ایسے مشکل مسائل (مثلاً مثال 6.18، مثال 6.19 اور مثال 6.20) حل کریں جنہیں دیگر طریقوں سے حل کرنا نسبتاً زیادہ دشوار ہو گا۔

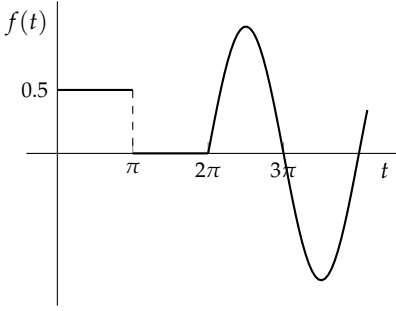
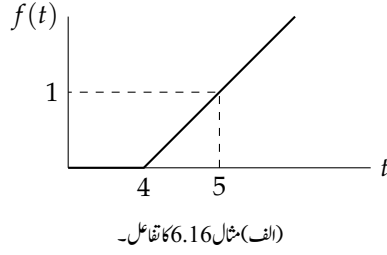
مثال 6.16: تفاعل $\frac{e^{-4s}}{s^2}$ کا الٹ لاپلاس بدل دریافت کریں۔

حل:چونکہ $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) = t$ ہے لہٰذا مسئلہ 6.7 کے استعمال سے درج ذیل ملتا ہے۔ شکل 6.8-الف دیکھیں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s^2}\right) = (t-4)u(t-4)$$

□

مثال 6.17: شکل 6.8-ب میں درج ذیل تفاعل دکھایا گیا ہے۔اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$f(t) = \begin{cases} 0.5 & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \end{cases}$$

(ب) مثال 6.17 کا تفاعل۔

(الف) مثال 6.16 کا تفاعل۔

شکل 6.8: مثال 6.16 اور مثال 6.17 کے تفاعل۔

حل: اکائی سیڑھی تفاعل کی مدد سے دیے گئے تفاعل کو لکھتے ہیں

$$f(t) = 0.5u(t) - 0.5u(t-\pi) + u(t-2\pi)\sin t$$

جہاں $\sin(t-2\pi) = \sin t$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 6.19، مساوات 6.17 اور جدول 6.1 کی مدد سے لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

□

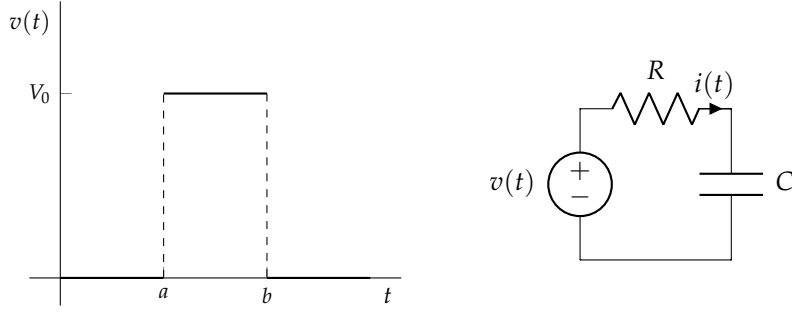
مثال 6.18: ایک عدد چکور موج پر RC دور کا رد عمل

مزاحمت اور برق گیر کا سلسلہ وار دور شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو ایک عدد چکور موج $v(t)$ مہیا کی جاتی ہے۔ دور میں برقی رو $i(t)$ دریافت کریں۔ شکل 6.9 سے رجوع کریں۔

حل: کرخوف مساوات دباو سے

$$i(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = v(t)$$

لکھ سکتے ہیں جہاں داخلی دباو کو دو عدد اکائی سیڑھی تفاعل کی مدد سے

$$v(t) = V_0(u(t-a) - u(t-b))$$

شکل 6.9: مثال 6.18 کا دور اور داخلی دباو۔

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 6.19 اور مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ضمنی مساوات لکھتے ہیں

$$I(s)R + \frac{I(s)}{sC} = \frac{V_0}{s}[e^{-as} - e^{-bs}]$$

جس کا حل درج ذیل ہے۔

$$I(s) = \left(\frac{\frac{V_0}{R}}{s + \frac{1}{RC}}\right)[e^{-as} - e^{-bs}]$$

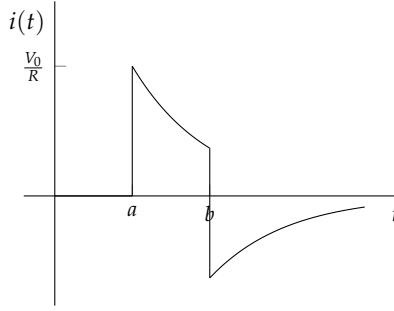
اب ہم جدول 6.1 سے جانتے ہیں کہ

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{V_0}{R}}{s + \frac{1}{RC}}\right) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

کے برابر ہے لہٰذا اصل حل مسئلہ 6.7 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}(I) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] - \mathcal{L}^{-1}[e^{-bs}F(s)] \\ &= \frac{V_0}{R}[e^{-\frac{(t-a)}{RC}}u(t-a) - e^{-\frac{(t-b)}{RC}}u(t-b)] \end{aligned}$$

جس کو یوں

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ K_1 e^{-\frac{t}{RC}} & a < t < b \\ (K_1 - K_2)e^{-\frac{t}{RC}} & t > b \end{cases}$$

شکل 6.10: مثال 6.18 کی رو $i(t)$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں $K_1=\frac{V_0}{R}e^{\frac{a}{RC}}$ اور $K_2=\frac{V_0}{R}e^{\frac{b}{RC}}$ ہیں۔ برقی رو $i(t)$ کو شکل 6.10 میں دکھایا گیا ہے۔ □

مثال 6.19: بلا تقصیر نظام کا رد عمل۔ ایک عدد چکور داخلی موج
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں جہاں $r(t)$ کو شکل 6.20 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y''+4y=r(t), \qquad y(0)=0,\, y'(0)=0$$

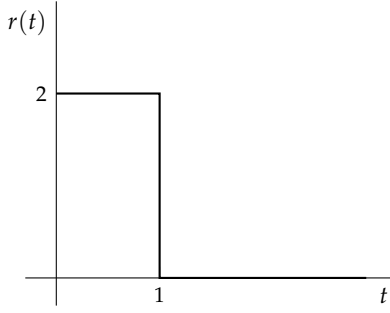
حل: داخلی جبری قوت کو $r(t)=2[u(t)-u(t-1)]$ لکھا جا سکتا ہے۔ دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلے سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں

$$s^2Y+4Y=\frac{2}{s}(1-e^{-s})$$

جس کا حل درج ذیل ہے۔

$$Y=\frac{2}{s(s^2+4)}(1-e^{-s})$$

اب جدول 6.1 کے تحت $\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s^2+4})=\sin 2t$ ہے لہذا مساوات 6.12 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s^2+4)}\right]=\int_0^t \sin 2\tau \,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

شکل 6.11: مثال 6.19 اور مثال 6.20 کا داخلی تفاعل۔

اب مسئلہ 6.7 زیر استعمال لاتے ہوئے اصل جواب لکھتے ہیں

$$y(t) = \frac{1}{2}[1 - \cos 2t] - \frac{1}{2}[1 - \cos 2(t-1)]u(t-1)$$

جس کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ رد عمل دو مختلف ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 - \cos 2t] & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2}[\cos 2(t-1) - \cos 2t] & t > 1 \end{cases}$$

□

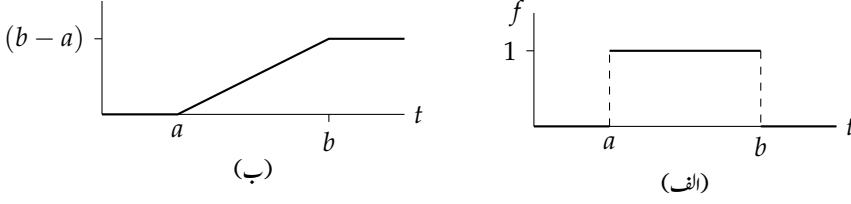
مثال 6.20: قصری نظام کا رد عمل۔ ایک عدد چکور موج
درج ذیل قصری ابتدائی قیمت مسئلے کو حل کریں جہاں $r(t)$ کو شکل 6.11 میں دکھایا گیا ہے۔

$$y'' + 4y' + 3y = r(t) \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

حل: ضمنی مساوات لکھ کر

$$s^2Y + 4sY + 3Y = \frac{2}{s}(1 - e^{-s})$$

حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$Y = \frac{2}{s(s+1)(s+3)}(1 - e^{-s})$$

شکل 6.12: مثال 6.21 کے اشکال۔

$F(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+3)}$ کا جزوی کسری پھیلاو

$$F(s) = \frac{2}{3s} + \frac{1}{3(s+3)} - \frac{1}{s+1}$$

ہے لہٰذا

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{2}{3} + \frac{e^{-3t}}{3} - e^{-t}$$

ہو گا۔یوں مسئلہ 6.7 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}(Fe^{-s}) = f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{e^{-3(t-1)}}{3} - e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases}$$

ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے اصل حل لکھتے ہیں۔

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = f(t) - f(t-1)u(t-1) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{e^{-3t}}{3} - e^{-t} & 0 < t < 1 \\ (1-e^3)\frac{e^{-3t}}{3} - (1-e)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

□

مثال 6.21: شکل 6.12-الف میں تفاعل $f(t)$ اور شکل-ب میں اس کا تکمل دکھایا گیا ہے۔ $f(t)$ کے بدل سے شکل-ب کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: شکل 6.12-الف کا لاپلاس بدل $F = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$ ہے لہٰذا شکل-ب کا بدل $\frac{F}{s} = \frac{e^{-as}-e^{-bs}}{s^2}$ ہو گا۔
□

سوالات

سوال 6.60 تا سوال 6.75 منتقلی s پر مبنی ہیں۔ سوال 6.60 تا سوال 6.67 میں لاپلاس بدل جبکہ سوال 6.68 تا سوال 6.75 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.60: $e^{-3t}\sin 4t$
جواب: $\frac{4}{(s+3)^2+16}$

سوال 6.61: $e^{-t}\cos(\omega t-\theta)$
جواب: $\frac{(s+1)\cos\theta+\omega\sin\theta}{(s+1)^2+\omega^2}$

سوال 6.62: $e^{-at}(A\sin\omega t+B\cos\omega t)$
جواب: $\frac{\omega A+(s+a)B}{(s+a)^2+\omega^2}$

سوال 6.63: $e^{2t}(3t-4t^2)$
جواب: $\frac{3}{(s-2)^2}-\frac{8}{(s-2)^3}$

سوال 6.64: te^{2t}
جواب: $\frac{1}{(s-2)^2}$

سوال 6.65: $e^{-3t}\sin 5t$
جواب: $\frac{5}{(s+3)^2+5^2}$

سوال 6.66: $0.25e^{-1.5t}\cos(3\pi t)$
جواب: $\frac{0.25(s+1.5)}{(s+1.5)^2+(3\pi)^2}$

سوال 6.67: $\sinh t\sin\omega t$
جواب: $\frac{1}{2}\left[\frac{\omega}{(s-1)^2+\omega^2}-\frac{\omega}{(s+1)^2+\omega^2}\right]$

سوال 6.68: $\frac{m}{(s+n)^2}$
جواب: mte^{-nt}

سوال 6.69: $\frac{3}{(s+5)^4}$
جواب: $\frac{t^3e^{-5t}}{2}$

سوال 6.70: $\frac{3}{(s+\sqrt{5})^3}$

جواب: $\frac{3t^2e^{-\sqrt{5}t}}{2}$

سوال 6.71: $\frac{4}{s^2+2s+5}$

جواب: $2e^{-t}\sin 2t$

سوال 6.72: $\frac{\pi}{s^2+8\pi s+17\pi^2}$

جواب: $e^{-4\pi t}\sin \pi t$

سوال 6.73: $\frac{3s+22}{s^2+8s+41}$

جواب: $e^{-4t}(2\sin 5t+3\cos 5t)$

سوال 6.74: $\frac{s+a+b}{(s+a)^2+b^2}$

جواب: $e^{-at}(\cos bt+\sin bt)$

سوال 6.75: $\frac{a}{s+c}+\frac{b}{(s+c)^2}$

جواب: $(a+bt)e^{-ct}$

سوال 6.76 تا سوال 6.79 میں بذلولی سائن اور بذلولی کوسائن کو قوت نمائی تفاعل کی صورت میں لکھ کر لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.76: $e^{-at}\sinh \omega t$

جواب: $\frac{\omega}{(s+a)^2-\omega^2}$

سوال 6.77: $\sinh at\sin at$

جواب: $\frac{2a^2s}{s^4+4a^4}$

سوال 6.78: $\sinh at\sin \omega t$

جواب: $\frac{\omega}{2[(s-a)^2+\omega^2]}-\frac{\omega}{2[(s+a)^2+\omega^2]}$

سوال 6.79: $t\cosh at$

جواب: $\frac{1}{2(s-a)^2}+\frac{1}{2(s+a)^2}$

سوال 6.80 تا سوال 6.83 میں $\mathcal{L}^{-1}$ دریافت کریں۔

سوال 6.80: $\frac{s+4}{(s+1)^2+9}$
جواب: $e^{-t}(\cos 3t + \sin 3t)$

سوال 6.81: $\frac{s-2}{s^2+4s+8}$
جواب: $e^{-2t}(\cos 2t - 2\sin 2t)$

سوال 6.82: $\frac{2}{(s+1)^3} - \frac{6}{(s+1)^4}$
جواب: $e^{-t}(t^2+t^3)$

سوال 6.83: $\frac{as+b}{(s-c)^2+\omega}$
جواب: $e^{ct}\left[\frac{(ac+b)}{\omega}\sin \omega t + a\cos \omega t\right]$

سوال 6.84 تا سوال 6.87 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔انہیں لاپلاس بدل کی استعمال سے حل کریں۔

سوال 6.84: $y''+2y'+10y=0, \qquad y(0)=-2,\, y'(0)=1$
جواب: $y=-e^{-t}(2\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t)$

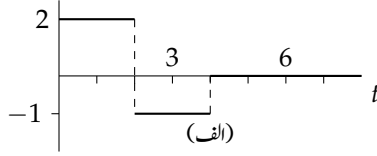
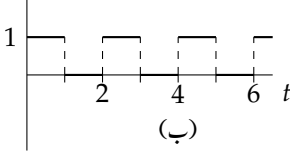
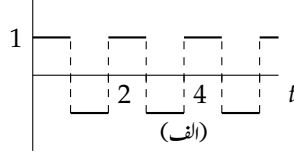
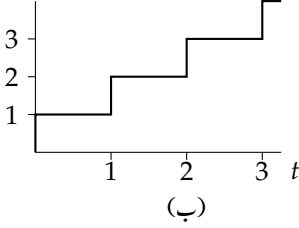
سوال 6.85: $y''-6y'+9y=0, \qquad y(0)=1,\, y'(0)=2$
جواب: $y=(1-t)e^{3t}$

سوال 6.86: $y''-2y'+5y=0, \qquad y(0)=-1,\, y'(0)=1$
جواب: $y=e^{t}(\sin 2t-\cos 2t)$

سوال 6.87: $y''+10y'+25=0, \qquad y(0)=2,\, y'(0)=-1$
جواب: $y=(9t+2)e^{-5t}$

اکائی سیڑھی تفاعل استعمال کرتے ہوئے سوال 6.88 تا سوال 6.93 میں دیے گئے خطوط کو لکھ کر ان کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.88: شکل 6.13-الف میں دکھائے گیے خط بقایا تمام t پر صفر کے برابر ہے۔

جواب: $\frac{1}{s}(2-3e^{-2s}+e^{-4s})$

شکل 6.13: سوال 6.88 اور سوال 6.89 کے اشکال۔

شکل 6.14: سوال 6.90 اور سوال 6.91 کے اشکال۔

سوال 6.89: شکل 6.13-ب مسلسل موج ہے۔

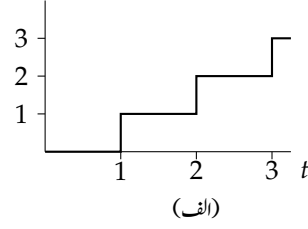
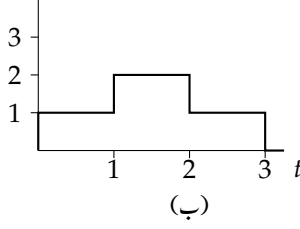
جواب:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= u(t) - u(t-1) + u(t-2) - u(t-3) + u(t-4) - u(t-5) + - \cdots \\
\mathcal{L}(f) &= \frac{1}{s}(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - e^{-5s} + - \cdots) \\
&= \frac{1}{s}\left[\frac{1-(-e^{-s})^n}{1+e^{-s}}\right] = \frac{1}{s(1+e^{-s})}
\end{aligned}
$$

$n \to \infty$ ، $s > 0$ پر $e^{-sn} \to 0$ ہو گا۔

سوال 6.90: شکل 6.14-الف مسلسل موج ہے۔

جواب:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= u(t) - 2u(t-1) + 2u(t-2) - 2u(t-3) + 2u(t-4) - 2u(t-5) + - \cdots \\
\mathcal{L}(f) &= \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s} + \frac{2e^{-4s}}{s} - \frac{2e^{-5s}}{s} + - \cdots \\
&= -\frac{1}{s} + \frac{2}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s} + \frac{2e^{-4s}}{s} - + \cdots = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s(1+e^{-s})}
\end{aligned}
$$

شکل 6.15: سوال 6.92 اور سوال 6.93 کے اشکال۔

سوال 6.91: شکل 6.14-ب مسلسل موج ہے۔

جواب:

$$f(t) = u(t) + u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + u(t-4) + \cdots$$
$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} + \cdots = \frac{1}{s(1-e^{-s})}$$

سوال 6.92: شکل 6.15-الف مسلسل موج ہے۔

جواب:

$$f(t) = u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + u(t-4) + \cdots$$
$$\mathcal{L}(f) = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} + \cdots = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

سوال 6.93: شکل 6.15-ب غیر مسلسل موج ہے۔بقایا تمام t پر موج صفر کے برابر ہے۔

جواب: $\frac{1}{s}(1 + e^{-s} - e^{-2s} - e^{-3s})$

سوال 6.94 تا سوال 6.97 میں الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.94: $\frac{e^{-2s} - e^{-3s}}{s}$

جواب: $f = u(t-2) - u(t-3)$ یعنی $2 < t < 3$ کے لئے $f = 1$ ہے جبکہ بقایا اوقات $f = 0$ ہے۔

سوال 6.95: $\frac{e^{-s}}{s^2}$
جواب: $(t-1)u(t-1)$

سوال 6.96: $\frac{e^{-s}+2e^{-2s}-4e^{-3s}}{s^2}$
جواب: $1 < t < 2$ ، $t < 1$ ، $2 < t < 3$ اور $3 < t$ پر $f = 0$ ، $f = t - 1$ ، $f = 3t - 5$ اور $f = -t + 11$ ہیں۔

سوال 6.97: $\frac{6(e^{-2s}-e^{-3s})}{s^3}$
جواب: $t < 2$ ، $2 < t < 3$ اور $3 < t$ کے لئے $f = 0$ ، $f = (t-2)^2$ اور $f = 2t - 5$ ہے۔

سوال 6.98 تا سوال 6.102 کے لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.98: $(t-3)u(t-3)$
جواب: $\frac{e^{-3s}}{s^2}$

سوال 6.99: $tu(t)$
جواب: $\frac{1}{s^2}$

سوال 6.100: $u(t-\pi)\sin t$
جواب: $\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$

سوال 6.101: $u(t-\frac{2\pi}{\omega})\sin\omega t$
جواب: $\frac{\omega(1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}})}{s^2+\omega^2}$

سوال 6.102: $t^2u(t-1)$
جواب: $\frac{(s^2+2s+2)e^{-s}}{s^3}$

سوال 6.103 تا سوال 6.105 کے تفاعل دیے گئے وقفے کے باہر صفر کے برابر ہیں۔ ان کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.103: $(0 < t < \frac{\pi}{\omega})$ $\quad A\sin\omega t$
جواب: $\frac{A}{s^2+\omega^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{\omega}})$

سوال 6.104: $(0 < t < \frac{\pi}{2\omega}) \qquad A\cos\omega t$

جواب: $\frac{A}{s^2+\omega^2}(s+\omega e^{-\frac{\pi s}{2\omega}})$

سوال 6.105: $(0 < t < 1) \qquad t^2$

جواب: $\frac{2-(s^2+2s+2)e^{-s}}{s^3}$

سوال 6.106 تا سوال 6.111 کے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.106: $\frac{e^{-3s}}{s}$

جواب: $u(t-3)$

سوال 6.107: $\frac{e^{-4s}}{s^2}$

جواب: $(t-4)u(t-4)$

سوال 6.108: $\frac{e^{-3s}}{s-4}$

جواب: $e^{4(t-3)}u(t-3)$

سوال 6.109: $\frac{\omega e^{-2s}}{s^2+\omega^2}$

جواب: $\sin[\omega(t-2)]u(t-2)$

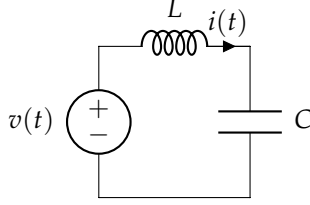
سوال 6.110: $\frac{1-e^{-2s}}{s^2+9}$

جواب: $\frac{1}{3}\sin 3tu(t) - \frac{1}{3}\sin[3(t-2)]u(t-2)$

سوال 6.111: $\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}$

جواب: وقفہ $t > \pi$ پر تفاعل $f = -e^{(\pi-t)}\sin(t-\pi)u(t-\pi)$ ہے۔ بقایا اوقات تفاعل صفر کے برابر ہے۔

سوال 6.112 تا سوال 6.113 میں $L = 1\,\text{H}$ اور $C = 1\,\text{F}$ لیتے ہوئے برقی رو $i(t)$ دریافت کریں۔ داخلی دباو $v(t)$ سوال میں دیا گیا ہے۔

سوال 6.112: $0 < t < a$ داخلی دباو $v(t) = t$ ہے۔ بقایا اوقات $v(t) = 0$ ہے۔

شکل 6.16: سوال 6.112 تا سوال 6.113 کا دور۔

جواب:

$$
\begin{gathered}
Li' + \frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t = t[1-u(t-a)] = t-(t-a)u(t-a)-au(t-a) \\
i = \begin{cases} 1-\cos t & 0<t<a \\ \cos(t-a)-a\sin(t-a)-\cos t & t>a \end{cases}
\end{gathered}
$$

سوال 6.113: $0<t<\pi$ پر $v(t)=1-e^{-t}$ ہے جبکہ بقایا اوقات $v(t)=0$ ہے۔

جواب:

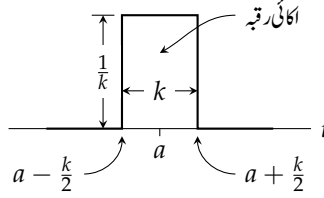
$$
i = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{-t}-\cos t+\sin t) & 0<t<a \\ -\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})\cos t+\frac{1}{2}(3-e^{-\pi})\sin t & t>\pi \end{cases}
$$

سوال 6.114: ثابت کریں کہ اگر $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ ہو تب $\mathcal{L}[f(at)]=\frac{F(\frac{s}{a})}{a}$ ہو گا۔ اس کلیے کو استعمال کرتے ہوئے $\cos t$ کے لاپلاس بدل سے $\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

سوال 6.115: ثابت کریں کہ مساوات 6.17 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو عملاً زیادہ بہتر صورت ہے۔

$$
e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)] = \mathcal{L}[f(t)u(t-a)] \tag{6.20}
$$

جواب: نیا تفاعل $\tilde{f}(t)$ جہاں $\tilde{f}(t)=f(t+a)$ ہے زیر استعمال لاتے ہیں۔ یوں $f(t)=\tilde{f}(t-a)$ ہو گا۔ یوں مساوات 6.17 سے درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$
\mathcal{L}[f(t)u(t-a)] = \mathcal{L}[\tilde{f}(t-a)u(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[\tilde{f}(t)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)]
$$

شکل 6.17: ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔

6.4 ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل۔اکائی ضرب تفاعل۔ جزوی کسری پھیلاو

الیکٹران کی کمیت کو نقطہ کمیت تصور کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح اس کی برقی بار کو نقطہ بار تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں کارتیسی محور کے مبدا پر موجود الیکٹران کی کمیت مبدا پر پائی جائے گی جبکہ مبدا سے ہٹ کر کسی بھی نقطے پر کمیت صفر کے برابر ہو گی۔نقطہ کمیت یا نقطہ بار کو **ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل**[15] سے ظاہر[16] کیا جاتا ہے۔اسی طرح گیند کو بلے سے مارتے ہوئے یا بندوق سے گولی چلاتے وقت انتہائی کم دورانیے کے لئے قوت عمل میں آتی ہے۔ایسی قوت کو بھی ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایسی برقی یا میکانی قوت (یا عمل) جو انتہائی کم دورانیے کے لئے کار آمد ہو کو **ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل** سے ظاہر کرتے ہوئے مسئلے کو لاپلاس بدل کی مدد سے نہایت عمدگی کے ساتھ حل کیا جا سکتا ہے۔

ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل کو شکل 6.17 کی مدد سے سمجھتے ہیں جس میں درج ذیل تفاعل دکھایا گیا ہے، جہاں k مثبت اور چھوٹی قیمت ہے۔

$$f_k(t-a)=\begin{cases}\frac{1}{k} & a-\frac{k}{2}<t<a+\frac{k}{2}\\ 0 & \text{بقایا } t\end{cases} \tag{6.21}$$

یہ تفاعل کسی ایسی قوت کو ظاہر کر سکتی ہے جس کی مقدار $\frac{1}{k}$ ہو اور جو لمحہ $t=a-\frac{k}{2}$ تا $t=a+\frac{k}{2}$ عمل پیرا ہو۔ میکانیات میں ایسی قوت کا، لمحہ $t=a-\frac{k}{2}$ تا $t=a+\frac{k}{2}$ ، **تکمل میکانی ضرب**[17] کہلاتی ہے۔برقی

---

[15] Dirac delta function

[16] ماہر طبیعیات، پال اڈرین مارٹ ڈیراک [1902-1984] (جرمنی کے ارون روڈالف یوسف شروڈنگر کے ساتھ مشترق) نوبل انعام یافتہ [1933]، انگلستان کے رہائشی (جن کا تعلق سوئزرلینڈ سے تھا) نے کوانٹم میکانیات میں کلیدی کردار ادا کیا۔

[17] impulse

میدان میں ایسے برقی دباو کو برقی ضرب کہا جاتا ہے۔ شکل 6.17 میں ضرب درج ذیل ہے۔

$$I_k = \int_0^{\infty} f_k(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_{a-\frac{k}{2}}^{a+\frac{k}{2}} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = 1 \tag{6.22}$$

آئیں دیکھتے ہیں کہ k کی قیمت کم سے کم کرنے سے ضرب کی قیمت پر کیا اثر پڑتا ہے۔ہم f_k کی قیمت کی حد $k \to 0$ پر حاصل کرتے ہیں جہاں $k > 0$ ہے۔اس حد کو **ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل** یا **اکائی ضرب تفاعل**[18] پکارا اور $\delta(t-a)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\delta(t-a) = \lim_{k \to 0} f_k(t-a) \tag{6.23}$$

$\delta(t-a)$ کو، احصاء میں سادہ تفاعل کی رسمی مطلب کے تحت تفاعل نہیں سمجھا جا سکتا ہے البتہ اسے عمومی تفاعل[19] کے تحت تفاعل سمجھا جا سکتا ہے۔یہ حقیقت سمجھنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ f_k کا I_k اکائی (1) ہے لہٰذا مساوات 6.21 اور مساوات 6.22 میں $k \to 0$ پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases} \qquad \int_0^{\infty} \delta(t-a)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{6.24}$$

جبکہ احصاء کے تحت، ایسے تفاعل کا تکمل صفر کے برابر ہو گا جس کی قیمت، ماسوائے کسی ایک نقطہ پر، صفر کے برابر ہو۔ اس کے باوجود ضرب تفاعل استعمال کرتے ہوئے، اپنی آسانی کی خاطر، ہم $\delta(t-a)$ کو سادہ تفاعل تصور کرتے ہیں۔بالخصوص $\delta(t-a)$ کی چھلنی[20] کی خاصیت استعمال کرتے ہوئے استمراری تفاعل $g(t)$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_0^{\infty} g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_0^{a_-} g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t + \int_{a_-}^{a_+} g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t + \int_{a_+}^{\infty} g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t$$

چونکہ $t \neq 0$ پر $\delta(t-a) = 0$ ہے لہٰذا درج بالا دائیں ہاتھ پہلا اور تیسرا تکمل صفر کے برابر ہیں۔یوں

$$\int_0^{\infty} g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = \int_{a_-}^{a_+} g(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = g(a)\int_{a_-}^{a_+} \delta(t-a)\,\mathrm{d}t = g(a) \tag{6.25}$$

---

[18] unit impulse function

[19] روسی ریاضی دان سرگی لووچ سوبولو [1908-1989] نے عمومی تفاعل کے نظریے کی بنیاد رکھی۔

[20] sifting property

حاصل ہوتا ہے۔نقطہ a لامتناہی کم وسعت کا ہو گا جس پر $g(t)$ کی قیمت میں تبدیلی کو رد کیا جا سکتا ہے۔یوں اس نقطے پر $g(t)$ کی قیمت، مستقل مقدار $g(a)$ ہو گی۔اس مستقل مقدار $g(a)$ کو تکمل کے باہر لے جایا گیا ہے جبکہ $\delta(t-a)$ کا تکمل اکائی کے برابر ہے۔

$\delta(t-a)$ کا لاپلاس بدل حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$f_k(t-a) = \frac{1}{k}u[t-(a-\tfrac{k}{2})] - \frac{1}{k}u[t-(a+\tfrac{k}{2})]$$

لہٰذا

$$\mathcal{L}(f_k) = \frac{e^{-(a-\frac{k}{2})s}}{ks} - \frac{e^{-(a+\frac{k}{2})s}}{ks} = e^{-as}\left(\frac{e^{\frac{ks}{2}} - e^{-\frac{ks}{2}}}{ks}\right)$$

ہو گا۔اب $k \to 0$ پر درج بالا $\mathcal{L}[\delta(t-a)]$ دے گا۔ہم $e^{\mp x} = 1 \mp x + \frac{x^2}{2!} \mp + \cdots$ استعمال کرتے ہوئے قوسین کو پھیلا کر لکھتے ہیں۔

$$\frac{e^{\frac{ks}{2}} - e^{-\frac{ks}{2}}}{ks} = \frac{(1 + \frac{ks}{2} + \frac{(\frac{ks}{2})^2}{2!} + \cdots) - (1 - \frac{ks}{2} + \frac{(\frac{ks}{2})^2}{2!} - \cdots)}{ks} = \frac{ks + \frac{1}{3}(\frac{ks}{2})^3 + \cdots}{ks}$$

یوں $k \to 0$ پر قوسین کی حد درج ذیل ہو گی

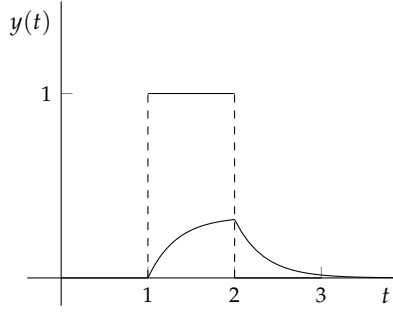
$$\lim_{k\to 0} \frac{ks + \frac{1}{3}(\frac{ks}{2})^3 + \cdots}{ks} = 1$$

لہٰذا ڈیراک ڈیلٹائی تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as} \tag{6.26}$$

اکائی سیڑھی تفاعل اور اکائی ضرب تفاعل کے لاپلاس بدل جانتے ہوئے، آئیں اب سادہ تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے لاپلاس بدل کی طاقت دیکھیں۔آپ مثال 6.22، مثال 6.23 اور مثال 6.27 کو دیگر طریقوں سے حل کر کے تسلی کر سکتے ہیں کہ لاپلاس بدل کا طریقہ نہایت عمدہ ہے۔

مثال 6.22: درج ذیل اسپرنگ اور کمیت کی قصری نظام (حصہ 2.8) کا رد عمل، شکل 6.18 میں دکھائے گئے، اکائی چکور جبری قوت کی صورت میں حاصل کریں۔

$$y'' + 4y' + 3y = r(t) = u(t-1) - u(t-2) \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \tag{6.27}$$

شکل 6.18: اسپرنگ اور کمیت کا قصری نظام (مثال 6.22)۔

حل: دیے گئے تفرقی مساوات سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں۔ایسا مساوات 6.5، مساوات 6.6 اور مساوات 6.19 کی مدد سے کیا جائے گا۔

$$s^2Y + 4sY + 3Y = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

ضمنی مساوات کا حل

$$Y = \frac{1}{s(s^2+4s+3)}(e^{-s} - e^{-2s}) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}(e^{-s} - e^{-2s})$$

ہے جس کا جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہے۔

$$Y = \left[\frac{1}{3s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{6(s+3)}\right](e^{-s} - e^{-2s})$$

چکور قوسین کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{6(s+3)}\right] = \frac{1}{3} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-3t}}{6}$$

مسئلہ 6.7 کی مدد سے حل $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)(e^{-s} - e^{-2s})]$ لکھتے ہیں جسے شکل 6.18 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Fe^{-s}) - \mathcal{L}(Fe^{-2s}) = f(t-1)u(t-1) - f(t-2)u(t-2) \\ &= \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{3} - \frac{e^{-(t-1)}}{2} + \frac{e^{-3(t-1)}}{6} & 1 < t < 2 \\ -\frac{e^{-(t-1)}}{2} + \frac{e^{-(t-2)}}{2} + \frac{e^{-3(t-1)}}{6} - \frac{e^{-3(t-2)}}{6} & t > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

□

مثال 6.23: گزشتہ مثال میں اسپرنگ اور کمیت کے نظام پر اکائی چکور قوت لاگو کی گئی۔موجودہ مثال میں اسپرنگ اور کمیت کی اسی نظام کو لمحہ $t=1$ پر ہتھوڑی سے اکائی ضرب لگایا جاتا ہے۔نظام کا رد عمل دریافت کریں۔

حل:نظام کی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y''+4y'+3y=r(t)=\delta(t-1) \qquad y(0)=0,\, y'(0)=0$$

جس کی ضمنی مساوات

$$s^2Y+4sY+3Y=e^{-s}$$

کا حل لکھتے ہیں۔

$$Y=\frac{1}{(s+1)(s+3)}e^{-s}=\left[\frac{1}{2(s+1)}-\frac{1}{2(s+3)}\right]e^{-s}$$

چکور قوسین کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2(s+1)}-\frac{1}{2(s+3)}\right]=\frac{e^{-t}}{2}-\frac{e^{-3t}}{2}$$

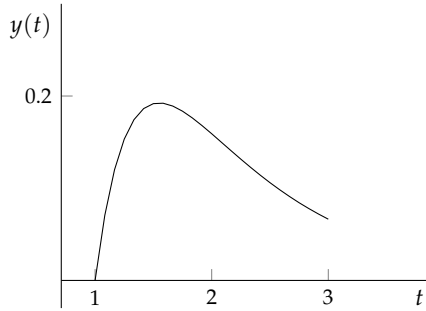
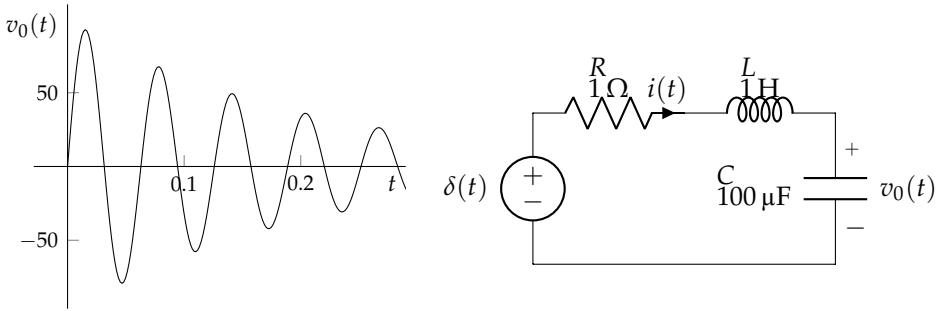
جس کو استعمال کرتے ہوئے $y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)$ حاصل کرتے ہیں جسے شکل 6.19 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}y(t)&=\mathcal{L}^{-1}[Fe^{-s}]=f(t-1)u(t-1)\\&=\begin{cases}0 & 0<t<1\\ \frac{e^{-(t-1)}}{2}-\frac{e^{-3(t-1)}}{2} & t>1\end{cases}\end{aligned}$$

□

مثال 6.24: سلسلہ وار جڑے مزاحمت، امالہ اور برق گیر کو لمحہ $t=0$ پر اکائی ضرب دباو مہیا کیا جاتا ہے۔اس برقی دور کو شکل 6.20 میں دکھایا گیا ہے۔برق گیر پر دباو $v_0(t)$ دریافت کریں۔

حل:مسئلے کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں

$$Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t=Lq''+Rq'+\frac{q}{C}=\delta(t)$$

شکل 6.19: اکائی ضرب پر اسپرنگ اور کمیت کے نظام کا ردعمل (مثال 6.23)۔

شکل 6.20: سلسلہ وار دور (مثال 6.24)۔

جس کی ضمنی مساوات درج ذیل ہے جہاں برقی پرزوں کی قیمتیں بھی پر کی گئی ہیں۔

$$(s^2+10s+10000)Q=1$$

ضمنی مساوات کا حل

$$Q=\frac{1}{(s+5)^2+9975}\approx\frac{1}{(s+5)^2+99.87^2}$$

ہے جس کے الٹ لاپلاس بدل سے q حاصل کرتے ہوئے $v_0=\frac{q}{C}$ دریافت کرتے ہیں۔

$$q(t)=\frac{e^{-5t}}{99.87}\sin 99.87t \qquad \implies \qquad v_0(t)=\frac{q(t)}{C}=100.13e^{-5t}\sin 99.87t$$

□

جزوی کسری پھیلاو پر مزید تبصرہ

ہم نے دیکھا کہ عموماً ضمنی مساوات کی صورت $Y(s)=\frac{F(s)}{G(s)}$ ہوتی ہے جہاں $F(s)$ اور $G(s)$ کثیر رکنی ہوتے ہیں۔الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے حل $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ حاصل کیا جاتا ہے۔الٹ لاپلاس بدل لینے سے پہلے کسر کو جزوی کسری پھیلاو کی مدد سے ایسے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے کہ ہر ٹکڑے کا الٹ لاپلاس بدل با آسانی حاصل کرنا ممکن ہو۔

$G(s)$ میں غیر دہراتے جزو $s-a$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $W(s)$ بقایا حصے کو ظاہر کرتی ہے۔

$$Y(s)=\frac{F(s)}{G(s)}=\frac{()()\cdots()}{(s-a)()\cdots()}=\frac{A}{s-a}+W(s) \tag{6.28}$$

یوں $s-a$ سے حاصل رکن $\frac{A}{s-a}$ کا الٹ لاپلاس بدل Ae^{at} ہے۔اسی طرح زیادہ طاقتی اجزاء $(s-a)^2$ اور $(s-a)^3$ درج ذیل ارکان دیتے ہیں

$$\frac{A_1}{(s-a)}+\frac{A_2}{(s-a)^2} \quad \text{اور} \quad \frac{A_1}{s-1}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\frac{A_3}{(s-a)^3} \tag{6.29}$$

جن کے الٹ لاپلاس بدل $(A_1+A_2t)e^{at}$ اور $(A_1+A_2t+\frac{1}{2}A_3t^2)e^{at}$ ہیں۔

دہراتے جزو $(s-a)^m$ کی صورت میں جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہو گا

$$\frac{F(s)}{G(s)} = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \frac{A_m}{(s-a)^m} + W(s) \tag{6.30}$$

جس کے دونوں اطراف کو $(s-a)^m$ سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(s-a)^m \frac{F(s)}{G(s)} = A_1(s-a)^{m-1} + A_2(s-a)^{m-2} + \cdots + A_{m-1}(s-a) + A_m \tag{6.31}$$

یوں $s=a$ پر کرتے ہوئے

$$A_m = \left.\frac{(s-a)^m F(s)}{G(s)}\right|_{s=a} \tag{6.32}$$

ملتا ہے۔مساوات 6.31 کا k رتبی تفرق لے کر $s=a$ پر کرنے سے A_k ملتا ہے۔

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} \left.\frac{\mathrm{d}^{m-k} Q(s)}{\mathrm{d}s^{m-k}}\right|_{s=a} \qquad (k=1,2,\cdots,m) \tag{6.33}$$

$G(s)$ میں غیر دہراتے مخلوط جوڑی $(s-a)(s-\bar{a})$ جہاں $a=\alpha+i\beta$ اور $\bar{a}=\alpha-i\beta$ ہیں سے درج ذیل جزوی کسری رکن حاصل ہوتا ہے

$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

جبکہ دہراتے مخلوط جوڑی مثلاً $[(s-a)(s-\bar{a})]^2$ سے درج ذیل ارکان ملتے ہیں۔ دہراتا مخلوط جوڑی گمک کو ظاہر کرتی ہے جس پر مثال 6.37 میں بذریعہ الجھاو توجہ دی گئی ہے۔

$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{Cs+D}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}$$

مثال 6.25: جزوی کسری پھیلاو استعمال کرتے ہوئے $\frac{3s-2}{s^2-s}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل:نسب نما میں s اور $s-1$ غیر دہراتے جزو ہیں۔یوں دیے گئے تفاعل کو $\frac{A}{s}$ اور $\frac{B}{s-1}$ کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{3s-2}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1}$$

جس میں A اور B معلوم کرنا باقی ہے۔دونوں اطراف کو $s(s-1)$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$3s-2=A(s-1)+Bs$$

ملتا ہے۔اس مساوات میں $s=0$ پر کرتے ہوئے A حاصل ہو گا جبکہ $s=1$ پر کرتے ہوئے B حاصل ہو گا۔یوں

$$3(0)-2=A(0-1)+B(0) \quad \Longrightarrow \quad A=2$$

اور

$$3(1)-2=A(1-1)+B(1) \quad \Longrightarrow \quad B=1$$

ملتے ہیں لہٰذا دیے گئے تفاعل کو

$$\frac{3s-2}{s(s-1)}=\frac{2}{s}+\frac{1}{s-1}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)=2+e^{t}$$

□

مثال 6.26: جزوی کسری پھیلاو استعمال کرتے ہوئے $F(s)=\frac{s^2-4s}{(s+2)^3}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: یہاں $s+2$ دہراتا جزو ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جس میں A ، B اور C معلوم کرنا باقی ہے۔

$$\frac{s^2-4s}{(s+2)^3}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{C}{(s+2)^3}$$

دونوں اطراف کو $(s+2)^3$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$s^2-4s=A(s+2)^2+B(s+2)+C$$

$s=-2$ پر کرتے ہوئے $C=12$ ملتا ہے۔مساوات کا یک رتبی تفرق لے کر $s=-2$ پر کرنے سے B حاصل ہو گا جبکہ دو رتبی تفرق لے کر $s=-2$ پر کرنے سے A حاصل ہو گا۔یوں

$$2s-4=2A(s+2)+B \implies 2(-2)-4=2A(-2+2)+B \implies B=-8$$
$$2=2A \implies A=1$$

ملتے ہیں۔یوں دیے گئے تفاعل کا جزوی کسری پھیلاو اور اس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s^2-4s}{(s+2)^3} = \frac{1}{s+2} - \frac{8}{(s+2)^2} + \frac{12}{(s+2)^3} \\
\mathcal{L}^{-1}(F) &= e^{-2t}(1-8t+6t^2)
\end{aligned}
$$

□

مثال 6.27: غیر دہراتے مخلوط جزو۔قصری جبری ارتعاش

درج ذیل اسپرنگ اور کمیت کا ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔جبری قوت $0<t<\pi$ دورانیے کے لئے عمل پیرا ہے۔

$$
y''+2y'+10y=r(t),\; y(0)=1,\, y'(0)=-6, \quad r(t)=\begin{cases} 85\sin t & 0<t<\pi \\ 0 & t>\pi \end{cases}
$$

حل:مسئلے کو اکائی سیڑھی تفاعل کی مدد سے لکھتے ہیں

$$
\begin{aligned}
y''+2y'+10y &= 85\sin t\,[u(t)-u(t-\pi)] \\
&= 85\sin t\, u(t) + 85\sin(t-\pi)\, u(t-\pi)
\end{aligned}
$$

جہاں دائیں جزو میں $\sin t = -\sin(t-\pi)$ استعمال کرتے ہوئے اس کو $f(t-a)u(t-a)$ صورت میں لکھا گیا ہے۔منتقلی کا دوسرا مسئلہ استعمال کرتے ہوئے اس کا ضمنی مساوات لکھتے ہیں۔

$$
[s^2Y - s(1) + 6] + 2[sY-1] + 10Y = 85\frac{1}{s^2+1}(1+e^{-\pi s})
$$

جسے Y کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$
Y = \frac{85}{(s^2+1)(s^2+2s+10)} + \frac{85}{(s^2+1)(s^2+2s+10)}e^{-\pi s} + \frac{s-4}{s^2+2s+10} \tag{6.34}
$$

منتقلی کے پہلے مسئلے سے مساوات 6.34 کے آخری جزو کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-4}{s^2+2s+10}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)-5}{(s+1)^2+3^2}\right] = e^{-t}(\cos 3t - \frac{5}{3}\sin 3t) \tag{6.35}
$$

مساوات 6.34 کے پہلے جزو میں غیر دہراتے مخلوط جذر پائے جاتے ہیں لہٰذا اس کا جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہو گا جہاں A ، B ، C اور D معلوم کرنا باقی ہے۔

$$
\frac{85}{(s^2+1)(s^2+2s+10)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+10}
$$

دونوں اطراف کو $(s^2+1)(s^2+2s+10)$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$85 = (As+B)(s^2+2s+10) + (Cs+D)(s^2+1)$$

ہر s کے دونوں اطراف کے عددی سروں کو آپس میں برابر لکھتے

$$s^3: \quad A+C=0, \qquad s^2: \quad 2A+B+D=0$$
$$s^1: \quad 10A+2B+C=0, \qquad s^0: \quad 10B+D=85$$

ہوئے چار عدد ہمزاد مساوات حاصل ہوتے ہیں جن کا حل $A=-2$ ، $B=9$ ، $C=2$ اور $D=-5$ ہے۔یوں مساوات 6.34 کے پہلے جزو کا جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہو گا

$$\frac{-2s+9}{s^2+1} + \frac{2(s+1)-7}{(s+1)^2+9}$$

جس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

$$-2\cos t + 9\sin t + e^{-t}(2\cos 3t - \frac{7}{3}\sin 3t) \tag{6.36}$$

مساوات 6.35 اور مساوات 6.36 کا مجموعہ $0<t<\pi$ دورانیے کا حل ہے۔

$$y(t) = e^{-t}(3\cos 3t - 4\sin 3t) - 2\cos t + 9\sin t \quad 0<t<\pi \tag{6.37}$$

مساوات 6.34 کے دوسرے جزو میں $e^{-\pi s}$ پایا جاتا ہے لہٰذا مساوات 6.36 اور منتقلی کے دوسرے مسئلے سے $t>\pi$ کے لئے اس کا الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا

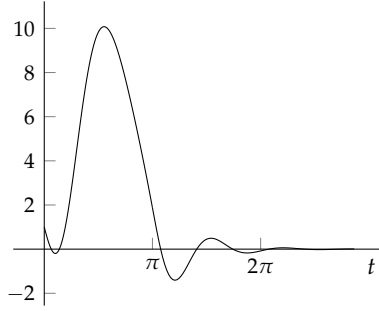
$$-2\cos(t-\pi) + 9\sin(t-\pi) + e^{-(t-\pi)}[2\cos 3(t-\pi) - \frac{7}{3}\sin 3(t-\pi)]$$

جس میں $\cos(t-\pi) = -\cos t$ اور $\cos(3t-3\pi) = -\cos 3t$، ... استعمال کرتے ہوئے

$$2\cos t - 9\sin t + e^{-(t-\pi)}[-2\cos 3t + \frac{7}{3}\sin 3t]$$

ملتا ہے۔اس کو مساوات 6.37 کے ساتھ جمع کرنے سے $t>\pi$ پر مسئلے کا حل ملتا ہے۔

$$y(t) = e^{-t}(3\cos 3t - 4\sin 3t) + e^{-(t-\pi)}(-2\cos 3t + \frac{7}{3}\sin 3t) \quad t>\pi \tag{6.38}$$

شکل 6.21 میں مسئلے کا حل دکھایا گیا ہے۔ □

شکل 6.21: اسپرنگ اور کمیت کا جبری ارتعاش (مثال 6.27)۔

دہراتا تفاعل

عملی استعمال میں عموماً دہراتے تفاعل پائے جاتے ہیں جو سادہ سائن نما تفاعل سے زیادہ پیچیدہ ہوتے ہیں۔آئیں ان پر غور کرتے ہیں۔

تصور کریں کہ دہراتے تفاعل $f(t)$ کا دوری عرصہ $p\ (>0)$ ہے۔یوں درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$f(t+p)=f(t) \qquad (t>0) \tag{6.39}$$

اگر p پر $f(t)$ ٹکڑوں میں استمراری ہو تب اس لاپلاس بدل موجود ہو گا۔اس تفاعل کا لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ لکھتے ہوئے تکمل کو دوری عرصے کے برابر ٹکڑوں میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^p e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_p^{2p} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{20}^{3p} e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+\cdots$$

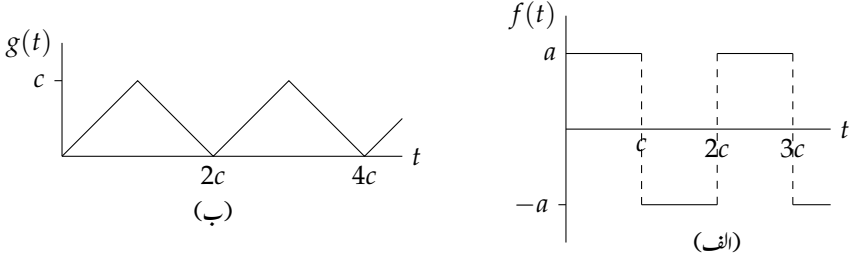
دوسرے تکمل میں $t=\tau+p$ پر کرتے ہوئے تکمل کے حدود 0 تا p لکھے جائیں گے۔اسی طرح تیسرے تکمل میں $t=\tau+2p$ پر کرتے ہوئے ان تکمل کے حدود بھی 0 تا p لکھے جائیں گے۔یوں درج بالا کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے اور n تکمل میں $t=\tau+(n-1)p$

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^p e^{-s\tau}f(\tau)\,\mathrm{d}t+\int_0^p e^{-s(\tau+p)}f(\tau)\,\mathrm{d}t+\int_0^p e^{-s(\tau+2p)}f(\tau)\,\mathrm{d}t+\cdots$$

جہاں $f(\tau+p)=f(\tau)$ ، $f(\tau+2p)=f(\tau)$ نقطے لکھا گیا ہے۔درج بالا کو

$$\mathcal{L}(f)=[1+e^{-sp}+e^{-2sp}+\cdots]\int_0^p e^{-s\tau}f(\tau)\,\mathrm{d}t$$

$g(t)$, c, $2c$, $4c$, t
(ب)

$f(t)$, a, $-a$, c, $2c$, $3c$, t
(الف)

شکل 6.22: دہراتا چکور موج اور دہراتا تکونی موج۔(مثال 6.28 اور مثال 6.29)

لکھا جا سکتا ہے۔اب چکور قوسین کے اندر مجموعہ ہندسی تسلسل ہے جو $\frac{1}{1-e^{-ps}}$ کے برابر ہے لہٰذا درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 6.8: p دوری عرصے کا تفاعل $f(t)$ جو ٹکڑوں میں استمراری ہو کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

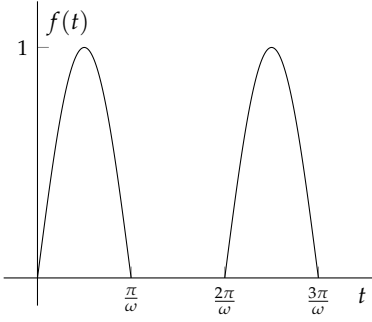
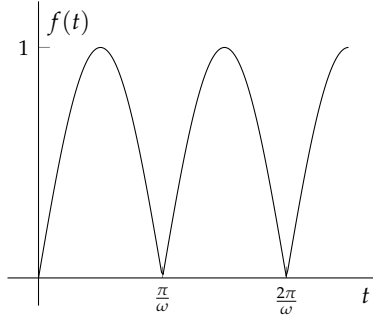
$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f \, \mathrm{d}t \qquad (s > 0) \tag{6.40}$$

مثال 6.28: دہراتا چکور موج
دہراتا چکور موج شکل 6.22-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: یہاں $p = 2c$ ہے لہٰذا مساوات 6.40 کی مدد سے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) &= \frac{1}{1-e^{-2cs}} \left[\int_0^c e^{-st} a \, \mathrm{d}t + \int_c^{2c} e^{-st}(-a) \, \mathrm{d}t \right] \\
&= \frac{1}{(1-e^{-cs})(1+e^{-cs})} \left[\frac{a}{s}\left(1-e^{-cs}\right) - \frac{a}{s}\left(e^{-cs} - e^{-2cs}\right) \right] \\
&= \frac{a}{s}\left(\frac{1-e^{-cs}}{1+e^{-cs}}\right) = \frac{a}{s}\left(\frac{e^{\frac{cs}{2}} - e^{\frac{cs}{2}}}{e^{\frac{cs}{2}} + e^{\frac{cs}{2}}}\right) = \frac{a}{s} \tanh \frac{cs}{2}
\end{aligned}$$

اسی جواب کو زیادہ کارآمد صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{a}{s}\left(\frac{1-e^{-cs}}{1+e^{-cs}}\right) = \frac{a}{s}\left(1 - \frac{2e^{-cs}}{1+e^{-cs}}\right) = \frac{a}{s}\left(1 - \frac{2}{e^{cs}+1}\right)$$

شکل 6.23: مکمل لہر اور نصف لہر سمت کار کے امواج (مثال 6.30 اور مثال 6.31)۔

□

مثال 6.29: دہراتا تکونی موج

دہراتا تکونی موج شکل 6.22-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: چکور موج کا تکمل، تکونی موج ہوتا ہے۔یوں شکل-الف میں $a = 1$ لے کر تکمل لینے سے شکل-ب حاصل ہو گی لہٰذا مثال 6.28 کے جواب سے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{s}\mathcal{L}f = \frac{1}{s^2}\tanh\frac{cs}{2}$$

□

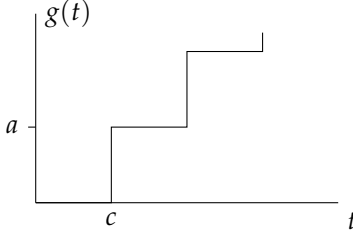
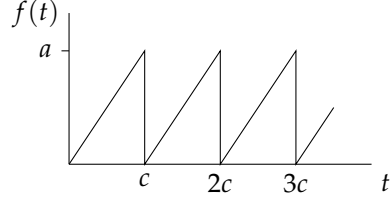
مثال 6.30: مکمل لہر سمت کار

مکمل لہر سمت کار[21] بدلتی سمت سائن نما موج سے یک سمتی موج بناتی ہے جسے شکل 6.23-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس لہر کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: نصف لہر سمت کار کی موج کا $p = \frac{2\pi}{\omega}$ ہے لہٰذا مساوات 6.40 کی مدد سے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st}\sin\omega t \,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\left(\frac{1 + e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}\right) \tag{6.41}$$

---

[21] full wave rectifier

(ب) سیڑھی موج۔

(الف) دندان موج

شکل 6.24: دندان موج (مثال 6.32) اور سیڑھی تفاعل (مثال 6.33)۔

جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\left(\frac{e^{\frac{\pi s}{2\omega}}+e^{-\frac{\pi s}{2\omega}}}{e^{\frac{\pi s}{2\omega}}-e^{-\frac{\pi s}{2\omega}}}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\coth\frac{\pi s}{2\omega}$$

□

مثال 6.31: نصف لہر سمت کار

نصف لہر سمت کار[22] بدلتی سمت سائن نما موج سے یک سمتی موج بناتی ہے جسے شکل 6.23-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس لہر کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: مکمل لہر سمت کار کی موج کا $p=\frac{2\pi}{\omega}$ ہے لہٰذا مساوات 6.40 کی مدد سے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\left(\frac{1+e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{1-e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}}\right) \tag{6.42}$$

□

مثال 6.32: دندان موج

دندان موج[23] کو شکل 6.24 میں دکھایا گیا ہے۔اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

---

[22] half wave rectifier
[23] saw-tooth wave

حل: دندان موج کو الجبرائی طور پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(t) = \frac{a}{c}t, \quad (0 < t < c) \quad \text{اور} \quad f(t+c) = f(t)$$

یوں تکمل بالحصص سے

$$\begin{aligned}\int_0^c e^{-st} t \, dt &= -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^c + \frac{1}{s}\int_0^c e^{-st} \, dt \\ &= -\frac{c}{s}e^{-cs} - \frac{1}{s^2}(e^{-cs} - 1)\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہوئے مساوات 6.40 کی مدد سے لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}(f) = \frac{a}{cs^2} - \frac{ae^{-cs}}{s(1 - e^{-cs})} \tag{6.43}$$

□

مثال 6.33: سیڑھی موج
سیڑھی موج[24] کو شکل 6.24 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: سیڑھی تفاعل کو الجبرائی طور پر لکھتے ہیں

$$g(t) = na \qquad (nc < t < (n+1)c \quad n = 0, 1, 2, \cdots)$$

جو مسلسل بڑھتے تفاعل $h(t) = \frac{a}{c}t$ اور دندان موج $f(t)$ کے فرق $g(t) = h(t) - f(t)$ کے برابر ہے۔ اب $\mathcal{L}(\frac{at}{c}) = \frac{a}{cs^2}$ ہے جبکہ مساوات 6.43 لاپلاس بدل $\mathcal{L}(f)$ دیتی ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(g) = \frac{a}{cs^2} - \left[\frac{a}{cs^2} - \frac{ae^{-cs}}{s(1 - e^{-cs})}\right] = \frac{ae^{-cs}}{s(1 - e^{-cs})} \tag{6.44}$$

□

---

[24] stair case

سوالات

سوال 6.116 تا سوال 6.116 ابتدائی قیمت مسئلے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 6.116: $y'' + y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 4, y'(0) = 0$

جواب: $y = 4\cos t - u(t - \pi)\sin t$ ؛ اکائی ضرب عین $t = \pi$ پر عمل کرتی ہے۔ابتدائی معلومات صرف اس صورت ممکن ہیں کہ اکائی ضرب سے پہلے بھی نظام ارتعاش پذیر ہو۔جواب میں $4\cos t$ اسی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال 6.117: $y'' + y = 2\delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

جواب: $y = \cos t - 2u(t - 3\pi)\sin t$

سوال 6.118: $y'' + 4y = 3\delta(t - 2\pi), \quad y(0) = -2, y'(0) = 1$

جواب: $y = 2\cos 2t + 0.5\sin 2t + 1.5u(t - 2\pi)\sin t$

سوال 6.119: $y'' + 9y = 2\delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = -1$

جواب: $y = -\frac{1}{3}\sin 3t - \frac{2}{3}u(t - \pi)\sin 3t - \frac{1}{3}u(t - 2\pi)\sin 3t$

سوال 6.120: $y'' + 6y' + 10y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$

جواب: $y = 2e^{-3t}\sin t + e^{-3(t-1)}u(t - 1)\sin(t - 1)$

سوال 6.121: $2y'' + 3y' + y = 2e^{-t} + \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

جواب: $y = 6e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}(6 + 2t) + 4u(t - 1)[e^{-\frac{1}{2}(t-1)} - e^{-(t-1)}]$

سوال 6.122: $y'' + 3y' + 3y = 5\sin t + 20\delta(t - 1), \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

جواب: $y = \sin t - 3\cos t + 8e^{-t} - 4e^{-2t} + [e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}]u(t - 1)$

سوال 6.123: $y'' + 4y' + 5y = [u(t) - u(t-2)]e^t - 6\delta(t-3), y(0) = 0, y'(0) = 1$

دائیں ہاتھ پہلا جزو درج ذیل لکھتے ہوئے آگے چلیں۔

$$[u(t) - u(t - 2)]e^t = u(t)e^t - e^2u(t - 2)e^{(t-2)}$$

یوں جواب درج ذیل ملتا ہے۔

$$y = \frac{1}{5}e^{-2t}(3\sin t - \cos t) + \frac{1}{5} + \frac{e^2e^{-2(t-2)}}{5}[2\sin(t - 2) + \cos(t - 2)]u(t - 2) - \frac{e^2}{5}u(t - 2) - 6e^{-2(t-3)}\sin(t - 3)u(t - 3)$$

سوال 6.124: $y'' + 2y' + 5y = 5t - 10\delta(t-\pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$
جواب: $y = \frac{1}{5}e^{-t}(6\sin 2t + 7\cos 2t) + t - \frac{2}{5} - 5u(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin 2t$

6.5 الجھاو

تفاعل $F(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $f(t)$ اور $G(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $g(t)$ جانتے ہوئے ہم تفاعل $H(s) = F(s)G(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $h(t)$ درج ذیل مسئلے کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں۔ تفاعل $h(t)$ کو $(f*g)(t)$ لکھا جاتا ہے جس کو f اور g کی الجھاو[25] کہتے ہیں۔

مسئلہ 6.9: مسئلہ الجھاو
اگر $F(s)$ اور $G(s)$ کے الٹ لاپلاس بدل بالترتیب $f(t)$ اور $g(t)$ ہوں، جو مسئلہ وجودیت (مسئلہ 6.2) کے شرط پر پورا اترتے ہوں، تب حاصل ضرب $H(s) = F(s)G(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $h(t)$ تفاعل $f(t)$ اور $g(t)$ کی الجھاو ہو گا جس کو $(f*g)(t)$ لکھا جاتا ہے اور جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$h(t) = (f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{6.45}$$

ثبوت: $G(s)$ کی تعریف اور منتقلی کے پہلے مسئلے سے، $\tau(\tau \geq 0)$ کی ہر معین قیمت کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

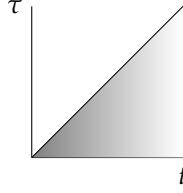
$$e^{-s\tau}G(s) = \int_0^\infty e^{-st}g(t-\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}t = \int_\infty^\tau e^{-st}g(t-\tau)\,\mathrm{d}t \tag{6.46}$$

جہاں $s > \gamma$ ہے۔ اب $F(s)$ کی تعریف سے

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)G(s)\,\mathrm{d}\tau$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں مساوات 6.46 استعمال کرتے ہوئے

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)\int_\infty^\tau e^{-st}g(t-\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau$$

[25] convolution

شکل 6.25: سطح $t\tau$ پر تکمل کا خطہ (ثبوت مسئلہ 6.9)۔

ملتا ہے، جہاں $s > \gamma$ ہے۔یوں پہلے t پر τ تا ∞ تکمل لیا جاتا ہے اور پھر τ پر 0 تا ∞ تکمل لیا جاتا ہے۔ سطحی تکمل کا پچر نما خطہ، جو $t\tau$ سطح پر لامتناہی تک پھیلا ہوا ہے، کو شکل 6.25 میں گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ تفاعل f اور g یوں چننے گئے ہیں کہ تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے پہلے τ اور بعد میں t پر تکمل لیا جا سکتا ہے (سطحی تکمل میں ترتیب الٹ کرنے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا)۔ یوں ہم پہلے τ پر 0 تا t اور بعد میں t پر 0 تا ∞ تکمل لیتے ہوئے درج ذیل لکھتے ہیں

$$\begin{aligned}F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-st} h(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(h)\end{aligned}$$

جہاں مساوات 6.45 تفاعل h دیتی ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوا۔

□

الجھاو کی تعریف (مساوات 6.45) استعمال کرتے ہوئے الجھاو کے درج ذیل خصوصیات ثابت کیے جا سکتے ہیں

$$\begin{aligned}f*g &= g*f && \text{(قانون تبادل)}\\ f*(g_1+g_2) &= f*g_1 + f*g_2 && \text{(قانون جزئیتی تقسیم)}\\ (f*g)*v &= f*(g*v) && \text{(قانون تلازمی)}\\ f*0 &= 0*f = 0\end{aligned}$$

جو اعداد کو ضرب دینے کے کلیات ہیں۔البتہ عموماً $1*g \neq g$ ہو گا مثلاً $g(t) = t$ لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$(1*g)(t) = \int_0^\infty 1\cdot(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{t^2}{2}$$

جو t کے برابر نہیں ہے۔اسی طرح الجھاو کی ایک اور انوکھی خاصیت (مثال 6.36 دیکھیں) یہ ہے کہ بعض اوقات $(f*f)(t) \geq 0$ درست نہیں ہو گا۔

آئیں اب الجھاو استعمال کرتے ہوئے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں اور تفرقی مساوات حل کریں۔

مثال 6.34: تفاعل $H(s)=\frac{1}{s(s-a)}$ کا الٹ لاپلاس بدل $h(t)$ مسئلہ الجھاو کی مدد سے حاصل کریں۔

حل: $F=\frac{1}{s-a}$ اور $G=\frac{1}{s}$ لیتے ہیں جن کے الٹ لاپلاس بدل بالترتیب $f(t)=e^{at}$ اور $g(t)=1$ ہیں۔یوں $f(\tau)=e^{a\tau}$ اور $g(t-\tau)=1$ ہوں گے لہٰذا مسئلہ الجھاو کی مدد سے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$h(t)=e^{a\tau}*1=\int_0^t e^{a\tau}\cdot 1\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{a}(e^{at}-1)$$

ہم دوبارہ لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں کہ درج بالا جواب درست ہے۔

$$\mathcal{L}(h)=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s-a}\cdot\frac{1}{s}=\mathcal{L}(e^{at})\mathcal{L}(1)$$

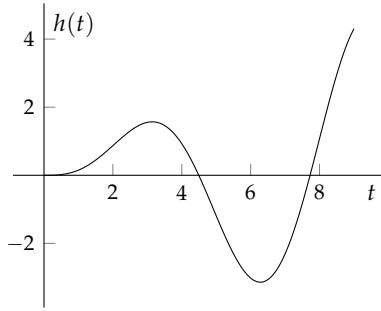
□

مثال 6.35: تفاعل $H(s)=\frac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ کا الٹ لاپلاس بدل بذریعہ الجھاو حاصل کریں۔

حل: ہم $F=G=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ لیتے ہیں جس کا الٹ لاپلاس بدل $\sin\omega t$ ہے۔یوں

$$\begin{aligned}
h(t)=\sin\omega t*\sin\omega t&=\int_0^t\sin\omega\tau\sin\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&=\int_0^t\frac{1}{2}[\cos(2\omega\tau-\omega t)-\cos\omega t]\,\mathrm{d}\tau\\
&=\left.\frac{\sin(2\omega\tau-\omega t)}{4\omega}-\frac{\tau\cos\omega t}{2}\right|_0^t\\
&=\frac{\sin\omega t}{2\omega}-\frac{t\cos\omega t}{2}
\end{aligned}$$

ہو گا۔

□

شکل 6.26: مثال 6.36

مثال 6.36: $(f*f)(t)>0$ درست نہیں ہے
گزشتہ مثال (مثال 6.35) میں $\omega=1$ لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جس کو شکل 6.26 میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کی قیمت منفی ممکن ہے۔

$$h(t)=\sin t*\sin t=\frac{\sin t}{2}-\frac{t\cos t}{2}$$

□

جزوی کسری پھیلاو کے آخر میں جوڑی دار مخلوط جزو کا ذکر کیا گیا جس پر اگلے مثال میں غور کرتے ہیں۔

مثال 6.37: گمک، دہراتا مخلوط جزو
اسپرنگ اور کمیت کے نظام کا درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں جہاں F_0 مستقل ہے۔

$$my''+ky=F_0\sin ct,\quad y(0)=0,\,y'(0)=0$$

حل:دونوں اطراف کو m سے تقسیم کرتے ہوئے $K=\frac{F_0}{m}$ اور $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ لکھتے ہوئے

$$y''+\omega_0^2y=K\sin\alpha t$$

ملتا ہے جس سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں۔

$$s^2Y+\omega_0^2Y=K\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

ضمنی مساوات کا حل درج ذیل ہے۔

$$Y=\frac{K\alpha}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+\alpha^2)}$$

اب

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\right]=\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\alpha^2}\right]=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha t$$

استعمال کرتے ہوئے مسئلہ الجھاو کی مدد سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$y(t)=\frac{K\alpha}{\omega_0\alpha}\sin\omega_0 t*\sin\alpha t=\frac{K}{\omega_0}\int_0^t\sin\omega_0\tau\sin(\alpha t-\alpha\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

لکھا جا سکتا ہے۔ تکمل کے اندر مقدار کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{1}{2}[-\cos[\alpha t+(\omega_0\tau-\alpha\tau)]+\cos[\alpha t-(\omega_0\tau+\alpha\tau)]] \tag{6.47}$$

یہاں دو مختلف صورتیں پائی جاتی ہیں۔ پہلی صورت میں $\omega_0\neq\alpha$ ہو گا جو بلا گمک صورت ہے۔

بلا گمک صورت میں $\omega_0\neq\alpha$ ہو گا لہٰذا تکمل لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\begin{aligned}
y(t)&=\frac{K}{2\omega_0}\left[-\frac{\sin[\alpha t+(\omega_0\tau-\alpha\tau)]}{\omega_0-\alpha}+\frac{\sin[\alpha t-(\omega_0\tau+\alpha\tau)]}{-\omega_0-\alpha}\right]_0^t\\
&=\frac{K}{2\omega_0}\left[\frac{\sin\alpha t-\sin\omega_0 t}{\omega_0-\alpha}+\frac{\sin\alpha t+\sin\omega_0 t}{\omega_0+\alpha}\right]\\
&=\frac{K}{\alpha^2-\omega_0^2}\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0 t-\sin\alpha t\right)
\end{aligned}$$

جو دو ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔ ان میں سے ایک ہارمونی ارتعاش کی تعدد نظام کی قدرتی تعدد ω_0 ہے جبکہ دوسری ہارمونی ارتعاش کی تعدد لاگو کردہ جبری قوت کی تعدد α ہے۔

گمک دوسری صورت ہے جہاں $\omega_0=\alpha$ ہو گا۔ گمک کی صورت میں مساوات 6.47 درج ذیل دیگا۔

$$\frac{1}{2}[-\cos\omega_0 t+\cos(\omega_0 t-2\omega_0\tau)]$$

یوں تکمل سے

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{K}{2\omega_0}\left[-\tau\cos\omega_0 t - \frac{1}{2\omega_0}\sin(\omega_0 t - 2\omega_0\tau)\right]\Big|_0^t \\ &= \frac{K}{2\omega_0^2}[\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t] \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جو مسلسل بڑھتی ارتعاش یعنی گمک[26] کو ظاہر کرتی ہے۔ □

تکملی مساوات

الجھاو کی مدد سے بعض تکملی مساوات حل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ تکملی مساوات سے مراد ایسی مساوات ہے جس میں نا معلوم مقدار $y(t)$ تکمل کے اندر (اور ممکن ہے کہ تکمل کے باہر بھی) پایا جاتا ہو۔ ان مساوات میں الجھاو کی طرز کا تکمل پایا جاتا ہے۔ آئیں اس ترکیب کو ایک مثال کی مدد سے سیکھیں۔

مثال 6.38: درج ذیل مساوات کو حل کریں۔

$$y(t) - \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = t$$

حل: اس مساوات میں تکمل کو $y(t)$ اور $\sin t$ کی الجھاو $y * \sin t$ لکھ کر

$$y(t) - y * \sin t = t$$

لاپلاس بدل لیتے ہیں جہاں $\mathcal{L}(y) = Y$ ہے۔

$$Y - Y\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2}$$

ضمنی مساوات کا حل درج ذیل ہے

$$Y = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$$

---

[26] resonance

جس کا الٹ لاپلاس بدل درکار حل ہے۔

$$y(t) = t + \frac{t^3}{6}$$

□

سوالات

سوال 6.125 تا سوال 6.136 میں الجھاو کو بذریعہ تکمل حاصل کریں۔

سوال 6.125: $1 * 1$
جواب: t

سوال 6.126: $1 * t$
جواب: $\frac{t^2}{2}$

سوال 6.127: $t * t$
جواب: $\frac{t^3}{6}$

سوال 6.128: $t * \sin \omega t$
جواب: $\frac{1}{\omega}(t - \sin \omega t)$

سوال 6.129: $1 * \cos \omega t$
جواب: $\frac{\sin \omega t}{\omega}$

سوال 6.130: $1 * \sin \omega t$
جواب: $\frac{1}{\omega}(1 - \cos \omega t)$

سوال 6.131: $e^t * e^{-t}$
جواب: te^t

سوال 6.132: $\sin \omega t * \cos \omega t$
جواب: $\frac{t \sin \omega t}{2}$

سوال 6.133: $\cos \omega t * \cos \omega t$
جواب: $\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$

سوال 6.134: $e^{\omega t} * \sin \omega t$
جواب: $\frac{1}{2\omega}(e^{\omega t} - \sin \omega t - \cos \omega t)$

سوال 6.135: $e^{at} * t$
جواب: $\frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)$

سوال 6.136: $a \neq b \qquad e^{at} * e^{bt}$
جواب: $\frac{e^{bt} - e^{at}}{b - a}$

سوال 6.137 تا سوال 6.142 تکملی مساوات ہیں۔انہیں الجھاو کی مدد سے حل کریں۔

سوال 6.137: $y(t) - \int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1$
جواب: $y(t) = e^t$

سوال 6.138: $y(t) + 9\int_0^t y(\tau)(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau = 3t$
جواب: $y(t) = \sin 3t$

سوال 6.139: $y(t) + 4\int_0^t (t - \tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1$
جواب: $y(t) = \cos 2t$

سوال 6.140: $y(t) + \int_0^t y(\tau)\sin(2t - 2\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sin 2t$
جواب: $y(t) = \frac{2}{3}\sin\sqrt{6}t$

سوال 6.141: $y(t) + 3e^t\int_0^t y(\tau)e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = te^t$
جواب: $\frac{1}{3}(e^t - e^{-2t})$

سوال 6.142: $y(t) + \int_0^t y(\tau)(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau = 4 + \frac{t^2}{2}$
جواب: $y(t) = 1 + 3\cos t$

سوال 6.143: ثابت کریں کہ ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y'' + \omega y = r(t), \quad y(0) = A,\ y'(0) = B$$

جہاں $r(t)$ نا معلوم جبری تفاعل ہے کا حل الجھاو کی صورت میں درج ذیل ہے۔

$$y(t) = \frac{1}{\omega}\sin \omega t * r(t) + A\cos \omega t + \frac{B}{\omega}\sin \omega t$$

سوال 6.144 تا سوال 6.151 میں دیے گئے تفاعل کا الٹ لاپلاس بدل بذریعہ الجھاو حاصل کریں۔

سوال 6.144: $\frac{1}{s(s+1)}$
جواب: $1-e^{-t}$

سوال 6.145: $\frac{1}{s^2}$
جواب: t

سوال 6.146: $\frac{5}{(s+2)(s-3)}$
جواب: $e^{3t}-e^{-2t}$

سوال 6.147: $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$
جواب: $t\sin 2t$

سوال 6.148: $\frac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$
جواب: $\omega t-\sin\omega t$

سوال 6.149: $\frac{4}{s(s^2-4)}$
جواب: $\cosh 2t-1$

سوال 6.150: $\frac{24}{(s^2+1)(s^2+9)}$
جواب: $3\sin t-\sin 3t$

سوال 6.151: $\frac{30}{(s^2+1)(s^2-9)}$
جواب: $\sinh 3t-3\sin t$

6.6 لاپلاس بدل کی تکمل اور تفرق۔ متغیر عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات

ہم تفاعل $f(t)$ کی تفرق $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ کا لاپلاس بدل اور اس کی تکمل $\int f\,\mathrm{d}t$ کا لاپلاس بدل حاصل کر چکے ہیں۔ اس حصے میں لاپلاس بدل $F(s)$ کی تفرق $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$ کا الٹ لاپلاس بدل اور اس کی تکمل $\int F\,\mathrm{d}s$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کیا جائے گا۔

لاپلاس بدل کی تفرق

اگر تفاعل $f(t)$ مسئلہ 6.2 کے شرائط پر پورا اترتا ہو تب یہ ثابت (ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا) کیا جا سکتا ہے کہ تفاعل $\mathcal{L}(f) = F(s)$ کا تفرق $F'(s) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$ ، تکمل کے اندر s کے ساتھ تفرق لینے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں اگر

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ہو تب

$$F'(s) = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

ہو گا۔اس طرح اگر $\mathcal{L}(f) = F(s)$ ہو تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\mathcal{L}[(tf(t))] = -F'(s) \quad \text{اور} \quad \mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = -tf(t) \tag{6.48}$$

یوں تفاعل کی بدل کا تفرق لینا، تفاعل کو $-t$ سے ضرب دینے کے مترادف ہے۔

مثال 6.39: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathcal{L}\left(\frac{t\sin\omega t}{2\omega}\right) = \frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

حل: $\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.48 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(t\sin\omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

دونوں اطراف کو 2ω سے تقسیم کرتے ہوئے ثبوت پورا ہوتا ہے۔ □

مثال 6.40: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$$

حل: $\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.48 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}(t\cos\omega t) = -\frac{1(s^2+\omega^2)-s(2s)}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{s^2+\omega^2} - \frac{2\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے

$$t\cos\omega t = \frac{1}{\omega}\sin\omega t - 2\omega^2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right]$$

ملتا ہے جس کو ترتیب دیتے ہوئے ثبوت پورا ہوتا ہے۔ □

مثال 6.41: درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathcal{L}\left[\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right] = \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$$

حل: شمار کنندہ میں ω^2 جمع اور منفی کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

گزشتہ دو مثالوں میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ درج بالا کے دائیں ہاتھ کے اجزاء کے الٹ لاپلاس بدل $t\cos\omega t$ اور $\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$ ہیں۔یوں ثبوت پورا ہوتا ہے۔ □

لاپلاس بدل کی تکمل

اگر $f(t)$ مسئلہ 6.2 کے شرائط پر پورا اترتا ہو اور $\frac{f(t)}{t}$ کی حد موجود ہو، جہاں t صفر تک دائیں جانب سے آئے تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $s > \gamma$ ہے۔

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s} \quad \text{یعنی} \quad \mathcal{L}\left[\int_s^\infty F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s}\right] = \frac{f(t)}{t} \tag{6.49}$$

یوں تفاعل $f(t)$ کے لاپلاس بدل کا تکمل لینا $f(t)$ کو t سے تقسیم کرنے کے مترادف ہے۔

لاپلاس بدل کی تعریف استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\int_s^\infty F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s} = \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-\tilde{s}t} f(t)\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}\tilde{s}$$

اور یہ ثابت (یہ ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔) کیا جا سکتا ہے کہ درج بالا شرائط کے بعد درج بالا تکمل میں تکمل کی ترتیب الٹ کی جا سکتی ہے۔ یوں

$$\int_s^\infty F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s} = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-\tilde{s}t} f(t)\,\mathrm{d}\tilde{s}\right] \mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t) \left[\int_s^\infty e^{-\tilde{s}t}\,\mathrm{d}\tilde{s}\right] \mathrm{d}t$$

ملتا ہے جس میں $s > \gamma$ کی صورت میں $\tilde{s}$ پر تکمل $\frac{e^{-st}}{t}$ کے برابر ہے لہٰذا

$$\int_s^\infty F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] \qquad (s > \gamma)$$

ہو گا جو مساوات 6.49 ہے۔

مثال 6.42: تفاعل $\ln\left(\frac{s^2-\omega^2}{s^2}\right)$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: دیے گئے تفاعل کا تفرق لیتے ہوئے

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\left(\frac{s^2-\omega^2}{s^2}\right) = -\frac{2\omega^2}{s(s^2-\omega^2)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو ہم $F(s)$ تصور کرتے ہیں۔ جدول 6.1 کی مدد سے اس کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\right) = 2 - e^{\omega t} - e^{-\omega t}$$

جو مساوات 6.49 کے لئے درکار شرائط پر پورا اترتا تفاعل ہے۔ یوں

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-\omega^2}{s^2}\right] = \int_s^\infty F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s} = \frac{f(t)}{t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے درج ذیل جواب ملتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-\omega^2}{s^2}\right] = \frac{1}{t}\left(2 - e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$$

□

متغیر عددی سر والے مخصوص سادہ تفرقی مساوات

تفاعل $f(t)$ کا لاپلاس بدل $Y(s)$ لیتے ہوئے مساوات 6.5 اور مساوات 6.6 کے تحت

$$\mathcal{L}(f') = sY - sy(0), \quad \mathcal{L}(f'') = s^2Y - sy(0) - y'(0)$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.48 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(tf') &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[sY - sy(0)] = -Y - s\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} \\ \mathcal{L}(tf'') &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[s^2Y - sy(0) - y'(0)] = -2sY - s^2\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} + y(0) \end{aligned} \tag{6.50}$$

اگر سادہ تفرقی مساوات کے عددی سر $at + b$ طرز کے ہوں تب اس کا ضمنی مساوات Y کا یک رتبی تفرقی مساوات ہو گا جو بعض اوقات دیے گئے دو رتبی تفرقی مساوات سے زیادہ آسان ہوتا ہے۔البتہ $at^2 + bt + c$ طرز کے عددی سر کی صورت میں ضمنی مساوات Y کا دو رتبی تفرقی مساوات ہو گا۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ ترکیب صرف $at + b$ طرز کی عددی سر والے سادہ تفرقی مساوات کے لئے سود مند ہو گا۔درج ذیل مثال میں ایک اہم سادہ تفرقی مساوات کو اس ترکیب سے حل کیا گیا ہے۔

مثال 6.43: لاگیغ مساوات، لاگیغ کثیر رکنی

درج ذیل لاگیغ سادہ تفرقی[27] مساوات[28] کہلاتی ہے۔

$$ty'' + (1 - t)y' + ny = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.51}$$

حل:مساوات 6.50 کی مدد سے لاگیغ مساوات کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$[-2sY - s^2\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} + y(0)] + (1 - t)[-Y - s\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}] + nY = 0$$

جس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}Y}{Y} = -\frac{n + 1 - s}{s - s^2}\,\mathrm{d}s = (\frac{n}{s - 1} - \frac{n + 1}{s})\,\mathrm{d}s$$

ملتا ہے۔اس کا حل درج ذیل ہے۔

$$Y = \frac{(s - 1)^n}{s^{n+1}} \tag{6.52}$$

---

[27] Laguerre's equation

[28] فرانسیسی ریاضی دان ایڈمنڈ نیکولس لاگیغ [1834-1886]

ہم $l_n=\mathcal{L}^{-1}(Y)$ لکھ کر کلیہ روڈریگیس [29]

$$l_0=1,\quad l_n(t)=\frac{e^t}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^ne^{-t})\qquad n=1,2,\cdots \tag{6.53}$$

ثابت کرتے ہیں۔اس کلیے میں تفرق لینے کے بعد قوت نمائی تفاعل آپس میں کٹ جاتے ہیں لہٰذا کلیے سے روڈریگیس کثیر رکنی [30] ملتے ہیں۔

مساوات 6.53 کو ثابت کرتے ہیں۔ جدول 6.1 اور منتقلی کے پہلے مسئلہ (s منتقلی) سے

$$\mathcal{L}(t^ne^{-t})=\frac{n!}{(s+1)^{n+1}} \tag{6.54}$$

لکھ کر مساوات 6.8 استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^ne^{-t})\right]=\frac{n!s^n}{(s+1)^{n+1}}$$

ملتا ہے۔درج بالا لکھتے ہوئے اس حقیقت کو استعمال کیا گیا ہے کہ رتبہ $n-1$ تک تمام تفرق صفر کے برابر ہیں۔درج بالا کو $n!$ سے تقسیم کرتے ہوئے اور منتقلی کا مسئلہ مزید ایک مرتبہ استعمال کرتے ہوئے

$$\mathcal{L}(l_n)=\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}=Y$$

لکھا جا سکتا ہے (مساوات 6.53 دیکھیں)۔یوں l_n دیے گئے سادہ تفرقی مساوات کے حل ہیں۔

مساوات 6.51 کا ایک حل $l_n(t)$ ہے۔اس دو رتبی تفرقی مساوات کے عمومی حل کے لئے کل دو عدد حل درکار ہیں۔ دوسرے حل کا لاپلاس بدل موجود نہیں ہے۔یوں $l_n(t)$ مساوات 6.51 کا مخصوص حل ہے نا کہ اس کا عمومی حل۔ □

Rodrigues's formula[29]
Rodrigues's polynomials[30]

سوالات

سوال 6.152 تا سوال 6.158 کا لاپلاس بدل بذریعہ مساوات 6.48 دریافت کریں۔

سوال 6.152: $4te^{-2t}$
جواب: $\frac{4}{(s+2)^2}$

سوال 6.153: $t\cos\omega t$
جواب: $\frac{2s^2}{(s^2+\omega^2)^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}$

سوال 6.154: $t\sin 5t$
جواب: $\frac{10s}{(s^2+25)^2}$

سوال 6.155: $t^2\sin 5t$
جواب: گزشتہ سوال میں $f(t)=t\sin 5t$ کا بدل حاصل کیا گیا ہے۔ موجودہ سوال میں $\mathcal{L}[tf(t)]$ درکار ہے یعنی $\frac{40s^2}{(s^2+25)^3}-\frac{10}{(s^2+25)^2}$

سوال 6.156: $te^{-t}\sin t$
جواب: $\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1}$

سوال 6.157: t^ne^{at}
جواب: $f=e^{at}$ کا بدل $F=\frac{1}{s-a}$ ہے۔ بالترتیب $\mathcal{L}[tf]$ ، $\mathcal{L}[t^2F]$ ، $\cdots$ ، $\mathcal{L}[t^nf]$ لیتے ہوئے $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ ملتا ہے۔

سوال 6.158: $t^2\cos t$
جواب: $\frac{8s^3}{(s^2+1)^3}-\frac{}{(s^2+1)^2}$

سوال 6.159 تا سوال 6.162 کلیہ روڈریکیس پر مبنی ہیں۔ سوال 6.159: n کی قیمت 1 تا 3 لیتے ہوئے مساوات 6.53 میں تفرق لے کر لاگیغ کثیر رکنی لکھیں۔

جواب: $n=1$ لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$l_1(t)=\frac{e^t}{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(te^{-t})=e^t[e^{-t}-te^{-t}]=1-t$$

اسی طرح $l_2(t)=1-2t+\frac{t^2}{2}$ اور $l_3(t)=1-3t+\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3$ ملتے ہیں۔

سوال 6.160: گزشتہ سوال میں $l_1(t)$ تا $l_3(t)$ دریافت کیے گئے۔ثابت کریں کہ یہ تفاعل مساوات 6.51 پر پورا اترتے ہیں۔

جواب: $l_1(t)=1-t$ اور اس کے کے تفرقات $l_1'(t)=1$ اور $l_1''(t)=0$ کو مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$t(0)+(1-t)(1)+1(1-t)=0 \quad \implies \quad 0=0$$

ملتا ہے جو درکار ثبوت ہے۔بقایا ثبوت بھی اسی طرح حاصل کیے جائیں گے۔

سوال 6.161: درج ذیل ثابت کریں اور اس کلیے سے $l_1(t)$ تا $l_3(t)$ حاصل کریں۔

$$l_n(t)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{n!}{m!(n-m)!}t^m \tag{6.55}$$

سوال 6.162: درج ذیل لاگیغ کثیر رکنی کی **پیداکار تفاعل**[31] ہے۔اس کو پھیلا کر لکھتے ہوئے دونوں اطراف x کے یکساں طاقت کے عددی سر کو برابر پر کرتے ہوئے لاگیغ کثیر رکنی حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ایسا ہی کرتے ہوئے $l_1(t)$ تا $l_3(t)$ حاصل کریں۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n(t)x^n=(1-x)^{-1}e^{\frac{tx}{x-1}} \tag{6.56}$$

مسئلہ الجھاو، بدل کی تفرق یا بدل کی تکمل کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے سوال 6.163 تا سوال 6.168 کے الٹ لاپلاس بدل دریافت کریں۔

سوال 6.163: $\frac{6s}{(s^2+9)^2}$
جواب: $t\sin 3t$

سوال 6.164: $\frac{2s}{(s^2-1)^2}$
جواب: $t\sinh t$

generating function[31]

سوال 6.165: $\frac{2s+4}{(s^2+4s+5)^2}$
جواب: $te^{-2t}\sin t$

سوال 6.166: $\ln\left(\frac{s}{s-1}\right)$
جواب: تفاعل کو $\ln s - \ln(s-1)$ لکھ کر اس کا تفرق لیں۔ تفرق کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے مساوات 6.49 سے $\frac{-1+e^t}{t}$ حاصل ہو گا۔

سوال 6.167: $\ln\left(\frac{s^2+1}{(s-1)^2}\right)$
تفاعل کو $\ln(s^2+1) - 2\ln(s-1)$ لکھ کر تفرق لیں۔ تفرق کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے مساوات 6.49 سے $\frac{2}{t}(-\cos te^t)$ حاصل ہو گا۔

سوال 6.168: $\ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$
جواب: $\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$

6.7 تفرقی مساوات کے نظام

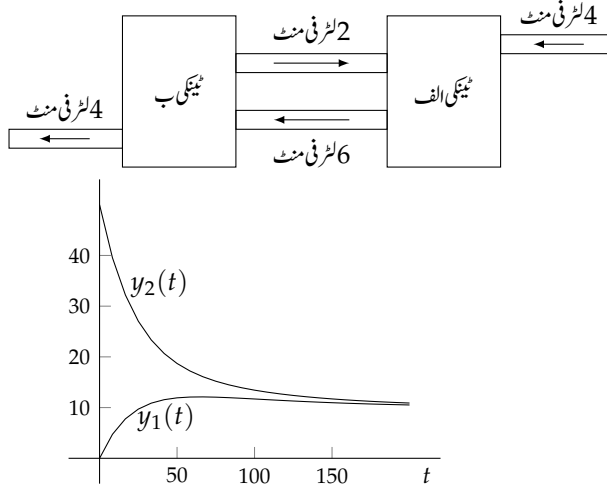
لاپلاس بدل سے سادہ تفرقی مساوات کا نظام بھی حل کیا جا سکتا ہے۔ اس ترکیب کو چند مثالوں کی مدد سے سیکھتے ہیں۔آئیں سب سے پہلے مستقل عددی سر والے خطی، یک رتبی سادہ تفرقی مساوات [حصہ 4.1 دیکھیں۔] کے نظام

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(t) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(t) \end{aligned} \tag{6.57}$$

پر غور کریں۔ $\mathcal{L}(y_1) = Y_1$ ، $\mathcal{L}(y_2) = Y_2$ ، $\mathcal{L}(g_1) = G_1$ اور $\mathcal{L}(g_2) = G_2$ لکھتے ہوئے ضمنی نظام

$$\begin{aligned} sY_1 - y_1(0) &= a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + G_1(s) \\ sY_2 - y_2(0) &= a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + G_2(s) \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} (a_{11}-s)Y_1 + a_{12}Y_2 &= -y_1(0) - G_1(s) \\ a_{21}Y_1 + (a_{22}-s)Y_2 &= -y_2(0) - G_2(s) \end{aligned} \tag{6.58}$$

شکل 6.27: مثال 6.44 میں ٹینکیوں کا نظام۔

اس نظام کو الجبرائی طور پر حل کر کے Y_1 اور Y_2 حاصل ہوں گے جن سے $y_1 = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)]$ اور $y_2 = \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)]$ ملتا ہے جو نظام کا حل ہے۔

نظام 6.58 اور نظام 6.58 کو سمتیہ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\boldsymbol{y} = [y_1 \;\; y_2]^T$ ، $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ ، $\boldsymbol{G} = [g_1 \;\; g_2]^T$ ، $\boldsymbol{Y} = [Y_1 \;\; Y_2]^T$ اور $\boldsymbol{G} = [G_1 \;\; G_2]^T$ لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g} \quad \text{اور} \quad (\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I})\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{G}$$

مثال 6.44: مرکب تیار کرنے والا دو ٹینکیوں کا نظام

شکل 6.27 میں دو ٹینکیوں کا نظام دکھایا گیا ہے۔ابتدائی طور پر ٹینکی-الف میں دو سو لٹر (200 l) خالص پانی جبکہ ٹینکی-ب میں پچاس کلو گرام (50 kg) نمک ملا دو سو لٹر پانی پایا جاتا ہے۔نظام کے باہر سے ٹینکی-الف میں پانی کا داخلی بہاو چار لٹر فی منٹ ہے جس میں نمک کی شرح $\frac{1}{20}$ کلو گرام فی لٹر $(0.05\,\mathrm{kg\,l^{-1}})$ ہے۔ٹینکیوں میں نمک کی مقدار بالمقابل وقت $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ دریافت کریں۔

حل: نظام کا نمونہ درج ذیل مساوات سے لکھا جائے گا (حصہ 4.1 دیکھیں)۔

$$\text{تبدیلی کی شرح} = \text{داخلی بہاو فی منٹ} - \text{خارجی بہاو فی منٹ}$$

یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں ابتدائی معلومات $y_1(0)=0$ اور $y_2(0)=50$ ہیں۔

$$y_1'=-\frac{6}{200}y_1+\frac{2}{200}y_2+4(0.05) \qquad y_2'=\frac{6}{200}y_1-\frac{2}{200}y_2-\frac{4}{200}y_2$$

اس طرح ضمنی نظام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
-(0.03+s)Y_1+0.01Y_2&=-\frac{0.2}{s}\\
0.03Y_1-(0.03+s)Y_2&=-50
\end{aligned}$$

ضمنی نظام کے دو عدد ہمزاد مساوات کو الجبرائی طور پر حل کرتے ہوئے Y_1 اور Y_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
Y_1&=\frac{3500s+30}{5000s^2+300s+3}=\frac{10}{s}+\frac{6.56}{s+0.0127}-\frac{16.56}{s+0.0473}\\
Y_2&=\frac{250000s^2+7500s+30}{5000s^2+300s+3}=\frac{10}{s}+\frac{11.33}{s+0.0127}+\frac{28.67}{s+0.0473}
\end{aligned}$$

ان کا الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں جو نظام کا حل ہے۔

$$\begin{aligned}
y_1(t)&=10+6.56e^{-0.0127t}-16.56e^{-0.0473t}\\
y_2(t)&=10+11.33e^{-0.0127t}+28.67e^{-0.0473}
\end{aligned}$$

□

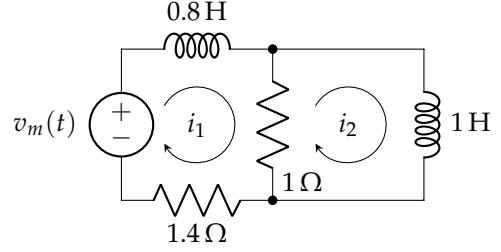
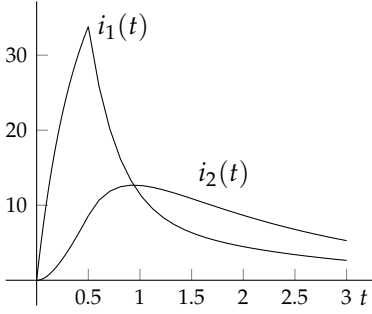
مثال 6.45: برقی دور

برقی دور کو شکل 6.28 میں دکھایا گیا ہے۔ منبع کا دباو $v_m(t)$ وقت $t=0$ تا $t=0.5$ سیکنڈ کے لئے 100 وولٹ ہے جبکہ بقایا اوقات اس کی قیمت صفر کے برابر ہے۔ رو $i_1(t)$ اور $i_2(t)$ دریافت کریں۔

حل: کرخوف قانون دباو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
0.8i_1'+1(i_1-i_2)+1.4i_1&=100[1-u(t-1)]\\
1(i_2-i_1)+1i_2'&=0
\end{aligned}$$

ابتدائی معلومات $i_1(0)=0$ اور $i_2(0)=0$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.5 اور منتقلی کے دوسرے مسئلے کی مدد سے ضمنی نظام حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
(s+3)I_1-1.25I_2&=\frac{125}{s}(1-e^{-\frac{s}{2}})\\
-I_1+(s+1)I_2&=0
\end{aligned}$$

شکل 6.28: مثال 6.45 کا دور اور اس کی برقی رو۔

جس کا الجبرائی حل درج ذیل ہے۔

$$I_1=\frac{125(s+1)}{s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{7}{2})}(1-e^{-\frac{s}{2}})$$
$$I_2=\frac{125}{s(s+\frac{1}{2})(s+\frac{7}{2})}(1-e^{-\frac{s}{2}})$$

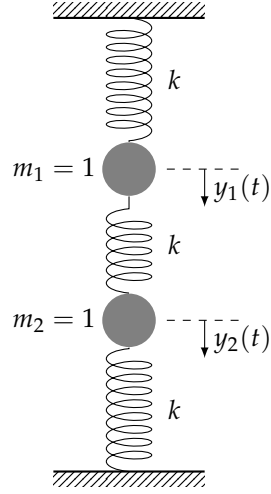
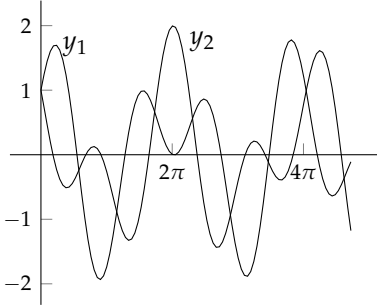
دائیں اطراف جزو $1-e^{-\frac{1}{2}}$ کے علاوہ حصے کے جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہیں

$$\frac{500}{7s}-\frac{125}{3(s+\frac{1}{2})}-\frac{625}{21(s+\frac{7}{2})}$$
$$\frac{500}{7s}-\frac{250}{3(s+\frac{1}{2})}+\frac{250}{21(s+\frac{7}{2})}$$

جن کا الٹ لاپلاس بدل $t=0$ تا $t=\frac{1}{2}$ کا حل دیتے ہیں۔

$$i_1(t)=\frac{500}{7}-\frac{125}{3}e^{-\frac{1}{2}t}-\frac{625}{21}e^{-\frac{7}{2}t}$$
$$i_2(t)=\frac{500}{7}-\frac{250}{3}e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{250}{21}e^{-\frac{7}{2}t}\qquad(0\le t\le\frac{1}{2})$$

منتقلی کے دوسرے مسئلے کے تحت $t>\frac{1}{2}$ کے لئے حل درج ذیل ہو گا۔رو کو شکل 6.28 میں دکھایا گیا ہے۔

$$i_1(t)=-\frac{125}{3}(1-e^{\frac{1}{4}})e^{-\frac{t}{2}}-\frac{625}{21}(1-e^{\frac{7}{4}})e^{-\frac{7}{2}t}$$
$$i_2(t)=-\frac{250}{3}(1-e^{\frac{1}{4}})e^{-\frac{t}{2}}+\frac{250}{21}(1-e^{\frac{7}{4}})e^{-\frac{7}{2}t}\qquad(t>\frac{1}{2})$$

شکل 6.29: اسپرنگ اور کمیت کا نظام (مثال 6.46)۔

کیا آپ بتلا سکتے ہیں کہ آخر کار دونوں رو صفر کیوں ہو گی؟ □

بلند رتبی تفرقی مساوات کے نظام کو بھی اسی طرح لاپلاس بدل کی مدد سے حل کیا جاتا ہے۔ آئیں اسپرنگ اور کمیت کا ایک ایسا نظام حل کریں۔

مثال 6.46: دو عدد کمیت اور تین عدد اسپرنگ کا نظام شکل 6.29 میں دکھایا گیا ہے۔ قصری قوت صفر کے برابر ہے۔ ساکن حال سے نیچے کی جانب فاصلہ $y_1(t)$ اور $y_2(t)$ مثبت تصور کیا گیا ہے۔ ابتدائی معلومات $y_1(0) = 1$ ، $y_2(0) = 1$ ، $y_1'(0) = \sqrt{3k}$ اور $y_2'(0) = -\sqrt{3k}$ ہیں۔ مسئلہ حل کریں۔

حل: نیوٹن کا کلیہ کہتا ہے کہ کمیت ضرب اسراع برابر ہے قوت کے۔ یوں بالائی اور نچلے کمیت کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
y_1'' &= -ky_1 + k(y_2 - y_1) \\
y_2'' &= -k(y_2 - y_1) - ky_2
\end{aligned}$$

کمیت m_1 پر بالائی اسپرنگ کی بنا $-ky_1$ قوت عمل کرتا ہے جبکہ درمیانی اسپرنگ کی بنا اس پر $k(y_2 - y_1)$ قوت عمل کرتا ہے۔ درمیانی اسپرنگ کی لمبائی میں کل اضافہ $y_2 - y_1$ کے برابر ہے۔ کمیت m_2 پر درمیانی اسپرنگ کی بنا $-k(y_2 - y_1)$ قوت عمل کرتا ہے جبکہ نچلی اسپرنگ کی بنا اس پر $-ky_2$ قوت عمل کرتا ہے۔

$\mathcal{L}(y_1) = Y_1$ اور $\mathcal{L}(y_2) = Y_2$ لکھتے ہوئے ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مساوات 6.6 کی مدد سے ضمنی مساوات لکھتے ہیں

$$s^2Y_1 - s - \sqrt{3k} = -kY_1 + k(Y_2 - Y_1)$$
$$s^2Y_2 - s + \sqrt{3k} = -k(Y_2 - Y_1) - kY_2$$

جن کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(s^2 + 2k)Y_1 - kY_2 = s + \sqrt{3k}$$
$$-kY_1 + (s^2 + 2k)Y_2 = s - \sqrt{3k}$$

ان ہمزاد مساوات کا الجبرائی حل لکھتے ہیں۔

$$Y_1 = \frac{(s + \sqrt{3k})(s^2 + 2k) + k(s - \sqrt{3k})}{(s^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{s}{s^2 + k} + \frac{\sqrt{3k}}{s^2 + 3k}$$
$$Y_2 = \frac{(s - \sqrt{3k})(s^2 + 2k) + k(s + \sqrt{3k})}{(s^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{s}{s^2 + k} - \frac{\sqrt{3k}}{s^2 + 3k}$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے حل حاصل کرتے ہیں

$$y_1(t) = \cos\sqrt{k}t + \sin\sqrt{3k}t$$
$$y_2(t) = \cos\sqrt{k}t - \sin\sqrt{3k}t$$

جس کو شکل 6.29 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ حرکت دو ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہے۔

□

سوالات

سوال 6.169 تا سوال 6.178 میں سادہ تفرقی مساوات کا نظام دیا گیا ہے۔ اس کو لاپلاس سے حل کریں۔

سوال 6.169: $y_1' + y_2 = 0, \quad y_1 + y_2' = 1, \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$

جوابات: $y_1(t) = 1 - e^t$ اور $y_2(t) = e^t$

سوال 6.170: $y_1' + y_2 = 0, \quad y_1 + y_2' = \sin t, \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$

جوابات: $y_1 = \frac{1}{2}(\sin t - 3\sinh t)$ اور $y_2 = \frac{1}{2}(-\cos t + 3\cosh t)$

سوال 6.171: $y_1' + y_1 - 2y_2 = 0, \quad y_2' - y_1 + 2y_2 = 0, \quad y_1(0) = 1, y_2(0) = 1$
جوابات: $y_1 = \frac{1}{3}(4 - e^{-3t})$ اور $y_2 = \frac{1}{3}(2 + e^{-3t})$

سوال 6.172: $y_1' = y_2 - 4\cos 4t, \quad y_2' = -3y_1 - 9\sin 4t, \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$
جوابات: $y_1 = -\frac{1}{13}(8\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t + 7\sin 4t)$ اور $y_2 = \frac{24}{13}(\cos 4t - \cos\sqrt{3}t)$

سوال 6.173:

$$y_1' = y_2 + 1 - u(t-1), \quad y_2' = -y_1 + 1 - u(t-1), \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$$

جوابات:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\cos t + \sin t + 1 + u(t-1)[-1 + \cos(t-1) - \sin(t-1)] \\ y_2 &= \cos t + \sin t - 1 + u(t-1)[1 - \cos(t-1) - \sin(t-1)] \end{aligned}$$

سوال 6.174:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 4y_2 + u(t-1)e^t \\ y_2 &= y_1 - 3y_2 + u(t-1)e^t, \quad y_1(0) = 3, y_2(0) = 0 \end{aligned}$$

جوابات:

$$\begin{aligned} y_1 &= -e^{-2t} + 4e^t + \frac{1}{3}u(t-1)(e^t - e^{3-2t}) \\ y_2 &= -e^{-2t} + e^t + \frac{1}{3}u(t-1)(e^t - e^{3-2t}) \end{aligned}$$

سوال 6.175:

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_2 \\ y_2 &= -y_1 + 2y_2, \quad y_1(0) = 3, y_2(0) = 1 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = (3 + 4t)e^{3t}$ اور $y_2(1 - 4t)e^{3t}$

سوال 6.176:

$$\begin{gathered} y_1'' = y_1 + 3y_2, \quad y_2'' = 4y_1 - 4e^t \\ y_1(0) = 2, y_1'(0) = 3, y_2(0) = 1, y_2'(0) = 2 \end{gathered}$$

جوابات: $y_1 = e^t + e^{2t}$ اور $y_2 = e^{2t}$

سوال 6.177:

$$y_1'' = -y_2 - 101\sin 10t, \quad y_2'' = -y_1 + 101\sin 10t$$
$$y_1(0) = 0,\, y_1'(0) = 6,\, y_2(0) = 8,\, y_2'(0) = -6$$

جوابات:

$$\begin{aligned} y_1 &= -4e^t + \sin 10t + 4\cos 10t \\ y_2 &= 4e^t - \sin 10t + 4\cos 4t \end{aligned}$$

سوال 6.178:

$$\begin{aligned} &y_1' + y_2' = 2\sinh t \\ &y_2' + y_3' = e^t \\ &y_3' + y_1' = 2e^t - e^{-t}, \quad y_1(0) = 1,\, y_2(0) = 1,\, y_3(0) = 0 \end{aligned}$$

جوابات: $y_1 = e^t$ ، $y_2 = e^{-t}$ اور $y_3 = e^t - e^{-t}$

6.8 لاپلاس بدل کے عمومی کلیے

تعریف $$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

الٹ لاپلاس بدل $$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

خطیت $$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

تفاعل کا تفرق $$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}(f(n)) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{(n-1)}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

تفاعل کا تکمل $$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)$$

بدل کا تفرق $$\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$$

بدل کا تکمل $$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_0^t F(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s}$$

الجھاو $$\mathcal{L}(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

منتقلی کا پہلا مسئلہ، s منتقلی $$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a), \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t)$$

منتقلی کا دوسرا مسئلہ، t منتقلی $$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = f(t-a)u(t-a)$$

دہراتا تفاعل $$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$$

جدول 6.2: لاپلاس بدل کا وسیع جدول

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$	شمار
1	$\frac{1}{s}$	1
t	$\frac{1}{s^2}$	2
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n} \quad (n=1,2,\cdots)$	3
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	4
$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}$	5
$\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}$	$\frac{1}{s^a} \quad (a>0)$	6
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	7
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	8
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad (n=1,2,\cdots)$	9
$\frac{t^{k-1}e^{at}}{\Gamma(k)}$	$\frac{1}{(s-a)^k} \quad (k>0)$	10
$\frac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a\neq b)$	11
$\frac{1}{a-b}(ae^{at}-be^{bt})$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a\neq b)$	12
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	13
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	14
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	15
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	16
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	17
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	18
$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$	$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	19
$\frac{1}{\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$	$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	20
$\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	21
$\frac{t}{2\omega}\sin\omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	22
$\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	23
$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt)$	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \quad (a^2\neq b^2)$	24

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	شمار
$\frac{1}{4k^3}(\sin kt \cosh kt - \cos kt \sinh kt)$	$\frac{1}{s^4+4k^4}$	25
$\frac{1}{2k^2} \sin kt \sinh kt$	$\frac{s}{s^4+4k^4}$	26
$\frac{1}{2k^3}(\sinh kt - \sin kt)$	$\frac{1}{s^4-k^4}$	27
$\frac{1}{2k^2}(\cosh kt - \cos kt)$	$\frac{s}{s^4-k^4}$	28
$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	29
$e^{-\frac{(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$	$\frac{1}{\sqrt{(s+a)}\sqrt{s+b}}$	30
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	31
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at}(1+2at)$	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	32
$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k} \quad (k>0)$	33
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	34
$\delta(t-a)$	e^{-as}	35
$J_0(2\sqrt{kt})$	$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}$	36
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{kt}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	37
$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sinh 2\sqrt{kt}$	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	38
$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$	$e^{-k\sqrt{s}} \quad (k>0)$	39
$-\ln t - \gamma \quad (\gamma \approx 0.5772)$	$\frac{1}{s}\ln s$	40
$\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})$	$\ln \frac{s-a}{s-b}$	41
$\frac{2}{t}(1 - \cos \omega t)$	$\ln \frac{s^2+\omega^2}{s^2}$	42
$\frac{2}{t}(1 - \cosh at)$	$\ln \frac{s^2-a^2}{s^2}$	43
$\frac{1}{t} \sin \omega t$	$\tan^{-1} \frac{\omega}{s}$	44
$\operatorname{Si}(t)$	$\frac{1}{s}\cot^{-1} s$	45

باب 7

خطی الجبرا: سمتیات

7.1 غیر سمتیات اور سمتیات

طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جنہیں ان کی مقدار سے مکمل طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔مثلاً کمیت، درجہ حرارت، برقی بار، وقت، رقبہ، حجم، فاصلہ، برقی دباو وغیرہ۔ان میں سے ہر ایک کو (مقدار کی موزوں اکائی چن کر) ایک عدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ایسی تمام مقداروں کو غیر سمتیات[1] کہتے ہیں۔غیر سمتی مقدار کی قیمت پر چنی گئی محدد کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔

اس کے برعکس طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی قیمتیں بھی پائی جاتی ہیں جن کی مکمل اظہار کے لئے ان کی قیمت کے علاوہ ان کی سمت بھی درکار ہوتی ہے۔ان کی ایک مثال میکانی قوت ہے۔آپ جانتے ہیں کہ قوت کو تیر کی نشان سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں تیر کی سمت، قوت کی سمت اور تیر کی لمبائی (کسی پیمائش کے تحت) قوت کی مقدار کو ظاہر کرتی ہے۔ شکل 7.1-الف میں ہلکے دھاگے سے بندھی ہوئی کمیت m کی دائری حرکت دکھائی گئی ہے۔کمیت کی لمحاتی سمتی رفتار v کو تیر سے دکھایا گیا ہے۔اس تیر کی سمت، کمیت کی لمحاتی سمتی رفتار دیتی ہے جبکہ تیر کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لمحاتی سمتی رفتار کی قیمت دیتی ہے۔شکل میں کمیت کی اسراع a بھی دکھائی گئی ہے جہاں a کی لمبائی (کسی موزوں تناسب سے) لمحاتی اسراع کی قیمت دیتی ہے۔

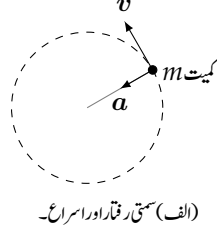
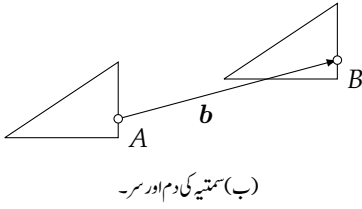
---

[1] scalars

$\boldsymbol{v}$ m کمیت $\boldsymbol{a}$

(الف) سمتی رفتار اور اسراع۔

B $\boldsymbol{b}$ A

(ب) سمتیہ کی دم اور سر۔

شکل 7.1: سمتیہ کی تفصیل۔

سطح مستوی میں تکون کی (بلا گھومے) منتقلی شکل 7.1-ب میں دکھائی گئی ہے۔اس حرکت کو (تکون کے ہر نقطے کی) طے فاصلے کی مقدار اور سمت سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ تکون پر کسی نقطے کی ابتدائی مقام A سے اختتامی مقام B تک سمتی خط سے اس حرکت کو ظاہر کیا جا سکتا ہے۔یوں سمتی خط $\boldsymbol{b}$ ، تکون کے ایک نقطہ کی A سے B منتقلی دکھاتی ہے۔ تکون کے ہر نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک سمتی خطوط کھینچ کر ہمیں سمتی خطوط کی نسل ملتی ہے جس میں تمام سمتی خطوط کی لمبائی ایک جیسی اور سمت ایک جیسی ہو گی (یعنی یہ آپس میں متوازی ہوں گے)۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک سمتی خط، تکون کے ایک نقطے کی ابتدائی مقام سے اختتامی مقام تک منتقلی کو ظاہر کرتی ہے۔

اس سے سمتیہ کی درج ذیل تعریف بیان کی جا سکتی ہے۔

تعریف: سمتیہ
سمتی خط کو سمتیہ[2] کہتے ہیں۔اس کی لمبائی کو سمتیہ کی لمبائی اور سمت کو سمتیہ کی سمت کہتے ہیں۔دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب ان کی لمبائی ایک جیسی ہو اور ان کی سمت ایک جیسی ہو۔

سمتیہ کی لمبائی کو سمتیہ کی **اقلیدسی معیار**[3] (یا معیار) اور سمتیہ کی **مقدار**[4] بھی کہتے ہیں۔

سمتیہ کی ابتدائی نقطے کو سمتیہ کی دم[5] اور اختتامی نقطے کو سمتیہ کا سر[6] کہتے ہیں۔ یوں شکل 7.1-ب میں نقطہ B سمتیہ $\boldsymbol{b}$ کی دم ہے جبکہ نقطہ A اس کا سر ہے۔

---

[2] vector
[3] Euclidean norm
[4] magnitude
[5] tail
[6] head

ہم سمتیات کو موٹی لکھائی میں چھوٹی حروف تہجی مثلاً $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{v}$ ، وغیرہ، سے ظاہر کرتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ پر تیر یا آدھے تیر کا نشان بنایا جاتا ہے یوں اسراع کو $\vec{a}$ یا $\overrightharpoon{a}$ لکھا جاتا ہے۔سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی مقدار کو $|\boldsymbol{a}|$ لکھا جاتا ہے۔

سمتیہ کی تعریف سے ظاہر ہے کہ ہم سمتیہ کو بغیر گھمائے ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کر سکتے ہیں[7] یعنی ہم سمتیہ کی دم کہیں پر بھی منتقل کر سکتے ہیں۔ظاہر ہے کہ سمتیہ کی دم کا مقام مقرر کرنے سے اس کے سر کا مقام بھی مقرر ہو گا۔

اگر دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ ایک دوسرے کے برابر ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{7.1}$$

اور اگر یہ آپس میں برابر نہ ہوں تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \tag{7.2}$$

کسی بھی سمتیہ کو ترسیمی طور پر موزوں لمبائی اور سمت کی سمتی خط سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

ایسا سمتیہ جس کی لمبائی اکائی (1) ہو **اکائی سمتیہ**[8] کہلاتا ہے۔

7.2 سمتیہ کے اجزاء

تین بُعدی فضا میں نقطہ ایک جیومیٹریائی چیز ہے جس کو محددی نظام میں تین مرتب اعداد (تصور کیا جا سکتا ہے یا) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ گزشتہ حصے میں ہم نے سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی انداز میں پیش کی، جسے محددی نظام کی استعمال سے الجبرائی انداز میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

نظام محدد کے **محور**[9] ، آپس میں عمودی تین متقاطع سیدھے خطوط ہوں گے۔ان کے مقام انقطاع کو محددی نظام کا **مبدا**[10] کہتے ہیں۔ہم تینوں محور پر پیمائشی ناپ ایک جیسی چنتے ہیں لہٰذا محور پر مبدا سے اکائی فاصلے پر $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ نقطے پائے جائیں گے۔اس محددی نظام کو فضا میں **کارتیسی نظام محدد**[11] (شکل 7.2 سے رجوع کریں) کہتے ہیں۔

---

[7] یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ طبیعیات اور جیومیٹری میں ایسی صورتیں پائی جاتی ہیں جہاں سمتیہ کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔آپ میکانیات سے جانتے ہیں کہ کسی بھی غیر لچکدار مادے پر قوت کا اطلاق، قوت کی سمت میں لکیر پر رہتے ہوئے، کسی بھی نقطے پر کیا جا سکتا ہے۔اس سے **قابل منتقلی سمتیہ** کا تصور پیدا ہوتا ہے۔اس کے برعکس، لچکدار مادے پر قوت کے اطلاق کا نقطہ تبدیل کرنے سے نتائج تبدیل ہوں گے جو ناقابل قبول بات ہے۔یہ حقیقت **مقید سمتیہ** کی تصور کو جنم دیتی ہے۔اس کتاب میں صرف قابل منتقلی سمتیات پر بات کی جائے گی۔

[8] unit vector

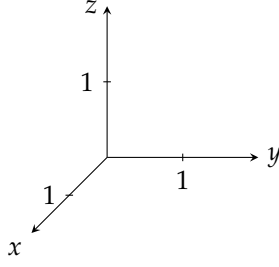
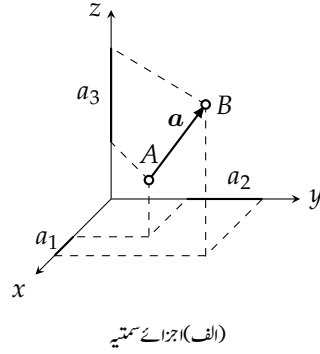
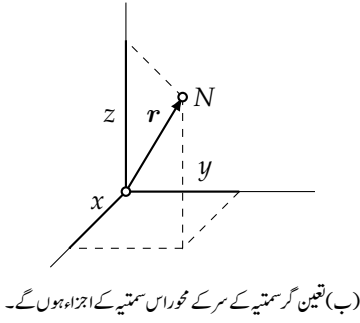
[9] coordinates

[10] origin

[11] Cartesian coordinate system

شکل 7.2: کارتیسی نظام محدد ی

(ب) تعین گر سمتیہ کے سر کے محور اس سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔

(الف) اجزائے سمتیہ

شکل 7.3: سمتیہ کے اجزاء اور تعین گر سمتیہ۔

ہم اب ابتدائی نقطہ A سے اختتامی نقطہ B تک سمتیہ $\boldsymbol{a}$ پر غور کرتے ہیں (شکل 7.3-الف)۔ اگر نقطہ A کے محور (x_1, y_1, z_1) اور نقطہ B کے محور (x_2, y_2, z_2) ہوں تب درج ذیل اعداد، اس کارتیسی محدد ی نظام کے لحاظ سے، سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء[12] کہلاتے ہیں۔

$$a_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 = y_2 - y_1, \quad a_3 = z_2 - z_1 \tag{7.3}$$

سمتیہ کی تعریف کی رو سے $\boldsymbol{a}$ کی لمبائی سے مراد A سے B تک کی لمبائی $\overline{AB}$ ہے جو مساوات 7.3 میں دیے گئے اجزاء کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ فیثاغورث کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{7.4}$$

مثال 7.1: سمتیہ کے اجزاء اور اس کی لمبائی

components[12]

سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی دم $(-2,3,1)$ اور سر $(5,-2,7)$ ہیں۔اس سمتیہ کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی دریافت کریں۔

حل:اجزاء $a_1 = 5 - (-2) = 7, \quad a_2 = -2 - 3 = -5, \quad a_3 = 7 - 1 = 6$ اور لمبائی

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{7^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{110}$$

ہے۔اگر ہم سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی دم کو نقطہ $(4,1,3)$ پر منتقل کریں تب اس کا سر $(11,-4,9)$ پر ہو گا۔

مساوات 7.3 میں دیے گئے اجزاء کو ذہن میں رکھتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر $\boldsymbol{a}$ کی دم کو کارتیسی محدد کی مبدا پر منتقل کیا جائے تب $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء اس کی سر کے محور ہوں گے۔ایسا سمتیہ جس کو شکل 7.3-ب میں دکھایا گیا ہے **تعین گر سمتیہ**[13] کہلاتا ہے اور اس کو $\boldsymbol{r}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ □

$\boldsymbol{a}$ کی دم کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے سے سمتیہ کا سر بھی اتنا ہی اپنی جگہ سے ہلتا ہے لہٰذا مساوات 7.3 سے ظاہر ہے کہ سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 کی قیمت پر $\boldsymbol{a}$ کی ابتدائی نقطے کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔یوں کسی بھی معین کارتیسی محددی نظام کے حوالے سے سمتیہ کو مکمل طور پر تین (محوری) اعداد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

وہ سمتیہ جس کے اجزاء 0 ، 0 ، 0 ہوں معدوم سمتیہ[14] یا صفر سمتیہ[15] $\mathbf{0}$ کہلاتا ہے۔یوں کوئی بھی تین اعداد بہ شمول 0 ، 0 ، 0 سمتیہ کے اجزاء ہو سکتے ہیں۔

معین نظام محدد کی صورت میں ہر مرتب تین اعداد ایک منفرد سمتیہ کو ظاہر کریں گے۔یہ تین اعداد سمتیہ کے اجزاء ہوں گے۔اسی طرح معین نظام محدد میں ہر سمتیہ کے اجزاء سے سمتیہ کو تین مرتب اعداد کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔گزشتہ حصہ میں سمتیہ کی تعریف جیومیٹریائی نقطہ نظر سے کی گئی۔ہم اب تین مرتب حقیقی اعداد (جو سمتیہ کے اجزاء کہلاتے ہیں) کو سمتیہ کی تعریف کہہ سکتے ہیں۔اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہم سمتیہ کی جیومیٹریائی صورت حاصل کر سکتے ہیں۔

---

[13] position vector
[14] null vector
[15] zero vector

یوں دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ صرف اور صرف اس صورت ایک جیسے ہوں گے جب ان کے تین مطابقتی اجزاء ایک جیسے ہوں۔ لہٰذا درج ذیل سمتی مساوات

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

سے مراد درج ذیل تین مساوات ہیں جہاں a_1 ، a_2 ، a_3 اور b_1 ، b_2 ، b_3 ایک ہی کارتیسی نظام محدد میں بالترتیب $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے مطابقتی اجزاء ہیں۔

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

ظاہر ہے کہ اگر ایک سمتیہ کوئی حقیقی یا جیومیٹریائی چیز ہو تب اس کی لمبائی اور سمت پر چننی گئی نظام محدد کا کوئی اثر نہیں ہونا چاہیے۔

اگلے باب میں سمتیہ کے تصور کو وسعت دیتے ہوئے ہر مرتب n اعداد کو سمتیہ تصور کیا جائے گا، جہاں n کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہو سکتا ہے۔

سوالات

سوال 7.1 تا سوال 7.10 میں سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کا ابتدائی نقطہ A اور اختتامی نقطہ B ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے اجزاء حاصل کرتے ہوئے سمتیہ کی لمبائی $|\boldsymbol{u}|$ حاصل کریں۔ $\boldsymbol{u}$ کا خط کھینچیں۔

سوال 7.1: $A:(2,3,0), \quad B:(-4,6,0)$

جوابات: $u_3 = 0$ ، $u_2 = 3$ ، $u_1 = -6$ ، $|\boldsymbol{u}| = 3\sqrt{5}$

سوال 7.2: $A:(5,3,1), \quad B:(1,7,2)$

جوابات: $u_3 = 1$ ، $u_2 = 4$ ، $u_1 = -4$ ، $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{33}$

سوال 7.3: $A:(1.2,-1,2.5), \quad B:(2.4,1.6,-3.2)$

جوابات: $u_3 = -5.7$ ، $u_2 = 2.6$ ، $u_1 = 1.2$ ، $|\boldsymbol{u}| = 6.38$

سوال 7.4: $A:(0,0,3), \quad B:(4,0,0)$

جوابات: $u_3 = -3$ ، $u_2 = 0$ ، $u_1 = 4$ ، $|\boldsymbol{u}| = 5$

سوال 7.5: $A:(3,3,3), \quad B:(1,1,1)$

جوابات: $u_3 = -2$ ، $u_2 = -2$ ، $u_1 = -2$ ، $|\boldsymbol{u}| = 2\sqrt{3}$

سوال 7.6: $A:(1,1,1), \quad B:(3,3,3)$

جوابات: $u_3 = 2$ ، $u_2 = 2$ ، $u_1 = 2$ ، $|\boldsymbol{u}| = 2\sqrt{3}$

سوال 7.7: $A:(2,2,2), \quad B:(2,2,0)$

جوابات: $u_3 = 0$ ، $u_2 = 0$ ، $u_1 = 0$ ، $|\boldsymbol{u}| = 0$ ؛ یہ صفر سمتیہ ہے۔

سوال 7.8: $A:(0,7,8), \quad B:(-3,1,8)$

جوابات: $u_3 = 0$ ، $u_2 = 6$ ، $u_1 = -3$ ، $|\boldsymbol{u}| = 3\sqrt{5}$

سوال 7.9: $A:(100,200,300), \quad B:(100,204,303)$

جوابات: $u_3 = 3$ ، $u_2 = 4$ ، $u_1 = 0$ ، $|\boldsymbol{u}| = 5$

سوال 7.10: $A:(-5,-6,-2), \quad B:(-8,-6,-4)$

جوابات: $u_3 = -2$ ، $u_2 = 0$ ، $u_1 = -3$ ، $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{13}$

سوال 7.11 تا سوال 7.20 میں ابتدائی نقطہ A اور سمتیہ کے اجزاء دیے گئے ہیں۔ سمتیہ کا اختتامی نقطہ دریافت کریں۔

سوال 7.11: $A:(-2,3,1); \quad 3,1,4$
جواب: $1,4,5$

سوال 7.12: $A:(0,0,0); \quad 5,1,7$
جواب: $5,1,7$

سوال 7.13: $A:(5,2,-6); \quad 0,0,0$
جواب: $5,2,-6$

سوال 7.14: $A:(3,6,1); \quad -5,-7,2$
جواب: $-2,-1,3$

سوال 7.15: $A:(4,4,4); \quad 4,4,4$
جواب: $8,8,8$

سوال 7.16: $A:(7,7,7); \quad -7,-7,-7$
جواب: $0,0,0$

سوال 7.17: $A:(-3,-4,-5); \quad 3,4,5$
جواب: $0,0,0$

سوال 7.18: $A:(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{3}); \quad -\frac{3}{2},\frac{1}{3},1$
جواب: $-1,1,\frac{4}{3}$

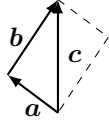
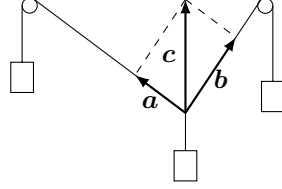
سوال 7.19: $A:(0.2,-0.1,0.5); \quad 1.1,-0.4,-0.3$
جواب: $1.3,-0.5,0.2$

سوال 7.20: $A:(11.3,-10,-15.8); \quad 12.6,9,-14$
جواب: $23.9,-1,-29.8$

7.3 سمتیات کا مجموعہ، غیر سمتی کے ساتھ ضرب

چونکہ ہم سمتیات کو حساب کتاب کے لئے استعمال کرنا چاہتے ہیں لہٰذا سمتیات کے دو عدد الجبرائی اعمال پیش کرتے ہیں جنہیں سمتیات کا مجموعہ اور سمتیات کا غیر سمتی کے ساتھ ضرب کہتے ہیں۔

تجربے سے معلوم ہوتا ہے کہ دو قوتوں کا حاصل، متوازی الاضلاع (شکل 7.4) سے ملتا ہے۔اس سے سمتیات کے مجموعے کی درج ذیل تعریف حاصل ہوتی ہے۔

تعریف: سمتیات کا مجموعہ
دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کو لیتے ہوئے $\boldsymbol{a}$ کے سر کے ساتھ $\boldsymbol{b}$ کی دم ملائیں۔اب $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی مجموعے کی

(ب) سمتیوں کا مجموعہ بذریعہ متوازی الاضلاع

(الف) قوتوں کا مجموعہ بذریعہ تجربہ

شکل 7.4: تجربہ سے قوتوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہوئے سمتیات کے مجموعے کا حصول حاصل ہوتا ہے۔

(الف) سر کے ساتھ دم ملا کر سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

(ب) سمتیات کے مطابقتی اجزاء کو جمع کرتے ہوئے حاصل جمع سمتیہ کے اجزاء حاصل ہوتے ہیں۔

شکل 7.5: مجموعہ سمتیات۔

تعریف وہ سمتیہ $\boldsymbol{c}$ ہے جو $\boldsymbol{a}$ کی دم سے $\boldsymbol{b}$ کے سر تک کھینچی جائے گی (شکل 7.5-الف)۔اس عمل کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \tag{7.5}$$

سمتیات کی مجموعے کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر کسی معین کارتیسی نظام محدد میں $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء a_1، a_2 اور a_3 جبکہ $\boldsymbol{b}$ کے اجزاء b_1، b_2 اور b_3 ہوں تب حاصل جمع سمتیہ $\boldsymbol{c}$ کے اجزاء c_1، c_2 اور c_3 درج ذیل ہوں گے۔

$$c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3 \tag{7.6}$$

شکل 7.5-ب میں اس عمل کو سطح پر دکھایا گیا ہے، اور فضا میں بھی بالکل ایسا ہی ہو گا۔

مجموعے کی تعریف یا مساوات 7.6 سے مجموعہ سمتیات کی درج ذیل خصوصیات ملتی ہیں جہاں $-\boldsymbol{a}$ سے مراد ایسا سمتیہ ہے جس کی لمبائی $|\boldsymbol{a}|$ اور سمت $\boldsymbol{a}$ کے الٹ ہو۔

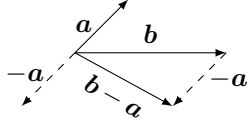
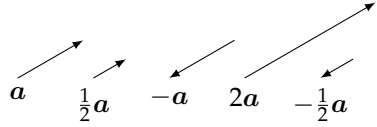
$$
\begin{aligned}
&\text{(الف)} \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \quad \text{قانون تبادل}\\
&\text{(ب)} \quad (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \quad \text{قانون تلازم}\\
&\text{(پ)} \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a}\\
&\text{(ت)} \quad \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

مساوات 7.7-ب میں ہم $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ لکھ سکتے ہیں اور یہی طریقہ زیادہ اعداد کے سمتیات کا مجموعہ لکھنے کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔مجموعہ $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}$ کی جگہ $2\boldsymbol{a}$ لکھا جاتا ہے، وغیرہ، وغیرہ۔ ان سے (اور $-\boldsymbol{a}$ کے استعمال سے) ہم سمتیات کا دوسرا الجبرائی عمل بیان کرتے ہیں۔

سمتیات کا غیر سمتیات (اعداد) کے ساتھ ضرب

اگر $\boldsymbol{a}$ ایک سمتیہ اور q کوئی حقیقی عدد ہو تب سمتیہ $q\boldsymbol{a}$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$q\boldsymbol{a}$ کی لمبائی $|q||\boldsymbol{a}|$ ہے۔

اگر $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ہو اور $q > 0$ ہو تب $q\boldsymbol{a}$ کی سمت وہی ہو گی جو $\boldsymbol{a}$ کی تھی۔

(ب) سمتیات کا فرق

(الف) سمتیات کا غیر سمتیات کے ساتھ ضرب۔

شکل 7.6: سمتیات کا غیر سمتیہ کے ساتھ ضرب اور سمتیات کا فرق۔

اگر $a \neq 0$ ہو اور $q < 0$ ہو تب qa کی سمت a کی سمت کے الٹ ہو گی۔

اگر $a = 0$ یا $q = 0$ ہو (اور یا دونوں صفر ہوں) تب $qa = 0$ ہو گا۔

ان قواعد کی سادہ مثالیں شکل 7.6-الف میں دکھائی گئی ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر a کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں تب اسی نظام محدد میں qa کے اجزاء qa_1 ، qa_2 اور qa_3 ہوں گے۔اسی طرح سمتیہ کی تعریف سے درج ذیل ہو گا۔

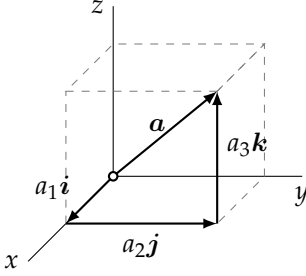
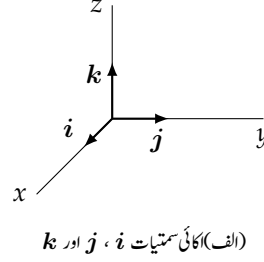
$$\begin{aligned} q(a+b) &= qa + qb \\ (c+k)a &= ca + ka \\ c(ka) &= (ck)a \qquad \text{جس کو } cka \text{ لکھا جاتا ہے} \\ 1a &= a \end{aligned} \tag{7.8}$$

مساوات 7.7 اور مساوات 7.8 سے درج ذیل اخذ کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} 0a &= 0 \\ (-1)a &= -a \end{aligned} \tag{7.9}$$

ہم $b-(a)$ کی جگہ $b-a$ لکھ سکتے ہیں (شکل 7.6-ب)۔

کسی بھی ایک کارتیسی نظام محدد کو استعمال کرتے ہوئے، ہم سمتیہ a جس کے اجزاء a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں کو تین ایسی سمتیات کا مجموعہ لکھ سکتے ہیں جو اس کارتیسی نظام کے تین محور کے متوازی ہوں۔ہم اس کارتیسی نظام کے ساتھ تین ایسے اکائی سمتیات، جنہیں ہم i ، j اور k کہیں گے، وابستہ کرتے ہیں جن کی مثبت سمت اس کارتیسی نظام کے محور کی مثبت سمت ہو۔ یوں a کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (شکل 7.7)۔

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \tag{7.10}$$

(ب) سمتیہ کا تین اکائی سمتیات کی مدد سے اظہار

(الف) اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$

شکل 7.7: اکائی سمتیات اور ان کا استعمال۔

شکل 7.7-الف میں اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کو دکھایا گیا ہے جہاں ان کی دم کو کارتیسی نظام کے مبدا پر رکھا گیا ہے۔یہ اکائی سمتیات آپس میں عمودی یا قائمہ[16] ہیں۔ہم کہتے ہیں کہ $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ اس نظام محدد کی ثلاثہ اکائی قائمہ سمتیات ہیں۔

کسی بھی سمتیہ کو اس کی لمبائی سے تقسیم کرتے ہوئے اسی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل ہو گا۔یوں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اکائی سمتیہ} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \tag{7.11}$$

مثال 7.2: کسی کارتیسی نظام میں اگر $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{b} = -5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ ہوں، تب درج ذیل ہوں گے۔

$$3\boldsymbol{a} = 9\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{k}, \quad -\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \quad 1.2\boldsymbol{a} - 0.5\boldsymbol{b} = 6.1\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 3.4\boldsymbol{k}$$

□

مثال 7.3: کسی سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی دم A پر ہے جبکہ اس کا سر B پر ہے۔اسی سمت میں کسی بھی سمتیہ کو $l\boldsymbol{a}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں l غیر سمتی مستقل ہے۔اب اگر $l\boldsymbol{a}$ سمتیہ کی دم A پر ہو تب $l = 0$ کی صورت میں اس سمتیہ کا سر نقطہ A پر ہو گا جبکہ $l = 1$ کی صورت میں اس کا سر نقطہ B پر ہو گا۔اسی طرح $l = \frac{1}{2}$ کی صورت میں اس سمتیہ کا سر $\boldsymbol{a}$ کے عین وسط پر ہو گا۔

[16] orthogonal

□

مثال 7.4: اکائی سمتیہ
سمتیہ $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ دریافت کریں۔اسی سمت میں ایسا سمتیہ حاصل کریں جس کی لمبائی 7 ہو۔

حل: $\boldsymbol{a}$ کی لمبائی $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{4+25+9} = \sqrt{38}$ ہے۔یوں مساوات 7.11 کے تحت $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{38}}$$

ہو گا۔کسی بھی اکائی سمتیہ کو غیر سمتی l سے ضرب دینے سے اس اکائی سمتیہ کی سمت میں l لمبائی کا سمتیہ حاصل ہوتا ہے لہٰذا درکار سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

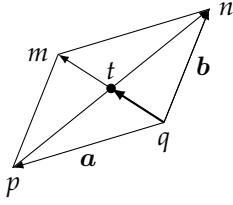
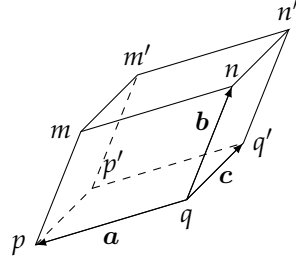
$$7\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{14\boldsymbol{i} - 35\boldsymbol{j} + 21\boldsymbol{k}}{\sqrt{38}} = 2.27\boldsymbol{i} - 6.68\boldsymbol{j} + 3.41\boldsymbol{k}$$

□

مثال 7.5: $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{c}$ شکل 7.8-الف میں دکھائے گئے چپٹا ڈبے کے تین قریبی کنارے ہیں۔ڈبے کی سامنے سطح $mnqp$ کا وتر $\boldsymbol{v}_{mq}$ اور $\boldsymbol{v}_{np}$ دریافت کریں جہاں وتر $\boldsymbol{v}_{mq}$ کی دم q اور سر m ہیں۔جیسا شکل 7.8-ب میں دکھایا گیا ہے، وتری سمتیات $\boldsymbol{v}_{mq}$ اور $\boldsymbol{v}_{np}$ ایک دونوں کو نقطہ t پر قطع کرتے ہیں۔نقطہ t دریافت کرتے ہوئے ثابت کریں کہ دونوں وتر ایک دونوں کو برابر حصوں میں قطع کرتے ہیں۔

حل: شکل کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{r}_{mq} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{r}_{np} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$$

شکل 7.8-ب سے ظاہر ہے کہ q کو ابتدائی نقطہ تصور کرتے ہوئے t تک کئی راستوں سے پہنچا جا سکتا ہے۔چونکہ t وتر $\boldsymbol{v}_{mq}$ پر پایا جاتا ہے لہٰذا q سے t تک سمتیہ کو $\boldsymbol{v}_{tq} = l_1\boldsymbol{v}_{mq}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $0 < l_1 < 1$ ممکن ہے۔اسی طرح q سے پہلے p اور یہاں سے $\boldsymbol{v}_{np}$ کی سمت میں چلتے ہوئے بھی نقطہ

(ب) وتر نقطہ t پر ایک دونوں کو برابر حصوں میں قطع کرتے ہیں۔

(الف) چپٹا ڈبا۔

شکل 7.8: سمتیات کا استعمال۔ مثال 7.5

t تک پہنچنا ممکن ہے۔ ایسا کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}_{tq} = \boldsymbol{a} + l_2\boldsymbol{v}_{np}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $0 < l_2 < 1$ ممکن ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{v}_{tq} = l_1\boldsymbol{v}_{mq} = \boldsymbol{a} + l_2\boldsymbol{v}_{np} \implies l_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} + l_2(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}) \tag{7.12}$$

جس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\boldsymbol{a}(l_1 - 1 + l_2) + \boldsymbol{c}(l_1 - l_2) = 0$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ غیر صفر ہیں اور ان کی سمتیں بھی مختلف ہیں لہٰذا درج بالا مساوات صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب دونوں قوسین صفر ہوں یعنی:

$$\begin{aligned} l_1 - 1 + l_2 &= 0 \\ l_1 - l_2 &= 0 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}$ ملتا ہے۔ اب $l_1 = \frac{1}{2}$ کی صورت میں مساوات 7.12 سے $\boldsymbol{v}_{tq} = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_{mq}$ ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ نقطہ t عین mq کے وسط میں پایا جاتا ہے۔ مساوات 7.12 کے اگلے حصے سے اسی طرح ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ t عین np کے وسط میں پایا جاتا ہے۔

□

سوالات

سوال 7.21 تا سوال 7.30 میں $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{k}$ لیں۔

سوال 7.21: $-4\boldsymbol{a}, \frac{1}{4}\boldsymbol{a}, 4\boldsymbol{a}$
جوابات: $-4\boldsymbol{a} = -8\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k},\ \frac{1}{4}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{4}\boldsymbol{j} + \frac{1}{4}\boldsymbol{k}, 4\boldsymbol{a} = 8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$

سوال 7.22: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
جوابات: $-\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$

سوال 7.23: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$
جوابات: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = -5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

سوال 7.24: $\left|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\right|, \left|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\right|, \left|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\right|$
جوابات: $\sqrt{35}, \sqrt{35}, 3^{\frac{3}{2}}$

سوال 7.25: $\left|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\right|, \left|\boldsymbol{a}\right| + \left|\boldsymbol{b}\right|$
جوابات: $5.916, 7.835$

سوال 7.26: $\left|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\right|, \left|\boldsymbol{a}\right| - \left|\boldsymbol{b}\right|$
جوابات: $5.916, -2.936$

سوال 7.27: $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}, \frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$
جوابات: $0.82\boldsymbol{i} - 0.41\boldsymbol{j} + 0.41\boldsymbol{k},\ -0.56\boldsymbol{i} - 0.31\boldsymbol{j} + 0.74\boldsymbol{k},\ -\boldsymbol{k}$

سوال 7.28: $\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|}, \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}, \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|}$
جوابات: $-0.17\boldsymbol{i} - 0.51\boldsymbol{j} + 0.85\boldsymbol{k},\ -0.43\boldsymbol{i} - 0.29\boldsymbol{j} + 0.86\boldsymbol{k},\ -0.23\boldsymbol{i} - 0.69\boldsymbol{j} + 0.69\boldsymbol{k}$

سوال 7.29: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$
جوابات: $-\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$

سوال 7.30: $4(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}), 4\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$
جوابات: $20\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$

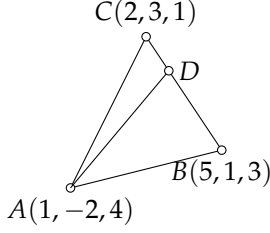
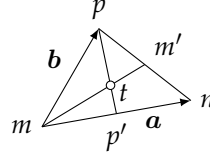
سوال 7.31: قوت $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{p} = -3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$ ہیں۔ایسی قوت $\boldsymbol{m}$ دریافت کریں کہ $\boldsymbol{m}$ ، $\boldsymbol{n}$ اور $\boldsymbol{p}$ توازن میں ہوں۔

جواب: $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$

سوال 7.32: ثابت کریں کہ شکل 7.8 میں وتر $m'q$ اور $n'p$ ایک دونوں کو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

$C(2,3,1)$ D $B(5,1,3)$ $A(1,-2,4)$

(ب) سوال 7.34 کی شکل۔

p m' b t n m p' a

(الف) سوال 7.33 کی شکل۔

شکل 7.9: سمتیات کا استعمال۔

جواب: $\boldsymbol{v}_{m'q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ اور $\boldsymbol{v}_{n'p} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ ہیں۔اب $\boldsymbol{v}_{tq} = l_1 \boldsymbol{v}_{m'q}$ اور اسی طرح $\boldsymbol{v}_{tq} = \boldsymbol{a} + l_2 \boldsymbol{v}_{n'p}$ لکھا جا سکتا ہے۔انہیں برابر پر کرتے ہوئے

$$l_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} + l_2(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

یعنی $\boldsymbol{a}(l_1 - 1 + l_2) + \boldsymbol{b}(l_1 - l_2) + \boldsymbol{c}(l_1 - l_2) = 0$ ملتا ہے۔چونکہ سمتیات صفر نہیں ہیں لہٰذا قوسین صفر ہوں گے۔یوں حاصل ہمزاد مساوات $l_1 - 1 + l_2 = 0$ اور $l_1 - l_2 = 0$ حل کرتے ہوئے $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}$ ملتا ہے۔

سوال 7.33: تکون کی تین کونوں سے سامنے اطراف کی وسط کو ملانے والے خط ایک دونوں کو نقطہ t پر قطع کرتے ہیں۔ t کے دونوں اطراف، خط کی لمبائی کا نسبت دریافت کریں۔

جواب: تکون کو شکل 7.9-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں mn کی وسط پر نقطہ p' اور pn کی وسط پر نقطہ m' دکھائے گئے ہیں۔یوں سمتیہ $\boldsymbol{v}_{m'n}$ جس کی دم نقطہ n پر ہے کو $\boldsymbol{v}_{m'n} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ لکھا جا سکتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}_{m'm} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}_{m'n}$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{v}_{p'p} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ لکھا جا سکتا ہے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}_{tm} = \boldsymbol{b} + l_1 \boldsymbol{v}_{p'p}$ اور $\boldsymbol{v}_{tm} = l_2 \boldsymbol{v}_{m'm}$ لکھے جا سکتے ہیں۔انہیں حل کرتے ہوئے $l_1 = l_2 = \frac{2}{3}$ ملتا ہے۔یوں $m'm$ خط کے دو حصوں کا تناسب $\frac{2}{3}$ اور $\frac{1}{3}$ یعنی $2:1$ ہو گا۔

سوال 7.34: تکون کے کونے $A(1,-2,4)$ ، $B(5,1,3)$ اور $C(2,3,1)$ ہیں۔ BC پر D پایا جاتا ہے جہاں $\overline{BD} = 2\overline{CD}$ ہے۔اس کو شکل 7.34-ب میں دکھایا گیا ہے۔خط AD کی لمبائی دریافت کریں۔

جواب: $\boldsymbol{v}_{BA}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{v}_{CB}=-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ ہیں۔اب دی گئی معلومات کے تحت $\boldsymbol{v}_{DB}=\frac{2}{3}\boldsymbol{v}_{CB}$ ہے۔یوں $\boldsymbol{v}_{DA}=\boldsymbol{v}_{BA}+\boldsymbol{v}_{DB}$ یعنی $\boldsymbol{v}_{AD}=2\boldsymbol{i}+\frac{13}{3}\boldsymbol{j}-\frac{7}{3}\boldsymbol{k}$ ہو گا جس کی لمبائی $\frac{\sqrt{254}}{3}$ ہے۔

سوال 7.35: ثابت کریں کہ متوازی الاضلاع کے ایک کونے سے سامنے والی طرف کی وسط تک لکیر، وتر کو $1:2$ تناسب میں تقسیم کرتی ہے۔

سوال 7.36 تا سوال 7.38 میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ حاصل کریں۔اس اکائی سمتیہ کی سمت میں l لمبائی کا سمتیہ حاصل کریں۔ظاہر ہے کہ اکائی سمتیہ کو -1 سے ضرب دے کر الٹ سمت میں اکائی سمتیہ حاصل ہو گا۔

سوال 7.36: $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{j},\ l=5$
جوابات: $\boldsymbol{j}$ ، $5\boldsymbol{j}$

سوال 7.37: $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ l=2$
جوابات: $-0.535\boldsymbol{i}+0.267\boldsymbol{j}+0.802\boldsymbol{k},\ -3.74\boldsymbol{i}+1.87\boldsymbol{j}+5.61\boldsymbol{k}$

سوال 7.38: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\ l=10$
جوابات: $0.96\boldsymbol{i}-0.27\boldsymbol{j},\ 9.61\boldsymbol{i}-2.74\boldsymbol{j}$

7.4 سمتی فضا۔ خطی تابعیت اور غیر تابعیت

ایسے تمام سمتیات کا سلسلہ V جو سمتی مجموعہ (مساوات 7.7) اور سمتی ضرب (مساوات 7.8) کے الجبرائی قواعد پر پورا اترتا ہو کو سمتی فضا[17] یا خطی فضا[18] کہتے ہیں۔سمتی فضا کا تصور اس لئے اہم ہے کہ عملی دلچسپی کے دیگر سلسلے جو قالب، تفاعل، تبادل وغیرہ پر مبنی ہوں پائے جاتے ہیں جن کے مجموعے اور غیر سمتی ضرب کی بالکل ایسی ہی فطری تعریف کی جا سکتی ہے۔

مسئلہ 7.1: حقیقی سمتی فضا
اگر سلسلہ V کے ارکان $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، ...درج ذیل دو الجبرائی اعمال (جنہیں سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کہتے

[17] vector space
[18] linear space

ہیں) پر پورا اترتے ہوں تب V حقیقی سمتی فضا[19] یا حقیقی خطی فضا کہلاتا ہے اور یہ ارکان (جن کے خصوصیات کچھ بھی ہو سکتے ہیں) سمتیات کہلاتے ہیں۔

(الف) سمتی جمع V کے ہر دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا مجموعہ کہلاتا اور $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

(الف-1) قانون تبادل۔ V کے ہر دو ارکان $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{7.13}$$

(الف-2) قانون تلازم۔ V کے ہر تین ارکان $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{c}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \tag{7.14}$$

(جو $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ لکھا جاتا ہے)

(الف-3) V میں ایسا منفرد سمتیہ، جو صفر سمتیہ کہلاتا اور $\boldsymbol{0}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، پایا جاتا ہے کہ V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a} \tag{7.15}$$

(الف-4) V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے V میں ایسا سمتیہ $-\boldsymbol{a}$ پایا جاتا ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0} \tag{7.16}$$

(ب) غیر سمتی ضرب۔ حقیقی اعداد غیر سمتی کہلاتے ہیں۔ غیر سمتی ضرب، ہر غیر سمتی c اور V کے ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو $\boldsymbol{a}$ اور c کا حاصل ضرب کہلاتا اور $c\boldsymbol{a}$ (یا $\boldsymbol{a}c$) سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

(ب-1) قانون جزئیتی تقسیم۔ ہر غیر سمتی c اور V میں موجود ہر سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b} \tag{7.17}$$

---

[19] real vector space

(ب-2) **قانونِ جزئیتی تقسیم**۔ ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(c+k)\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{a} \tag{7.18}$$

(ب-3) **قانونِ وابستگی**۔ ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$c(k\boldsymbol{a}) = (ck)\boldsymbol{a} \qquad \text{(جو } ck\boldsymbol{a} \text{ لکھا جاتا ہے)} \tag{7.19}$$

(ب-4) V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{7.20}$$

درج بالا تعریف میں حقیقی اعداد کی جگہ مخلوط اعداد کو غیر سمتی لینے سے **مخلوط سمتی فضا** کی مسلمی تعریف حاصل ہو گی۔

سمتی فضا پر مزید بحث حصہ 8.9 میں کی جائے گی۔آئیں اب سمتی فضا کی چند اہم خصوصیات پر غور کریں۔

فرض کریں کہ $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سلسلہ V کے ارکان ہیں۔ان کے **خطی مجموعے**[20] سے مراد درج ذیل ہے جہاں c_1 تا c_m غیر سمتی قیمتیں ہیں۔

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)}$$

سمتی فضا کی تعریف کی رو سے درج بالا ازخود V کا رکن سمتیہ ہو گا۔اس طرز کی تمام مجموعوں کا سلسلہ S ، ان سمتیات کا **احاطہ**[21] کہلاتا ہے۔ہم کہتے ہیں کہ یہ سمتیات S کے **پیدا کار**[22] ہیں۔ ظاہر ہے کہ احاطہ از خود سمتی فضا ہے۔

خطی مجموعے کو استعمال کرتے ہوئے ہم خطی تابعیت اور خطی غیر تابعیت متعارف کرتے ہیں۔

---

[20] linear combination
[21] span
[22] generator

سمتیات $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ اس صورت **خطی طور غیر تابع** سلسلہ پیدا کرتے ہیں جب درج ذیل

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)}+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_{(m)}=\boldsymbol{0} \tag{7.21}$$

سے مراد $c_1=0$ ، $\cdots$ ، $c_m=0$ ہو۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ سمتیات **خطی طور غیر تابع** ہیں۔ اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 8.84 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ **خطی طور تابع**[23] کہلاتے ہیں۔

$m=1$ کی صورت میں مساوات 8.84 سے $c\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ ملتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ واحد سمتیہ $\boldsymbol{a}$ اس صورت خطی طور غیر تابع ہو گا جب $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ ہو۔

مثال 7.6: خطی طور تابع اور خطی طور غیر تابع سمتیات کے سلسلے

سمتیات $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$ خطی طور تابع ہیں چونکہ $6\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ لکھ کر $\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کے برعکس $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ خطی طور غیر تابع ہیں۔ □

اگر V میں غیر تابع سمتیات کی تعداد n ہو جبکہ V میں موجود n سے زائد تمام سمتیات خطی طور تابع ہوں تب V کا بُعد n ہو گا اور V کو n **بعدی** کہیں گے۔ ان خطی طور غیر تابع n عدد سمتیات کو V کی **اساس**[24] کہتے ہیں اور V میں ہر سمتیہ کو ان اساس کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ کسی مخصوص اساس کو استعمال کرتے ہوئے یہ خطی مجموعہ منفرد ہو گا۔

اس کی مثال فضا کے تمام سمتیات (حصہ 7.1) کی سمتی فضا ہے۔اس سمتی فضا میں کسی بھی سمتیہ کو تین عدد سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ (حصہ 7.3) کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ فضا سہ بُعدی ہے۔

اب درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)}+c_2\boldsymbol{a}_{(2)}+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_{(m)}=\boldsymbol{0} \tag{7.22}$$

ظاہر ہے کہ تمام c_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں مساوات 7.22 درست ہو گا چونکہ ایسی صورت میں $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ اگر m عدد c_j کی یہ واحد قیمت ہو جس کے لئے مساوات 7.22 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات **خطی طور غیر تابع**[25] کہلاتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات کا **خطی طور غیر تابع سلسلہ**[26] ہے۔اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں

---

[23] linearly dependent
[24] basis
[25] linear independent
[26] linearly independent set

بھی مساوات 7.22 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات **خطی طور تابع**[27] کہلاتے ہیں۔ خطی طور غیر تابع صورت میں کم از کم ایک عدد سمتیہ کو بقایا سمتیات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں ہم مساوات 7.22 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\boldsymbol{a}_{(1)} = k_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots - k_m\boldsymbol{a}_{(m)} \qquad (k_j = -\frac{c_j}{c_1})$$

جہاں چند k_j صفر ہو سکتے ہیں ($\boldsymbol{a}_{(1)} = \mathbf{0}$ کی صورت میں تمام k_j صفر ہو سکتے ہیں)۔ اگر $m = 1$ ہو تب مساوات 7.22 کو ہم $c_1\boldsymbol{a}_{(1)} = \mathbf{0}$ لکھیں گے جس میں $k_1 \neq 0$ اس صورت ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{a}_{(1)} = \mathbf{0}$ ہو جو خطی تابعیت کی تعریف کی رو سے خطی طور تابع ہے۔

خطی طور تابع سمتیات کے سلسلہ سے کم از کم ایک عدد سمتیہ، اور عین ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ سمتیات، خارج کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع سلسلہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

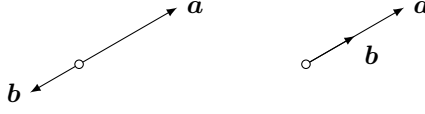
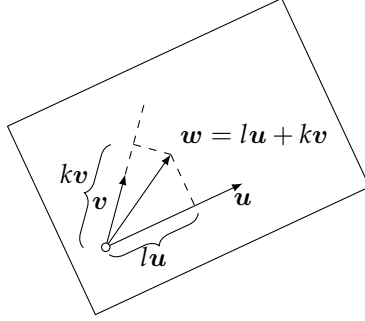
مسئلہ 7.2: خطی طور تابعیت
اگر مساوات 7.22 صرف اور صرف اس صورت درست ہو جب تمام c_1 تا c_m صفر ہوں تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ خطی طور تابع ہوں گے۔

درج بالا لازم اور کافی شرط کو ہی عموماً تابعیت کی تعریف تصور کی جاتی ہے۔

اگر ان میں کوئی ایک سمتیہ بھی صفر سمتیہ ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ خطی طور غیر تابع ہوں گے، مثلاً $\boldsymbol{a}_{(1)} = \mathbf{0}$ کی صورت میں مساوات 7.22 میں $k_1 \neq 0$ اور $k_2 = k_3 = \cdots = k_m = 0$ ہو سکتا ہے۔

سہ بُعدی فضا میں دو عدد خطی طور تابع سمتیات **ہم خطی**[28] ہوں گے (شکل 7.10) یعنی اگر ان کی دم ایک ہی نقطے پر ہو تب یہ ایک ہی سیدھی خط پر واقع ہوں گے۔ ایسے تین سمتیات $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ جو خطی طور تابع سلسلہ پیدا کرتے ہوں **ہم سطحی**[29] کہلاتے ہیں، یعنی اگر ان کی دم ایک ہی نقطے پر ہو تب یہ سمتیات ایک ہی سطح مستوی پر واقع ہوں گے (شکل 7.11)۔ درحقیقت خطی تابعیت کا مطلب یہ ہے کہ ایک سمتیہ کو بقایا سمتیات کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ سہ بُعدی فضا میں کسی بھی سمتیہ کو تین عددی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا سہ بُعدی فضا میں چار یا چار سے زیادہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

---

[27] linearly dependent
[28] collinear
[29] coplanar

شکل 7.10: ہم خطی سمتیات۔

شکل 7.11: ہم سطحی سمتیات۔

سوالات

ثابت کریں کہ سوال 7.39 تا سوال 7.42 میں دیے گئے سمتیات کا سلسلہ سمتی فضا پیدا کرتا ہے۔اس فضا کی بُعد اور اساس دریافت کریں۔

سوال 7.39: سہ بُعدی فضا وہ تمام سمتیات جن کا پہلا جزو صفر ہے۔

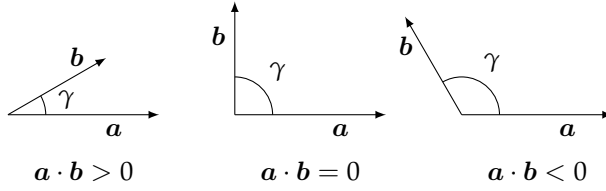
جوابات: 2 ؛ $\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{k}$

سوال 7.40: ایسے تمام سمتیات جنہیں $b\boldsymbol{i}+k(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$ لکھا جا سکتا ہے جہاں b اور k کوئی بھی غیر سمتی ہو سکتے ہیں۔

جوابات: 2 ؛ $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

سوال 7.41: ایسے تمام n مرتب اعداد $(a_1,\cdots,a_n)$ کا سلسلہ جن کے مجموعے کی تعریف اور غیر سمتی کے ساتھ ضرب کی تعریف درج ذیل ہو۔

$$(a_n,\cdots,a_n)+(b_1,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n)$$
$$c(a_n,\cdots,a_n)=(ca_n,\cdots,ca_n)$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ $\quad$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ $\quad$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$

شکل 7.12: سمتیات کے مابین زاویہ۔

جوابات: n ؛ $(1,0,\cdots,0)$ ، $(0,1,\cdots,0)$ ، $\cdots$ ، $(0,0,\cdots,1)$

سوال 7.42: ایسے تمام تفاعل جنہیں $y(x)=a\cos x+b\sin x$ لکھا جا سکتا ہے جہاں a اور b اختیاری مستقل ہیں۔ان تفاعل کے مجموعے اور غیر سمتیات کے ساتھ ضرب عمومی قواعد کے تحت ہیں۔

جوابات: 2 ؛ $\cos x$ ، $\sin x$

7.5 اندرونی ضرب (ضرب نقطہ)

سہ بُعدی فضا میں سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی اندرونی ضرب[30] جس کو $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ لکھا جاتا ہے سے مراد درج ذیل ہے جہاں $\gamma(0\le\gamma\le\pi)$ سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے مابین زاویہ ہے (جو دونوں سمتیات کی دم ایک ہی نقطے پر رکھ کر ناپا جاتا ہے)۔ (شکل 7.12)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\gamma \qquad (\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=0 \qquad (\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\ \text{یا}\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\ \text{یا}\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}) \end{aligned} \tag{7.23}$$

اندرونی ضرب کو ضرب نقطہ[31] بھی کہتے ہیں۔اندرونی ضرب کا حاصل غیر سمتی (حقیقی عدد) ہوتا ہے اور یوں اندرونی ضرب کو غیر سمتی ضرب[32] بھی کہتے ہیں۔ چونکہ مساوات 7.23 میں $\cos\gamma$ کی قیمت مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے (شکل 7.12) لہٰذا اندرونی ضرب کی قیمت بھی مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے۔ زاویہ 0 تا π کے درمیان صرف $\gamma=\frac{\pi}{2}$ پر $\cos\gamma=0$ ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

---

[30] inner product
[31] dot product
[32] scalar product

مسئلہ 7.3: **قائمیت**[33]
دو عدد غیر صفر سمتیات آپس میں صرف اور صرف اس صورت قائم الزاویہ (عمودی) ہوں گے جب ان کا اندرونی ضرب صرف کے برابر ہو۔

مساوات 7.23 میں $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ پر کرنے سے $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$ حاصل ہوتا ہے اور یوں سمتیہ کی لمبائی (اقلیدسی معیار) کو اندرونی ضرب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} \qquad (\geq 0) \tag{7.24}$$

درج بالا اور مساوات 7.23 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}\sqrt{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}}} \tag{7.25}$$

اندرونی ضرب کی تعریف سے درج ذیل خصوصیات اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

(7.26)

(الف) $[q_1\boldsymbol{a} + q_2\boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{c} = q_1\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + q_2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ (خطیت)

(ب) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ (تشاکل)

(پ) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$، $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ اگر $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ } یقینی مثبت

یوں ضرب نقطہ استبدالی اور سمتیات کی جمع کے لئے جزئیتی تقسیمی ہے۔ مساوات 7.26 میں $q_1 = 1$ اور $q_2 = 1$ لینے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \qquad (\text{جزئیتی تقسیم}) \tag{7.27}$$

مساوات 7.23 اور $\cos\gamma \leq 1$ سے درج ذیل **شوارز عدم مساوات**[34] [35] ملتی ہے۔

$$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \qquad (\text{شوارز عدم مساوات}) \tag{7.28}$$

---

[33] orthogonality
[34] Schwarz inequality
[35] جرمن ریاضی دان ہرمن امندس شوارز [1843-1921]

درج بالا اور مساوات 7.24 استعمال کرتے ہوئے آپ درج ذیل ثابت کر سکتے ہیں۔

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \qquad \text{(تکونی عدم مساوات)} \tag{7.29}$$

مساوات 7.24 کی مدد سے

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

لکھ کر دونوں مساوات جمع کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2) \qquad \text{(متوازی الاضلاع مساوات)} \tag{7.30}$$

سمتیات کو اجزاء کی صورت میں لکھ کر

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$$

ان کا غیر سمتی ضرب معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&= a_1b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_2b_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_2b_3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_3b_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

اب چونکہ $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ آپس میں قائمہ الزاویہ ہیں لہٰذا مساوات 7.23 میں $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ہو گا اور یوں $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0$ ہو گا۔اسی طرح چونکہ $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{i}$ ایک ہی سمت میں ہیں لہٰذا مساوات 7.23 میں $\gamma = 0$ ہو گا اور یوں $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1$ ہو گا۔اسی عمل سے آپ درج ذیل غیر سمتی ضرب کے تعلقات لکھ سکتے ہیں جنہیں درج بالا میں

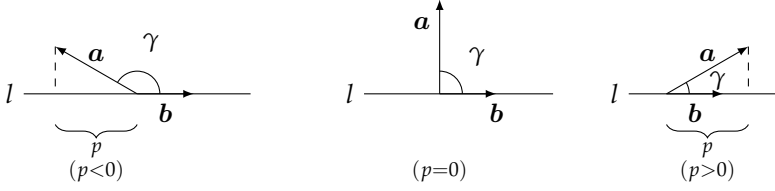
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1 \tag{7.31}$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0 \tag{7.32}$$

پر پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{7.33}$$

اگر $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}\,(\neq \boldsymbol{0})$ سمتیات کے مابین زاویہ γ ہو تب درج ذیل حقیقی عدد

$$p = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma$$

شکل 7.13: $\boldsymbol{b}$ کی سمت میں $\boldsymbol{a}$ کا جزو۔

$\boldsymbol{b}$ کی سمت میں $\boldsymbol{a}$ کا جزو یا عمودی سایہ[36] ہو گا۔ اگر $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ہو تب γ غیر معین (بے معنی) ہو گا اور ہم $p = 0$ لیں گے۔

یوں $\boldsymbol{b}$ کی سمت میں خط l پر $\boldsymbol{a}$ کے عمودی سائے کی لمبائی $|p|$ ہو گی۔ p کی قیمت مثبت، صفر یا منفی ہو سکتی ہے (شکل 7.13)۔

یوں کارتیسی نظام کے اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کی سمت میں سمتیہ $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ کے اجزاء بالترتیب a_1 ، a_2 اور a_3 ہوں گے۔

مساوات 7.25 کی مدد سے درج ذیل ہو گا

$$p = \boldsymbol{a}\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} \qquad (\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}) \tag{7.34}$$

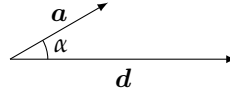
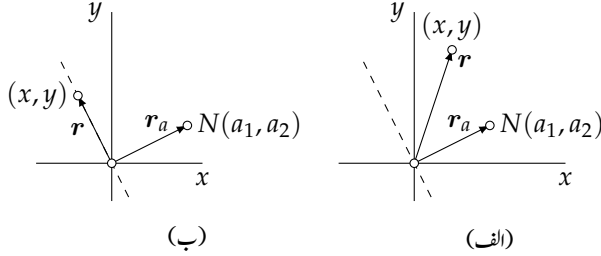
اور اگر $\boldsymbol{b}$ اکائی سمتیہ ہو تب اس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$p = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{7.35}$$

مثال 7.7: قوت اور کام
فرض کریں کہ قوت $\boldsymbol{a}$ کسی چیز کو اپنی جگہ سے ہٹا کر سمتی فاصلہ $\boldsymbol{d}$ منتقل کرتا ہے۔ $\boldsymbol{d}$ کی سمت میں قوت کا جزو ضرب $|\boldsymbol{d}|$ کام W کی تعریف ہے یعنی

$$W = |a||d|\cos\alpha = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{7.36}$$

جہاں $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{d}$ کے درمیان زاویہ α ہے۔ (شکل 7.14)

[36] projection

شکل 7.14: قوت اور کام (مثال 7.7)

شکل 7.15: سیدھے خط کی مساوات۔

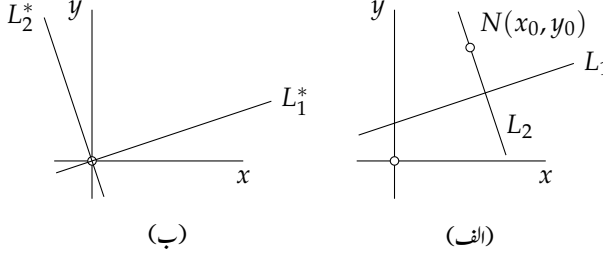
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{d}$ کا جزو ضرب $|\boldsymbol{a}|$ بھی کام کی تعریف ہے۔ □

کارتیسی نظام کی xy سطح پر کسی بھی نقطے کا ہٹاو سمتیہ $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ لکھا جاتا ہے۔ $x = a_1$ اور $y = a_2$ کی صورت میں یہ سمتیہ $\boldsymbol{r}_a = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ صورت اختیار کرتا ہے جو کارتیسی نظام کی مبدا سے نقطہ $N(a_1, a_2)$ کی ہٹاو ظاہر کرے گا (شکل 7.15-الف)۔

شکل 7.15-الف میں نقطہ دار لکیر دکھائی گئی ہے جو $\boldsymbol{r}_a$ کے عمودی ہے۔ اگر x اور y کو اس نقطہ دار لکیر پر رہنے پر پابند کیا جائے تب $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{r}_a$ آپس میں قائمہ الزاویہ ہوں گے۔ شکل 7.15-ب میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔ یوں شکل-ب میں مسئلہ 7.3 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_a = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) \cdot (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) = a_1x + a_2y = 0 \tag{7.37}$$

درج بالا مساوات ($a_1x + a_2y = 0$) میں x اور y نقطہ دار خط پر رہتے ہیں لہٰذا یہ نقطہ دار خط کی مساوات ہے۔

آپ نے دیکھا کہ سیدھے خط کی مساوات دو سمتیات کی اندرونی ضرب $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_a = 0$ کی صورت میں لکھی جا سکتی ہے جہاں $\boldsymbol{r}_a$ ایسا ہٹاو سمتیہ ہے جو اس سیدھے خط کے ساتھ قائمہ الزاویہ ہو۔

شکل 7.16: قائمہ الزاویہ خطوط۔

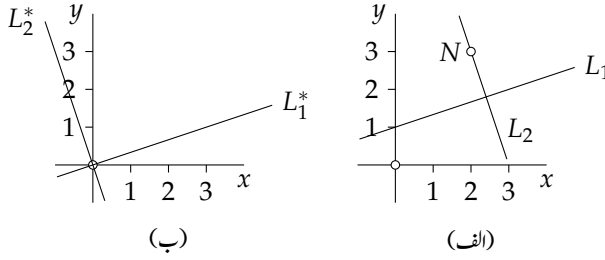
ہم شکل 7.16-الف میں نقطہ N سے گزرتے ہوئے ایسے خط L_2 کی مساوات جاننا چاہتے ہیں جو L_1 کے قائمہ الزاویہ ہو۔ L_1 کی مساوات ہمیں معلوم ہے۔

کارتیسی نظام میں xy سطح پر کسی بھی سیدھے خط کو $y = mx + c$ لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں ڈھلوان m کو $\frac{a_2}{a_1}$ لکھتے ہوئے $a_1x + a_2y = ca_1 = c'$ حاصل ہوتا ہے۔ ایسا ایک خط L_1، شکل 7.16-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس مساوات میں $c = 0$ پر کرنے سے خط L_1^* حاصل ہو گا جو کارتیسی نظام کے مبدا $(0, 0)$ سے گزرتا ہے جس کو شکل 7.16-ب میں دکھایا گیا ہے۔خط L_1 اور L_1^* کی ایک جیسی ڈھلوان ہے یعنی یہ آپس میں متوازی ہیں۔ہم L_2 کو بھی اسی طرح مبدا پر منتقل کرتے ہوئے L_2^* حاصل کرتے ہیں۔اب اگر L_1 اور L_2 قائمہ الزاویہ ہوں تب L_1^* اور L_2^* بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے۔آئیں پہلے L_1^* کی مساوات سے L_2^* کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔بعد میں حاصل L_2^* کی مساوات سے L_2 کی مساوات حاصل کریں گے۔

L_1^* کی مساوات $a_1x + a_2y = 0$ کو مساوات 7.37 کی طرح سمتیہ $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ اور سمتیہ $\boldsymbol{r}_a = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ کی اندرونی ضرب $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_a = a_1x + a_2y = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔ L_2^* کی مساوات کو بھی اسی طرح $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ اور سمتیہ $\boldsymbol{r}_b = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$ کی اندرونی ضرب $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}_b = b_1x + b_2y = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔

اب $\boldsymbol{r}_a$ خط L_1 کے عمودی ہے جبکہ $\boldsymbol{r}_b$ خط L_2 کے عمودی ہے۔یوں اگر L_1^* اور L_2^* قائمہ الزاویہ ہوں تب $\boldsymbol{r}_a$ اور $\boldsymbol{r}_b$ بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے اور یوں مسئلہ 7.3 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_a \cdot \boldsymbol{r}_b = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) \cdot (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}) = a_1b_1 + a_2b_2 = 0, \quad \implies \quad b_2 = -\frac{a_1}{a_2}b_1$$

(ب) (الف)

شکل 7.17: قائمہ الزاویہ خطوط (مثال 7.8)۔

یوں L_2^* کی مساوات $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_b = b_1(x-\frac{a_1}{a_2}y)=0$ ہو گی جس کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_2x - a_1y = 0 \qquad (L_2^*) \tag{7.38}$$

L_2^* کی مساوات کا L_1^* کی مساوات $(a_1x+a_2y=0)$ کے ساتھ موازنہ کریں۔

L_2^* کی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے L_2 کی مساوات $a_2x-a_1y=c'$ لکھی جا سکتی ہے۔چونکہ L_2 نقطہ N سے گزرتی ہے لہٰذا (x_0,y_0) کو L_2 کی مساوات میں پر کرتے ہوئے $c'=a_2x_0-a_1y_0$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں L_2 کی مساوات مکمل ہوتی ہے۔

مثال 7.8: سطح مستوی میں واقع قائمہ الزاویہ سیدھے خطوط

کارتیسی نظام کی xy سطح پر ایک خط L_1 کی مساوات $x-3y-3=0$ ہے۔نقطہ $N(2,3)$ سے گزرتا ایسے خط (L_2) کی مساوات دریافت کریں جو L_1 کے عمودی ہو۔

حل: شکل 7.17-الف میں ان خطوط کو دکھایا گیا ہے۔ L_1 کو مبدا پر منتقل کرتے ہوئے L_1^* حاصل ہو گا جس کی مساوات $x-3y=0$ ہو گی جس کو سمتیات $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$ کا اندرونی ضرب $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_a=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\cdot(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j})=x-3y$ لکھا جا سکتا ہے۔مبدا سے گزرتی کسی بھی سیدھے خط کی مساوات کی طرح L_2^* کے خط کی مساوات $b_1x+b_2y=0$ لکھی جا سکتی ہے جس کو سمتیات $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{r}_b=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}$ کا اندرونی ضرب $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_b=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j})=b_1x+b_2y$ لکھا جا سکتا ہے۔

چونکہ L_1 اور L_2 آپس میں عمودی ہیں لہٰذا $\boldsymbol{r}_a$ اور $\boldsymbol{r}_b$ بھی آپس میں عمودی ہوں گے۔ یوں مسئلہ 7.3 کے تحت $(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j})=b_1-3b_2=0$ ہو گا جس سے $b_1=3b_2$ ملتا ہے۔اس

طرح L_2^* کی مساوات $3b_2x + b_2y = 0$ یا $3x + y = 0$ ہو گی جس سے L_2 کی مساوات $3x + y = c'$ لکھی جا سکتی ہے۔ L_2 نقطہ $N(2,3)$ سے گزرتا ہے لہٰذا حاصل مساوات میں یہ نقطہ پر کرتے ہوئے $c' = 3(2) + 3 = 9$ ملتا ہے جس سے L_2 کی مساوات $3x + y = 9$ ملتی ہے۔ □

مثال 7.9: سطح کے ساتھ قائمہ الزاویہ سمتیہ
ایک سطح کی مساوات $2x - 4y + 6z = 3$ ہے۔ایسا اکائی سمتیہ دریافت کریں جو اس سطح کے ساتھ قائمہ الزاویہ ہو۔

حل: شکل 7.18 سے رجوع کریں۔ سطح مستوی کی عمومی مساوات درج ذیل ہے۔

$$a_1x + a_2y + a_3z = c \tag{7.39}$$

اس سطح پر کسی بھی نقطے کا ہٹاو سمتیہ $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ہو گا۔ یہاں ہم سمتیہ $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ متعارف کرتے ہوئے مساوات 7.39 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} = c \tag{7.40}$$

$\boldsymbol{a}$ غیر صفر ($\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$) ہے اور اس کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

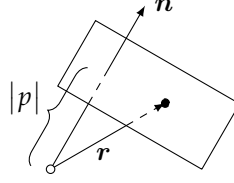
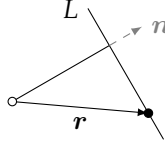
مساوات 7.40 کو $|\boldsymbol{a}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = p, \qquad p = \frac{c}{|\boldsymbol{a}|} \tag{7.41}$$

مساوات 7.35 کی مدد سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{n}$ کی سمت میں $\boldsymbol{r}$ کا سایہ p ہے۔

اب $|p|$ غیر متغیر مقدار ہے جبکہ سمتیہ $\boldsymbol{r}$ سطح پر کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے۔شکل کو دیکھ کر ظاہر ہے کہ p صرف اور صرف اس صورت غیر متغیر ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{n}$ سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو۔یوں $\boldsymbol{a}$ بھی سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو گا۔شکل یہ یہ بھی ظاہر ہے کہ مبدا سے سطح کے قریب ترین نقطے کا فاصلہ $|p|$ ہو گا۔

یوں سطح $2x - 4y + 6z = 3$ کا قائمہ الزاویہ سمتیہ $2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ ہو گا اور سطح کا مبدا سے فاصلہ $\sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{56}$ ہو گا۔ سطح کا اکائی قائمہ الزاویہ سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}}{\sqrt{56}}$$

شکل 7.18: سطح مستوی کا عمودی سمتیہ۔

شکل 7.19: سیدھے خط کا مبدا سے فاصلہ مثال 7.10۔

چونکہ کسی بھی سطح کے دو اطراف ہوتے ہیں لہٰذا $-\boldsymbol{n}$ بھی اس سطح کا اکائی قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو گا۔ □

مثال 7.10: کارتیسی نظام کے xy سطح پر کسی بھی سیدھے خط L کو $a_1x + a_2y = c$ لکھا جا سکتا ہے۔ مبدا سے اس خط کا فاصلہ دریافت کریں۔ خط کا قائمہ الزاویہ اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

حل: شکل 7.19 سے رجوع کریں۔ کارتیسی نظام کی xy سطح پر کسی بھی نقطے کو $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ لکھا جا سکتا ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ متعارف کرتے ہوئے دیے گئے سیدھے خط کی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} = c$$

اس مساوات کو $|\boldsymbol{a}|$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = p, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},\; p = \frac{c}{|\boldsymbol{a}|}$$

اب $|p|$ غیر متغیر مقدار ہے جبکہ سمتیہ $\boldsymbol{r}$ خط پر کوئی بھی نقطہ ہو سکتا ہے۔ شکل کو دیکھ کر ظاہر ہے کہ p صرف اور صرف اس صورت غیر متغیر ہو سکتا ہے جب $\boldsymbol{n}$ سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو۔ یوں $\boldsymbol{a}$ بھی سطح کا قائمہ الزاویہ سمتیہ ہو گا۔ شکل یہ یہ بھی ظاہر ہے کہ مبدا سے سطح کے قریب ترین نقطے کا فاصلہ $|p|$ ہو گا۔

یوں مبدا سے خط تک قائمہ الزاویہ خط $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ اور مبدا سے خط تک کم سے کم فاصلہ $|p| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ہو گا۔یوں خط کے اکائی قائمہ الزاویہ سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{n} = \mp \left(\frac{a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right)$$

□

سوالات

سوال 7.43 تا سوال 7.49 میں $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ ہیں۔

سوال 7.43: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

جوابات: 5 ، 5

سوال 7.44: $|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|, |\boldsymbol{c}|$

جوابات: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{21}$ ، $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{10}$ ، $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{21}$

سوال 7.45: $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b}$

جوابات: -1

سوال 7.46: $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}, (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$

جوابات: $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = -1$ ، $(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 1$

سوال 7.47: $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|, |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$

جوابات: $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = \sqrt{41}$ ، $\sqrt{21}$

سوال 7.48: $2\boldsymbol{a}\cdot 4\boldsymbol{c},\, 5\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

جوابات: $2\boldsymbol{a}\cdot 4\boldsymbol{c} = 40$ ، 25

سوال 7.49: $\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\rvert,\, \lvert\boldsymbol{a}\rvert + \lvert\boldsymbol{c}\rvert$

جوابات: $\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\rvert = 3\sqrt{6}$ ، $2\sqrt{21}$

سوال 7.50 تا سوال 7.54 میں ایک چیز کو قوت $\boldsymbol{f}$ نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتی ہے۔ قوت کتنا کام کرتا ہے؟ کام کی تعریف $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r}_{BA}$ ہے۔

سوال 7.50: $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\, A(0,0,0),\, B(5,0,0)$
جواب: $5\,\mathrm{J}$

سوال 7.51: $\boldsymbol{f} = 2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\, A(2,5,0),\, B(0,0,0)$
جواب: $11\,\mathrm{J}$

سوال 7.52: $\boldsymbol{f} = 3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\, A(-5,2,1),\, B(2,-3,-6)$
جواب: $30\,\mathrm{J}$

سوال 7.53: $\boldsymbol{f} = 5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\, A(5,5,6),\, B(7,6,2)$
جواب: $0\,\mathrm{J}$

سوال 7.54: $\boldsymbol{f} = 2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\, A(3,4,2),\, B(4,2,1)$
جواب: $-3\,\mathrm{J}$

سوال 7.55: سوال 7.53 میں کام صفر کیوں ہے؟

جواب: چونکہ قوت اور ہٹاو سمتیہ قائمہ الزاویہ ہیں۔

سوال 7.56: سوال 7.53 میں کام منفی کیوں ہے؟

جواب: چونکہ قوت اور ہٹاو سمتیہ آپس میں الٹ رخ ہیں۔

سوال 7.57: سمتیہ $4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ میں c کی قیمت کیا ہونے سے یہ سمتیہ $2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ کے عمودی ہو گا۔

جواب: 2

سوال 7.58: xy سطح میں $4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ کا عمودی اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

جواب: $\frac{\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}}{\sqrt{5}}$ اور $\frac{-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}}{\sqrt{5}}$

سوال 7.59: ایک چیز کو قوت $\boldsymbol{f}_1$ اور قوت $\boldsymbol{f}_2$ مل کر نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتی ہے۔ثابت کریں کہ کل کام دونوں قوتوں کے کاموں کا مجموعہ ہو گا۔

سوال 7.60: سمتیات استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ اگر مستطیل کے وتر آپس میں عمودی ہوں تب یہ مستطیل دراصل میں چکور ہو گا۔

سوال 7.61: سمتیات استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ مکعب کے بالکل الٹ کونوں کو ملاتے ہوئے وتر آپس میں عمودی ہوں گے۔

سوال 7.62: ثابت کریں کہ سطح $7x+y+3z=22$ اور سطح $x-y-2z=-5$ قائمہ الزاویہ ہیں۔

جواب: ان کے عمودی سمتیات $7\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ کا اندرونی ضرب صفر ہے لہٰذا یہ آپس میں عمودی ہیں اور یوں سطحیں بھی عمودی ہوں گی۔

سوال 7.63: سطح $3x-2y+z=-2$ اور $x-4y-2z=3$ کے مابین زاویہ دریافت کریں۔

جواب: 1.0182 ریڈیئن یعنی $58.33°$

سوال 7.64: تکون کے تین کونے $A(2,-4,6)$ ، $B(5,2,4)$ اور $C(-2,-1,-4)$ ہیں۔ اس تکون کے زاویے دریافت کریں۔

جوابات: $74.61°$ ، $42.98°$ ، $62.4°$

سوال 7.65 تا سوال 7.67 میں $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ ہیں۔ دی گئی جوڑی سمتیات کے مابین زاویہ دریافت کریں۔

سوال 7.65: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$
جواب: $107.98°$

سوال 7.66: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$
جواب: $116.68°$

سوال 7.67: $\boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{c}$
جواب: $44.54°$

درج ذیل چار سوالات میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{b}$ کا جزو دریافت کریں۔

سوال 7.68: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{b}$ کی لمبائی $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -4$ ہے۔ اب چونکہ $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں $\boldsymbol{b}$ کا جزو $\frac{-4}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ ہو گا۔

سوال 7.69: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$
جواب: $-1.22\boldsymbol{i} + 1.22\boldsymbol{j} - 2.45\boldsymbol{k}$

سوال 7.70: $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$
جواب: $7.2\boldsymbol{j} + 9.6\boldsymbol{k}$

سوال 7.71: $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$
جواب: $-2.23\boldsymbol{i} + 3.34\boldsymbol{j} - 4.46\boldsymbol{k}$

سوال 7.72: ثابت کریں کہ $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ تینوں اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کے ساتھ یکساں زاویہ بناتا ہے۔

جواب: $54.73°$

7.6 اندرونی ضرب فضا

تین بعدی فضا میں، مجموعہ سمتیات اور سمتیہ کا غیر سمتی کے ساتھ ضرب کے بنیادی قواعد استعمال کرتے ہوئے حصہ 7.4 میں سمتی فضا کا تصور متعارف کرایا گیا۔ ہم اسی طرح اندرونی ضرب (حصہ 7.5) کو استعمال کرتے ہوئے حقیقی اندرونی ضرب فضا[37] کا تصور حاصل کر سکتے ہیں۔ ایسا حقیقی سمتی فضا جس میں اندرونی ضرب مساوات 7.26 کے شرائط پر پورا اترتا ہو حقیقی اندرونی ضرب فضا کہلاتا ہے۔

تعریف : اندرونی ضرب فضا
ایسی حقیقی سمتی فضا V جو درج ذیل خصوصیت رکھتی ہو حقیقی اندرونی ضرب فضا کہلاتی ہے۔

V میں ہر دو عدد سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے ساتھ ایک ایسا حقیقی عدد وابستہ ہے، جس کو $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور جو $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا اندرونی ضرب کہلاتا ہے، کہ درج ذیل مسلمات پورا ہوتے ہوں۔

- (الف) کسی بھی غیر سمتیات q_1 اور q_2 اور V میں تمام سمتیات $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(q_1\boldsymbol{a}+q_2\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=q_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+q_2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \qquad \text{(خطیت)} \tag{الف}$$

- (ب) V میں تمام سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \qquad \text{(تشاکل)}$$

- (پ) V میں ہر $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left.\begin{aligned}&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\geq 0\\&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0 \quad \text{اگر} \quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\end{aligned}\right\}\ \text{یقینی مثبت}$$

[37] real inner product space

تعریف : قائمیت
اگر اندرونی ضرب فضا V میں دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا اندرونی ضرب صفر کے برابر ہو تب یہ سمتیات آپس میں قائم الزاویہ ہوں گے۔

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \qquad \text{(قائم الزاویہ)}$$

اندرونی ضرب کو استعمال کرتے ہوئے ہم اندرونی ضرب فضا V میں ہر $\boldsymbol{a}$ کے ساتھ عدد $\|\boldsymbol{a}\|$ وابستہ کرتے ہیں جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \quad (\geq 0)$$

اور جو $\boldsymbol{a}$ کی معیار[38] کہلاتا ہے۔مساوات 7.24 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ معیار در حقیقت لمبائی کی عمومی تعریف ہے۔حقیقت میں ضرب نقطہ اور موجودہ اندرونی ضرب یکساں ہیں یعنی

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

اور ہماری موجودہ تعریف کی رو سے مساوات 7.24 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\|\boldsymbol{a}\| = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$$

مسلمات اندرونی ضرب اور معیار کی تعریف سے مساوات 7.28 تا مساوات 7.30 اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

$$\left|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\right| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \qquad \text{((شوارز عدم مساوات))}$$

درج بالا سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\| \qquad \text{تکونی عدم مساوات}$$

اور سادہ الجبرائی حساب سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2) \qquad \text{(متوازی الاضلاع مساوات)}$$

اندرونی ضرب فضا کا تصور عمومی ہے جس کی دو مثالیں (بغیر ثبوت) پیش کرتے ہیں۔پہلی مثال n اجزاء پر مشتمل سمتیات $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ اور $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, n)$ کا اندرونی ضرب ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_! b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{7.42}$$

---
[38] norm

اندرونی ضرب فضا کی دوسری مثال، وقفہ $\alpha \leq x \leq \beta$ پر استمراری تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی اندرونی ضرب ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f,g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.43}$$

7.7 سمتی ضرب

کئی عملی مسائل سے سمتیات کی ایسی ضرب کی ضرورت پیش ہوتی ہے جس کا حاصل ضرب $\boldsymbol{v}$ بھی سمتیہ ہو۔ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ سمتیات کا ایسا ضرب جو سمتی ضرب[39] یا صلیبی ضرب[40] کہلاتا اور $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ لکھا جاتا ہے

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: سمتی ضرب
اگر $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے رخ ایک جیسے یا آپس میں الٹ ہوں اور یا ان سمتیات میں سے ایک (یا دونوں) صفر سمتیہ ہوں تب $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ہو گا۔

اس کے علاوہ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ایسا سمتیہ ہو گا جس کی لمبائی اس متوازی الاضلاع کے رقبے کے برابر ہو گی جس کے قریبی اطراف $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ ہوں اور جس کی سمت $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ دونوں کے عمودی ہو گی۔ مزید $\boldsymbol{v}$ کی سمت یوں ہو گی کہ $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{v}$ (اسی ترتیب سے) دائیں ہاتھ کی ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں (شکل 7.20-الف)۔

سمتی ضرب کی تعریف میں ثلاثہ قائمہ سمتیات کی بات کرتے ہوئے دائیں ہاتھ کا ذکر کیا گیا جس کا مطلب ہے کہ اگر دائیں ہاتھ کا انگوٹھا سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں اور انگلی شہادت سمتیہ $\boldsymbol{b}$ کی سمت میں رکھتے ہوئے درمیانی انگلی کو ان انگلیوں کے عمودی رکھا جائے تب درمیانی انگلی سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کی مقام کو ظاہر کرے گی۔

ایسا متوازی الاضلاع (شکل 7.20-ب) جس کے قریبی اطراف $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ ہوں کا رقبہ $h|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\gamma$ ہو گا جہاں $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے مابین زاویہ γ ہے۔

$$|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\gamma \tag{7.44}$$

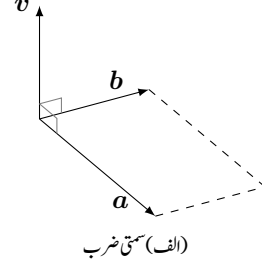
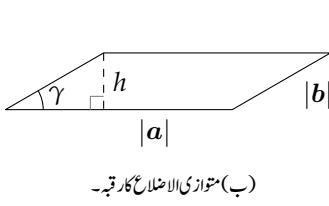
---

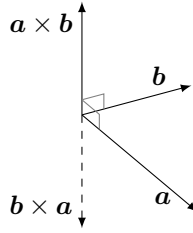
[39] vector product
[40] cross product

v
b
a

(الف) سمتی ضرب

γ h $|b|$ $|a|$

(ب) متوازی الاضلاع کا رقبہ۔

شکل 7.20: سمتی ضرب کی تعریف

$a \times b$
b
a
$b \times a$

شکل 7.21: سمتی ضرب مخالف تبادل ہے

اگر $v = a \times b$ اور $w = b \times a$ ہوں تب سمتی ضرب کی تعریف کی رو سے $|v| = |w|$ ہو گا۔اب a ، b اور w اس صورت دائیں ہاتھ ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں گے جب $w = -v$ (شکل 7.21) ہو لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$b \times a = -a \times b \tag{7.45}$$

جس کے تحت سمتی ضرب مخالف تبادل ہے۔یوں سمتی ضرب میں اجزاء کی ترتیب نہایت اہم ہے جس کو تبدیل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

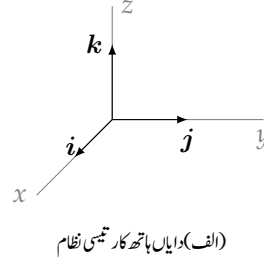
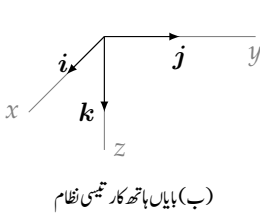
کسی بھی غیر سمتیہ k کے لئے سمتی ضرب کی تعریف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(ka) \times b = k(a \times b) = a \times (kb) \tag{7.46}$$

سمتی جمع کی نقطہ نظر سے سمتی ضرب جزئیتی تقسیمی ہے یعنی:

$$\begin{aligned} a \times (b + c) &= (a \times b) + (a \times c) \\ (a + b) \times c &= (a \times c) + (b \times c) \end{aligned} \tag{7.47}$$

(الف) دایاں ہاتھ کارتیسی نظام

(ب) بایاں ہاتھ کارتیسی نظام

شکل 7.22: کارتیسی نظام کے دو اقسام

درج بالا کا ثبوت اگلے حصے میں پیش کیا جائے گا۔ ہم یہاں بتلانا چاہتے ہیں کہ سمتی ضرب قانون تلازم پر عموماً پورا نہیں اترتا یعنی:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$$

مساوات 7.23 اور مساوات 7.44 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$|\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \sin^2\gamma = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\left(1-\cos^2\gamma\right) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$

دونوں اطراف کا جذر لیتے ہوئے حاصل سمتی ضرب کی لمبائی کا درج ذیل قلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} \tag{7.48}$$

7.8 اجزاء کی صورت میں سمتی ضرب

اس حصے میں ہم سمتی ضرب کے اجزاء کو کارتیسی نظام میں لکھتے ہیں۔ یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ دو قسم کے کارتیسی نظام ممکن ہیں۔ پہلا قسم دائیں ہاتھ[41] کا نظام کہلاتا ہے۔ دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں محور کی مثبت سمت میں اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ دائیں ہاتھ ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں گے (شکل 7.22-الف)۔ اگر نظام کے اکائی سمتیات بائیں ہاتھ ثلاثہ قائمہ سمتیات ہوں تب اس کو بایاں ہاتھ کارتیسی نظام کہا جائے گا۔ اس کتاب میں دایاں ہاتھ کارتیسی نظام استعمال کیا گیا ہے۔ عام استعمال میں بھی دایاں نظام استعمال کیا جاتا ہے۔

---

[41] right handed

اب دائیں یا بائیں ہاتھ کے نظام میں اگر $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے اجزاء بالترتیب a_1 ، a_2 ، a_3 اور b_1 ، b_2 ، b_3 ہوں تب سمتی ضرب

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

کے اجزاء کو انہیں کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ہمیں صرف اس صورت پر غور کرنا ہے جب $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ہو۔چونکہ $\boldsymbol{v}$ دونوں سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے عمودی ہے لہٰذا مسئلہ 7.3 کے تحت $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ اور $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ ہوں گے لہٰذا مساوات 7.33 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 &= 0 \\ b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 &= 0 \end{aligned} \tag{7.49}$$

پہلی مساوات کو b_3 اور دوسری کو a_3 سے ضرب دے کر ان کا فرق حاصل کرتے ہیں۔

$$(a_3b_1 - a_1b_3)v_1 = (a_2b_3 - a_3b_2)v_2$$

اسی طرح مساوات 7.49 کی پہلی مساوات کو b_1 اور دوسری کو a_1 سے ضرب دے کر ان کا فرق لکھتے ہیں۔

$$(a_1b_2 - a_2b_1)v_2 = (a_3b_1 - a_1b_3)v_3$$

آپ با آسانی ثابت کر سکتے ہیں کہ درج بالا دو مساوات پر درج ذیل پورا اترتے ہیں جہاں c مستقل ہے۔

$$v_1 = c(a_2b_3 - a_3b_2), \quad v_2 = c(a_3b_1 - a_1b_3), \quad v_3 = c(a_1b_2 - a_2b_1) \tag{7.50}$$

مساوات 7.50 کو مساوات 7.49 میں پر کرتے ہوئے آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ درج بالا مساوات 7.49 پر بھی پورا اترتا ہے۔ اب مساوات 7.49 میں بالائی مساوات $v_1v_2v_3$ فضا کی مبدا سے گزرتی ایک سطح مستوی کو ظاہر کرتی ہے جبکہ نچلی مساوات مبدا سے گزرتی دوسری سطح مستوی کو ظاہر کرتی ہے۔ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ ان سطحوں کے عمودی سمتیات ہیں (مثال 7.9)۔ اب چونکہ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ہے لہٰذا یہ سمتیات متوازی نہیں ہیں اور یہ سطحیں، ہم سطحی نہیں ہیں۔یوں یہ سطحیں ایک دونوں کو مبدا سے گزرتی سیدھے خط L پر قطع کرتی ہیں۔ چونکہ مساوات 7.50 میں c کی قیمت تبدیل کرنے سے سیدھا خط حاصل ہوتا ہے لہٰذا یہ خط مساوات 7.49 پر بھی پورا اترتا ہے اور یوں مساوات 7.50، L کی مساوات دیتا ہے اور مساوات 7.49 کا ہر حل مساوات 7.50 کی صورت کا ہو گا۔ بالخصوص $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء بھی اسی صورت کے ہوں گے جن میں c کی قیمت دریافت کرنا باقی ہے۔مساوات 7.50 سے درج ذیل ملتا ہے

$$|\boldsymbol{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = c^2[(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2]$$

جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$|\boldsymbol{v}|^2 = c^2[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2]$$

مساوات 7.33 استعمال کرتے ہوئے یوں درج ذیل ملتا ہے

$$|\boldsymbol{v}|^2 = c^2[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2]$$

جس کا مساوات 7.48 سے موازنہ کرنے سے $c = \mp 1$ حاصل ہوتا ہے۔

یہاں سے آگے یہ جاننا ضروری ہو گا کہ دایاں یا بایاں ہاتھ کارتیسی نظام استعمال کیا جا رہا ہے۔آئیں دائیں ہاتھ کا نظام استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ اس نظام میں $c = +1$ ہو گا۔

اگر ہم اور کی لمبائیاں یوں مسلسل تبدیل کریں کہ آخر کار $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}$ ہو (شکل 7.22) تب $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی یوں تبدیل ہو گی کہ آخر کار $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$ ہو گا۔ظاہر ہے کہ ہم یہ تبدیلی یوں پیدا کر سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کبھی بھی صفر نہ ہوں اور نا ہی یہ کبھی متوازی ہوں۔یوں $\boldsymbol{v}$ کبھی بھی صفر نہیں ہو گا اور چونکہ یہ تبدیلی مسلسل ہے اور c کی قیمت صرف $+1$ یا -1 ہو سکتی ہے لہٰذا اختتامی c کی قیمت وہی ہو گی جو ابتدائی c کی تھی۔اب چونکہ آخر پر $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k}$ ہیں لہٰذا $a_1 = 1$ ، $b_2 = 1$ اور $v_3 = 1$ ہیں جبکہ باقی اجزاء صفر ہیں۔یوں مساوات 7.50 سے $v_3 = c = +1$ ملتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 7.50 میں قوسین میں دیے گئے مقدار کو دو رتبی مقطع لکھا جا سکتا ہے لہٰذا اس نتیجے کو درج ذیل طرز پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو مقطع کی صورت میں

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{7.51}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں a_1 ، a_2 ، a_3 اور b_1 ، b_2 ، b_3 بالترتیب $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے اجزاء ہیں۔یاد رکھنے کی خاطر درج بالا کو درج ذیل مقطع تصور کیا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{دائیں ہاتھ کا نظام}) \tag{7.52}$$

جہاں مقطع کو پہلی صف سے پھیلا کر حاصل کیا جائے گا۔یہ مقطع خصوصی مقطع ہے جس کی پہلی صف کا ارکان سمتیات ہیں۔

بائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں بالکل درج بالا بحث کے تحت $c = -1$ حاصل ہو گا اور یوں اس نظام میں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{(بائیں ہاتھ کا نظام)} \tag{7.53}$$

مثال 7.11: دائیں ہاتھ کے کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{b} = -5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ ہیں۔ان کا سمتی ضرب $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ دریافت کریں۔

حل:

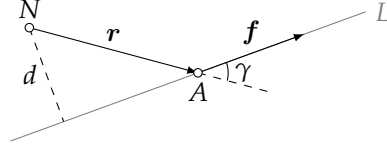
$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ -5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -16\boldsymbol{i} - 26\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

□

آئیں اب مساوات 7.47 کو ثابت کریں۔مساوات 7.51 کے تحت $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ کا پہلا

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} &= a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_2c_3 - a_3c_2) \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

ہو گا۔درج بالا کا دایاں ہاتھ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ کا پہلا جزو ہے۔باقی دو اجزاء بھی اسی طرح حاصل کیے جا سکتے ہیں۔یوں مساوات 7.47 میں بالائی تعلق ثابت ہوتا ہے۔بالکل اسی طرح اس میں دیا گیا نچلا تعلق بھی ثابت ہو گا۔

آپ درج ذیل مسئلہ خود ثابت کر سکتے ہیں۔

شکل 7.23: قوت کا معیار اثر (مثال 7.12)۔

مسئلہ 7.4: دو سمتیات اس صورت خطی طور تابع سلسلہ بنائیں گے جب ان کا سمتی ضرب صفر سمتیہ کے برابر ہو۔

سمتی ضرب کئی عملی مسائل میں پیش آتا ہے۔ درج ذیل دو مثال ایسے عملی مسئلے ہیں۔

مثال 7.12: قوت کا معیار اثر
میکانیات میں قوت $\boldsymbol{f}$ کا نقطہ N پر معیار اثر m سے مراد $m = |\boldsymbol{f}|\, d$ ہے جہاں N سے قوت کی ہم خطی لکیر L تک عمودی فاصلہ d ہے (شکل 7.23)۔

اگر N سے L پر کسی بھی نقطہ A تک سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہو تب $d = |\boldsymbol{r}| \sin\gamma$ ہو گا (شکل 7.23) لہٰذا

$$m = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{f}| \sin\gamma$$

ہو گا۔ چونکہ $\boldsymbol{r}$ اور $\boldsymbol{f}$ کے مابین زاویہ γ ہے لہٰذا اس کو مساوات 7.44 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

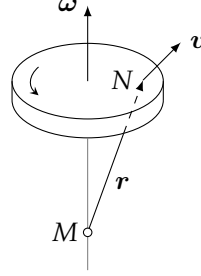
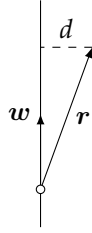
$$m = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}|$$

اور سمتیہ $\boldsymbol{m}$ یعنی

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} \tag{7.54}$$

قوت $\boldsymbol{f}$ کا معیار اثر سمتیہ[42] کہلاتا ہے جس کی مقدار m اور سمت N سے گزرتی اس محور کی سمت ہے جس کے گرد $\boldsymbol{f}$ گھمانے کی کوشش کرتا ہے۔

اگر دائیں ہاتھ کی چار انگلیوں کو $\boldsymbol{r}$ کی سمت سے $\boldsymbol{f}$ کی سمت میں گھماتے ہوئے ایک تصوراتی سلاخ کے گرد گھمایا جائے اور انگوٹھے کو اس تصوراتی سلاخ کی سمت میں رکھا جائے تب انگوٹھے کی سمت $\boldsymbol{m}$ کی سمت ہو گی۔ □

---
[42] moment vector

شکل 7.24: گھومتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار (مثال 7.13)۔

مثال 7.13: گھومتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار

خلا میں کسی بھی ٹھوس جسم B کے گھومنے کو سمتیہ ω سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جس کو **زاویائی سمتی رفتار**[43] کہتے ہیں۔اگر گھومنے کی محور پر دائیں ہاتھ کا انگوٹھا رکھتے ہوئے باقی چار انگلیوں کو گھومنے کی سمت میں محور کے گرد لپیٹا جائے تو انگوٹھا ω کی سمت دے گا (شکل 7.24)۔ ω کی لمبائی **زاویائی رفتار**[44] $\omega(>0)$ کے برابر ہو گی۔

فرض کریں کہ ٹھوس جسم B پر N کوئی نقطہ ہے جس کا محور سے فاصلہ d ہے۔اس نقطے کی رفتار ωd ہو گی۔فرض کریں کہ اس نقطے کی ہٹاو سمتیہ r ہے جہاں کارتیسی نظام کا مبدا M جسم کے محور پر رکھا گیا ہے۔یوں $d=|r|\sin\gamma$ ہو گا جہاں ω اور r کے مابین زاویہ γ ہے۔اس طرح

$$\omega d=|\omega||r|\sin\gamma=|\omega\times r|$$

لکھا جا سکتا ہے۔سمتی ضرب کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہم سمتی رفتار v درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$v=\omega\times r \tag{7.55}$$

اس کلیے سے جسم B پر کسی بھی نقطہ N کی سمتی رفتار حاصل کی جا سکتی ہے۔ □

سوالات

دایاں ہاتھ کارتیسی نظام میں $a=2i-j+4k$ ، $b=i+2j$ اور $c=-i+j$ لیتے ہوئے سوال 7.73 تا سوال 7.81 میں دیے گئے تفاعل دریافت کریں۔

[43] angular velocity
[44] angular speed

سوال 7.73: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$
جوابات: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-8\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$

سوال 7.74: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}$
جوابات: $\boldsymbol{0}$

سوال 7.75: $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \left|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\right|, \left|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}\right|$
جوابات: $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{k}$ ، $\left|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\right|=3$ ، $\left|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}\right|=3$

سوال 7.76: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$
جوابات: $-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$

سوال 7.77: $(4\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c},\ (2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times 2\boldsymbol{c}$
جوابات: $-16\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$

سوال 7.78: $(3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c},\ 3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$
جوابات: $9\boldsymbol{k}$

سوال 7.79: $(3\boldsymbol{c}-5\boldsymbol{b})\times 2\boldsymbol{a},\ 6\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+10\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$
جوابات: $-56\boldsymbol{i}+64\boldsymbol{j}+44\boldsymbol{k}$

سوال 7.80: $(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$
جوابات: $(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=-5\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$

سوال 7.81: $(2\boldsymbol{b}\times 4\boldsymbol{a})\times 5\boldsymbol{c},\ 2\boldsymbol{b}\times(4\boldsymbol{a}\times 5\boldsymbol{c})$
جوابات: $2\boldsymbol{b}\times 4\boldsymbol{a})\times 5\boldsymbol{c}=200\boldsymbol{i}+200\boldsymbol{j}+160\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{b}\times(4\boldsymbol{a}\times 5\boldsymbol{c})=80\boldsymbol{i}-40\boldsymbol{j}+160\boldsymbol{k}$

سوال 7.82: $\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}),\ (\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{0}$

سوال 7.83 تا سوال 7.86 میں متوازی الاضلاع کے دو قریبی اطراف دیے گئے ہیں۔ متوازی الاضلاع کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال 7.83: $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$
جواب: 2

سوال 7.84: $\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\ -2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{35}$

سوال 7.85: $4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$
جواب: $\sqrt{86}$

سوال 7.86: $\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{83}$

سوال 7.87 تا سوال 7.90 میں دایاں ہاتھ کارتیسی نظام کے xy سطح پر متوازی الاضلاع کے کونے دیے گئے ہیں۔ سمتیات استعمال کرتے ہوئے اس کا رقبہ دریافت کریں۔ قریبی اطراف جاننے کے لئے قلم و کاغذ سے جلد متوازی الاضلاع کی شکل بنائیں۔

سوال 7.87: $(0,0),\ (2,2),\ (-1,1),\ (1,3)$
جواب: 4

سوال 7.88: $(0,0),\ (2,0),\ (4,3),\ (2,3)$
جواب: 6

سوال 7.89: $(-1,1),\ (-3,1),\ (2,0),\ (-6,0)$
جواب: 8

سوال 7.90: $(-5,1),\ (-1,2),\ (-2,4),\ (-4,-1)$
جواب: 9

سوال 7.91 تا سوال 7.94 میں متوازی الاضلاع کے کونے دیے گئے ہیں۔ سمتیات استعمال کرتے ہوئے اس کا رقبہ دریافت کریں۔ قریبی اطراف جاننے کے لئے قلم و کاغذ سے جلد متوازی الاضلاع کی شکل بنائیں۔

سوال 7.91: $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (-1,2,4),\ (0,1,4)$
جواب: $4\sqrt{2}$

سوال 7.92: $(1,3,8),\ (1,2,1),\ (3,1,2),\ (-1,4,7)$
جواب: $2\sqrt{66}$

سوال 7.93: $(-1,-2,-1),\ (1,-1,1),\ (-2,0,4),\ (-4,-1,2)$
جواب: $\sqrt{170}$

سوال 7.94: $(1,0,0),\ (-1,1,1),\ (-3,4,5),\ (-1,3,4)$
جواب: $\sqrt{53}$

سوال 7.95 تا سوال 7.98 میں تکون کے کونے دیے گئے ہیں۔ تکون کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال 7.95: $(1,0,0),\ (0,2,0),\ (0,0,0)$
جواب: 1

سوال 7.96: $(1,3,2),\ (2,-1,3),\ (5,7,-1)$
جواب: $\frac{3\sqrt{57}}{2}$

سوال 7.97: $(-1,-2,-3),\ (1,2,4),\ (0,3,2)$
جواب: $\frac{3\sqrt{30}}{2}$

سوال 7.98: $(1,1,1),\ (2,2,2),\ (3,4,7)$
جواب: $\frac{\sqrt{26}}{2}$

سوال 7.99 تا سوال 7.102 میں $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ کو مساوات 7.48 کی مدد سے حل کریں۔

سوال 7.99: $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{46}$

سوال 7.100: $\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{38}$

سوال 7.101: $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{293}$

سوال 7.102: $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{21}$

سوال 7.103 تا سوال 7.106 میں کیا دیے گئے سمتیات عمودی یا متوازی ہیں؟

سوال 7.103: $2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j},\ 5\boldsymbol{k}$
جواب: عمودی

سوال 7.104: $3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ 6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$
جواب: متوازی

سوال 7.105: $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$
جواب: عمودی

سوال 7.106: $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ 3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$
جواب: نہ عمودی اور نا ہی متوازی۔

سوال 7.107 تا سوال 7.110 میں دو سمتیات دیے گئے ہیں۔ان کے عمودی دو اکائی سمتیات دریافت کریں۔

سوال 7.107: $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}$
جوابات: $\mp\boldsymbol{k}$

سوال 7.108: $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$
جوابات: $\mp\frac{1}{\sqrt{14}}(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$

سوال 7.109: $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$
جوابات: $\mp\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

سوال 7.110: $-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$
جوابات: $\mp\frac{1}{\sqrt{13}}(3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$

سوال 7.111 تا سوال 7.114 میں تین نقطے دیے گئے ہیں جن سے سطح مستوی گزرتی ہے۔اس سطح کا عمودی اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

سوال 7.111: $(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0)$
جواب: $\mp\boldsymbol{k}$

سوال 7.112: $(2,0,3),\ (1,3,2),\ (1,1,2)$
جواب: $\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})$

سوال 7.113: $(2,-1,-3),\ (1,-3,2),\ (-1,1,-2)$
جواب: $\mp\frac{1}{\sqrt{101}}(6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})$

سوال 7.114: $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$
جواب: $\mp\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

سوال 7.115: سطح $2x+3y-2z=9$ اور سطح $x-2y+3z=-22$ ایک دونوں کو سیدھی لکیر پر قطع کرتے ہیں۔اس لکیر کے متوازی اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

جواب: $\mp\frac{1}{\sqrt{138}}(5\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})$

سوال 7.116: سطح $x+y+z=5$ کے متوازی اور خط $z=y$ ، $x=0$ کے عمودی اکائی سمتیہ دریافت کریں۔

جواب: $\mp\frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$

سوال 7.117 تا سوال 7.120 میں قوت $\boldsymbol{f}$ ، نقطہ A سے گزرتی ہوئی لکیر کی سمت میں عمل کرتا ہے۔اس قوت کا معیار اثر $\boldsymbol{m}$ نقطہ N پر کیا ہو گا۔

سوال 7.117: $\boldsymbol{f}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j},\ A(4,5,6),\ N(-2,4,-5)$
جواب: $33\boldsymbol{i}+22\boldsymbol{j}-20\boldsymbol{k}$

سوال 7.118: $\boldsymbol{f}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\ A(4,-5,3),\ N(2,5,-4)$
جواب: $-41\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+26\boldsymbol{k}$

سوال 7.119: $\boldsymbol{f}=-5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},\ A(0,0,0),\ N(4,4,4)$
جواب: $-4\boldsymbol{i}+36\boldsymbol{j}-32\boldsymbol{k}$

سوال 7.120: $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ A(1,0,0),\ N(0,0,1)$
جواب: $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

7.9 غیر سمتی سہ ضرب اور دیگر متعدد ضرب

تین یا تین سے زائد سمتیات کا ضرب عملی استعمال میں عموماً پیش آتے ہیں۔ان میں سب سے زیادہ اہم غیر سمتی سہ ضرب[45] $a \cdot (b \times c)$ ہے۔ دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں درج ذیل سمتیات فرض کریں۔

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$$

مساوات 7.52 استعمال کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو مساوات 7.33 کی مدد سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{7.56}$$

غیر سمتی سہ ضرب $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ کو $(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

چونکہ مقطع قالب کے دو صف کی جگہ آپس میں بدلنے سے مقطع کی قیمت منفی اکائی (-1) سے ضرب ہوتی ہے لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{bac}), \quad \text{وغیرہ} \tag{7.57}$$

دو مرتبہ صف بدلنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{bca}) = (\boldsymbol{cab}) \tag{7.58}$$

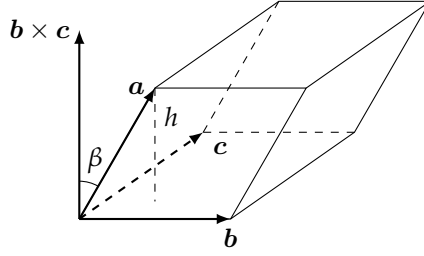
اب غیر سمتی سہ ضرب کی تعریف کی رو سے

$$(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}), \quad (\boldsymbol{cab}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

ہیں اور چونکہ غیر سمتی ضرب قابل تبادل ہے لہٰذا $\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ ہو گا اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \tag{7.59}$$

---

[45] scalar triple product, mixed triple product

شکل 7.25: غیر سمتی سہ ضرب کی جیومیٹریائی معنی۔

مزید مستقل k کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$(k\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}) = k(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}) \tag{7.60}$$

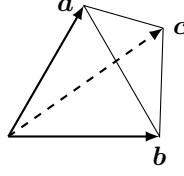
غیر سمتی سہ ضرب کی مطلق قیمت سادہ معنی رکھتی ہے۔یہ ایسی **مسدسی متوازی السطوح**[46] P کی حجم ہے جس کے قریبی اطراف $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{c}$ ہوں (شکل 7.25)۔

یقیناً مساوات 7.23 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\cos\beta \quad \text{(مسدسی متوازی السطوح کا حجم)} \tag{7.61}$$

جہاں $\boldsymbol{a}$ اور سمتیہ $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ کے مابین زاویہ β ہے۔اب P کی نچلی سطح کا رقبہ $|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|$ ہے اور P کی اونچائی $h = |\boldsymbol{a}|\cos\beta$ ہے لٰہذا P کا حجم درج بالا ہو گا۔

ہم نے دیکھا کہ غیر سمتی سہ ضرب در حقیقت مسدسی متوازی السطوح کا حجم دیتا ہے۔اب کسی چیز کا حجم ایک مستقل ہے جو چنے گئے دائیں ہاتھ کارتیسی نظام پر منحصر نہیں ہو گا لٰہذا غیر سمتی سہ ضرب کا دارومدار بھی زیر استعمال دائیں ہاتھ کارتیسی نظام پر نہیں ہو گا۔البتہ یاد رہے کہ بائیں ہاتھ کارتیسی نظام کی صورت میں مساوات 7.52 کی جگہ مساوات 7.53 استعمال ہو گا جس سے مساوات 7.56 میں مقطع کے سامنے -1 نمودار ہو گا۔ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ مقطع کی قیمت ایک دائیں ہاتھ نظام کی جگہ دوسرا دائیں ہاتھ کا نظام استعمال کرنے سے تبدیل نہیں ہو گا اور نا ہی یہ ایک بائیں ہاتھ نظام کی جگہ دوسرا بائیں ہاتھ نظام استعمال کرنے سے تبدیل ہو گا البتہ دائیں ہاتھ نظام کی جگہ بائیں ہاتھ نظام یا بائیں ہاتھ نظام کی جگہ دائیں ہاتھ نظام استعمال کرنے سے مقطع کی قیمت -1 سے ضرب ہو گی۔

[46] hexagonal parallelepiped

شکل 7.26: غیر سمتی سہ ضرب سے چو سطحہ کے حجم کا حصول (مثال 7.14)۔

مثال 7.14: چو سطحہ
دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں چو سطحہ کے قریبی اطراف درج ذیل ہیں۔اس چو سطحہ کا حجم دریافت کریں (شکل 7.26)۔

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

حل: مسدسی متوازی السطوح کا حجم درج ذیل مقطع سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

یوں مسدسی متوازی السطوح کا حجم $V = 6$ ہے۔مقطع کی قیمت منفی ہے جس کا مطلب ہے کہ $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ سمتیات اسی ترتیب میں بائیں ہاتھ ثلاثہ سمتیات ہیں۔چو سطحہ کا حجم مسدسی متوازی السطوح کے حجم کا $\frac{1}{8}$ ہے لہٰذا اس کا حجم $\frac{3}{4}$ ہو گا۔

□

غیر سمتی سہ ضرب کی جیومیٹریائی معنی سے ہمیں تین سمتیات کی خطی طور تابعیت اور غیر تابعیت کا اصول بھی ملتا ہے۔یہ سمتیات صرف اور صرف ہم سطحی ہونے کی صورت میں خطی طور تابع ہوں گے [جس میں (حصہ 7.4 میں دیا گیا) خطی طور تابع تین سمتیات کے ہم خطی ہونے کا شرط بھی شامل ہے]۔

مسئلہ 7.5: خطی تابعیت
تین سمتیات صرف اور صرف اس صورت خطی طور تابع ہوں گے جب ان کا غیر سمتی سہ ضرب صفر کے برابر ہو گا۔

عملی استعمال میں درپیش دیگر متعدد ضرب کو نقطہ ضرب، صلیبی ضرب اور غیر سمتی سہ ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے میں درج ذیل کلیہ (جس کا ثبوت جلد پیش کیا جائے گا) اہم کردار ادا کرتا ہے

$$\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{d} \tag{7.62}$$

جس سے مراد درج ذیل **لیگرینج مماثل**[47]

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \tag{7.63}$$

اور

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})\boldsymbol{d} \tag{7.64}$$

ہے، جن کے ثبوت آپ سے بالترتیب سوال 7.159 اور سوال 7.160 میں مانگے گئے ہیں۔مساوات 7.62 کے ثبوت سے پہلے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 7.62 سے مراد درج ذیل بھی ہے۔

$$(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{d} = -\boldsymbol{d} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$$

اس سے ظاہر ہے کہ عموماً $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})$ اور $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{d}$ مختلف ہوں گے یعنی سمتی ضرب، قانون تلازم پر پورا نہیں اترتا لہٰذا مساوات 7.62 میں قوسین لکھنا لازمی ہے اور انہیں ہٹایا نہیں جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر دائیں ہاتھ کے نظام میں درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} \quad \text{لیکن} \quad \boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{0}$$

ثبوت: برائے مساوات 7.62
ہم دائیں ہاتھ کارتیسی محدد یوں چنتے ہیں کہ x محور کی سمت $\boldsymbol{d}$ ہو اور xy سطح میں $\boldsymbol{c}$ پایا جاتا ہو۔یوں مساوات 7.62 کے سمتیات درج ذیل لکھے جائیں گے

$$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{d} = d_1\boldsymbol{i}$$

لہٰذا $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} = -c_2 d_1 \boldsymbol{k}$ ہو گا جس کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -c_2 d_1 \end{vmatrix} = -b_2 c_2 d_1 \boldsymbol{i} + b_1 c_2 d_1 \boldsymbol{j}$$

---

[47] Lagrange's identity

ساتھ ہی ساتھ ہم درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=b_1d_1(c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j})-(b_1c_1+b_2c_2)d_1\boldsymbol{i}=b_1c_2d_1\boldsymbol{j}-b_2c_2d_1\boldsymbol{i}$$

یوں ہماری مخصوص کارتیسی نظام میں مساوات 7.62 ثابت ہوتا ہے۔اب سمتیہ کی لمبائی، سمتیہ کا رخ، سمتی ضرب اور غیر سمتی ضرب کی قیمت کا دارومدار چنے گئے نظام پر ہر گز نہیں ہوتا۔ مزید دہرا سمتی ضرب کی بنا $\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$ کو دائیں ہاتھ یا بائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{k}$ کی صورت میں لکھنے سے یکساں جواب ملتا ہے۔یوں مساوات 7.62 کسی بھی کارتیسی نظام کے لئے درست ہے۔

□

سوالات

سوال 7.121 تا سوال 7.130 میں دائیں ہاتھ کارتیسی نظام استعمال کیا گیا ہے۔ان سوالات میں دیے گئے تین سمتیات کا غیر سمتی سہ ضرب $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ دریافت کریں۔

سوال 7.121: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{k}$
جواب: 1

سوال 7.122: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}$
جواب: 1

سوال 7.123: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{j}$
جواب: -1

سوال 7.124: $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$
جواب: 28

سوال 7.125: $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$
جواب: 10

سوال 7.126: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$
جواب: -3

سوال 7.127: $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$
جواب: 1

سوال 7.128: $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$
جواب: 12

سوال 7.129: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$
جواب: 19

سوال 7.130: $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c} = 7\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$
جواب: -35

کیا سوال 7.131 تا سوال 7.138 کے سمتیات خطی طور تابع یا خطی طور غیر تابع ہیں؟

سوال 7.131: $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}$
جواب: غیر تابع

سوال 7.132: $\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k},\ -2\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$
جواب: تابع

سوال 7.133: $2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},\ -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$
جواب: غیر تابع

سوال 7.134: $-3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},\ 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j},\ 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
جواب: غیر تابع

سوال 7.135: $4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j},\ -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$
جواب: تابع

سوال 7.136: $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k},\ 3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{k},\ 8\boldsymbol{k}$
جواب: تابع

سوال 7.137: $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},\ 3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{i}$
جواب: غیر تابع

سوال 7.138: $\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}$
جواب: غیر تابع

سوال 7.139: λ کی وہ قیمت دریافت کریں جس سے درج ذیل تینوں سمتیات ہم خطی ہوں گے۔
$\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \lambda\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
جواب: $\lambda = -2$

سوال 7.140: کیا درج ذیل چار نقطے ہم سطحی ہیں؟

$$(4,-2,1),\ (5,1,6),\ (2,2,-5),\ (3,5,0)$$

جواب: غیر ہم سطحی

سوال 7.141: درج ذیل میں α اور β کی وہ قیمتیں دریافت کریں جو تینوں نقطوں کو ہم خطی بناتے ہیں۔

$$(-1,3,2),\ (-4,2,-2),\ (5,\alpha,\beta)$$

جوابات: $\alpha = 5$ ، $\beta = 10$

سوال 7.142: تین متغیرات پر مبنی تین مساوات کی متجانس نظام کا غیر صفر حل صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب نظام کی عددی سر قالب کا مقطع صفر ہو۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ 7.5 ثابت کریں۔

سوال 7.143 تا سوال 7.148 میں متوازی شہ پہلو کے قریبی اطراف دیے گئے ہیں۔ متوازی شہ پہلو کا حجم دریافت کریں۔

سوال 7.143: $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ -\boldsymbol{k}$
جواب: 1

سوال 7.144: $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$
جواب: 2

سوال 7.145: $2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
جواب: 13

سوال 7.146: $3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
جواب: 40

سوال 7.147: $3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
جواب: 20

سوال 7.148: $3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},\ 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$
جواب: 12

سوال 7.149 تا سوال 7.152 میں چو سطحہ کے کونے دیے گئے ہیں۔اس کا حجم دریافت کریں۔

سوال 7.149: $(0,0,0),\ (2,4,0),\ (0,2,4),\ (3,5,6)$
جواب: 4

سوال 7.150: $(3,4,2),\ (1,-2,3),\ (2,2,2),\ (6,3,5)$
جواب: $\frac{1}{8}$

سوال 7.151: $(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$
جواب: $\frac{1}{8}$

سوال 7.152: $(-3,2,-1),\ (1,2,5),\ (-2,1,3),\ (4,-1,1)$
جواب: 8

سوال 7.153 تا سوال 7.158 میں $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{d}=4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ لیں۔

سوال 7.153: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$
جوابات: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=15\boldsymbol{i}+25\boldsymbol{j}+29\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=31\boldsymbol{i}+50\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$

سوال 7.154: $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{d}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$
جوابات: $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{d}=9\boldsymbol{i}+26\boldsymbol{j}+62\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{d}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-9\boldsymbol{i}-26\boldsymbol{j}-64\boldsymbol{k}$

سوال 7.155: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c})$
جوابات: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{d}=30\boldsymbol{i}-37\boldsymbol{j}+83\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c})=64\boldsymbol{i}+29\boldsymbol{j}-33\boldsymbol{k}$

سوال 7.156: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})$
جوابات: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})=-48\boldsymbol{i}-18\boldsymbol{j}+26\boldsymbol{k}$

سوال 7.157: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$
جوابات: $-98\boldsymbol{i}+99\boldsymbol{j}-137\boldsymbol{k}$

سوال 7.158: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b})$
جوابات: -6832

سوال 7.159: مساوات 7.63 ثابت کریں۔

سوال 7.160: مساوات 7.64 ثابت کریں۔

باب 8

خطی الجبرا: قالب، سمتیہ، مقطع۔ خطی نظام

خطی الجبرا وسیع مضمون ہے جس میں قالب اور سمتیات، مقطع قالب، خطی مساوات کے نظام، سمتی فضا اور خطی تبادلہ، قدر مسائل، اور دیگر موضوعات شامل ہیں۔اس کا استعمال انجینئری، طبیعیات، جیومیٹری، کمپیوٹر سائنس، معاشیات اور دیگر میدانوں میں پایا جاتا ہے۔

متعدد اعداد و شمار یا متعدد تفاعل کو مربوط طریقے سے قالب[1] اور سمتیات[2] کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قالب اور سمتیات ہی خطی الجبرا کی زبان ہیں۔

8.1 قالب اور سمتیات۔ مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

مستطیلی ترتیب وار فہرست کو قالب کہتے ہیں۔درج ذیل قالب کی مثال ہیں۔قالب میں درج اعداد یا تفاعل کو قالب کے اندراجات یا قالب کے ارکان[3] کہتے ہیں۔

$$
\begin{bmatrix} 0.1 & -2 & 1.2 \\ -6 & 0 & 23 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ln x & -e^x \\ e^{3x} & 3.2x^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3.22 \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \tag{8.1}
$$

---

matrices[1]
vectors[2]
elements[3]

بالائی بائیں ہاتھ قالب کے ارکان 0.1 ، -2 ، 1.2 ، -6 ، 0 اور 23 ہیں۔اس قالب کے دو صف[4] اور تین قطار[5] ہیں۔افقی اندراجات کی لکیر کو صف اور عمودی اندراجات کی لکیر کو قطار کہتے ہیں۔ بالائی درمیانی قالب میں 3 صف اور 3 قطار پائے جاتے ہیں۔ایسا قالب جس میں صفوں کی تعداد، قطاروں کی تعداد کے برابر ہو مربع قالب[6] کہلاتا ہے۔یوں بالائی دائیں ہاتھ قالب بھی مربع قالب ہے۔ بالائی درمیانی قالب میں ارکان کو a_{mn} سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں دو عدد اشاریہ m اور n بالترتیب اس صف اور قطار کو ظاہر کرتے ہیں جہاں یہ رکن پایا جاتا ہو۔ قالب میں اندراجات کے مقام کی وضاحت اسی معیاری ترکیب سے کی جاتی ہے۔ یوں a_{23} رکن دوسرے صف اور تیسرے قطار میں پایا جاتا ہے۔

ایسا قالب جو صرف ایک عدد صف یا صرف ایک عدد قطار پر مشتمل ہو، سمتیہ[7] کہلاتا ہے۔یوں نچلے دائیں ہاتھ دو ارکان پر مشتمل سمتیہ قطار[8] پایا جاتا ہے جبکہ نچلے بائیں ہاتھ سمتیہ صف[9] پایا جاتا ہے۔چونکہ سمتیہ قطار میں کوئی صف نہیں پایا جاتا لہٰذا اس میں ارکان کے مقام کو صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اسی طرح سمتیہ صف میں بھی ارکان کا مقام صرف ایک عدد اشاریہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں سمتیہ قطار میں $a_1 = 3.22$ اور $a_2 = -\frac{4}{5}$ ہیں۔

عملی استعمال میں مواد کے ذخیرہ اور اس پر عمل کرنے میں قالب کار آمد ثابت ہوتے ہیں۔درج ذیل مثال دیکھیں

مثال 8.1: خطی نظام

درج ذیل خطی نظام میں x_1 ، x_2 اور x_3 نا معلوم متغیرات ہیں۔

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0\\
3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 15\\
5x_1 \qquad\;\; + 3x_3 &= 11
\end{aligned}$$

آئیں درج بالا نظام میں x_1 ، x_2 اور x_3 کے عددی سروں سے عددی سر قالب[10] $\boldsymbol{A}$ لکھیں۔ $\boldsymbol{A}$ قالب میں ہر رکن کا مقام عین خطی مساوات کے مطابق ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

[4] rows
[5] columns
[6] square matrix
[7] vector
[8] column vector
[9] row vector
[10] coefficient matrix

چونکہ تیسری مساوات میں x_2 نہیں پایا جاتا للذا اس کا عددی سر صفر کے برابر ہو گا اور یوں A میں $a_{32}=0$ درج کیا گیا ہے۔عددی سر قالب A میں مساوات کے دائیں ہاتھ کی معلومات کا اضافہ کرنے سے **افزودہ قالب**[11] $\tilde{A}$ ملتا ہے۔

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 15\\ 5 & 0 & 3 & 11\end{bmatrix}$$

چونکہ افزودہ قالب $\tilde{A}$ سے تینوں مساوات لکھے جا سکتے ہیں للذا دیے گئے خطی نظام کو $\tilde{A}$ مکمل طور ظاہر کرتا ہے۔یوں ہم $\tilde{A}$ کو حل کرتے ہوئے نا معلوم متغیرات x_1 ، x_2 اور x_3 حاصل کر سکتے ہیں۔ایسا کرنا جلد سمجھایا جائے گا۔فی الحال تسلی کر لیں کہ اس نظام کا حل $x_1=1$ ، $x_2=-2$ اور $x_3=2$ ہے۔

نا معلوم متغیرات کو x_1 ، x_2 اور x_3 سے ظاہر کرنے کی بجائے دیگر علامتوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے مثلاً x ، y اور z ۔ □

مثال 8.2: فروخت کھاتا

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}32 & 23 & 13 & 18 & 11 & 19 & 20\\ 10 & 12 & 14 & 5 & 0 & 17 & 25\\ 29 & 16 & 32 & 18 & 9 & 14 & 17\end{bmatrix}$$

	جمعہ	جمعرات	بدھ	منگل	پیر	اتوار	ہفتہ
الف	32	23	13	18	11	19	20
ب	10	12	14	5	0	17	25
پ	29	16	32	18	9	14	17

ایک دکان کی تین اشیاء کی ہفتہ وار فروخت درج بالا قالب میں دی گئی ہے۔ہر ہفتے کی فروخت کو اسی طرح قالبوں میں لکھا جا سکتا ہے۔مہینے کے آخر میں تمام قالبوں کے مطابقتی ارکان کا مجموعہ لینے سے ہر دن، تینوں اشیاء کی کل فروخت کی فہرست حاصل ہو گی۔ □

عمومی تصورات اور علامت نویسی

آئیں اب تک پیش کیے گئے تصورات کو با ضابطہ دستوری صورت دیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے بڑے حروف سے قالب کو ظاہر کریں گے مثلاً $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ ، $\boldsymbol{C}$ ، $\dots$، اور یا اس کو چکور قوسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ وغیرہ۔ایسا قالب جس میں m صف اور n قطار ہوں، $m\times n$

[11] augmented matrix

(اس کو m ضرب n پڑھیں) قالب کہلاتا ہے (پہلے صف اور بعد میں قطار آئے گا) اور $m \times n$ قالب کی جسامت[12] کہلاتی ہے۔یوں $m \times n$ قالب درج ذیل صورت کا ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

مساوات 8.1 میں بالائی بائیں قالب 2×3 جسامت کا ہے جبکہ نچلا بایاں قالب 1×3 جسامت کا ہے۔

مساوات 8.2 میں ہر رکن کو دو عدد اشاریہ سے پہچانا جاتا ہے جہاں پہلا اشاریہ صف اور دوسرا اشاریہ قطار ہے۔یوں a_{23} دوسرے صف اور تیسرے قطار پر موجود اندراج ہے۔

ایسا قالب جس میں $m = n$ ہو $n \times n$ **چکور قالب** کہلاتا ہے۔ چکور قالب کا وہ وتر جس پر a_{11} ، a_{22} ، $\cdots$ ، a_{nn} پائے جاتے ہیں، قالب کا **مرکزی وتر**[13] کہلاتا ہے۔ مساوات 8.1 میں ایک چکور قالب کے مرکزی وتر کے ارکان a_{11} ، a_{22} اور a_{33} ہیں جبکہ دوسرے چکور قالب کے مرکزی وتر کے ارکان $\ln x$ اور $3.2x^2$ ہیں۔جیسا ہم دیکھیں گے، چکور قالب نہایت اہم ہیں۔

ایسا قالب جس میں $m \neq n$ ہو $m \times n$ **مستطیل**[14] قالب کہلاتا ہے۔مستطیل قالب کی ایک مخصوص قسم چکور قالب ہے۔

سمتیات

صرف ایک صف یا ایک قطار پر مبنی قالب کو سمتیہ کہتے ہیں۔سمتیہ کے اندراج کو سمتیہ کے اجزاء[15] کہتے ہیں۔ ہم موٹی لکھائی میں لاطینی حروف تہجی کے چھوٹے حروف سے سمتیہ کو ظاہر کریں گے مثلاً $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ ، $\cdots$، اور یا اس کو چکور قوسین میں عمومی رکن سے ظاہر کریں گے مثلاً $\boldsymbol{a} = [a_j]$ وغیرہ۔ سمتیہ صف کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4.2 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

---

[12] size
[13] main diagonal
[14] rectangular matrix
[15] components

اسی طرح سمتیہ قطار کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2.3 \end{bmatrix}$$

$m \times n$ جسامت کے قالب 8.2 کو n جسامت کا سمتیہ صف

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

تصور کیا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{b}_1$ تا $\boldsymbol{b}_n$ از خود m جسامت کے سمتیہ قطار

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad \boldsymbol{b}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

ہیں۔اسی طرح $\boldsymbol{A}$ کو m جسامت کا سمتیہ قطار

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \vdots \boldsymbol{c}_m \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

تصور کیا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{c}_1$ تا $\boldsymbol{c}_m$ از خود n جسامت کے سمتیہ صف ہیں۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_1 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{c}_2 &= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \boldsymbol{c}_m &= \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.6}$$

مجموعہ اور غیر سمتی ضرب

آئیں قالب مساوی ہونے کی تصور جانتے ہیں۔

تعریف: دو قالب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ اس صورت مساوی ہوں گے جب دونوں قالب کی جسامت برابر ہو اور ان کے نظیری ارکان آپس میں برابر ہوں یعنی $a_{11} = b_{11}$ ، $a_{12} = b_{12}$ ، ... ہوں۔ غیر مساوی قالب مختلف[16] کہلاتے ہیں۔ یوں مختلف جسامت کے قالب ہر صورت مختلف ہوں گے۔ مساوات کا تعلق $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ لکھا جاتا ہے۔

مثال 8.3: قالبوں کی مساوات

اگر درج ذیل قالب مساوی ہوں

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3.2 \end{bmatrix}$$

تب $a_{11} = 2$ ، $a_{12} = -3$ ، $a_{21} = 0$ اور $a_{22} = 3.2$ ہوں گے اور ہم $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ لکھ سکتے ہیں۔ درج ذیل تمام قالب آپس میں مختلف ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

تعریف: قالبوں کا مجموعہ

دو یکساں جسامت کے قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ اور $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ کا مجموعہ $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ لکھا جائے گا جس کے اندراجات $a_{jk} + b_{jk}$ کو $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے نظیری ارکان کے مجموعے سے حاصل کیا جائے گا۔ دو مختلف جسامت کے قالبوں کا مجموعہ حاصل کرنا ناممکن ہے۔

مثال 8.4: اگر

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ہوں تب $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ ، $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ اور $0\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}$ حاصل کریں۔

[16] different

حل: چونکہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کی یکساں جسامت ہے لٰہذا انہیں جمع کیا جا سکتا ہے۔ مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2+7 & -1+3 & 3+0\\ 1+1 & 0+2 & -2+1\\ 3+2 & 2-1 & 1+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 2 & 3\\ 2 & 2 & -1\\ 5 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

اسی طرح چونکہ $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی جسامت یکساں ہے لٰہذا انہیں جمع کیا جا سکتا ہے۔ ان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1+0\\ 3+2\\ -2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 5\\ -1\end{bmatrix}$$

چونکہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{b}$ کی جسامت یکساں نہیں ہے لٰہذا $0\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}$ حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ □

تعریف: غیر سمتی ضرب

کسی بھی $m\times n$ قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ اور کسی بھی غیر سمتی مقدار (عدد) c کا حاصل ضرب $c\boldsymbol{A}$ لکھا جاتا ہے جو ایسا $m\times n$ قالب $c\boldsymbol{A}=[ca_{jk}]$ ہے جس کا ہر رکن $\boldsymbol{A}$ کے نظیری رکن کو c سے ضرب دیتے حاصل کیا جاتا ہے۔

ہم $(-1)\boldsymbol{A}$ کو $-\boldsymbol{A}$ لکھتے ہیں اور اس کو $\boldsymbol{A}$ کا نفی کہتے ہیں۔ اسی طرح $(-k)\boldsymbol{A}$ کو $-k\boldsymbol{A}$ لکھا جاتا ہے۔ $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$ کو $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ لکھا جاتا ہے جو $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کا **فرق**[17] کہلاتا ہے (فرق صرف یکساں جسامت کے قالب کا حاصل کیا جا سکتا ہے)۔

مثال 8.5: غیر سمتی ضرب

اگر

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1.2 & 3.3\\ 0.6 & -1.5\\ 0 & 6.0\end{bmatrix}$$

---

[17] difference

ہو تب درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$-A\begin{bmatrix}-1.2 & -3.3\\ -0.6 & 1.5\\ 0 & -6.0\end{bmatrix},\quad \frac{10}{3}A=\begin{bmatrix}4 & 11\\ 2 & -5\\ 0 & 20\end{bmatrix},\quad 0A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

اگر قالب B میں مختلف اشیاء کی کلو گرام کمیت درج ہو تب $1000B$ قالب انہیں اشیاء کی کمیت گرام میں دے گا۔ □

مجموعہ قالب اور غیر سمتی ضرب کے قواعد

مجموعہ اعداد کے قواعد سے یکساں جسامت $m \times n$ کے قالبوں کے مجموعے کے درج ذیل قاعدے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&(\text{الف}) \quad A+B=B+A\\
&(\text{ب}) \quad (A+B)+C=A+(B+C) \quad (\text{یعنی } A+B+C)\\
&(\text{پ}) \quad A+0=A\\
&(\text{ت}) \quad A-A=0
\end{aligned} \tag{8.7}$$

درج بالا موٹی لکھائی میں صفر $\mathbf{0}$ ایسے $m \times n$ صفر قالب[18] کو ظاہر کرتی ہے جس کے تمام ارکان صفر 0 کے برابر ہوں۔ اگر $m=1$ یا $n=1$ ہو تب اس کو صفر سمتیہ[19] کہیں گے۔

یوں مجموعہ قالب قانون تبادل اور قانون تلازم پر پورا اترتا ہے۔

اسی طرح غیر سمتی ضرب درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$\begin{aligned}
&(\text{الف}) \quad c(A+B)=cA+cB\\
&(\text{ب}) \quad (c+k)A=cA+kB\\
&(\text{پ}) \quad c(kA)=(ck)A \quad (\text{یعنی } ckA)\\
&(\text{ت}) \quad 1A=A
\end{aligned} \tag{8.8}$$

---

[18] zero matrix
[19] zero vector

سوالات

سوال 8.1 تا سوال 8.3 عمومی سوالات ہیں۔ سوال 8.1: $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ لکھتے ہوئے مثال 8.2 میں $[a_{12}]$ اور $[a_{25}]$ کیا ہیں۔

جوابات: $[a_{12}] = 23$ اور $[a_{25}] = 0$

سوال 8.2: مثال 8.2 میں دیے گئے قالب کی جسامت لکھیں۔

جواب: 3×7

سوال 8.3: مثال 8.4 میں قالب $\boldsymbol{A}$ کی مرکزی وتر لکھیں۔

جواب: 2، 0 اور 1

سوال 8.4 تا سوال 8.10 میں قالبوں کے مجموعے اور غیر سمتی ضرب حاصل کرنے ہوں گے۔ان سوالات میں درکار قالب درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 12 & -4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 1.0 \\ 0.0, \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.6 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 8.4: $0.5\boldsymbol{A}$ ، $0.2\boldsymbol{B}$ ، $-2\boldsymbol{u}$

جوابات:

$$0.5\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1.0 \\ 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0.2\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.6 \\ -0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad -2\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

سوال 8.5: $3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}, \quad 2\boldsymbol{C} - \boldsymbol{E}, \quad -3\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w}$

جوابات:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 12 \\ 7 & 1 & 9 \\ 6 & 11 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9.5 \\ -5.7 \\ -6.4 \end{bmatrix}$$

سوال 8.6:
$$(3 \cdot 6)\boldsymbol{B}, \quad 6(3)\boldsymbol{B}, \quad 5\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{A}$$
جوابات:

$$\begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 18 & 0 & 36 \\ 54 & -18 & 18 \\ 36 & 18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

سوال 8.7:
$$3(2\boldsymbol{C} + 5\boldsymbol{D}), \quad 0.2(0.1\boldsymbol{E} - 0.3\boldsymbol{D})$$
جوابات:

$$\begin{bmatrix} 12 & 60 \\ 66 & 18 \\ 9 & 57 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.08 & -0.24 \\ 0.12 & -0.2 \\ 0.22 & -0.1 \end{bmatrix}$$

سوال 8.8:
$$\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{C}), \quad (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}, \quad 0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$
جوابات: چونکہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{C}$ کی جسامت یکساں نہیں ہے لہٰذا انہیں جمع نہیں کیا جا سکتا ہے۔ غیر یکساں جسامت کی بنا $0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$ بھی حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 20 & -4 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

سوال 8.9: $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ کو خلاء میں قوت کے اجزاء تصور کرتے ہوئے ان کے مجموعے سے کل قوت دریافت کریں۔

جواب:

$$\begin{bmatrix} 5.3 \\ 3.1 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

سوال 8.10: متوازن صورت
تمام قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہونے کی صورت کو متوازن[20] حال کہتے ہیں۔

ایسا قوت x دریافت کریں کہ u ، v ، w اور x متوازن حال میں ہوں۔

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -5.3 \\ -3.1 \\ -3.2 \end{bmatrix}$$

8.2 قالبی ضرب

قالبی ضرب سے مراد دو عدد قالبوں کا آپس میں ضرب ہے۔آپ سے گزارش ہے کہ چند مثالیں حل کرتے ہوئے قالبی ضرب کو اچھی طرح سمجھیں۔ قالبی ضرب کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: قالبی ضرب
$m \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ اور $r \times p$ قالب $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ کا (اسی ترتیب سے) حاصل ضرب $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ صرف $r = n$ کی صورت میں ممکن ہو گا اور یہ $m \times p$ قالب $\boldsymbol{C} = [c_{jk}]$ ہو گا جس کے اندراجات درج ذیل ہوں گے۔

(8.9)
$$c_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{lk} = a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \cdots + a_{jn} b_{nk}, \quad j = 1, \cdots, m \quad k = 1, \cdots, p$$

یوں پہلے جزو $\boldsymbol{A}$ میں قطاروں کی تعداد n دوسرے جزو $\boldsymbol{B}$ کی صفوں کی تعداد r کے برابر ہونا لازمی ہے۔مساوات 8.9 میں c_{jk} کو $\boldsymbol{A}$ کے j صف کے ہر رکن کو $\boldsymbol{B}$ کے k قطار کے نظیری رکن سے ضرب دیتے ہوئے تمام n حاصل ضرب کا مجموعہ لینے سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں صف ضرب قطار سے قالبی ضرب حاصل کیا جاتا ہے۔ قالبی ضرب $n = 3$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}$$

---
[20] equilibrium

جہاں A کی پہلی صف کے ارکان کو B کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{11} حاصل ہو گا۔اسی طرح A کی پہلی صف کے ارکان کو B کی دوسری قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{12} حاصل ہو گا اور A کی دوسری صف کے ارکان کو B کی پہلی قطار کے نظیری ارکان سے ضرب دیتے ہوئے تمام کا مجموعہ لینے سے c_{21} حاصل ہو گا۔اس عمل کو درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\
c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\
c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}
\end{aligned}$$

چونکہ سمتیہ درحقیقت قالب کی مخصوص صورت ہے لہٰذا قالب اور سمتیہ کا ضرب بھی بالکل اسی طرح حاصل کیا جائے گا۔ قالبی ضرب کی چند مثالیں درج ذیل ہیں۔

مثال 8.6: قالبی ضرب

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 9 + 3\cdot 8 & 1\cdot 7 + 3\cdot 10 \\ 4\cdot 9 + 6\cdot 8 & 4\cdot 7 + 6\cdot 10 \\ 5\cdot 9 + 2\cdot 8 & 5\cdot 7 + 2\cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 37 \\ 84 & 88 \\ 61 & 55 \end{bmatrix}$$

□

مثال 8.7: قالب اور سمتیہ کا ضرب

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4 + 1\cdot 5 \\ 3\cdot 4 + 0\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{جبکہ} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \text{نا ممکن}$$

درج بالا میں قالب اور سمتیہ کی جگہ تبدیل کرنے سے پہلے جزو کی قطاروں اور دوسرے جزو کی صفوں کی تعداد یکساں نہیں رہتی لہٰذا ایسا ضرب نا ممکن ہے۔یوں ضروری نہیں ہے کہ AB اور BA برابر ہوں اور یہ کہ دونوں ضرب کا حصول ممکن ہو۔ □

سوال 8.11:

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 0 & 0\\-4 & -2 & -6\end{bmatrix}$$

آپ نے دیکھا کہ سمتیات کی جگہ تبدیل کرنے سے حاصل ضرب تبدیل ہوتا ہے یعنی قالبی ضرب قانون تبادل پر پورا نہیں اترتا۔

مثال 8.8: قالبی ضرب قانون تبادل پر پورا نہیں اترتا لہٰذا عموماً $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ ہو گا

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\200 & 200\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\200 & 200\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}199 & 199\\-199 & -199\end{bmatrix}$$

□

آپ نے دیکھا کہ قالبی ضرب میں اجزاء کی جگہ تبدیل نہیں کی جا سکتی ہے۔اس کے علاوہ قالبی ضرب، عام اعدادی ضرب کے درج ذیل قواعد پر پورا اترتا ہے۔

$$\begin{aligned}
&(\text{الف})\quad (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})\quad (k\boldsymbol{AB}\ \text{یا}\ \boldsymbol{A}k\boldsymbol{B})\\
&(\text{ب})\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}\quad (\text{یعنی}\ \boldsymbol{ABC})\\
&(\text{پ})\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}\\
&(\text{ت})\quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}
\end{aligned}\tag{8.10}$$

درج بالا میں k کوئی عدد ہے اور یہ قواعد اس صورت درست ہوں گے کہ بائیں ہاتھ کے قالب، قالبی ضرب کی تعریف پر پورا اترتے ہوں۔درج بالا میں مساوات-ب **قانون تلازم**[21] کہلاتا ہے جبکہ مساوات-پ اور مساوات-ت **قانون جزئیتی تقسیم**[22] کہلاتا ہے۔

---

[21] associative law
[22] distributive law

چونکہ قالبی ضرب صف ضرب قطار کو کہتے ہیں لہٰذا مساوات 8.9 کو زیادہ خوش اسلوبی سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$c_{jk} = \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{b}_k, \quad j = 1, \cdots, m \quad k = 1, \cdots, p \tag{8.11}$$

جہاں $\boldsymbol{a}_j$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا صف j اور $\boldsymbol{b}_k$ قالب $\boldsymbol{B}$ کا قطار k ہے۔

$$\boldsymbol{a}_j \boldsymbol{b}_k = \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jn}b_{nk} \end{bmatrix}$$

مثال 8.9: صف اور قطار سمتیہ کی صورت میں ضرب ارکان
3×3 قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ اور 3×4 قالب $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ کو ضرب دینے سے درج لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_4 \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_4 \\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_4 \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

□

مثال 8.10: 3×3 قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ اور 3×4 قالب $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ درج ذیل ہیں۔ مساوات 8.12 سے $\boldsymbol{AB}$ حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: یہاں $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ اور $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 0 + 4 = 6$$

اسی طرح بقایا ارکان حاصل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 8 \\ 10 & 11 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

□

قالبی ضرب بذریعہ کمپیوٹر

مساوات 8.12 کو ذرہ مختلف طریقے سے لکھتے ہیں۔ $\boldsymbol{A}$ کو جوں کا توں جبکہ $\boldsymbol{B}$ کو سمتیہ قطار کی صورت میں لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Ab}_1 & \boldsymbol{Ab}_2 & \cdots & \boldsymbol{Ab}_p \end{bmatrix} \tag{8.13}$$

متعدد متوازی جڑے کمپیوٹر کو علیحدہ علیحدہ $\boldsymbol{b}_1$ ، $\boldsymbol{b}_2$ ، $\cdots$، $\boldsymbol{b}_p$ یا انہیں کئی کئی علیحدہ سمتیہ قطار فراہم کیے جاتے ہیں اور ساتھ ہی تمام کو $\boldsymbol{A}$ بھی فراہم کیا جاتا ہے۔ یوں قالبی ضرب کے اجزاء $\boldsymbol{Ab}_1$ ، $\boldsymbol{Ab}_2$ ، $\cdots$، $\boldsymbol{Ab}_p$ بہ یک وقت (نسبتاً بہت کم وقت میں) حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 8.11: درج ذیل کو مساوات 8.13 کی مدد سے حل کریں۔

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: مساوات 8.13 سے قالبی ضرب کے قطار حاصل کرتے ہیں جنہیں ایک ہی قالب میں یکجا کرتے ہوئے درج بالا جواب ملتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

□

خطی تبادل اور قالبی ضرب

دو متغیرات پر مبنی خطی تبادل درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{8.14}$$

جس کو سمتیات کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

اب اگر x_1x_2 نظام ازخود w_1w_2 پر مبنی ہو یعنی

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ x_2 &= b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{aligned} \tag{8.16}$$

یا

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{bmatrix} \tag{8.17}$$

تب y_1y_2 نظام بالواسطہ w_1w_2 پر مبنی ہو گا۔آئیں اس تعلق کو جانیں۔

مساوات 8.14 میں مساوات 8.16 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})w_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})w_2 \\ y_2 &= a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2) \\ &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})w_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})w_2 \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ y_2 &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{aligned} \tag{8.18}$$

ملتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, \quad & c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, \quad & c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{aligned} \tag{8.19}$$

لیا گیا ہے۔اس تعلق کو سمتیات کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{bmatrix} \tag{8.20}$$

آئیں قالبی ضرب $\boldsymbol{AB}$ حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ ہے۔

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C} \tag{8.21}$$

بڑے جسامت کے قالبوں کے لئے بھی $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ بالکل اسی طرح ثابت کیا جاتا ہے۔یوں y ، x اور w متغیرات کی تعداد بالترتیب m ، n اور p کی صورت میں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ قالبوں کی جسامت بالترتیب $m \times n$ ، $n \times p$ اور $m \times p$ ہو گی جہاں $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ ہے۔ قالبی ضرب (مساوات 8.9) کی تعریف مساوات 8.21 کی بدولت ہے۔

8.2.1 تبدیلی محل

قالب کے صفوں کو بطور قطار (یعنی قطاروں کو بطور صف) لکھ کر **تبدیل محل قالب**[23] حاصل ہوتا ہے اور اس عمل کو [24] کہتے ہیں۔سمتیہ کی تبدیلی محل بھی اسی طرح کی جاتی ہے۔اس طرح قالب کا صف، تبدیل محل قالب کا قطار ہو گا اور یونہی قالب کا قطار، تبدیل محل قالب کا صف ہو گا۔ چکور قالب کے ارکان کا مرکزی وتر میں "عکس" لینے سے بھی تبدیل محل قالب حاصل ہو گا۔مرکزی وتر کے دونوں اطراف یکساں مقامات پر ارکان کی آپس میں جگہ تبدیل کرنے سے ان کا "عکس" حاصل ہو گا۔یوں a_{12} اور a_{21} آپس میں جگہ تبدیل کریں گے، a_{13} اور a_{31} آپس میں جگہ تبدیل کریں گے، وغیرہ وغیرہ۔ قالب $\boldsymbol{A}$ سے حاصل تبدیل محل قالب کو $\boldsymbol{A}^T$ سے ظاہر کیا جائے گا۔درج ذیل مثال دیکھیں۔

مثال 8.12: تبدیل محل قالب
قالب $\boldsymbol{A}$ کا تبدیل محل $\boldsymbol{A}^T$ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

---

[23] transpose matrix
[24] transposition

درج بالا کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

چکور قالب اور اس کا تبدیل محل درج ذیل ہیں۔ چکور قالب اور اس کے تبدیل محل قالب میں مرکزی وتر کے ارکان جگہ تبدیل نہیں کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 8 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

سمتیہ صف کا تبدیل محل، سمتیہ قطار ہو گا اور یونہی سمتیہ قطار کا تبدیل محل، سمتیہ صف ہو گا۔

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

تبدیل محل کا تبدیل محل اصل قالب ہو گا۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

□

تعریف: قالب اور سمتیہ کا تبدیل محل
$m \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ کا تبدیل محل $n \times m$ قالب A^T ہے جس کا پہلا صف، A کا پہلا قطار، اس کا دوسرا صف A کا دوسرا قطار، وغیرہ وغیرہ ہوں گے۔ یوں مساوات 8.2 میں دیے گئے A کا تبدیل محل A^T درج ذیل ہو گا۔

$$A^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{8.22}$$

سمتیہ صف کا تبدیل محل سمتیہ قطار ہو گا جبکہ سمتیہ قطار کا تبدیل محل سمتیہ صف ہو گا۔

بعض اوقات قالب اور بعض اوقات تبدیل محل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔تبدیلی محل کے قواعد درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
&(\text{الف}) && \left(\boldsymbol{A}^T\right)^T = \boldsymbol{A} \\
&(\text{ب}) && (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T \\
&(\text{پ}) && (c\boldsymbol{A})^T = c\boldsymbol{A}^T \\
&(\text{ت}) && (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T
\end{aligned} \tag{8.23}$$

دھیان رہے کہ مساوات 8.23-ت میں دائیں ہاتھ قالبوں کی ترتیب بائیں ہاتھ کی ترتیب کے الٹ ہے۔سوال 8.25 میں آپ کو درج بالا تعلقات ثابت کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 8.13: درج ذیل قالب کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.23-ت ثابت کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

حل:پہلے مساوات 8.23-ت کا بایاں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔قالبی ضرب $\boldsymbol{AB}$ لینے کے بعد

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

اس کا تبدیل محل حاصل کرتے ہیں۔

$$(\boldsymbol{AB})^T = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \tag{8.24}$$

آئیں اب مساوات 8.23-ت کا دایاں ہاتھ حاصل کرتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{B}^T$ اور $\boldsymbol{A}^T$ حاصل کرنے کے بعد

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ان کا قالبی ضرب لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11}+b_{21}a_{12} & b_{11}a_{21}+b_{21}a_{22} \\ b_{12}a_{11}+b_{22}a_{12} & b_{12}a_{21}+b_{22}a_{22} \end{bmatrix} \tag{8.25}$$

چونکہ $a_{11}b_{11} = b_{11}a_{11}$ ، $a_{12}b_{21} = b_{21}a_{12}$ ، ... ہیں لہٰذا مساوات 8.24 اور مساوات 8.25 کے دائیں ہاتھ آپس میں برابر ہیں لہٰذا ان کے بائیں ہاتھ بھی آپس میں برابر ہوں گے۔اس طرح مساوات 8.23-ت ثابت ہوا۔
□

مخصوص قالب

چند اقسام کے قالب عملی استعمال کے لحاظ سے زیادہ اہم ہیں۔ان پر غور کرتے ہیں۔

تشاکلی قالب اور منحرف تشاکلی قالب

ایسا چکور قالب جو اپنے تبدیل محل قالب کے برابر $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ ہو تشاکلی[25] قالب کہلاتا ہے۔ایسا قالب جو اپنے تبدیل محل قالب کے نفی کے برابر $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$ ہو منحرف تشاکلی[26] قالب کہلاتا ہے۔

$$\begin{aligned} &\text{تشاکلی} && \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T, \quad (a_{jk} = a_{kj}) \\ &\text{منحرف تشاکلی} && \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T, \quad (a_{jk} = -a_{kj} \text{ اور } a_{jj} = 0) \end{aligned} \tag{8.26}$$

مثال 8.14: تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب

$\boldsymbol{A}$ تشاکلی قالب ہے، $\boldsymbol{B}$ منحرف تشاکلی قالب ہے جبکہ $\boldsymbol{C}$ نہ تشاکلی اور نہ منحرف تشاکلی ہے۔

$$\text{تشاکلی} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 7 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{منحرف تشاکلی} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

---

[25] symmetric
[26] skew-symmetric

□

تکونی قالب

بالائی تکونی قالب[27] اس چکور قالب کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور اس سے بالائی جانب پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر سے نیچے کی طرف تمام ارکان صفر ہوں۔اسی طرح **نچلا تکونی قالب**[28] اس چکور قالب کو کہتے ہیں جس میں غیر صفر مقدار صرف مرکزی وتر اور مرکزی وتر کے نیچے پائے جاتے ہیں جبکہ مرکزی وتر کے بالائی جانب تمام ارکان صفر کے برابر ہوں۔

مثال 8.15: بالائی تکونی اور نچلا تکونی قالب

$$\text{بالائی تکونی قالب}\quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{نچلا تکونی قالب}\quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

وتری قالب

ایسا چکور قالب جس میں غیر صفر ارکان صرف مرکزی وتر پر پائے جاتے ہوں **وتری قالب**[29] کہلاتا ہے۔مرکزی وتر سے ہٹ کر تمام ارکان صفر ہوں گے۔

اگر وتری قالب $\boldsymbol{S}$ کے تمام ارکان یکساں، مثلاً c کے برابر ہوں، تب $\boldsymbol{S}$ **غیر سمتی قالب**[30] کہلائے گا۔کسی بھی چکور قالب $\boldsymbol{A}$ جس کی جسامت $\boldsymbol{S}$ کی جسامت کے برابر ہو، کا $\boldsymbol{S}$ کے ساتھ قالبی ضرب کا حاصل، غیر سمتی مقدار c اور $\boldsymbol{A}$ کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔

$$\boldsymbol{AS} = \boldsymbol{SA} = c\boldsymbol{A} \tag{8.27}$$

---

[27] upper triangular matrix
[28] lower triangular matrix
[29] diagonal matrix
[30] scalar matrix

ایسا غیر سمتی قالب جس کے ارکان اکائی (1) کے برابر ہوں اکائی قالب[31] کہلاتا ہے جسے I_n یا I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اکائی قالب کی صورت میں درج بالا مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A} \tag{8.28}$$

مثال 8.16: وتری قالب $\boldsymbol{D}$، غیر سمتی قالب $\boldsymbol{S}$ اور اکائی قالب $\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

مثال 8.17: کارخانے کے اخراجات

ایک کارخانے میں تین اقسام کے کھلونے (الف، ب اور پ) تیار ہوتے ہیں۔ایک کھلونا تیار کرنے کے اخراجات قالب $\boldsymbol{A}$ میں دیے گئے ہیں۔ قالب $\boldsymbol{B}$ ایک ہفتے کی پیداوار دیتا ہے۔ جمع اور جمع رات کے دن تعطیل ہوتی ہے۔ایسا قالب $\boldsymbol{C}$ حاصل کریں جو اس ایک ہفتے میں پیدا کیے گئے کھلونوں پر خرچ اخراجات پیش کرے۔

$$\boldsymbol{A} = \overset{\text{الف} \quad \text{ب} \quad \text{پ}}{\begin{bmatrix} 200 & 100 & 50 \\ 15 & 12 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}} \begin{matrix} \text{خام مال} \\ \text{مزدوری} \\ \text{اضافی اخراجات} \end{matrix}, \quad \boldsymbol{B} = \overset{\text{بدھ} \quad \text{منگل} \quad \text{پیر} \quad \text{اتوار} \quad \text{ہفتہ}}{\begin{bmatrix} 13 & 18 & 11 & 19 & 20 \\ 2.0 & 2.2 & 2.3 & 2.1 & 2.2 \\ 0.8 & 0.9 & 1.0 & 1.1 & 0.9 \end{bmatrix}} \begin{matrix} \text{الف} \\ \text{ب} \\ \text{پ} \end{matrix}$$

حل:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \overset{\text{بدھ} \quad \text{منگل} \quad \text{پیر} \quad \text{اتوار} \quad \text{ہفتہ}}{\begin{bmatrix} 2840.0 & 3865.0 & 2480.0 & 4065.0 & 4265.0 \\ 227.0 & 305.4 & 202.6 & 321.2 & 335.4 \\ 74.6 & 100.6 & 66.2 & 105.6 & 110.6 \end{bmatrix}} \begin{matrix} \text{خام مال} \\ \text{مزدوری} \\ \text{اضافی اخراجات} \end{matrix}$$

□

مثال 8.18: امکانی شماریاتی قالب۔طاقت قالب

ایک شہر کے رقبے کا استعمال 2018 میں درج ذیل ہے۔

$$\text{رہائشی } R = 60\,\%, \quad \text{تجارتی } T = 25\,\%, \quad \text{صنعتی } S = 15\,\%$$

---

[31] unit matrix

پانچ سالوں میں رقبے کا استعمال تبدیل ہو گا۔اس تبدیلی کو درج ذیل **امکانی شماریاتی قالب**[32] $\boldsymbol{A}$ دیتا ہے جو سالہا سال اس شہر کے لئے قابل استعمال ہے۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{رہائشی کو منتقل} \\ \text{تجارتی کو منتقل} \\ \text{صنعتی کو منتقل} \end{matrix}$$

(کالم: رہائشی سے، تجارتی سے، صنعتی سے)

درج بالا امکانی شماریاتی قالب $\boldsymbol{A}$ کے تمام ارکان مثبت ہیں جبکہ ہر قطار کے ارکان کا مجموعہ اکائی کے برابر ہے (چونکہ تمام ممکنہ امکانات کا مجموعہ اکائی کے برابر ہوتا ہے)۔پانچ سال بعد 2023 میں رقبے کی تقسیم درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8\cdot 60 + 0.1\cdot 25 + 0\cdot 15 \\ 0.2\cdot 60 + 0.7\cdot 25 + 0.1\cdot 15 \\ 0.6\cdot 60 + 0.2\cdot 25 + 0.9\cdot 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.5 \\ 31.0 \\ 18.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{رہائشی} \\ \text{تجارتی} \\ \text{صنعتی} \end{matrix}$$

اس عمل کو $\boldsymbol{A}$ کی مدد سے سمجھتے ہیں۔ پانچ سالوں میں 0.8 امکان ہے کہ رہائشی رقبہ، رہائشی ہی رہے گا جبکہ 0.1 امکان ہے کہ تجارتی رقبے پر رہائش ہو گی اور 0 امکان ہے کہ صنعتی رقبے پر رہائش ہو گی۔یوں 2023 میں رہائشی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$0.8\cdot 60 + 0.1\cdot 25 + 0\cdot 15 = 50.5\,\%$$

اس پورے عمل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 60 & 25 & 15 \end{bmatrix}^T$$

جہاں $\boldsymbol{x}$ **سمتیہ حال**[33] ہے جو 2018 میں رقبے کی تقسیم بیان کرتا ہے۔اسی طرح 2028 اور 2033 میں صورت

[32] stochastic matrix
[33] state vector

حال بالترتیب درج ذیل ہو گی۔

$$z = Ay = A(Ax) = A^2x = \begin{bmatrix}43.50\\33.65\\22.85\end{bmatrix}$$

$$u = Az = A(A^2x) = A^3x = \begin{bmatrix}38.165\\34.540\\27.295\end{bmatrix}$$

یوں 2033 میں 38.165 % علاقہ رہائشی، 34.54 % تجارتی اور 27.295 % صنعتی ہو گا۔ یاد رہے کہ رقبہ مستقل قیمت ہے۔ $\square$

سوالات

سوال 8.12: چکور قالب
ایسا چکور قالب جو تشاکلی اور منحرف تشاکلی ہو، کی صورت کیا ہو گی۔

حل: صفر قالب

سوال 8.13 تا سوال 8.25 میں درج ذیل قالب استعمال کریں۔

$$A = \begin{bmatrix}-3 & 2 & 4\\0 & 1 & 2\\2 & 3 & 5\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}3 & 4 & 0\\-4 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}$$

سوال 8.13: A^T, B^T, a^T, b^T

جوابات: $A^T = \begin{bmatrix}-3 & 0 & 2\\2 & 1 & 3\\4 & 2 & 5\end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix}3 & -4 & 0\\4 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}, a^T = \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}, b^T = \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\end{bmatrix}$

سوال 8.14: $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BA}$

جوابات:
$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} -17 & -14 & 8 \\ -4 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 20 \\ 12 & -9 & -18 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

سوال 8.15: $(\boldsymbol{AB})^T, \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$

جوابات:
$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} -17 & -4 & -6 \\ -14 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 10 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} -9 & 12 & 4 \\ 10 & -9 & 6 \\ 20 & -18 & 10 \end{bmatrix}$$

سوال 8.16: $\boldsymbol{AA}^T, \boldsymbol{A}^2$

جوابات:
$$\boldsymbol{AA}^T = \begin{bmatrix} 29 & 10 & 20 \\ 10 & 5 & 13 \\ 20 & 13 & 38 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 17 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 12 \\ 4 & 22 & 39 \end{bmatrix}$$

سوال 8.17: $\boldsymbol{BB}^T, \boldsymbol{B}^2$

جوابات:
$$\boldsymbol{BB}^T = \begin{bmatrix} 25 & -16 & 0 \\ -16 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}^2 = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 0 \\ -8 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

سوال 8.18: $\boldsymbol{CC}^T, \boldsymbol{BC}$

جوابات:
$$\boldsymbol{CC}^T = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{BC} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ -13 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

سوال 8.19: $2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B}, (2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B})^T, 2\boldsymbol{A}^T - 3\boldsymbol{B}^T$

جوابات:
$$2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -15 & -8 & 8 \\ 12 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}, (2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B})^T = 2\boldsymbol{A}^T - 3\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} -15 & 12 & 4 \\ -8 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

سوال 8.20: $\boldsymbol{Ba}, \boldsymbol{Ba}^T, \boldsymbol{Bb}, \boldsymbol{Bb}^T$

جوابات:
$$\boldsymbol{Ba} = \boldsymbol{Ba}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Bb}^T = \boldsymbol{Bb} = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

سوال 8.21: $\boldsymbol{Aa}, \boldsymbol{Aa}^T, \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{Ab}^T$

جوابات: $\boldsymbol{Aa} = \boldsymbol{Aa}^T = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Ab} = \boldsymbol{Ab}^T = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

سوال 8.22: $(\boldsymbol{Ab})^T, \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^T$

جوابات: $(\boldsymbol{Ab})^T = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

سوال 8.23: $\boldsymbol{ABC}, \boldsymbol{ABa}, \boldsymbol{ABb}$

جوابات: $\begin{bmatrix} -49 & -36 \\ -5 & -6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -20 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -75 \\ -15 \\ -11 \end{bmatrix}$

سوال 8.24: $\boldsymbol{ab}, \boldsymbol{ba}, \boldsymbol{aB}, \boldsymbol{Bb}$

جوابات: $\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$

سوال 8.25: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}^T+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^T$

جوابات: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ممکن نہیں ہے اور $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^T, \boldsymbol{a}^T+\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

سوال 8.26: $\boldsymbol{AB}$ کو سوال 8.13 میں حاصل کیا گیا ہے۔اسی کو دوبارہ $\boldsymbol{A}$ کے قطار اور $\boldsymbol{B}$ کے صف استعمال کرتے ہوئے دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 8.27: مساوات 8.23 کو عمومی 2×2 قالب کے لئے ثابت کریں۔

سوال 8.28: قانون تبادل

ایسا 2×2 قالب $\boldsymbol{B}$ دریافت کریں کہ $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ ہو جہاں $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہے۔

جواب: $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$

سوال 8.29: ثابت کریں کہ کسی بھی چکور قالب C کے لئے $\frac{1}{2}(C+C^T)$ تشاکلی ہے جبکہ $\frac{1}{2}(C-C^T)$ منحرف تشاکلی ہیں۔

سوال 8.30: درج بالا سوال کے تحت $T=\frac{1}{2}(C+C^T)$ اور $M=\frac{1}{2}(C-C^T)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں T تشاکلی اور M منحرف تشاکلی قالب ہیں۔کسی بھی قالب کو تشاکل قالب اور منحرف تشاکلی قالب کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔یوں سوال 8.13 تا سوال 8.25 میں استعمال کیے گئے A کو تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ان قالبوں کو دریافت کریں۔

جوابات: $M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -0.5 \\ -1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, T=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2.5 \\ 3 & 2.5 & 5 \end{bmatrix}$

سوال 8.31: قابل تبادل

ثابت کریں کہ تشاکلی A اور تشاکلی B کا قالبی ضرب AB اس صورت تشاکلی ہو گا جب A اور B آپس میں (ضرب میں) قابل تبادل[34] ہوں یعنی جب $AB=BA$ ہو۔

جواب: $AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$

سوال 8.32: کن صورتوں میں منحرف تشاکلی قالبوں کا قالبی ضرب منحرف تشاکلی قالب دے گا؟

جواب: $AB=-BA$

سوال 8.33: امکانی شماریاتی عمل

ایک مشین اگر آج ٹھیک ہو تب 0.9 امکان ہے کہ وہ ایک دن بعد (کل) بھی ٹھیک ہو گا۔یوں 0.1 امکان ہے کہ وہ کل خراب ہو گا۔اسی طرح اگر مشین آج خراب ہو تب 0.4 امکان ہے کہ وہ کل بھی خراب ہو گا۔یوں 0.6 امکان ہے کہ وہ کل ٹھیک ہو گا۔آج ٹھیک اور خراب کو بالترتیب t اور k سے ظاہر کریں جبکہ ایک دن بعد انہیں T اور K سے ظاہر کریں۔اس پیش گوئی سے امکانی شماریاتی قالب A لکھیں۔اگر آج مشین ٹھیک ہو تب دو دن بعد (پرسوں) مشین ٹھیک ہونے کا کتنا فی صد امکان ہے۔

جوابات: دو دن بعد $87\,\%$ امکان ہے کہ مشین ٹھیک ہو گی۔

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{t} & \text{k} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{T} \\ \text{K} \end{array}$$

---

[34] commutative

سوال 8.34: امکانی شماریاتی عمل
ایک شہر کی آبادی 20 000 ہے۔ایک بینک میں آج کھاتے دار کا % 90 امکان ہے کہ وہ اگلے سال بھی اسی بینک کا کھاتے دار ہو گا جبکہ یہاں کھاتا نہ رکھنے والے کا % 1 امکان ہے کہ وہ اگلے سال یہاں کا کھاتا دار ہو گا۔اگر آج 1000 افراد اس بینک کے کھاتے دار ہوں تب ایک سال، دو سال اور تین سال بعد کتنے افراد یہاں کے کھاتے دار ہوں گے؟

جوابات: 1090 ، 1170 ، 1241

سوال 8.35: ایک کارخانہ لاہور، پشاور اور کراچی میں تین اشیاء الف، ب اور پ فروخت کرتا ہے۔فی کلو گرام منافع بالترتیب 8 ، 10 اور 6 روپیہ ہے۔ایک دن کی فروخت درج ذیل ہے۔

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{الف} & \text{ب} & \text{پ} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2000 & 3000 & 1800 \\ 2200 & 2800 & 1500 \\ 3200 & 4200 & 2700 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{لاہور} \\ \text{پشاور} \\ \text{کراچی} \end{matrix} \end{array}$$

ایسا "سمتیہ منافع" $\boldsymbol{m}$ دریافت کریں کہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{m}$ ہر شہر میں روزانہ کمائی دے۔

جواب: $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}^T$

سوال 8.36: خطی تبادلہ۔ گھومنا
کارتیسی محدد کی xy سطح پر گھڑی کے سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ گھومنے کو $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ظاہر کرتی ہے جہاں $\boldsymbol{y}$ ، $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{x}$ درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ثابت کریں کہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کسی بھی سطح پر x_1x_2 کارتیسی محدد کے نظام کو، مبدا کے گرد، گھڑی کی سوئیوں کی گھومنے کی الٹ رخ، θ زاویہ گھما کر نیا کارتیسی محدد y_1y_2 دیتا ہے۔

سوال 8.37: خطی تبادلہ۔ گھومنا
درج بالا سوال میں θ زاویہ گھومنا دیکھا گیا۔ثابت کریں کہ درج ذیل قالب، مبدا کے گرد، گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ، $n\theta$ زاویہ گھومنے کو ظاہر کرتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

سوال 8.38: خطی تبادلہ۔ گھومنا

درج بالا دو سوالات کو دیکھیں۔درج ذیل قالب، مبدا کے گرد، گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ، α اور β زاویہ گھومنے کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

یوں باری باری α اور β گھومنے کو $\boldsymbol{AB}$ ظاہر کرے گا۔یوں درج ذیل ثابت کریں۔

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

سوال 8.39: خطی تبادلہ۔ گھومنا

خلا میں گھومنا $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ دیتا ہے جہاں $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ ، $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$ ہیں جبکہ $\boldsymbol{A}$ درج ذیل ہو سکتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

کیا آپ ذہن میں اس عمل کو دیکھ پاتے ہیں؟

8.3 خطی مساوات کے نظام۔گاوسی اسقاط

قالب کا ایک اہم استعمال، خطی تفرقی مساوات کے نظام کا حل ہے۔ ہم یہاں **گاوسی اسقاط**[35] کی ترکیب سیکھتے ہیں جو خطی الجبرا میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ اس ترکیب کو اچھی طرح سمجھیں۔

خطی تفرقی مساوات کے نظام کا نام چھوٹا کرتے ہوئے اس کو **خطی نظام**[36] بھی کہتے ہیں۔انجینئری، معاشیات، شماریات، اور دیگر شعبوں کے کئی مسائل کی نمونہ کشی خطی نظام کی مدد سے کی جاتی ہے مثلاً برقی ادوار اور گاڑیوں کی آمد و رفت کا نظام۔

[35] Gauss elimination
[36] linear system

خطی نظام، عددی سر قالب اور افزودہ قالب

n متغیرات پر مبنی n مساوات کا نظام درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{mn}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\tag{8.29}
$$

چونکہ اس نظام میں تمام متغیرات کی طاقت اکائی (1) ہے لہٰذا یہ نظام خطی کہلاتا ہے (سیدھے خط کی طرح جس کی مساوات $y = mx + c$ میں x اور y کی طاقت 1 ہے)۔ان مساوات میں a_{11} تا a_{mn} مستقل قیمتیں ہیں جنہیں نظام کے **عددی سر**[37] کہتے ہیں۔ b_1 تا b_m بھی مستقل قیمتیں ہیں۔ تمام b_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں 8.29 کا نظام **ہم جنسی**[38] نظام کہلاتا ہے جبکہ ایسا نہ ہونے کی صورت میں یہ **غیر ہم جنسی**[39] نظام کہلاتا ہے۔

نظام 8.29 کے حل سے مراد x_1 تا x_n کی وہ قیمتیں ہیں جو اس نظام کے تمام مساواتوں پر پورا اترتے ہوں۔ نظام کے **حل سمتیہ**[40] کے ارکان نظام 8.29 کے حل x_1 تا x_m ہیں۔ ہم جنسی نظام کا ہر صورت میں ایک حل $x_1 = 0$ ، $\cdots$ ، $x_n = 0$ ہو گا جو **غیر اہم صفر حل**[41] کہلاتا ہے۔

نظام 8.29 کی قالبی صورت

قالبی ضرب کے استعمال سے نظام 8.29 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{8.30}
$$

---

[37] coefficients
[38] homogeneous
[39] nonhomogeneous
[40] solution vector
[41] trivial solution

جہاں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{x}$ اور $\boldsymbol{b}$ درج ذیل ہیں۔ $\boldsymbol{A}$ **عددی سر قالب**[42] کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix} \tag{8.31}$$

$\boldsymbol{x}$ اور $\boldsymbol{b}$ سمتیہ قطار ہیں۔ہم فرض کرتے ہیں کہ a_{jk} تمام صفر نہیں ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A}$ صفر قالب نہیں ہو گا۔ دھیان رہے کہ $\boldsymbol{x}$ کے n ارکان جبکہ $\boldsymbol{b}$ کے m ارکان ہیں۔ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{b}$ کو ایک ہی قالب میں لکھ کر **افزودہ قالب**[43] $\tilde{\boldsymbol{A}}$ ملتا ہے۔

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & & & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{array}\right] \tag{8.32}$$

افزودہ قالب میں عمودی لکیر کو ہٹایا جا سکتا ہے۔ہم بھی ایسا ہی کریں گے، بس یاد رہے کہ $\boldsymbol{A}$ کے ساتھ آخری قطار $\boldsymbol{b}$ کا اضافہ کرنے سے افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ افزودہ قالب میں نظام 8.29 کے تمام معلومات شامل ہیں لہٰذا افزودہ قالب اس نظام کو مکمل طور پر ظاہر کرتا ہے۔

مثال 8.19: حل کی وجودیت اور یکتائی۔ جیومیٹریائی نقطہ نظر
$m=n=2$ کی صورت میں نظام دو عدد متغیرات x_1 ، x_2 اور دو عدد مساوات پر مبنی ہو گا۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2\end{aligned}$$

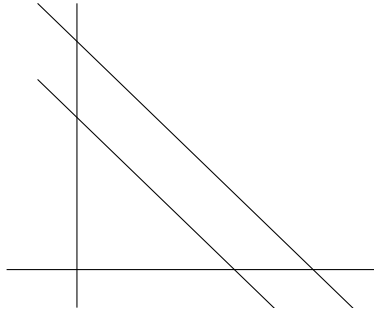
اگر ہم x_1 اور x_2 کو سطح x_1x_2 پر محور فرض کریں تب درج بالا مساوات اس سطح پر سیدھے خطوط کے مساوات ہوں گے۔ان مساوات کا صرف اس صورت حل (x_1,x_2) ہو گا جب نقطہ P جس کے محور x_1 اور x_2 ہوں، ان دونوں خطوط پر پایا جاتا ہو۔ یوں تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 8.1 دیکھیں۔

- اگر خطوط ایک دونوں کو قطع کرتے ہوں تب یکتا حل پایا جائے گا۔

---

[42] coefficient matrix
[43] augmented matrix

(الف) نقطہ P جہاں دونوں خط ملتے ہیں، ان مساوات کا حل ہے۔

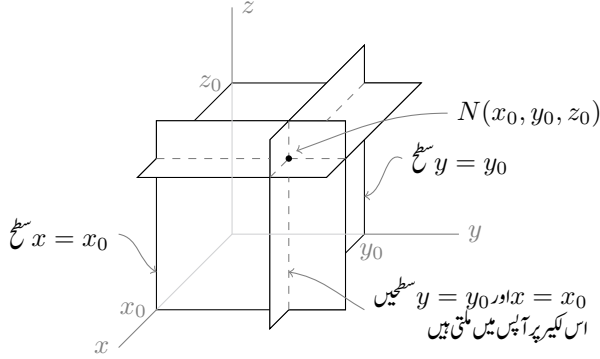
(ب) دونوں خطوط (جنہیں ایک دونوں سے ذرہ ہٹ کر دکھایا گیا ہے در حقیقت) ہم مکانی ہیں لہٰذا ان کے لا متناہی تعداد کے حل ممکن ہیں۔

(پ) متوازی خطوط ایک دونوں کو کہیں نہیں چھوتے ہیں لہٰذا ان کا کوئی حل نہیں پایا جاتا ہے۔

شکل 8.1: حل کی وجودیت اور یکتائی۔ مثال 8.19 کے اشکال۔

- ہم مکان خطوط کی صورت میں لا متناہی تعداد کے حل ہوں گے۔
- متوازی اور ایک دونوں سے ہٹ کر خطوط کی صورت میں کوئی حل ممکن نہیں ہو گا۔

دو متغیرات اور دو مساوات کے نظام کو ہم نے دیکھا۔ تین متغیرات اور تین مساوات کے نظام کو بھی جیومیٹریائی نقطہ نظر سے دیکھا جا سکتا ہے۔ اب خطوط کی بجائے نظام کے تین مساوات تین سطحوں کو ظاہر کریں گی۔ شکل 8.2 میں اس نظام کے حل دکھائے گئے ہیں۔ □

مثال 8.19 میں ہم نے دیکھا کہ عین ممکن ہے کہ نظام کا کوئی حل ممکن نہ ہو۔ یوں کسی بھی نظام کے بارے میں

z
z_0
$N(x_0, y_0, z_0)$
سطح $y = y_0$
y
سطح $x = x_0$
y_0
سطحیں $x = x_0$ اور $y = y_0$
اس لکیر پر آپس میں ملتی ہیں
x_0
x

شکل 8.2: آپس میں غیر متوازی سطحیں ایک نقطے پر ملتی ہیں

ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا اس کا حل موجود ہے اور آیا ایسا حل یکتا ہے۔آئیں اب خطی نظام کو حل کرنے کا منظم طریقہ سیکھیں۔

گاوسی اسقاط

ہم درج ذیل خطی نظام پر غور کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ 4x_2 &= 12 \end{aligned}$$

اس نظام کے عددی سر قالب میں غیر صفر قیمتیں، مرکزی وتر اور اس سے اوپر ہیں لہٰذا یہ **بالائی تکونی نظام** ہے۔اس نظام کی نچلی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = \frac{12}{4} = 3$ ملتا ہے جس کو پہلی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے $x_1 = \frac{7-x_2}{2} = \frac{7-3}{2} = 2$ حاصل ہوتا ہے۔اس عمل سے ہم دیکھتے ہیں کہ تکونی نظام کو با آسانی حل کیا جا سکتا ہے۔یوں ہم کسی بھی نظام کو تکونی صورت میں لکھنا چاہیں گے۔

کسی بھی نظام کو تکونی صورت میں لانے کے عمل کو درج ذیل نظام کی مدد سے سیکھتے ہیں جس کا افزودہ قالب بھی دیا گیا ہے۔افزودہ قالب کی پہلی صف کو S_1 اور دوسری صف کو S_2 کہا گیا ہے۔

$$\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

اس کو تکونی صورت میں لکھنے کی خاطر نچلی مساوات سے x_1 حذف کرنا ہو گا۔ایسا کرنے کے لئے بالائی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر $4x_1 + 6x_2 = 24$ حاصل کرتے ہوئے اس کو نچلی مساوات سے منفی کرتے ہیں جس سے $-8x_2 = -16$ ملتا ہے۔یوں درج بالا نظام درج ذیل لکھا جائے گا جو بالائی تکونی صورت ہے۔افزودہ قالب پر بھی یہی عمل کیا گیا ہے جہاں نچلی صف کے ساتھ الجبرائی عمل $(S_2 - 2S_1)$ لکھا گیا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 0 & -8 & -16 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 2S_1 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ -8x_2 &= -16 \end{aligned}$$

تکونی صورت حاصل کرنے کی اس عمل کو گاوسی اسقاط[44] کہتے ہیں۔گاوسی اسقاط کی ترکیب وسیع تر نظام پر قابل استعمال ہے۔یوں نچلی مساوات سے $x_2 = 2$ حاصل کرتے ہوئے پہلی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے $x_1 = 3$ ملتا ہے۔

مثال 8.20: گاوسی اسقاط

درج ذیل نظام کو گاوسی اسقاط سے بالائی تکونی صورت میں لائیں۔نظام کا افزودہ قالب بھی دیا گیا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

حل: بالائی تکونی صورت کے لئے درمیانی مساوات سے x_1 حذف کرنا ہو گا جبکہ نچلی مساوات سے x_1 اور x_2 حذف کرنے ہوں گے۔

پہلی قدم میں ہم بالائی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے نچلی دونوں مساواتوں سے x_1 حذف کرتے ہیں۔پہلی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر دوسری مساوات سے منفی کرنے سے دوسری مساوات سے x_1 حذف ہو گا۔اسی طرح پہلی مساوات کو تیسری مساوات کے ساتھ جمع کرتے ہوئے تیسری مساوات سے x_1 حذف ہوتا ہے۔اس عمل کو افزودہ قالب کے لئے بیان کرتے ہیں۔ہم ہر قدم پر گزشتہ قالب کی پہلی صف کو S_1، دوسری کو S_2 اور تیسری کو S_3 کہیں گے۔یوں درج ذیل میں S_1 سے مراد درج بالا قالب کی پہلی صف $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ہے۔

پہلی صف کو 2 سے ضرب دیتے ہوئے دوسری صف سے منفی کریں یعنی $S_2 - 2S_1$

پہلی صف کو تیسری صف کے ساتھ جمع کریں یعنی $S_3 + S_1$

---

[44] Gaussian elimination

ان عمل صف (یعنی $S_2 - 2S_1$ اور $S_3 + S_1$) کو درج ذیل قالب کے دائیں جانب مطابقتی صف کے سامنے لکھا گیا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 + S_1 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ -7x_2 + 3x_3 &= -10 \\ 4x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

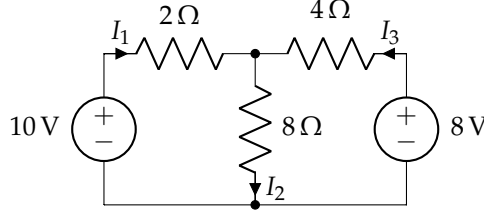
صف پر عمل کو الجبرائی صورت میں قالب کے دائیں جانب لکھا گیا ہے جہاں S_1 ، S_2 ، . . . گزشتہ قالب کے صف ہیں۔درج بالا تبدیل شدہ افزودہ قالب ہے۔

دوسری قدم میں (درج بالا حاصل کردہ کی) نچلی مساوات سے x_2 حذف کرتے ہیں۔

تبدیل شدہ افزودہ قالب کی دوسری صف کو $\frac{4}{7}$ سے ضرب دیتے ہوئے اسی قالب کی تیسری صف کے ساتھ جمع $(S_3 + \frac{4}{7}S_2)$ کریں۔یہاں S_2 اور S_3 سے مراد درج بالا قالب کی دوسری اور تیسری صف ہے۔یوں S_2 سے مراد $\begin{bmatrix} 0 & -7 & 3 & -10 \end{bmatrix}$ ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & -\frac{26}{7} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 + \frac{4}{7}S_2 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ -7x_2 + 3x_3 &= -10 \\ \frac{26}{7}x_3 &= -\frac{26}{7} \end{aligned} \tag{8.33}$$

تکونی قالب کے حصول کے بعد حل حاصل کرتے ہیں۔نظام 8.33 کی نچلی مساوات سے $x_3 = -1$ ملتا ہے جس کو نظام 8.33 کی درمیانی مساوات میں واپس پر کرتے ہوئے $x_2 = 1$ ملتا ہے۔ان دونوں جوابات کو پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 2$ ملتا ہے۔

اگر دوسری قدم پر آپ پہلی مساوات کو 2 سے ضرب دے کر تیسری مساوات سے منفی کریں تو حاصل مساوات میں x_1 دوبارہ حاضر ہو جائے گا جو پہلی قدم کی محنت کو ضائع کر دے گا۔ہم ایسا نہیں چاہتے ہیں۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی جسامت کی نظام کو حل کرتے ہوئے پہلی قدم پر، نظام کی پہلی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساوات سے x_1 حذف کیا جاتا ہے۔دوسری قدم پر، پہلی قدم کی حاصل نظام کی دوسری مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساواتوں سے x_2 حذف کیا جاتا ہے۔اسی طرح تیسری قدم پر، تیسری مساوات کو استعمال کرتے ہوئے، اس سے نیچے تمام مساواتوں سے x_3 حذف کیا جائے گا۔یہی سلسلہ آخر تک دہرایا جائے گا۔

شکل 8.3: برقی دور۔ مثال 8.21

اس نظام کو افزودہ قالب استعمال کرتے ہوئے حل کیا جا سکتا تھا۔ بار بار مکمل مساوات لکھنے کی کوئی ضرورت نہیں تھی۔ ہم عموماً ایسا ہی کرتے ہوئے، نظام کو افزودہ قالب کی صورت میں لکھ کر، اس کی تکونی صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کریں گے۔ □

مثال 8.21: برقی دور کو شکل 8.3 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو حل کریں۔ حل: کرخوف قانون دباو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}2I_1+8I_3&=10\\4I_3+8I_2&=8\end{aligned}$$

جبکہ کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$I_1+I_3=I_2$$

ان تینوں مساوات کو ترتیب دیتے ہوئے ایک ساتھ لکھتے ہیں۔ ساتھ ہی بائیں جانب اس نظام کا افزودہ قالب بھی لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix}2&0&8&10\\0&8&4&8\\1&-1&1&0\end{bmatrix}\qquad\begin{aligned}2I_1+8I_3&=10\\8I_2+4I_3&=8\\I_1-I_2+I_3&=0\end{aligned}$$

پہلا قدم: چونکہ دوسری صف کا پہلا رکن صفر ہے لہٰذا اس کو کچھ کرنے کی ضرورت نہیں ہے البتہ تیسرے صف کے پہلے رکن I_1 کو حذف کرنا ہو گا۔

پہلی صف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر تیسری صف سے منفی کرتے ہیں۔ درج ذیل میں S_3 سے مراد درج بالا

قالب کی تیسری صف $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ہے۔

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 8 & 10\\0 & 8 & 4 & 8\\0 & -1 & -3 & -5\end{bmatrix} S_3-\tfrac{1}{2}S_1 \qquad \begin{aligned}2I_1+8I_3&=10\\8I_2+4I_3&=8\\-I_2-3I_3&=-5\end{aligned}$$

دوسرا قدم: درج بالا کے تیسرے صف سے I_2 حذف کرتے ہیں۔

دوسرے صف کو $\frac{1}{8}$ سے ضرب دے کر تیسرے صف کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

درج ذیل لکھتے ہوئے S_3 سے مراد گزشتہ (درج بالا) قالب کی تیسری صف $\begin{bmatrix}0 & -1 & -3 & -5\end{bmatrix}$ ہے۔

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 8 & 10\\0 & 8 & 4 & 8\\0 & 0 & -\frac{5}{2} & -4\end{bmatrix} S_3+\tfrac{1}{8}S_2 \qquad \begin{aligned}2I_1+8I_3&=10\\8I_2+4I_3&=8\\-\frac{5}{2}I_3&=-4\end{aligned}$$

تیسرا قدم: آخری صف یا آخری مساوات سے $I_3=\frac{8}{5}$ ملتا ہے۔اس قیمت کو درج بالا پہلی اور اور درمیانی مساوات میں پر کرتے ہوئے بقایا برقی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}2I_1+8\left(\frac{8}{5}\right)&=10 \quad\implies\quad I_1=-\frac{7}{5}\\8I_2+4\left(\frac{8}{5}\right)&=8 \quad\implies\quad I_2=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

□

مثال 8.22: درج ذیل نظام کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 5\\1 & 1 & 1 & 2\\1 & 2 & -1 & -3\\1 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}2x_1-x_2+x_3&=5\\x_1+x_2+x_3&=2\\x_1+2x_2-x_3&=-3\\x_1-x_2-x_3&=0\end{aligned}$$

حل: پہلی قدم میں دوسری، تیسری اور چوتھی صف سے x_1 حذف کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - \frac{1}{2}S_1 \\ S_3 - \frac{1}{2}S_1 \\ S_4 - \frac{1}{2}S_1 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 &= -\frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

دوسری قدم میں تیسری اور چوتھی مساوات سے x_2 حذف کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 - \frac{5}{3}S_2 \\ S_4 + \frac{1}{3}S_2 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{3}x_3 &= -\frac{14}{3} \\ -\frac{4}{3}x_3 &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

ہم تیسرے قدم پر تیسری یا چوتھی مساوات سے $x_3 = 2$ حاصل کرتے ہیں جس کو دوسری مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_2 = -1$ ملتا ہے۔انہیں پہلی مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 1$ ملتا ہے۔ □

بنیادی اعمال صف

قالب کی صفوں پر درج ذیل تین عمل سے نظام تبدیل نہیں ہوتا ہے۔گاوسی اسقاط پہلی دو اعمال سے حاصل ہوتا ہے۔

- دو صفوں کا آپس میں تبادلہ
- صف کو کسی مستقل قیمت سے ضرب دے کر کسی دوسرے (یا اسی) صف کے ساتھ جمع کرنا
- کسی صف کو غیر صفر مستقل قیمت c کے ساتھ ضرب دینا

دھیان رہے کہ یہ اعمال افزودہ قالب کے صفوں پر قابل اطلاق ہیں نہ کہ قطاروں پر۔یہ اعمال، نظام کی مساوات پر درج ذیل کے مترادف ہیں۔

- دو مساواتوں کی جگہ آپس میں تبدیل کرنا۔
- ایک مساوات کو کسی مستقل سے ضرب دے کر دوسری (یا اسی) مساوات کے ساتھ جمع کرنا۔
- نظام کی مساوات کو غیر صفر مستقل c سے ضرب دینا۔

اب ظاہر ہے کہ ہمزاد مساواتوں کو آگے پیچھے لکھنے سے ان کا حاصل حل تبدیل نہیں ہوتا۔اسی طرح کسی مساوات کو مستقل قیمت سے ضرب دے کر دوسری مساوات کے ساتھ جمع کرنے سے بھی حل تبدیل نہیں ہوتا اور نہ ہی کسی مساوات کو غیر صفر مستقل سے ضرب دینے سے حل تبدیل ہوتا ہے۔(کسی مساوات کو صفر سے ضرب دینے سے مساواتوں کی تعداد کم ہو گی جس سے عین ممکن ہے کہ ان کا حل ممکن نہ رہے۔)

دو عدد خطی نظام N_1 اور N_2 اس صورت **صف برابر**[45] کہلاتے ہیں جب N_1 پر محدود عمل صف کے ذریعہ N_2 حاصل کرنا ممکن ہو۔ یہ حقیقت جسے درج ذیل طور پر بیان کیا جا سکتا ہے، گاوسی اسقاط کی جواز ہے۔

مسئلہ 8.1: صف برابر نظام

صف برابر خطی نظام کے **سلسلہ حل**[46] یکساں ہوں گے۔

اس مسئلے کی بنا اگر ایک نظام کا سلسلہ حل دوسرے نظام کے سلسلہ حل کے عین مطابق ہو، تب انہیں **صف برابر نظام** کہتے ہیں۔یاد رہے کہ یہاں **عمل صف** کی بات کی جا رہی ہے۔افزودہ قالب کے قطار تبدیل کرنے سے نظام تبدیل ہو گا اور اس کا حل بھی تبدیل ہو گا لہٰذا افزودہ قالب پر کسی بھی عمل قطار کی اجازت نہیں ہے۔

ایسا نظام جس کی نا معلوم متغیرات سے مساواتوں کی تعداد زیادہ ہو **زائد معلوم**[47] کہلاتا ہے۔ نظام کی نا معلوم متغیرات اور مساواتوں کی تعداد برابر ہونے کی صورت میں اس کو **معلوم**[48] کہتے ہیں جبکہ نظام کی نا معلوم متغیرات سے مساواتوں کی تعداد کم ہونے کی صورت میں اس کو **کم معلوم**[49] کہتے ہیں۔

ایسا نظام جس کا کوئی حل نہ ہو **متضاد**[50] نظام کہلاتا ہے جبکہ ایسا نظام جس کا ایک یا ایک سے زیادہ حل ممکن ہوں **بلا تضاد**[51] نظام کہلاتا ہے۔

---

[45] row equivalent
[46] solution set
[47] overdetermined
[48] determined
[49] underdetermined
[50] inconsistent
[51] consistent

گاوسی اسقاط۔ نظام کی تین ممکنہ صورتیں

یکتا حل کا نظام مثال 8.20 میں دیکھا گیا۔آئیں اب لا متناہی تعداد کے حل والے نظام (مثال 8.23) کو اور بغیر کسی حل والے نظام (مثال 8.24) کو گاوسی اسقاط سے حل کرنے کی کوشش کریں۔

مثال 8.23: لا متناہی تعداد کے حل والا نظام
درج ذیل نظام جو تین مساوات پر مبنی ہے میں چار متغیرات پائے جاتے ہیں۔ اس کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 8x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

حل: پہلی قدم میں نچلی دو مساواتوں سے x_1 حذف کرتے ہیں۔

پہلی صف کو 2 سے ضرب کرتے ہوئے دوسری صف سے منفی $(S_2 - 2S_1)$ کریں۔
پہلی صف کو 4 سے ضرب کرتے ہوئے تیسری صف سے منفی $(S_3 - 4S_1)$ کریں۔

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6 \\ -4x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -10 \\ -8x_2 - 6x_3 + 8x_4 &= -20 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & -10 \\ 0 & -8 & -6 & 8 & -20 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 4S_1 \end{matrix}$$

دوسری قدم میں درج بالا تبدیل شدہ افزودہ قالب استعمال کرتے ہوئے، دوسرے صف کی مدد سے تیسری صف سے x_2 حذف کرتے ہیں۔دوسری صف کو دو سے ضرب دیتے ہوئے تیسری صف سے منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6 \\ -4x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -10 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 - 2S_2 \end{matrix}$$

دوسری مساوات سے $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_3 + x_4$ اور یوں پہلی مساوات سے $x_1 = \frac{7}{4} - \frac{5}{8}x_3$ ملتا ہے۔اب x_3 اور x_4 کی لامحدود مختلف قیمتیں پر کرتے ہوئے x_1 اور x_2 حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

عموماً اختیاری مستقل کو t_1 ، t_2 ، ... لکھا جاتا ہے۔یوں x_3 اور x_4 کو بالترتیب t_1 اور t_2 لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{7}{4} - \tfrac{5}{8}t_1 \\ x_2 &= \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{4}t_1 + t_2 \end{aligned}$$

□

مثال 8.24: گاوسی اسقاط۔بلا حل نظام
ایسا نظام جس کا حل ممکن نہ ہو کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہوئے تضاد کی صورت حاصل ہو گی۔آئیں درج ذیل نظام حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -2 & 16 & -10 & 14 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -2x_1 + 16x_2 - 10x_3 &= 14 \end{aligned}$$

دوسری اور تیسری مساوات سے x_1 حذف کرتے ہیں۔

پہلی صف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر دوسری صف سے منفی کرتے ہیں۔
پہلی صف کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر تیسری صف کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 15 & -9 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - \frac{1}{2}S_1 \\ S_3 + \frac{1}{2}S_1 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 5x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 15x_2 - 9x_3 &= 17 \end{aligned}$$

آخری صف سے x_2 حذف کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 - 3S_2 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 5x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 0 &= 8 \end{aligned}$$

آخری مساوات کے تحت $0 = 8$ ہے جو تضاد کی صورت ہے۔بلا حل نظام کی گاوسی اسقاط تضاد کی صورت دے گی۔

□

8.3.1 صف زینہ دار صورت

گاوسی اسقاط کے بعد حاصل عددی سر قالب، افزودہ قالب اور نظام صف زینہ دار[52] کہلاتے ہیں جن میں صفر کے صف، اگر موجود ہوں تو یہ، آخر پر پائے جاتے ہیں اور صف میں بائیں جانب پہلی غیر صفر اندراج، ہر اگلے صف میں،

---

[52] echelon form

مزید دور ہو گی۔ مثال 8.24 میں عددی سر قالب اور افزودہ قالب کی زینہ دار صورت درج ذیل ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دھیان رہے کہ ہم بائیں ترین اندراج کو اکائی (1) کی صورت میں لانے کی کوشش نہیں کرتے ہیں چونکہ اس سے کوئی فائدہ حاصل نہیں ہو گا۔ (سادہ زینہ دار صورت[53] جس میں بائیں ترین اندراج اکائی ہو گی پر بعد میں بحث کی جائے گی۔)

m مساوات اور n متغیرات کے نظام کا افزودہ قالب $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ ہے جس سے زینہ دار صورت $\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{f} \end{bmatrix}$ حاصل کی جاتی ہے۔ نظام $\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{f}$ ایک ہی نظام کو لکھنے کے دو طریقے ہیں۔اگر ان میں کسی ایک نظام کا حل موجود ہو، تب یہی حل دوسرے نظام کا بھی حل ہو گا۔

گاوسی اسقاط سے زینہ دار افزودہ قالب کی درج ذیل عمومی صورت حاصل ہو گی۔

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & \cdots & r_{1n} & f_1 \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & \cdots & r_{2n} & f_2 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & r_{rr} & \cdots & r_{rn} & f_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & f_m \end{bmatrix}$$

درج بالا زینہ دار افزودہ قالب میں $r \le m$ ، $r_{rr} \neq 0$ جبکہ f_{r+1} تا f_m اندراج والے صف میں تمام $r_{ij} = 0$ ہوں گے۔

زینہ دار عددی سر قالب $\boldsymbol{R}$ میں غیر صفر صفوں کی تعداد r کو $\boldsymbol{R}$ کا مرتبہ[54] کہتے ہیں جو $\boldsymbol{A}$ کا بھی مرتبہ ہو گا۔یہ جاننا کہ نظام $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ کا حل موجود ہے یا نہیں اور اس حل کو حاصل کرنا درج ذیل طریقے سے ممکن ہے۔

[53] reduced echelon form
[54] rank of matrix

- **(الف) بلا حل:** اگر $r < m$ ہو (جس کا مطلب ہے کہ $\boldsymbol{R}$ میں کم از کم ایک صف ایسا ہے جس کے تمام اندراجات صفر (0) ہیں) اور f_{r+1} تا f_m میں سے کم از کم ایک مقدار غیر صفر ہو تب $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{f}$ متضاد نظام ہو گا جس کا کوئی حل ممکن نہیں ہے۔یوں $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ بھی متضاد نظام ہو گا جس کا کوئی حل نہیں پایا جاتا ہے۔

بلا تضاد نظام (جس میں یا $r = m$ ہو اور یا $r < m$ کے ساتھ ساتھ f_{r+1} تا f_m صفر کے برابر ہوں) تب نظام کا حل درج ذیل ہو گا۔

- **(ب) یکتا حل:** اگر $r = n$ ہو تب نظام کا حل یکتا ہو گا جس کو گاوسی اسقاط سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔(مثال 8.20 کی طرح۔)

- **(پ) بے انتہا تعداد کے حل:** ایسی صورت میں x_{r+1} تا x_n کی قیمتیں چن کر x_1 تا x_{r-1} حاصل کریں۔(مثال 8.23 کی طرح۔)

سوالات

سوال 8.40 تا سوال 8.53 کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

سوال 8.40:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -4 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

جوابات: $x = 1,\ y = 2$

سوال 8.41:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = -1,\ x_2 = 1$

سوال 8.42:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= -1 \\ y - z &= -1 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

جوابات: $x=-1,\ y=1,\ z=2$

سوال 8.43:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=1$

سوال 8.44:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1=2,\ x_2=1$

سوال 8.45:

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 3 & 16 \\ -1 & 2 & -5 & -21 \\ 3 & -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_3=4,\ x_2=t,\ x_1=2t+1$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 8.46:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_3=t,\ x_2=\frac{t}{2},\ x_1=-\frac{3}{2}t$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 8.47:

$$\begin{aligned} x-y&=1 \\ y+z&=-1 \\ 2x-y&=6 \end{aligned}$$

جوابات: $x=2,\, y=-2,\, z=1$

سوال 8.48:

$$\begin{aligned} 2x+y-3z &= -1 \\ x+y+z &= 1 \end{aligned}$$

جوابات: $z=t, y=3-5t, x=4t-2$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 8.49:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x=\frac{1}{3}(7-t),\, y=-\frac{1}{3}(4t+2),\, z=t$ جہاں t اختیاری ہے۔

سوال 8.50:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

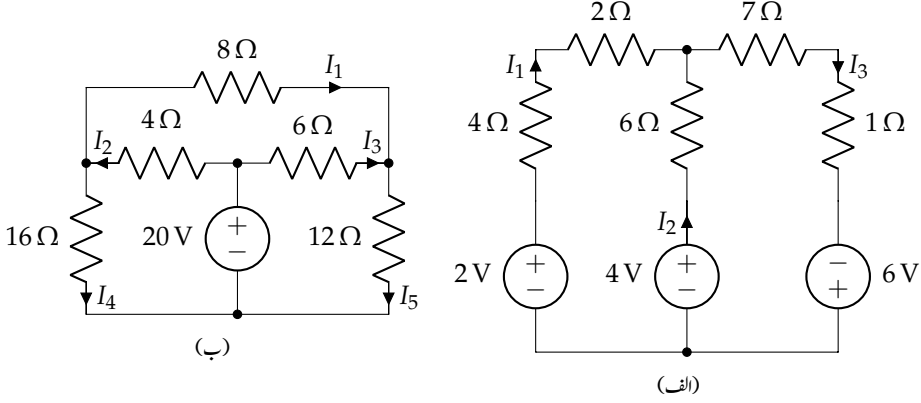
جوابات: $x_4=t,\, x_3=-\frac{4}{7}t,\, x_2=\frac{5}{7}t,\, x_1=-\frac{8}{7}t$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔

سوال 8.51:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1=-\frac{10}{7}(t+1),\, x_2=\frac{1}{7}(5t+12),\, x_3=-\frac{1}{7}(8t+15)$ جہاں t اختیاری مستقل ہے۔بالائی صف کی جگہ تبدیل کرتے ہوئے حل کریں اور یا نچلی تکونی صورت حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔

سوال 8.52:

$$\begin{aligned} 3x_1+x_2-2x_3-3x_4 &= 7 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4 &= 0 \\ x_1-x_2-x_3+x_4 &= -5 \\ x_1+x_2+x_3-x_4 &= 7 \end{aligned}$$

شکل 8.4: برقی دور۔ سوال 8.54 اور سوال 8.55

جوابات: $x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = 2,\ x_4 = -2$

سوال 8.53:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -6 & -4 & 6 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

جوابات: $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1,\ x_4 = 1$

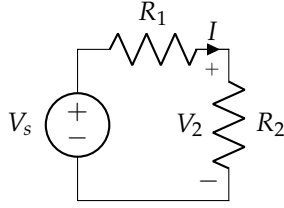
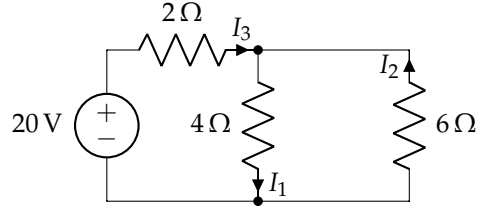
سوال 8.54 تا سوال 8.58 برقی ادوار کے نظام ہیں۔

سوال 8.54: شکل 8.4-الف میں برقی دور دکھایا گیا ہے۔اس کو حل کریں۔

جوابات: $I_1 = \frac{8}{33}\,\mathrm{A}$ ، $I_2 = \frac{19}{33}\,\mathrm{A}$ ، $I_3 = \frac{9}{11}\,\mathrm{A}$

سوال 8.55: شکل 8.4-ب میں دکھائے گئے دور کو حل کریں۔

جوابات: $I_1 = \frac{10}{57}\,\mathrm{A}$ ، $I_2 = \frac{65}{57}\,\mathrm{A}$ ، $I_3 = \frac{170}{171}\,\mathrm{A}$ ، $I_4 = \frac{55}{57}\,\mathrm{A}$ ، $I_5 = \frac{200}{171}\,\mathrm{A}$

سوال 8.56: شکل 8.5-الف میں تینوں برقی رو دریافت کریں۔برقی رو I_2 کی قیمت منفی ہے۔اس کا کیا مطلب ہے؟ جوابات: $I_1 = \frac{30}{11}\,\mathrm{A}$ ، $I_2 = -\frac{20}{11}\,\mathrm{A}$ ، $I_3 = \frac{50}{11}\,\mathrm{A}$ منفی برقی رو کا مطلب ہے کہ رو کی

(ب) تقسیم دباو کا دور۔

(الف)

شکل 8.5: ادوار برائے سوال 8.56 اور سوال 8.57

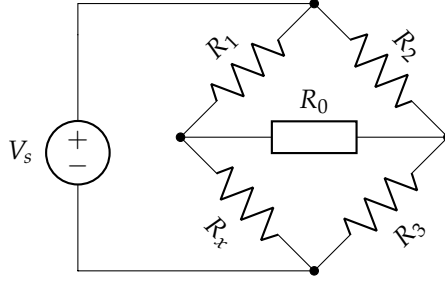
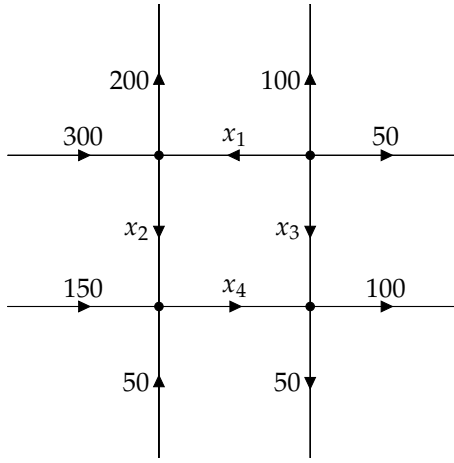
سمت دکھائی گئی سمت کے الٹ ہے۔

سوال 8.57: تقسیم دباو کا دور شکل 8.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔ کرخوف قانون دباو سے V_s ، I ، R_1 اور R_2 کا تعلق لکھیں۔اسی طرح V_2 اور I کا تعلق لکھیں۔اس نظام کو حل کرتے ہوئے V_2 حاصل کریں۔حاصل کلیہ تقسیم دباو[55] کا کلیہ کہلاتا ہے۔ جواب: $V_2 = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right) V_s$

سوال 8.58: ویٹ سٹون پل

مزاحمتوں کی پیمائش کے لئے استعمال ہونے والا[56] ویٹ سٹون پل[57] شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ایک ہاتھ R_1 اور R_x نسب ہیں اور دوسرے ہاتھ R_2 اور R_3 نسب ہیں۔ دونوں ہاتھ آپس میں متوازی جڑے ہیں۔ایک ہاتھ کے درمیانے نقطے سے دوسرے ہاتھ کے درمیانے نقطے تک ایمپیئر پیما[58] بطور پل[59] نسب کیا گیا ہے جس کی مزاحمت R_0 ہے۔ویٹ سٹون پل سے نا معلوم مزاحمت R_x ناپی جاتی ہے۔ متغیر مزاحمت R_3 کو تبدیل کیا جاتا ہے حتٰی کہ ایمپیئر پیما $I_0 = 0$ ناپے۔اس حالت میں ثابت کریں کہ $R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}$ ہو گا۔ جواب:ایمپیئر پیما اس صورت صفر برقی رو ناپے گی جب R_0 کے دونوں اطراف برقی دباو کی قیمت عین برابر ہو۔اگر R_0 میں برقی رو صفر کے برابر ہو تب R_0 کو دور سے ہٹانے سے دور پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔ہم ایسا ہی کرتے ہوئے R_0 کو ہٹاتے ہوئے حل کرتے ہیں۔سوال 8.57 کے تحت R_x پر دباو $V_x = \left(\frac{R_x}{R_1+R_x}\right) V_s$ اور R_3 پر دباو $V_3 = \left(\frac{R_3}{R_2+R_3}\right) V_s$ ہو گا۔چونکہ یہ دونوں دباو برابر ہیں لہٰذا $\left(\frac{R_x}{R_1+R_x}\right) V_s = \left(\frac{R_3}{R_2+R_3}\right) V_s$ ہو گا جس سے درکار جواب حاصل ہوتا ہے۔

---

[55] voltage division formula
[56] برطانوی سائنسدان چارلس ویٹ سٹون [1802-1875] سے اس دور کا نام منسوب ہے۔
[57] wheatstone bridge
[58] ammeter
[59] bridge

شکل 8.6: ویٹ سٹون پل۔ سوال 8.58

شکل 8.7: آمد و رفت۔ سوال 8.59

سوال 8.59: آمد و رفت
برقی ادوار حل کرنے کے طریقے دیگر شعبوں میں بھی استعمال کیے جا سکتے ہیں۔ شکل 8.7 میں شہر کی سڑکوں پر فی گھنٹہ گاڑیوں کی آمد و رفت دکھائی گئی ہے۔ کرخوف قانون رو کی مماثل استعمال کرتے ہوئے فی گھنٹہ نا معلوم آمد و رفت x_1 تا x_4 حاصل کریں۔ کیا حل یکتا حل ہے؟ جوابات: $x_2 = x_1 + 100$ ، $x_3 = -x_1 - 150$ اور $x_4 = x_1 + 300$ ؛ حل یکتا نہیں ہے۔

سوال 8.60: منڈی کی رسد و طلب
اشیاء کی مانگ، قیمت اور دستیابی کو بالترتیب M ، Q اور D سے ظاہر کرتے ہیں۔ دو شہروں میں رسد و طلبی کی متوازن مساوات $(M_1 = D_1, M_2 = D_2)$ کا حل درج ذیل خطی تعلقات سے حاصل کریں، جہاں زیر

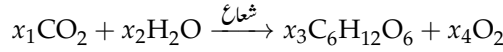
نوشت میں 1 پہلے شہر اور 2 دوسرے شہر کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$M_1 = 30 - 3Q_1 - 2Q_2, \quad D_1 = 5Q_1 - 2Q_2 + 6$$
$$M_2 = 4Q_1 - Q_2 + 10, \quad D_2 = 3Q_2 - 6$$

جوابات: $M_1 = D_1 = 7$ ، $M_2 = D_2 = 15$ ، $Q_1 = 3$ ، $Q_2 = 7$

سوال 8.61: ضیائی تالیف

روشنی کی توانائی استعمال کرتے ہوئے پودے، پانی H_2O اور کاربن ڈائی آکسائڈ CO_2 سے آکسیجن O_2 اور گلوکوز $C_6H_{12}O_6$ حاصل کرتے ہیں۔ یہ عمل، جسے درج ذیل کیمیائی مساوات میں پیش کیا گیا ہے، **ضیائی تالیف**[60] کہلاتی ہے۔

$$x_1CO_2 + x_2H_2O \xrightarrow{\text{شعاع}} x_3C_6H_{12}O_6 + x_4O_2$$

کیمیائی مساوات متوازن کرنے سے مراد x_1 ، x_2 ، . . . کی ایسی کمتر قیمتیں دریافت کرنا ہے کہ مساوات کے بائیں ہاتھ ہر قسم کی ایٹم کی تعداد دائیں ہاتھ اسی ایٹم کی تعداد کے برابر ہو۔ضیائی تالیف کی مساوات کو متوازن کریں۔

جوابات: $x_1 = 6$ ، $x_2 = 6$ ، $x_3 = 1$ ، $x_4 = 6$

8.4 خطی غیر تابعیت۔درجہ قالب۔سمتی فضا

ہم خطی نظام کے خصوصیات کو مکمل طور پر حل کی موجودگی اور یکتائی کی نقطہ نظر سے دیکھنا چاہتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم خطی الجبرا کے نئے اور بنیادی تصورات متعارف کرتے ہیں۔ ان میں **خطی غیر تابعیت** اور **مرتبہ قالب** زیادہ اہم ہیں۔ یاد رہے کہ گاوسی اسقاط انہیں پر منحصر ہے۔

سمتیات کی خطی تابعیت اور غیر تابعیت

m عدد سمتیات $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، . . . ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ (جن میں ارکان کی تعداد یکساں ہے) کی **خطی مجموعہ**[61] درج ذیل مساوات دیتی ہے،

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)}$$

---

[60] photosynthesis
[61] linear combination

جہاں c_1 تا c_m غیر سمتی قیمتیں ہیں۔اب درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + c_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} = \mathbf{0} \tag{8.34}$$

ظاہر ہے کہ تمام c_j کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں مساوات 8.34 درست ہو گا چونکہ ایسی صورت میں $\mathbf{0} = \mathbf{0}$ حاصل ہوتا ہے۔اگر m عدد c_j کی یہ واحد قیمت ہو جس کے لئے مساوات 8.34 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات **خطی طور غیر تابع**[62] کہلاتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات کا **خطی طور غیر تابع سلسلہ**[63] ہے۔اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 8.34 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات **خطی طور تابع**[64] کہلاتے ہیں۔خطی طور غیر تابع صورت میں کم از کم ایک عدد سمتیہ کو بقایا سمتیات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے مثلاً $c_1 \neq 0$ کی صورت میں ہم مساوات 8.34 کو c_1 سے تقسیم کرتے ہوئے ترتیب دے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\boldsymbol{a}_{(1)} = k_2\boldsymbol{a}_{(2)} + \cdots - k_m\boldsymbol{a}_{(m)} \qquad (k_j = -\frac{c_j}{c_1})$$

جہاں چند k_j صفر ہو سکتے ہیں ($\boldsymbol{a}_{(1)} = \mathbf{0}$ کی صورت میں تمام k_j صفر ہو سکتے ہیں)۔

خطی طور تابع سمتیات کے سلسلہ سے کم از کم ایک عدد سمتیہ، اور عین ممکن ہے کہ ایک سے زیادہ سمتیات، خارج کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع سلسلہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔خطی طور غیر تابع سمتیات کا سلسلہ وہ کمتر تعداد کے سمتیات ہیں جن کے ساتھ ہم کام کر سکتے ہیں۔

مثال 8.25: خطی طور غیر تابع اور خطی طور تابع سمتیات
درج ذیل سمتیات

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}\\
\boldsymbol{a}_{(2)} &= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}\\
\boldsymbol{a}_{(3)} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

خطی طور تابع ہیں چونکہ انہیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.34 کی طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$2\boldsymbol{a}_{(1)} - \boldsymbol{a}_{(2)} + 2\boldsymbol{a}_{(3)} = \mathbf{0}$$

---

[62] linear independent
[63] linearly independent set
[64] linearly dependent

درج بالا کو با آسانی الجبرا سے ثابت کیا جا سکتا ہے البتہ اس تعلق کو حاصل کرنے اتنا آسان نہیں ہے۔ تابعیت ثابت کرنے کا منظم طریقہ نیچے دیا گیا ہے۔

اس مثال کے پہلے دو عدد سمتیات خطی طور غیر تابع ہیں۔ □

قالب کا مرتبہ

تعریف: قالب $\boldsymbol{A}$ میں خطی طور غیر تابع صفوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد کو $\boldsymbol{A}$ کا مرتبہ[65] کہتے ہیں۔

قالبوں اور خطی مساوات کے نظاموں کی عمومی خصوصیات سمجھنے میں مرتبہ قالب کا تصور کار آمد ثابت ہو گا۔

مثال 8.26: مرتبہ قالب
جیسا گزشتہ مثال میں دیکھا گیا، درج ذیل قالب میں دو عدد صف خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا اس قالب کا مرتبہ 2 ہے۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

دھیان رہے کہ مرتبہ $\boldsymbol{A}$ اس صورت 0 ہو گا جب $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ ہو۔ یہ حقیقت مرتبہ قالب کی تعریف سے اخذ ہوتی ہے۔ □

دو عدد قالب $\boldsymbol{A}_1$ اور $\boldsymbol{A}_2$ اس صورت صف برابر[66] کہلاتے ہیں جب $\boldsymbol{A}_1$ پر محدود عمل صف کے ذریعہ $\boldsymbol{A}_2$ حاصل کرنا ممکن ہو۔

اب قالب میں خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد، صفوں کی جگہ تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتی اور نا ہی کسی صف کو غیر صفر قیمت c سے ضرب دینے اور نہ ہی صفوں کے خطی ملاپ سے ہوتی ہے۔ یوں اعمال صف کی صورت میں کسی بھی قالب کا مرتبہ مستقل قیمت ہو گا۔

---

[65] rank
[66] row equivalent

مسئلہ 8.2: صف برابر قالب
صف برابر قالبوں کا مرتبہ ایک جیسا ہو گا۔

یوں گاوسی اسقاط (حصہ 8.3) سے تکونی قالب حاصل کرتے ہوئے مرتبہ قالب حاصل کیا جا سکتا ہے۔ تکونی قالب میں غیر صفر صفوں کی تعداد مرتبہ قالب ہو گی۔

مثال 8.27: مثال 8.26 میں دیے گئے قالب کا مرتبہ، اس کی تکونی قالب کی مدد سے دریافت کرتے ہیں۔ قالب کے دائیں جانب عمل صف لکھے گئے ہیں جہاں S_1 ، S_2 ، ... گزشتہ قدم کے قالب کی پہلی، دوسری، ... صف کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 2 & 18 \\ 0 & -5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 4S_1 \\ S_3 - S_1 \end{matrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 - \frac{1}{2}S_2 \end{matrix}
\end{aligned}$$

آخری قالب تکونی ہے جس کے آخری صف کے تمام اندراجات صفر کے برابر ہیں لہٰذا یہ صفر صف ہے۔ غیر صفر صفوں کی تعداد 2 ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ مرتبہ بھی 2 ہے۔ □

مثال 8.25 تا مثال 8.27 میں $p = 3$ ، $n = 3$ اور مرتبہ قالب 2 لیتے ہوئے درج ذیل مسئلے کو پڑھیں۔

مسئلہ 8.3: سمتیات کی تابعیت اور غیر تابعیت
ایسے p عدد سمتیات جن میں ہر سمتیہ کے n عدد ارکان ہوں کو بطور قالب کے صف لکھیں۔ اگر حاصل قالب کا مرتبہ p ہو تب یہ سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ اس کے برعکس اگر اس قالب کا مرتبہ p سے کم ہو تب یہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

دیگر اہم خصوصیات درج ذیل مسئلے سے حاصل ہوں گے۔

مسئلہ 8.4: سمتیات قطار کی صورت میں مرتبہ قالب
قالب $\boldsymbol{A}$ کا مرتبہ r ، اس قالب میں غیر تابع سمتیہ قطار کی تعداد کے برابر ہو گا۔

یوں قالب $\boldsymbol{A}$ اور تبدیل محل قالب $\boldsymbol{A}^T$ کا مرتبہ ایک دونوں کے برابر ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ $m \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا مرتبہ r ہے۔ مرتبہ قالب کی تعریف سے یوں $\boldsymbol{A}$ کے r عدد خطی طور غیر تابع صف ہوں گے جنہیں ہم $\boldsymbol{v}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{v}_{(r)}$ کہتے ہیں اور $\boldsymbol{A}$ کے تمام صف $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ کو ان خطی طور غیر تابع کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{(1)} &= c_{11}\boldsymbol{v}_{(1)} + c_{12}\boldsymbol{v}_{(2)} + \cdots + c_{1r}\boldsymbol{v}_{(r)} \\
\boldsymbol{a}_{(2)} &= c_{21}\boldsymbol{v}_{(1)} + c_{22}\boldsymbol{v}_{(2)} + \cdots + c_{2r}\boldsymbol{v}_{(r)} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{a}_{(m)} &= c_{m1}\boldsymbol{v}_{(1)} + c_{m2}\boldsymbol{v}_{(2)} + \cdots + c_{mr}\boldsymbol{v}_{(r)}
\end{aligned}
$$

یہ مساوات سمتیات ہیں جن میں سے ہر n عدد مساوات پر مشتمل ہے۔ $\boldsymbol{v}_{(1)}$ کے ارکان کو v_{11} ، $\cdots$ ، v_{1n} لکھتے ہوئے اور اسی طرح بائیں ہاتھ کے سمتیات کے ارکان کو بھی لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جہاں $k = 1, \cdots, n$ ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_{1k} &= c_{11}v_{1k} + c_{12}v_{2k} + \cdots + c_{1r}v_{rk} \\
a_{2k} &= c_{21}v_{1k} + c_{22}v_{2k} + \cdots + c_{2r}v_{rk} \\
&\vdots \\
a_{mk} &= c_{m1}v_{1k} + c_{m2}v_{2k} + \cdots + c_{mr}v_{rk}
\end{aligned}
$$

اس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = v_{1k} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + v_{2k} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + v_{rk} \begin{pmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{pmatrix}
$$

بائیں ہاتھ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ قالب کا k شمار پر قطار ہے۔یوں درج بالا مساوات کے تحت $\boldsymbol{A}$ کا ہر قطار، دائیں ہاتھ کے r عدد سمتیات کا خطی مجموعہ ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کے خطی طور غیر تابع قطاروں کی تعداد r سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے جو خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد ہے۔

اب یہی کچھ تبدیل محل قالب $\boldsymbol{A}^T$ کے بارے میں بھی کہا جا سکتا ہے۔چونکہ $\boldsymbol{A}^T$ کے سمتیات صف $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات قطار، اور $\boldsymbol{A}^T$ کے سمتیات قطار $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات صف ہیں، لہٰذا (درج بالا نتیجے کے تحت) $\boldsymbol{A}$ کی خطی طور غیر تابع صف سمتیات کی زیادہ سے زیادہ تعداد (جو r کے برابر ہے)، $\boldsymbol{A}$ کی خطی طور غیر تابع سمتیات قطار کی تعداد سے تجاوز نہیں کر سکتی ہے۔اس طرح یہ تعداد r ہی ممکن ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 8.27 میں قالب $\boldsymbol{A}$ کا مرتبہ 2 ہے۔یوں $\boldsymbol{A}$ کے دو قطار خطی طور غیر تابع ہوں گے۔بائیں جانب سے پہلی اور دوسری قطار کو خطی طور غیر تابع لیتے ہوئے تیسرے اور چوتھے قطار کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-3\\6\\6\end{pmatrix}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}-\frac{9}{5}\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

مسئلہ 8.3 اور مسئلہ 8.4 کی مدد سے درج ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 8.5: سمتیات کی خطی طور تابعیت
فرض کریں کہ p سمتیات کا ہر رکن n ارکان پر مشتمل ہے۔اگر $n < p$ ہو تب یہ سمتیات خطی طور تابع ہوں گے۔

ثبوت : ایسا قالب $\boldsymbol{A}$ جس کے صف یہی p سمتیات ہوں اور جس کی قطاروں کی تعداد n (جہاں $n < p$ ہے۔) ہو کا مسئلہ 8.4 کے تحت

$$\text{مرتبہ}\, \boldsymbol{A} \leq n < p$$

ہو گا جو مسئلہ 8.3 کے تحت خطی تابعیت کو ظاہر کرتی ہے۔

□

سمتی فضا

فرض کریں کہ V سمتیات کا ایسا **غیر خالی سلسلہ**[67] ہے جس کے تمام سمتیات میں ارکان کی تعداد یکساں ہے۔اگر V میں موجود کسی بھی دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے تمام ممکنہ مجموعے $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ (جہاں α اور β حقیقی اعداد ہیں۔) بھی V کے ارکان ہوں، اور مزید یہ کہ، $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ مساوات 8.7-الف، پ، ت اور مساوات 8.8 پر پورا اترتے ہوں، اور V میں کوئی بھی سمتیات $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ مساوات 8.7-ب پر پورا اترتے ہوں، تب V **سمتی فضا**[68] کہلائے گا۔

V میں خطی طور غیر تابع سمتیات کی تعداد کو V کی **بُعد**[69] کہتے ہیں۔یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ V کی بُعد محدود ہے۔ لامتناہی بُعد کے سلسلے پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

V میں موجود خطی طور غیر تابع سمتیات کی زیادہ سے زیادہ تعداد پر مبنی سلسلے کو V کا **اساس**[70] کہتے ہیں۔ اس (اساسی) سلسلے میں کسی بھی ایک یا ایک سے زیادہ سمتیات کو شامل کرنے سے یہ سلسلہ خطی طور تابع ہو جائے گا۔یوں V کی اساس میں سمتیات کی تعداد، V کی بُعد کے برابر ہو گی۔

کسی بھی دیے گئے، یکساں تعداد کے ارکان والے سمتیات $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$، $\boldsymbol{a}_{(p)}$ کے تمام ممکنہ مجموعوں کا سلسلہ، ان سمتیات کا **احاطہ**[71] کہلاتا ہے۔ ظاہر ہے کہ احاطہ از خود سمتی فضا ہے۔اگر $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$، $\boldsymbol{a}_{(p)}$ خطی طور غیر تابع ہوں تب اس سمتی فضا کی اساس یہی سمتیات ہوں گے۔

اس سے اساس کی نئی تعریف ملتی ہے۔سمتیات کا سلسلہ اس صورت سمتی فضا V کا اساس ہو گا (الف) اگر اس سلسلے میں سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں اور (ب) اگر V میں کسی بھی سمتیہ کو سلسلے کے سمتیات کا خطی مجموعہ لکھنا ممکن ہو۔

سمتی فضا کی **ذیلی فضا**[72] سے مراد V کا وہ غیر خالی **ذیلی سلسلہ**[73] ہے (جو پورے V پر بھی مشتمل ہو سکتا ہے۔) جو V کی سمتیات پر لاگو جمع اور غیر سمتی ضرب کے قواعد پر پورا اترتا ہوا سمتی فضا ہو۔

---

[67] nonempty set
[68] vector space
[69] dimension
[70] basis
[71] span
[72] subspace
[73] subset

مثال 8.28: سمتی فضا، بُعد، اساس
مثال 8.25 کے تین سمتیات کے احاطے کی بُعد 2 ہے۔ اس سمتی فضا کی اساس ان میں سے کسی بھی دو سمتیات پر مشتمل ہو گا مثلاً $\boldsymbol{a}_{(1)}$ اور $\boldsymbol{a}_{(2)}$ یا $\boldsymbol{a}_{(1)}$ اور $\boldsymbol{a}_{(3)}$ اور یا $\boldsymbol{a}_{(2)}$ اور $\boldsymbol{a}_{(3)}$ ۔ □

مسئلہ 8.6: سمتی فضا R^n
n سمتیات (حقیقی اعداد) پر مشتمل سمتی فضا R^n کی بُعد n ہو گی۔

ثبوت: n سمتیات کی اساس درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{a}_{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{a}_{(n)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

قالب $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات صف کے احاطے کو $\boldsymbol{A}$ کا صف فضا[74] کہتے ہیں۔ اسی طرح قالب $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات قطار کے احاطے کو $\boldsymbol{A}$ کا قطار فضا[75] کہتے ہیں۔

اب مسئلہ 8.4 کے تحت قالب کے خطی طور غیر تابع قطاروں کی تعداد اس کے خطی طور غیر تابع صفوں کی تعداد کے برابر ہوتی ہے۔ بُعد کی تعریف کی رو سے، یہ عدد صف فضا یا قطار فضا کی بُعد ہو گا۔ اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 8.7: صف فضا اور قطار فضا
قالب $\boldsymbol{A}$ کی قطار فضا کی بُعد، اس کی صف فضا کی بُعد اور مرتبہ $\boldsymbol{A}$ عین برابر ہوں گے۔

---

[74] row space
[75] column space

آخر میں کسی بھی قالب $\boldsymbol{A}$ کی غیر متجانس مساوات $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ کا سلسلہ حل، سمتی فضا ہو گا جس کو $\boldsymbol{A}$ کی معدوم فضا[76] کہتے ہیں، اور جس کی بُعد کو $\boldsymbol{A}$ کی معدومیت[77] کہتے ہیں۔ اگلے حصے میں درج ذیل بنیادی تعلق کو ثابت کیا جائے گا۔

$$\text{مرتبہ } \boldsymbol{A} + \text{معدومیت } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \text{ کی تعداد قطار} \tag{8.35}$$

سوالات

سوال 8.62 تا سوال 8.71 کی تکونی صورت گاوسی اسقاط سے حاصل کرتے ہوئے مرتبہ قالب حاصل کریں۔ صف فضا اور قطار فضا کی اساس بھی حاصل کریں۔

سوال 8.62:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

جوابات: مرتبہ $= 1$ ؛ $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ ؛ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ ۔ آخری سمتیہ کو $\begin{bmatrix} 6 & -3 \end{bmatrix}^T$ کی جگہ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ لکھا گیا ہے۔ بقایا سوالات کے جوابات میں بھی بعض اوقات سمتیہ کی سادہ ترین صورت دی گئی ہے۔

سوال 8.63:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

سوال 8.64:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

---

[76] null set
[77] nullity

جوابات: 2 ؛ $\begin{bmatrix}8 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}8 & 0 & 4\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$

سوال 8.65:

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 4 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 5 & -1\end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛ $\begin{bmatrix}2 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 2 & -1 & 3\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$

سوال 8.66:

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\3 & 0 & 2\\2 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛ $\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 9 & -1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 9 & 2\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

سوال 8.67:

$$\begin{bmatrix}a & b\\b & a\end{bmatrix}$$

جوابات: 2 ؛ $\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & a^2-b^2\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & a^2-b^2\end{bmatrix}^T$

سوال 8.68:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 8\\2 & 1 & 8 & 4\\4 & -1 & 16 & -4\\8 & 1 & 32 & 4\end{bmatrix}$$

جوابات: 2 ؛ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 8\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 8\end{bmatrix}^T$، $\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 5\end{bmatrix}^T$

سوال 8.69:

$$\begin{bmatrix}8 & 4 & 8 & 2\\16 & 8 & 4 & 4\\8 & 4 & -4 & 2\\2 & 8 & 8 & 4\end{bmatrix}$$

جوابات: 3 ؛ $[8\ 4\ 8\ 2]$ ،$[0\ 56\ 48\ 28]$ ،$[0\ 0\ 1\ 0]$؛ $[8\ 16\ 8\ 2]^T$ ،$[0\ 2\ 2\ -1]^T$ ،$[0\ 0\ 0\ 1]^T$

سوال 8.70:

$$
\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad (a_{jk} = j + k)
$$

جوابات: 2 ؛ $[2\ 3\ 4\ 5]$ ،$[0\ 1\ 2\ 3]$؛ $[2\ 3\ 4\ 5]^T$ ،$[0\ 1\ 2\ 3]^T$

سوال 8.71:

$$
\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad (a_{jk} = j + k - 1)
$$

جوابات: 2 ؛ $[1\ 2\ 3\ 4]$ ،$[0\ 1\ 2\ 3]$؛ $[1\ 2\ 3\ 4]^T$ ،$[0\ 1\ 2\ 3]^T$

سوال 8.72: قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ ، جہاں $a_{jk} = j + k - 1$ کے برابر ہے، کا مرتبہ n کے برابر ہے۔اس حقیقت کو $n = 5$ لیتے ہوئے ثابت کریں۔سوال 8.71 میں $n = 4$ کے لئے اس حقیقت کو ثابت کیا گیا ہے۔

سوال 8.73: قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ ، جہاں $a_{jk} = j + k + c$ کے برابر ہے (c مثبت عدد ہے)، کا مرتبہ n کے برابر ہے۔اس حقیقت کو $n = 4$ لیتے ہوئے ثابت کریں۔

سوال 8.74: قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ ، جہاں $a_{jk} = 2^{j+k-2}$ کے برابر ہے، کا مرتبہ 1 کے برابر ہے۔اس حقیقت کو $n = 3$ لیتے ہوئے ثابت کریں۔

سوال 8.75 تا سوال 8.79 میں قالبوں کی عمومی خصوصیات پر غور کیا گیا ہے۔دیے گئے تعلق ثابت کریں۔

سوال 8.75:

$$
\text{مرتبہ}\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \text{مرتبہ}\ \boldsymbol{AB}
$$

سوال 8.76: اگر مرتبہ $\boldsymbol{A}$ = مرتبہ $\boldsymbol{B}$ ہو تب ضروری نہیں ہے کہ مرتبہ $\boldsymbol{A}^2$ = مرتبہ $\boldsymbol{B}^2$ ہو گا۔

سوال 8.77: غیر چکور قالب A کے یا تو صف خطی طور غیر تابع ہوں گے اور یا اس کے قطار خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

سوال 8.78: اگر چکور قالب کے صف خطی طور غیر تابع ہوں، تب اس کے قطار بھی خطی طور غیر تابع ہوں گے۔اسی طرح اگر اس قالب کے قطر خطی طور غیر تابع ہوں، تب اس کے صف بھی خطی طور غیر تابع ہوں گے۔

سوال 8.79: مثال دے کر ثابت کریں مرتبہ AB کسی صورت مرتبہ A یا مرتبہ B سے زیادہ نہیں ہو گا۔

سوال 8.80 تا سوال 8.88 میں ثابت کریں کہ آیا دیے گئے سمتیات خطی طور تابع ہیں یا خطی طور غیر تابع ہیں۔

سوال 8.80:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2 & 0 & -3 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 4 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 8.81:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع۔ سمتیات کو بطور قالب کے صف سمتیہ لکھتے ہوئے گاوسی اسقاط سے قالب کا مرتبہ حاصل کرتے ہوئے سمتیات کی تابعیت یا غیر تابعیت دریافت کی جا سکتی ہے۔

سوال 8.82:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.83:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3 & 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 8.84:

$$\begin{bmatrix}0.2 & 0.0 & 0.1 & 0.6\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.0\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.85:

$$\begin{bmatrix}0.4 & 0.0 & 0.1 & 0.2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.86:

$$\begin{bmatrix}0.2 & -0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.4 & 0.0 & 0.1 & -0.2\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0.0 & 0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.4\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.87:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\frac{9}{5} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{17}{6}\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور تابع

سوال 8.88:

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

جواب: خطی طور غیر تابع

سوال 8.89: خطی طور غیر تابع ذیلی سلسلہ
درج ذیل سمتیات کے دائیں ترین سمتیہ $\begin{bmatrix}10 & -1 & 4 & 10\end{bmatrix}$ سے شروع کرتے ہوئے باری باری ایک ایک سمتیہ کم کرتے ہوئے خطی طور غیر تابع ذیلی سلسلہ دریافت کریں۔

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & 2 & 6\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}5 & -4 & 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}10 & -1 & 4 & 10\end{bmatrix}$$

جوابات: $\begin{bmatrix}4 & 1 & 2 & 6\end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$

سوال 8.90 تا سوال 8.90: کیا دیے گئے سمتیات، سمتی فضا ہیں۔ سمتی فضا ہونے کی صورت میں اس کی بُعد اور اساس (v_1 ، v_2 ، . . .) دریافت کریں۔

سوال 8.90:
R^3 کے تمام سمتیات جہاں $v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$ ہے۔

جوابات: 2 ؛ $\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\end{bmatrix}$

سوال 8.91: R^2 کے تمام سمتیات جہاں $v_1 \geq v_2$ ہے۔

جواب: سمتی فضا نہیں ہے۔

سوال 8.92: R^5 کے تمام مثبت ارکان۔

جواب: سمتی فضا نہیں ہے۔

سوال 8.93: R^3 کے تمام ارکان جہاں $3v_1 - v_3 = 0$ اور $2v_1 + 3v_2 - 4v_3 = 0$ ہے۔

جوابات: 1 ؛ حل $c\begin{bmatrix}1 & \frac{10}{3} & 3\end{bmatrix}$ اور اساس $\begin{bmatrix}1 & \frac{10}{3} & 3\end{bmatrix}$

سوال 8.94: R^4 کے تمام سمتیات جہاں $v_1 = 2v_2 = 3v_3 = 4v_4$ ہے۔

جوابات: 1 ؛ $\begin{bmatrix}4 & 2 & \frac{4}{3} & 1\end{bmatrix}$

8.5 خطی نظام کے حل: وجودیت، یکتائی

خطی نظام کے حل کی وجودیت، یکتائی اور عمومی ساخت کی مکمل معلومات اس کی مرتبہ سے حاصل ہوتی ہے۔ اس پر غور کرتے ہیں۔

اگر n متغیرات پر مبنی مساوات کے خطی نظام کی عددی سر قالب اور افزودہ قالب کا مرتبہ یکساں n کے برابر ہو تب اس نظام کا حل یکتا ہو گا۔البتہ اگر ان کا یکساں مرتبہ n سے کم ہو تب نظام کے لامتناہی تعداد میں حل ممکن ہوں گے۔ اگر ان قالبوں کے مرتبہ ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب نظام کا کوئی حل ممکن نہ ہو گا۔

اس حقیقت کو ثابت کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم $\boldsymbol{A}$ کا **ذیلی قالب**[78] بروئے کار لائیں گے۔ $\boldsymbol{A}$ سے چند صف یا چند قطار (یا دونوں) خارج کرتے ہوئے اس کا ذیلی قالب حاصل ہوتا ہے۔ $\boldsymbol{A}$ سے صفر صف اور صفر قطار خارج کرتے ہوئے بھی اس کا ذیلی قالب حاصل کیا جا سکتا ہے جو ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{A}$ ہی ہو گا۔

مسئلہ 8.8: خطی نظام کا بنیادی مسئلہ

(الف) **وجودیت**[79]۔ ایسا خطی نظام جو n متغیرات x_1، $\cdots$، x_n کے درج ذیل m مساوات پر مبنی ہو،

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\tag{8.36}
$$

صرف اور صرف اس صورت **بلا تضاد** ہو گا، یعنی اس کے حل ممکن ہوں گے، جب نظام کے عددی سر قالب $\boldsymbol{A}$ کا مرتبہ اس نظام کے افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے مرتبہ کے برابر ہو۔ عددی سر قالب اور افزودہ قالب درج ذیل ہیں۔

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{bmatrix}
$$

(ب) **یکتائی**[80]۔ نظام 8.36 کا حل اس صورت یکتا ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ کا مرتبہ اور $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کا مرتبہ، n کے برابر ہو۔

---

[78] submatrix
[79] existence
[80] uniqueness

(پ) **لا متناہی تعداد کے حل۔** اگر A اور $\tilde{A}$ کا یکساں مرتبہ r، نا معلوم متغیرات کی تعداد n سے کم ہو تب نظام 8.36 کے لا متناہی تعداد میں حل ممکن ہوں گے۔ایسے تمام حل، r موزوں متغیرات (جس کے ذیلی عددی سر قالب کا مرتبہ لازمی طور پر r ہو۔) کو بقایا $n-r$ اختیاری متغیرات کی صورت میں معلوم کرتے ہوئے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔اختیاری متغیرات کی قیمتیں چنتے ہوئے مختلف حل حاصل ہوں گے۔(مثال 8.23 دیکھیں۔)

(ت) **گاوسی اسقاط** (حصہ 8.3)۔ گاوسی اسقاط سے تمام حل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔(جیسا حصہ 8.3 میں بتلایا گیا ہے، گاوسی اسقاط سے خود بخود حل کی موجودگی کا پتہ لگے گا۔)

ثبوت:

(الف) نظام 8.36 کو سمتی مساوات $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ یا $\boldsymbol{A}$ کی سمتیات قطار $\boldsymbol{c}_{(1)}$، $\cdots$، $\boldsymbol{c}_{(n)}$ کی مدد سے

$$\boldsymbol{c}_{(1)}x_1+\boldsymbol{c}_{(2)}x_2+\cdots+\boldsymbol{c}_{(n)}x_n=\boldsymbol{b} \tag{8.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $\boldsymbol{A}$ کے ساتھ $\boldsymbol{b}$ کی قطار شامل کرتے ہوئے افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ حاصل ہوتا ہے۔مسئلہ 8.4 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\text{مرتبہ}\ \tilde{\boldsymbol{A}}=\text{مرتبہ}\ \boldsymbol{A}\qquad\text{یا}\qquad \text{مرتبہ}\ \tilde{\boldsymbol{A}}=1+\text{مرتبہ}\ \boldsymbol{A}$$

اب اگر نظام 8.36 کا حل $\boldsymbol{x}$ ہو تب مساوات 8.37 کے تحت $\boldsymbol{b}$ کو قطار $\boldsymbol{c}_{(1)}$، $\cdots$، $\boldsymbol{c}_{(n)}$ کی صورت میں بطور خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے (یعنی $\boldsymbol{b}$ خطی طور غیر تابع نہیں ہو گا) لہٰذا $\tilde{\boldsymbol{A}}$ اور $\boldsymbol{A}$ میں خطی طور غیر تابع سمتیات قطار کی تعداد ایک جیسی ہو گی اور یوں ان قالبوں کا مرتبہ بھی ایک جیسا ہو گا۔

ساتھ ہی ساتھ اگر مرتبہ $\boldsymbol{A}=$ مرتبہ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ ہو تب $\boldsymbol{b}$ لازماً $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات قطار کا خطی مجموعہ ہو گا یعنی

$$\boldsymbol{b}=\alpha_1\boldsymbol{c}_{(1)}+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{c}_{(n)} \tag{8.38}$$

ورنہ

$$\text{مرتبہ}\ \tilde{\boldsymbol{A}}=1+\text{مرتبہ}\ \boldsymbol{A}$$

ہو گا۔اب مساوات 8.38 کا مطلب ہے کہ نظام 8.36 کا حل موجود ہے یعنی $x_1=\alpha_1$، $\cdots$، $x_n=\alpha_n$ جو مساوات 8.37 اور مساوات 8.38 کو دیکھ کر لکھا جا سکتا ہے۔

(ب) اگر مرتبہ $A = n$ ہو تب مسئلہ 8.4 کے تحت مساوات 8.37 کے n عدد سمتیات قطار، خطی طور غیر تابع ہوں گے۔ ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ مساوات 8.37 میں b کا دیا گیا تعلق یکتا ہے ورنہ درج ذیل لکھنا ممکن ہو گا

$$\boldsymbol{c}_{(1)}x_1 + \boldsymbol{c}_{(2)}x_2 + \cdots + \boldsymbol{c}_{(n)}x_n = \boldsymbol{c}_{(1)}\tilde{x}_1 + \boldsymbol{c}_{(2)}\tilde{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{c}_{(n)}\tilde{x}_n$$

جس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$(x_1 - \tilde{x}_1)\boldsymbol{c}_{(1)} + (x_2 - \tilde{x}_2)\boldsymbol{c}_{(2)} + \cdots + (x_n - \tilde{x}_n)\boldsymbol{c}_{(n)} = \boldsymbol{0}$$

لکھا جا سکتا ہے اور خطی طور غیر تابعیت کی بنا اس سے مراد $x_1 - \tilde{x}_1 = 0$ ، $\cdots$ ، $x_n - \tilde{x}_n = 0$ ہے۔ لیکن اس کا مطلب ہے کہ مساوات 8.37 میں x_1 تا x_n غیر سمتی مقدار یکتا ہیں اور یوں نظام 8.36 کا حل یکتا ہو گا۔

(پ) اگر مرتبہ $\tilde{A} =$ مرتبہ $A = r < n$ ہو تب مسئلہ 8.4 کے تحت A کے ایسے r عدد قطاروں پر مشتمل سلسلہ K پایا جاتا ہے جن کی خطی مجموعے کی صورت میں A کے بقایا $n - r$ قطاروں کو لکھا جا سکتا ہے۔ ہم قطاروں اور متغیرات کو نئی علامتوں سے ظاہر کرتے ہیں جہاں نئی علامتوں پر $\hat{}$ کا نشان ہو گا۔یوں سلسلہ K کی خطی طور غیر تابع قطاروں کو اب $\hat{\boldsymbol{c}}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\hat{\boldsymbol{c}}_{(r)}$ لکھا جائے گا۔ مساوات 8.37 اب درج ذیل لکھی جائے گی

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{(1)}\hat{x}_1 + \cdots + \hat{\boldsymbol{c}}_{(r)}x_r + \hat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1} + \cdots + \hat{\boldsymbol{c}}_{(n)}\hat{x}_n = \boldsymbol{b}$$

جہاں $\hat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}$ ، $\cdots$ ، $\hat{\boldsymbol{c}}_{(n)}$ کو K کے قطاروں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے اور اسی طرح $\hat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1}$ ، $\cdots$ ، $\hat{\boldsymbol{c}}_{(n)}\hat{x}_n$ کو بھی K کے قطاروں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے انہیں K کی قطاروں کے مجموعے لکھتے ہوئے اجزاء اکٹھے کر کے درج ذیل حاصل ہو گا

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{(1)}\hat{y}_1 + \cdots + \hat{\boldsymbol{c}}_{(r)}y_r = \boldsymbol{b} \tag{8.39}$$

جہاں $y_j = x_j + \beta_j$ ہو گا اور β_j از خود $n - r$ اجزاء $\hat{\boldsymbol{c}}_{(r+1)}\hat{x}_{r+1}$ ، $\cdots$ ، $\hat{\boldsymbol{c}}_{(n)}\hat{x}_n$ سے حاصل ہوں گے۔یہاں $j = 1, \cdots, r$ ہے۔چونکہ اس نظام کا حل موجود ہے لہٰذا ایسے y_1 تا y_r موجود ہیں جو مساوات 8.39 پر پورا اترتے ہیں۔ چونکہ K خطی طور غیر تابع ہے لہٰذا غیر سمتی مقدار y_1 تا y_r یکتا ہیں۔ $\hat{x}_{r+1}$ تا $\hat{x}_n$ کی قیمتیں چننے سے β_j اور مطابقتی $\hat{x}_j = y_j - \beta_j$ کی قیمتیں قطعی طور تعین ہوتی ہیں، جہاں $j = 1, \cdots, r$ ہے۔

(ت) حصہ 8.3 میں اس پر بحث کی گئی ہے لہٰذا اس پر دوبارہ بات نہیں کی جائے گی۔

□

درج بالا مسئلے کا استعمال حصہ 8.3 میں کیا گیا ہے جہاں مثال 8.22 کے آخر میں $S_4'' - \frac{4}{7}S_3''$ کے عمل سے آخری صف، صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے اور یوں مرتبہ قالب 3 حاصل ہوتا ہے جو نظام میں متغیرات کی تعداد کے برابر ہے $(3 = n =$ مرتبہ $\boldsymbol{A} =$ مرتبہ $\tilde{\boldsymbol{A}})$ لہٰذا نظام کا یکتا حل پایا گیا۔

مثال 8.23 میں $(4 = n > 2 =$ مرتبہ $\boldsymbol{A} =$ مرتبہ $\tilde{\boldsymbol{A}})$ ہے لہٰذا اس مثال کی نظام کے یوں لامتناہی تعداد میں حل ممکن ہیں۔ x_3 اور x_4 اختیاری متغیرات کی قیمتیں چنتے ہوئے x_1 اور x_2 حاصل کیے جاتے ہیں۔

مثال 8.24 میں $(3 =$ مرتبہ $\tilde{\boldsymbol{A}} > 2 =$ مرتبہ $\boldsymbol{A})$ ہے لہٰذا اس نظام کا کوئی بھی حل ممکن نہیں ہے۔

متجانس خطی نظام

جیسا حصہ 8.3 میں بتلایا گیا ہے، نظام 8.36 میں تمام b_j صفر ہونے کی صورت میں یہ **متجانس** کہلائے گا۔ اگر ایک یا ایک سے زیادہ b_j غیر صفر ہوں تب یہ **غیر متجانس** نظام کہلائے گا۔ مسئلہ 8.8 سے متجانس نظام کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 8.9: متجانس خطی نظام

متجانس نظام

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
\tag{8.40}
$$

کا ہر صورت ایک عدد **غیراہم صفر حل** $x_1 = 0$ ، $\cdots$ ، $x_n = 0$ ہو گا۔ **غیر صفر اہم حل** صرف اور صرف اس صورت موجود ہوں گے جب مرتبہ $\boldsymbol{A} < n$ ہو۔ اگر مرتبہ $\boldsymbol{A} = r < n$ ہو تب، یہ حل اور غیر اہم حل مل کر $n - r$ بُعد کی سمتی فضا (حصہ 8.4 دیکھیں۔) بناتے ہیں جو نظام 8.40 کی **حل فضا**[81] کہلاتا ہے۔

---

[81] solution space

خاص کر اگر $\boldsymbol{x}_{(1)}$ اور $\boldsymbol{x}_{(2)}$ نظام 8.40 کے حل سمتیات ہوں تب $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_{(1)} + c_2\boldsymbol{x}_{(2)}$ ، جہاں c_1 اور c_2 کوئی بھی غیر سمتی مقدار ہیں، بھی نظام 8.40 کا حل سمتیہ ہو گا۔ (دھیان رہے کہ یہ غیر متجانس نظام کے لئے درست نہیں ہے۔مزید یہ کہ حل فضا کی اصطلاح صرف متجانس نظام کے لئے استعمال کی جاتی ہے۔)

ثبوت: پہلا دعویٰ نظام کو دیکھ کر سمجھا جا سکتا ہے۔یہ اس حقیقت کے عین مطابق ہے کہ $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ سے مراد مرتبہ $\boldsymbol{A} =$ مرتبہ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ ہے لہٰذا متجانس نظام ہر صورت بلا تضاد ہو گا۔اگر مرتبہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو تب مسئلہ 8.8-ب کے تحت غیراہم صفر حل اس نظام کا یکتا حل ہو گا۔ اگر مرتبہ $\boldsymbol{A} < n$ ہو تب مسئلہ 8.8-پ کے تحت غیرصفراہم حل موجود ہوں گے۔یہ حل مل کر حل فضا بناتے ہیں چونکہ اگر $\boldsymbol{x}_{(1)}$ اور $\boldsymbol{x}_{(2)}$ ان میں سے کوئی دو عدد حل ہوں تب $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{0}$ اور $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(2)} = \boldsymbol{0}$ ہو گا جس سے مراد

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_{(1)} + \boldsymbol{x}_{(2)}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(2)} = \boldsymbol{0} \quad \text{اور} \quad \boldsymbol{A}(c\boldsymbol{x}_{(1)}) = c\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{0}$$

ہے جہاں c اختیاری مستقل ہے۔اگر مرتبہ $\boldsymbol{A} = r < n$ ہو تب مسئلہ 8.8-پ کے تحت ہم کسی بھی ترتیب سے $n - r$ موزوں متغیرات، جنہیں ہم x_{r+1} ، $\cdots$ ، x_n کہتے ہیں، چن کر ان کی قیمتیں مقرر کرتے ہوئے ہر حل حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں نظام 8.40 کے حل فضا کی اساس، جس کو ہم مختصراً اساسی حل کہیں گے، $\boldsymbol{y}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{y}_{(n-r)}$ ہوں گے جہاں $x_{r+j} = 1$ اور x_{r+1} تا x_n میں بقایا کو صفر چنتے ہوئے اساسی سمتیہ $\boldsymbol{y}_{(j)}$ حاصل کیا جاتا ہے۔ یوں اس حل سمتیہ کے پہلے r مطابقتی ارکان حاصل ہوتے ہیں۔ یوں نظام 8.40 کے اساس حل کی بُعد $n - r$ ہو گی جس سے مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

چونکہ نظام 8.40 کی حل فضا میں ہر $\boldsymbol{x}$ کے لئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ہے لہٰذا نظام 8.40 کے حل فضا کو معدوم فضا[82] بھی کہتے ہیں اور اس کی بُعد کو $\boldsymbol{A}$ کی معدومیت[83] کہتے ہیں۔ یوں مسئلہ 8.9 درج ذیل کہتا ہے

$$\text{مرتبہ } \boldsymbol{A} + \text{معدومیت } \boldsymbol{A} = n \tag{8.41}$$

جہاں نا معلوم متغیرات کی تعداد ($\boldsymbol{A}$ میں قطاروں کی تعداد) n ہے۔

[82] null space
[83] nullity

مزید تعریف درجہ کے تحت نظام 8.40 کا مرتبہ $\boldsymbol{A} \leq m$ ہو گا۔یوں $m < n$ کی صورت میں مرتبہ $\boldsymbol{A} < n$ ہو گا۔اس طرح مسئلہ 8.9 سے درج ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 8.10: متغیرات کی تعداد سے کم مساوات کا متجانس نظام
ایسا متجانس نظام جس میں مساوات کی تعداد، متغیرات کی تعداد سے کم ہو کے ہر صورت غیر صفر اہم حل موجود ہوں گے۔

غیر متجانس خطی نظام

نظام 8.36 کے تمام حل درج ذیل ہوں گے۔

مسئلہ 8.11: غیر متجانس خطی نظام
اگر غیر متجانس نظام 8.36 بلا تضاد ہو تب اس کے تمام حل درج ذیل ہوں گے

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_h \tag{8.42}$$

جہاں $\boldsymbol{x}_0$ نظام 8.36 کا کوئی بھی (معین) حل ہے جبکہ $\boldsymbol{x}_h$ ، مطابقتی متجانس نظام 8.40 کا، باری باری ہر حل ہو گا۔

ثبوت : چونکہ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ہے لہٰذا نظام 8.36 کے کسی بھی دو عدد حل کا فرق $\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ مطابقتی نظام 8.40 کا بھی حل ہو گا۔چونکہ $\boldsymbol{x}$ نظام 8.36 کا کوئی بھی حل ہو سکتا ہے لہٰذا ہم مساوات 8.5 میں نظام 8.36 کا کوئی بھی حل $\boldsymbol{x}_0$ اور نظام 8.40 کے تمام حل باری باری لیتے ہوئے نظام 8.36 کے تمام حل حاصل کر سکتے ہیں۔

□

8.6 دو رتبی اور تین رتبی مقطع قالب

دو رتبی **مقطع قالب**[84] درج ذیل ہے۔

$$D = \boldsymbol{A}\ \text{مقطع} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{8.43}$$

دھیان رہے کہ قالب چکور قوسین میں لکھا جاتا ہے جبکہ مقطع کو سیدھی عمودی لکیروں میں لپیٹ کر لکھا جاتا ہے۔ مقطع $\boldsymbol{A}$ کو $|\boldsymbol{A}|$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

قاعدہ کریمر برائے دو مساوات کا خطی نظام

دو عدد متجانس مساوات

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \text{(ب)} \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned} \tag{8.44}$$

کا حل

$$D \neq 0$$

کی صورت میں بذریعہ **قاعدہ کریمر**[85] درج ذیل ہے

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{D}, \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{D} \end{aligned} \tag{8.45}$$

جہاں مساوات 8.43 مقطع D دیتی ہے۔ غیر صفر اہم حل والے متجانس نظام کی صورت میں $D = 0$ پایا جاتا ہے۔

ثبوت: ہم مساوات 8.45 کو ثابت کرتے ہیں۔ x_2 حذف کرنے کی خاطر مساوات 8.44-الف کو a_{22} اور مساوات 8.44-ب کو $-a_{12}$ سے ضرب دے کر جمع کرتے ہیں۔

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

---

determinant[84]
Cramer's rule[85]

اسی طرح x_1 حذف کرنے کی خاطر مساوات 8.44-الف کو $-a_{21}$ اور مساوات 8.44-ب کو a_{11} سے ضرب دے کر جمع کرتے ہیں۔

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

اب $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D \neq 0$ کی صورت میں درج بالا دونوں مساوات کو $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ سے تقسیم کرتے ہوئے، دائیں اطراف کو قالبوں کی صورت میں لکھ کر، مساوات 8.45 حاصل ہوتے ہیں۔

□

مثال 8.29: درج ذیل کو قاعدہ کریمر کی مدد سے حل کریں۔

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 5 \end{aligned}$$

حل: قاعدہ کریمر سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-5}{-2-1} = 2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{10-1}{-2-1} = -3$$

□

تین رتبی مقطع

تین رتبی **مقطع قالب** کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{8.46}$$

درج بالا میں دائیں ہاتھ علامتوں کی ترتیب $+ - +$ ہے۔دائیں ہاتھ مقطع کے عددی سر بالترتیب بائیں ہاتھ مقطع کی پہلی قطار کے ارکان (ضرب $+ - +$) ہیں۔ بائیں ہاتھ مقطع سے پہلی صف اور پہلی قطار حذف کرنے سے دائیں ہاتھ کا پہلا مقطع ملتا ہے۔اسی طرح دوسری صف اور پہلی قطار حذف کرنے سے دوسرا مقطع ملتا ہے اور تیسری

صف اور پہلی قطار حذف کرنے سے تیسرا مقطع ملتا ہے۔دائیں ہاتھ کے تین مقطع بالترتیب D میں a_{11} ، a_{21} اور a_{31} کے اصغر[86] کہلاتے ہیں۔اصغر کو M سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مساوات 8.46 میں دائیں ہاتھ اصغر کو پھیلا کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22} \tag{8.47}$$

قاعدہ کریمر برائے تین مساوات کا خطی نظام

تین مساوات کے خطی نظام

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{8.48}$$

کا حل بذریعہ قاعدہ کریمر درج ذیل ہے

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \qquad (D \neq 0) \tag{8.49}$$

جہاں مساوات 8.46 اور مساوات 8.47 نظام کا مقطع D دیتے ہیں جبکہ

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

ہیں۔دھیان رہے کہ D کی پہلی، دوسری اور تیسری قطار کی جگہ مساوات 8.48 کا دایاں ہاتھ پر کرنے سے بالترتیب D_1 ، D_2 اور D_3 ملتے ہیں۔

درج بالا قاعدہ کریمر کو بھی اسقاط کی ترکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مسئلہ 8.15 سے بھی اس کو حاصل کیا جا سکتا ہے۔

[86] minor

8.7 مقطع۔ قاعدہ کریمر

ابتدائی طور پر مقطع قالب، خطی نظام کے حل کے لئے استعمال کیا جاتا رہا۔ اب یہ انجینئری کے دیگر مسائل، مثلاً امتیازی مسائل (آئگنی مسائل)، تفرقی مساوات اور سمتی الجبرا، میں بھی اہم کردار ادا کرتا ہے۔اس کو کئی طریقوں سے متعارف کرایا جا سکتا ہے۔ہم اس کو خطی نظام کے نقطہ نظر سے متعارف کرتے ہیں۔

n رتبی **مقطع قالب** سے مراد ایسی غیر سمتی مقدار ہے جو $n \times n$ (چکور) قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ سے منسوب ہے اور جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$D = \boldsymbol{A}\text{ مقطع} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8.50}$$

$n = 1$ کے لئے مقطع قالب کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$D = a_{11} \tag{8.51}$$

$n \geq 2$ کے لئے مقطع کی تعریف

$$\begin{aligned} &\text{(الف)} \quad D = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jn}C_{jn} \qquad (j = 1 \text{ یا } 2 \cdots \text{ یا } n) \\ &\text{یا} \\ &\text{(ب)} \quad D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \qquad (k = 1 \text{ یا } 2 \cdots \text{ یا } n) \end{aligned} \tag{8.52}$$

ہے جہاں

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk} \tag{8.53}$$

ہے اور M_{jk} از خود $n-1$ رتبی مقطع قالب ہے، جو $\boldsymbol{A}$ سے a_{jk} رکن کا صف اور قطار، یعنی j صف اور k قطار، حذف کرتے ہوئے حاصل ذیلی قالب کا مقطع ہے۔

یوں D کی تعریف n عدد، $n-1$ رتبی مقطع کے ذریعہ کی جاتی ہے، جہاں ہر $n-1$ رتبی مقطع کی تعریف از خود $n-1$ عدد $n-2$ رتبی مقطع کے ذریعہ کی جاتی ہے، اور یہی سلسلہ چلتا رہتا ہے حتیٰ کہ آخر کار دو رتبی مقطع قالب آن پہنچتی ہے جس کے ذیلی قالبوں میں واحد ایک رکن ہوتا ہے جس کا مقطع یہی واحد رکن ہوتا ہے۔

مقطع کی تعریف کی رو سے ہم D کو کسی بھی صف یا قطار سے پھیلا سکتے ہیں۔یوں D کو پہلی قطار سے پھیلانے کی خاطر مساوات 8.52-الف میں $j = 1$ لیا جائے گا۔اسی طرح تیسری قطار سے D کو پھیلانے کی خاطر مساوات 8.52-ب میں $k = 3$ لیا جائے گا۔ہر C_{jk} کو بھی بالکل اسی طرح کسی صف یا قطار سے پھیلایا جا سکتا ہے۔

مقطع کی یہ تعریف غیر مبہم ہے (ثبوت کتاب کے آخر میں ضمیمہ ا میں پیش کیا گیا ہے)۔کسی بھی صف یا قطار سے D کو پھیلا کر ایک جیسا جواب حاصل ہو گا۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ بڑے جسامت کے مقطع کو صف یا قطار سے پھیلا کر حاصل کرنا عملاً نا قابل استعمال ہے۔یہ سمجھنے کی خاطر سوال 8.101 دیکھیں۔

مقطع کی بات کرتے ہوئے، قالب کی اصطلاحات ہی استعمال کی جاتی ہیں۔یوں ہم کہیں گے کہ D میں n^2 ارکان a_{jk} پائے جاتے ہیں، اس کے j صف اور k قطار ہیں اور اس کی مرکزی وتر پر a_{11} ، $\cdots$ ، a_{nn} ارکان ہیں۔دو نئے اصطلاحات درج ذیل ہیں۔

M_{jk} کو D میں a_{jk} کا اصغر[87] کہتے ہیں اور C_{jk} کو D میں a_{jk} کا ہم ضربی[88] کہتے ہیں۔

مساوات 8.52 کو اصغر کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\text{(الف)} \quad D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \qquad (j = 1 \text{ یا } 2 \cdots \text{ یا } n) \tag{8.54}$$

$$\text{(ب)} \quad D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk} \qquad (k = 1 \text{ یا } 2 \cdots \text{ یا } n)$$

مثال 8.30: تین رتبی مقطع کے اصغر اور ہم ضربی

مساوات 8.46 میں مقطع کو پہلی قطار سے پھیلایا گیا ہے۔ہم یہاں دوسری صف کے ارکان کے اصغر اور ہم ضربی لکھتے ہیں۔اصغر درج ذیل ہیں

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

---

minor[87]
cofactor[88]

جبکہ ہم ضربی $C_{21}=-M_{21}$ ، $C_{22}=M_{22}$ اور $C_{23}=-M_{23}$ ہیں۔بقایا تمام ارکان کے اصغر اور ہم ضربی حاصل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ درج ذیل خانہ دار نقش پیدا ہوتا ہے۔

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

□

مثال 8.31: تین رتبی مقطع

ایک ہی تین رتبی مقطع کو پہلی صف اور دوسری صف سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2(2-20)-0(1-15)-3(4-6)=-30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} &= -1\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -1(0+12)+2(2+9)-5(8-0)=-30 \end{aligned}$$

□

مثال 8.32: تکونی قالب کا مقطع

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \tag{8.55}$$

□

درج بالا مثال میں آپ نے دیکھا کہ تکونی قالب کا مقطع، مرکزی وتر کے تمام اجزاء کا حاصل ضرب ہے۔

مقطع کی عمومی خصوصیات

مقطع کی تعریف (مساوات 8.52) استعمال کرتے ہوئے مقطع حاصل کرنا نہایت لمبا کام ہے۔اعمال صف سے نہایت عمدگی کے ساتھ مقطع حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اعمال صف سے بالائی تکونی مقطع کی صورت حاصل کی جاتی ہے، جس کے مرکزی وتر کے اندراجات کا حاصل ضرب درکار مقطع ہو گا۔یہ ترکیب قالب پر لاگو اعمال صف کی طرح ضرور ہے لیکن بالکل اس کی طرح ہر گز نہیں ہے۔بالخصوص، مقطع کے دو صف کی جگہ آپس میں تبدیل کرنے سے مقطع کی قیمت منفی اکائی (-1) سے ضرب ہو گی۔ تفصیل درج ذیل ہے۔

مسئلہ 8.12: بنیادی اعمال صف اور مقطع کی خصوصیات

- (الف) دو صفوں کا آپس میں تبادلہ کرنے سے مقطع کی قیمت -1 سے ضرب ہو گی۔
- (ب) ایک صف کے مضرب کو دوسرے صف کے ساتھ جمع کرنے سے مقطع کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی۔
- (پ) کسی صف کو غیر صفر مستقل c سے ضرب دینے سے مقطع کی قیمت c سے ضرب ہو گی۔(یہ $c=0$ کے لئے بھی درست ہے لیکن ایسا کرنا بنیادی عمل صف نہ ہو گا۔)

ثبوت:
(الف) ہم اس حقیقت کو الکراجی ماخوذ سے ثابت کرتے ہیں۔دو رتبی $(n=2)$ مقطع کے لئے (الف) درست ہے یعنی

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \qquad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

ہم اب الکراجی ماخوذ کا قیاس کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ $n-1 \geq 2$ رتبی مقطع کے لئے بھی (الف) درست ہے اور اس کو n رتبی مقطع کے لئے ثابت کرتے ہیں۔فرض کریں کہ D مقطع n رتبی ہے اور اس کے دو صفوں کا آپس میں تبادلہ کرنے سے E مقطع حاصل ہوتا ہے۔ D اور E کو کسی ایسی صف سے پھیلائیں جس کی جگہ تبدیل نہ کی گئی ہو۔اس کو ہم j صف کہتے ہیں۔ مساوات 8.54-الف سے درج ذیل لکھا جائے گا

$$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} M_{jk}, \qquad E = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} N_{jk} \tag{8.56}$$

جہاں E میں a_{jk} کے اصغر کو N_{jk} لکھا گیا ہے۔اب چونکہ M_{jk} اور N_{jk} ، $n-1$ کے اصغر ہیں لہٰذا ہمارے قیاس کے تحت $n-1$ رتبی مقطع کے لئے (الف) درست ہے لہٰذا $N_{jk}=-M_{jk}$ ہو گا اور یوں مساوات 8.56 کے تحت $E=-D$ ہو گا۔

(ب) صف i کو c سے ضرب کرتے ہوئے صف j کے ساتھ جمع کرنے سے نیا مقطع حاصل کرتے ہیں جس کو ہم $\tilde{D}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $\tilde{D}$ کے صف j کے اندراجات $a_{jk}+ca_{ik}$ ہوں گے۔ $\tilde{D}$ کو j صف سے پھیلا کر $\tilde{D}=D_1+cD_2$ ملتا ہے جہاں $D_1=D$ کے صف j میں a_{jk} اندراجات ہیں جبکہ D_2 کے صف j میں D کے صف i والے اندراجات a_{ik} ہیں جبکہ اس کے صف i میں بھی یہی a_{ik} اندراجات ہیں۔یوں D_2 کے i اور j صفوں میں ایک جیسے اندراجات ہیں۔ D_2 کے i اور j صفوں کا آپس میں تبادلہ کرنے سے دوبارہ D_2 ہی ملتا ہے جبکہ (الف) کے تحت ایسا کرنے سے مقطع -1 سے ضرب ہو گا۔ یوں $D_2=-D_2$ ملتا ہے۔اس طرح $D_2=0$ ہو گا جس سے $\tilde{D}=D_1=D$ ہو گا۔

(پ) مقطع اس صف سے پھیلا کر حاصل کریں جس کو c سے ضرب دیا گیا ہے۔

خبردار! $n\times n$ قالب کو c سے ضرب دینے سے مقطع c^n سے ضرب ہو گا۔

□

مثال 8.33: تکونی صورت حاصل کرتے ہوئے مقطع کا حصول
تکونی صورت حاصل کرتے ہوئے۔ قالب کے دائیں جانب عمل صف لکھے گئے ہیں جہاں S_1 ، S_2 ، S_3 اور

S_4 گزشتہ قدم کے قالب کی پہلی، دوسری، تیسری اور چوتھی صف کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 2S_1 \\ \\ S_4 - S_1 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{13}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 + \frac{1}{10}S_2 \\ S_4 - \frac{1}{5}S_2 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{13}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{57}{16} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ S_4 + \frac{1}{8}S_3 \end{matrix}
\end{aligned}
$$

اب مثال 8.32 کی طرح، مرکزی وتر کے اندراجات کا حاصل ضرب، مقطع ہو گا۔

$$D = (2)(-10)\left(\frac{8}{5}\right)\left(\frac{57}{16}\right) = -114$$

□

مسئلہ 8.13: n رتبی مقطع کے دیگر خصوصیات

- (الف، ب ،پ) مسئلہ 8.12 کے شق-الف، ب اور پ قطاروں کے لئے بھی درست ہے۔
- (ت) تبدیلی محل سے مقطع تبدیل نہیں ہو گا۔
- (ٹ) صفر صف یا قطار کی صورت میں مقطع صفر ہو گا۔

- (ث) راست تناسب صف یا قطار کی صورت میں مقطع صفر کے برابر ہو گا۔ بالخصوص دو ایک جیسے صف یا قطار کی صورت میں مقطع کی قیمت صفر ہو گی۔

ثبوت: (الف تا ٹ) یہ تمام شق اس حقیقت سے اخذ کیے جا سکتے ہیں کہ مقطع کو کسی بھی صف یا کسی بھی قطار سے پھیلا کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مقطع کی تبدیلی محل بالکل قالب کی تبدیلی محل کی طرح ہو گی۔ یوں مقطع کا j صف تبدیل محل کا j قطار ہو گا۔

(ث) اگر صف i ضرب c برابر ہو صف j کے تب $D = cD_1$ ہو گا جہاں D_1 کے صف i اور j ایک جیسے ہوں گے۔ یوں D_1 کے صف i اور j کا آپس میں تبادلہ کرنے سے دوبارہ D_1 حاصل ہوتا ہے جبکہ مسئلہ 8.12-الف کے تحت اس کی قیمت $-D_1$ ہو گی۔ یوں $D_1 =$ یا $D = cD_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ بالکل اسی طرز کا ثبوت راست تناسب قطاروں کے لئے بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

□

یہ قابل توجہ ہے کہ مرتبہ قالب، جو قالب میں زیادہ سے زیادہ خطی طور غیر تابع صفوں یا قطاروں کی تعداد ہے (حصہ 8.4 دیکھیں)، اور مقطع کے مابین تعلق پایا جاتا ہے۔ چونکہ صرف صفر قالب کا مرتبہ صفر کے برابر ہوتا ہے (حصہ 8.4 دیکھیں) لہٰذا ہم یہاں فرض کر سکتے ہیں کہ مرتبہ $\boldsymbol{A} > 0$ ہے۔

مسئلہ 8.14: مرتبہ قالب بذریعہ مقطع
$m \times n$ جسامت کے قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کا صرف اور صرف اس صورت (غیر صفر) مرتبہ، r کے برابر ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ کا ایسا ذیلی $r \times r$ قالب پایا جاتا ہو جس کا مقطع غیر صفر ہو، جبکہ ایسے ہر ذیلی قالب جس میں $r + 1$ یا اس سے زیادہ صف ہوں کا مقطع صفر ہو۔

بالخصوص $n \times n$ چکور قالب $\boldsymbol{A}$ کا مرتبہ صرف اور صرف اس صورت n ہو گا جب مقطع $\boldsymbol{A} \neq 0$ ہو۔

ثبوت: بنیادی اعمال صف (حصہ 8.3) مرتبہ قالب پر اثر انداز نہیں ہوتے (مسئلہ 8.2) اور نا ہی مقطع قالب کے غیر صفر ہونے پر اثر انداز ہوتے ہیں (مسئلہ 8.13)۔ $\boldsymbol{A}$ کی زینہ دار صورت (حصہ 8.3) کو $\tilde{\boldsymbol{A}}$ سے ظاہر کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے (پہلے) r صف، صرف اور صرف اس صورت غیر صفر ہوں گے جب مرتبہ $\boldsymbol{A} = r$ ہو۔ فرض کریں کہ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے بالائی بائیں کونے کا $r \times r$ ذیلی قالب $\tilde{R}$ ہے (یوں $\tilde{\boldsymbol{A}}$

کے پہلے r صفر اور پہلے r قطار پر $\tilde{R}$ مشتمل ہو گا)۔ چونکہ $\tilde{R}$ تکونی ہے اور اس کے مرکزی وتر پر تمام اندراجات غیر صفر ہیں لٰہذا مقطع $\tilde{R} \neq 0$ ہو گا۔چونکہ $\boldsymbol{A}$ سے حاصل کردہ، مطابقتی $r \times r$ ذیلی قالب R سے بنیادی اعمال صف کے ذریعہ $\tilde{R}$ حاصل کیا گیا ہے لٰہذا مقطع $R \neq 0$ ہو گا۔اسی طرح چونکہ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کے بالائی بائیں $r+1$ (یا اس سے زیادہ ممکنہ) صف اور قالب کے چکور ذیلی قالب $\tilde{S}$ میں کم از کم ایک عدد صفر صف ہو گا (ورنہ مرتبہ $\boldsymbol{A} \leq r+1$ ہوتا) لٰہذا مقطع $\tilde{S} = 0$ ہو گا (مسئلہ 8.13) اور چونکہ $\boldsymbol{A}$ سے حاصل کردہ مطابقتی S ذیلی قالب سے بذریعہ بنیادی اعمال صف، $\tilde{S}$ کو حاصل کیا گیا ہے لٰہذا مقطع $S = 0$ ہو گا۔ یوں مسئلے میں $m \times n$ قالب کی شق کا ثابت مکمل ہوا۔

اگر $\boldsymbol{A}$ چکور $n \times n$ قالب ہو تب درج بالا ثبوت کے تحت مرتبہ $\boldsymbol{A} = n$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ کا ایسا $n \times n$ ذیلی قالب پایا جاتا ہو جس کا مقطع غیر صفر ہو یعنی جب مقطع $\boldsymbol{A} \neq 0$ ہو (چونکہ $\boldsymbol{A}$ کا $n \times n$ ذیلی قالب $\boldsymbol{A}$ ہی ہو گا)۔

□

قاعدہ کریمر

اس مسئلے کو استعمال کرتے ہوئے ہم قاعدہ کریمر[89] حاصل کرتے ہیں جو خطی نظام کے حل کو مقطع کی صورت میں پیش کرتا ہے۔ اگرچہ عملاً قاعدہ کریمر[90] زیادہ مقبول نہیں ہے، اس کی اہمیت تفرقی مساوات کی نظام اور انجینئری کے دیگر مسائل میں پائی جاتی ہے۔

مسئلہ 8.15: مسئلہ کریمر (خطی نظام کا حل بذریعہ مقطع)
(الف) اگر n عدد مساوات اور n متغیرات x_1 ، $\cdots$ ، x_n کے نظام

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\tag{8.57}
$$

[89] Cramer's rule
[90] سوئزرلینڈ کا ریاضی دان، جبرائیل کریمر [1704-1752]

کے عددی سر قالب کا غیر صفر مقطع $D = \boldsymbol{A}$ ہو تب اس نظام کا واحد ایک حل ہو گا۔ یہ حل درج ذیل مساوات دیتے ہیں

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D} \qquad \text{قاعدہ کریمر} \tag{8.58}$$

جہاں D_k وہ مقطع ہے جو D میں قطار k کی جگہ b_1 ، $\cdots$ ، b_n پر کرتے ہوئے حاصل ہو گا۔

(ب) یوں اگر نظام 8.57 متجانس ہو اور $D \neq 0$ ہو تب اس نظام کا صرف غیر اہم صفر حل $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $\cdots$ ، $x_n = 0$ ہو گا۔ البتہ $D = 0$ کی صورت میں نظام کے غیر صفر اہم حل بھی پائے جائیں گے۔

ثبوت: افزودہ قالب $\tilde{\boldsymbol{A}}$ کی جسامت $n \times (n+1)$ ہے لہٰذا اس کا مرتبہ زیادہ سے زیادہ n ممکن ہے۔ اب اگر

$$D = \text{مقطع}\, \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{8.59}$$

ہو تب مسئلہ 8.14 کے تحت مرتبہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو گا۔ یوں مرتبہ $\tilde{\boldsymbol{A}} =$ مرتبہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو گا۔ اس طرح مسئلہ 8.8 کے تحت نظام 8.57 کا حل یکتا ہو گا۔

آئیں اب مساوات 8.58 کو ثابت کریں۔ D کو قطار k سے پھیلاتے ہیں

$$D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \tag{8.60}$$

جہاں D میں a_{ik} کا ہم ضربی C_{ik} ہے۔ اگر D میں قطار k کی جگہ کوئی اور اعداد بھر دیے جائیں تو ہمیں نیا مقطع ملے گا جس کو ہم $\hat{D}$ کہہ سکتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ $\hat{D}$ کو اس k قطار سے پھیلانے سے مساوات 8.60 کی طرز کی مساوات ملے گی جس میں a_{1k} ، $\cdots$ ، a_{nk} کی جگہ یہی نئے اعداد ہوں گے جبکہ C_{ik} پہلے والے ہی ہوں گے۔ بالخصوص اگر ہم D کے قطار l (جہاں $l \neq k$ ہے) کے اندراجات a_{1l} ، $\cdots$ ، a_{nl} کو ہی بطور نئے اعداد منتخب کریں تب نئے مقطع $\hat{D}$ میں قطار $[a_{1l} \quad \cdots \quad a_{nl}]^T$ دو مرتبہ پایا جائے گا، پہلی بار بطور قطار l اور دوسری مرتبہ بطور قطار k جس کی جگہ یہ اعداد پر کیے گئے۔ یوں مسئلہ 8.13-ث کے تحت

$\hat{D}=0$ ہو گا۔ یوں $\hat{D}$ کو قطار k (جس میں a_{1l}، $\cdots$، a_{nl} پر کیے گئے ہیں) سے پھیلا کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$a_{1l}C_{1k}+a_{2l}C_{2k}+\cdots+a_{nl}C_{nk}=0 \qquad (l\neq k) \tag{8.61}$$

اب ہم نظام 8.57 کی پہلی مساوات کے دونوں اطراف کو C_{1k}، دوسری مساوات کے دونوں اطراف کو C_{2k}، اور اسی طرح چلتے ہوئے آخری مساوات کے دونوں اطراف کو C_{nk} سے ضرب دیتے ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}C_{1k}(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)+\cdots+C_{nk}(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)\\=b_1C_{1k}+\cdots+b_nC_{nk}\end{aligned} \tag{8.62}$$

ایک جیسے x_j کے عددی سر اکٹھے کرتے ہوئے اس کے بائیں ہاتھ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$x_1(a_{11}C_{1k}+a_{21}C_{2k}+\cdots+a_{n1}C_{nk})+\cdots+x_n(a_{1n}C_{1k}+a_{2n}C_{2k}+\cdots+a_{nn}C_{nk})$$

مساوات 8.60 کے تحت درج بالا میں a_k کا جزو ضربی D کے برابر ہے جبکہ x_l (جہاں $l\neq k$ ہے) کا جزو ضربی صفر کے برابر ہے لہٰذا مساوات 8.62 کا بایاں ہاتھ x_kD کے برابر ہے اور یوں اس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$x_lD=b_1C_{1k}+\cdots+b_nC_{nk}$$

اس مساوات کا دایاں ہاتھ، قطار k سے پھیلایا گیا D_k ہے (D_k کی تعریف اس مسئلے میں دی گئی ہے)۔یوں درج بالا کے دونوں اطراف کو D سے تقسیم کرتے ہوئے قاعدہ کریمر حاصل ہوتا ہے۔

اگر نظام 8.57 متجانس ہو اور $D\neq 0$ ہو تب ہر D_k میں (b_1، $\cdots$، b_n پر مبنی) قطار صفر کے برابر ہو گا لہٰذا (مسئلہ 8.13-ٹ کے تحت) تمام D_k صفر ہوں گے اور مساوات 8.58 غیر اہم صفر حل دے گا۔

آخر میں اگر نظام 8.57 متجانس ہو اور $D=0$ ہو تب مسئلہ 8.14 کے تحت مرتبہ $\boldsymbol{A}<n$ ہو گا لہٰذا مسئلہ 8.9 کے تحت اس کا غیر صفر اہم حل پایا جائے گا۔

□

مثال 8.34: قاعدہ کریمر (مسئلہ 8.15) درج ذیل خطی نظام کو قاعدہ کریمر سے حل کریں۔

$$\begin{aligned}x_1-x_2+x_3&=4\\x_1+x_2+x_3&=2\\x_1-2x_2-x_3&=3\end{aligned}$$

حل:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-4} = 2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-4} = 1$$

□

سوالات

سوال 8.95 تا سوال 8.102 عمومی نوعیت کے ہیں۔

سوال 8.95: مسئلہ 8.12
$\boldsymbol{A}$ کے دو قطاروں کی جگہ آپس میں تبدیل کرنے سے قالب $\boldsymbol{B}$ حاصل کیا گیا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{B}$ میں دو قالب کا آپس میں تبادلہ کرتے ہوئے $\boldsymbol{C}$ حاصل کیا گیا ہے۔ $\boldsymbol{A}$ میں دو مرتبہ تبادلہ سے بھی $\boldsymbol{C}$ حاصل ہو گا۔مسئلہ 8.12 استعمال کیے بغیر ان کا مقطع حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

جوابات: $|\boldsymbol{A}| = 6$ ، $\boldsymbol{B} = -6$ ، $\boldsymbol{C} = (-1)(-1)6 = 6$

سوال 8.96: مسئلہ 8.12
درج ذیل کا مقطع حاصل کریں۔ پہلی صف کے ساتھ دوسری صف جمع کرتے ہوئے نیا قالب حاصل کریں۔مسئلہ

8.12 استعمال کیے بغیر, اس نئے قالب کا مقطع حاصل کریں۔

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

جوابات: -7 ، -7

سوال 8.97: مسئلہ 8.12
$\boldsymbol{A}$ کی پہلی صف کو 2 سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{B}$ حاصل ہوتا ہے جس کے تیسری قطار کو 3 سے ضرب دیتے ہوئے $\boldsymbol{C}$ حاصل ہوتا ہے۔ان کے مقطع حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & -9 \end{vmatrix}$$

جوابات: -23 ، -46 ، -138

سوال 8.98: مسئلہ 8.13
درج ذیل کا مقطع حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

جوابات: -50 ، -50

سوال 8.99: مسئلہ 8.13
درج ذیل کا مقطع حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

جوابات: 0 ، 0 ، 0

سوال 8.100: درج ذیل قالب کا مقطع، باری باری، پہلی صف، دوسری صف، پہلی قطار اور دوسری قطار سے پھیلا کر حاصل کریں۔

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

جواب: -10

سوال 8.101: پھیلا کر مقطع حاصل کرنا عملاً نا قابل استعمال ہے
ثابت کریں کہ n رتبی مقطع کے لئے $n!$ ضرب درکار ہوں گے۔یوں اگر ایک ضرب حاصل کرنے کے لئے 10^{-9} سیکنڈ درکار ہوں تب درج ذیل وقت درکار ہوں گے۔

n	10	15	20	25
وقت	0.004 سیکنڈ	22 منٹ	77 سال	0.5×10^9 سال

سوال 8.102: قالب ضرب غیر سمتی مقدار
دکھائیں کریں کہ مقطع $(k\boldsymbol{A}) = k^n \times$ مقطع $\boldsymbol{A}$ ہو گا (نہ کہ مقطع $k \times \boldsymbol{A}$)۔یہاں k غیر سمتی مقدار ہے۔

سوال 8.103 تا سوال 8.110 میں مقطع دریافت کریں۔

سوال 8.103:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$$

جواب: $\cos(\alpha+\beta)$

سوال 8.104:

$$\begin{vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix}$$

جواب: 1

سوال 8.105:

$$\begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix}$$

جواب: 1

سوال 8.106:

$$A=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$$

جوابات: -1 ، 2 ، -3

سوال 8.107:

$$A=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$

جوابات: 1 ، 1 ، 1

سوال 8.108:

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}$$

جواب: $a^3+b^3+c^3-3abc$

سوال 8.109:

$$\begin{vmatrix}1&2&1&0\\0&1&1&-1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

جواب: -1

سوال 8.110:

$$\begin{vmatrix}3&2&1&0\\1&2&-3&-1\\2&3&4&-5\\5&3&2&1\end{vmatrix}$$

جواب: 15

سوال 8.111 تا سوال 8.114 متجانس مساوات کی غیر صفر اہم حل کے سوالات ہیں۔

سوال 8.111: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔سیدھا خط
متجانس نظام کا $D = 0$ کی صورت میں غیر صفر اہم حل پایا جائے گا۔سیدھے خط کی عمومی مساوات $ax + by = c$ ہے۔آئیں نقطہ $(1, -2)$ اور $(4, 3)$ سے گزرتے خط کی مساوات دریافت کریں۔اس مسئلے کو بطور درج ذیل نظام لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} xa + yb - c \cdot 1 &= 0 \\ a - 2b - c \cdot 1 &= 0 \\ 4a + 3b - c \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

a ، b اور c کا عددی سر مقطع صفر کے برابر ٹھہرا کر اس سیدھے خط کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: $5x - 3y = 11$

سوال 8.112: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔سطح مستوی
سطح مستوی کی عمومی مساوات $ax + by + cz = p$ ہے۔نقطہ $(1, 1, 1)$ ، $(3, 0, 2)$ اور $(0, 5, 4)$ سے گزرتی سطح کا نظام لکھیں۔ a ، b ، c اور p کا عددی سر مقطع D لکھیں۔یوں $D = 0$ سے سطح کی مساوات دریافت کریں۔

جواب:

$$\begin{aligned} xa + yb + zc - p &= 0 \\ a + b + c - p &= 0 \\ 3a \qquad + 2c - p &= 0' \\ 5b + 4c - p &= 0 \end{aligned} \qquad D = \begin{vmatrix} x & y & z & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}, \qquad x + y - z = -1$$

سوال 8.113: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔دائرہ
ثابت کریں کہ xy سطح پر دائرے کی عمومی مساوات $x^2 + y^2 + ax + by = c$ ہے۔نقطہ $(1, 2)$ ،

$(3,2)$ اور $(1-,5)$ سے گزرتے ہوئے دائرے کا نظام لکھیں۔ اس نظام کے عددی سر مقطع سے دائری کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: دائرے کی عمومی مساوات $(y-y_0)^2+(x-x_0)^2=r^2$ کو پھیلا کر $x^2+y^2+2x+by=c$ ملتا ہے۔ نظام، عددی سر قالب اور دائرے کی مساوات درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+xa+yb-c&=0\\
5+a+2b-c&=0\\
13+3a+2b-c&=0\\
26+5a-b-c&=0
\end{aligned}
$$

$$D=\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & -1\\ 5 & 1 & 2 & -1\\ 13 & 3 & 2 & -1\\ 26 & 5 & -1 & -1\end{vmatrix},\quad 6x^2+6y^2-24x+10y=26$$

سوال 8.114: متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل۔کروی سطح

کروی سطح کی عمومی مساوات $(z-z_0)^2+(y-y_0)^2+(x-x_0)^2=r^2$ ہے۔ نقطہ $(0,0,-2)$ ، $(0,0,7)$ ، $(2,0,5)$ اور $(0,2,5)$ سے گزرتی کروی سطح کی مساوات دریافت کریں۔

جواب: $x^2+y^2+z^2-10z=-21$

سوال 8.115 تا سوال 8.119 کو قاعدہ کریمر سے حل کریں۔

سوال 8.115:

$$
\begin{aligned}
3x_1-2x_2&=8\\
2x_1+x_2&=3
\end{aligned}
$$

جوابات: $x_1=2$ ، $x_2=-1$

سوال 8.116:

$$
\begin{aligned}
0.8x_1-1.2x_2&=1.76\\
0.6x_1+0.2x_2&=0.88
\end{aligned}
$$

جوابات: $x_1 = 1.6$ ، $x_2 = -0.4$

سوال 8.117:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

جوابات: $x_1 = -2$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = -1$

سوال 8.118:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_2 + x_3 &= -7 \\ x_1 \qquad + 3x_3 &= -8 \end{aligned}$$

جوابات: $x_1 = 1$ ، $x_2 = -2$ ، $x_3 = -3$

سوال 8.119:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad &= 5 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 \qquad + 3x_3 \qquad &= -6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

جوابات: $x_1 = 0$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = -2$ ، $x_4 = 2$

8.8 معکوس قالب۔ گاوس جارڈن اسقاط

اس حصے میں صرف چکور قالبوں پر غور کیا جائے گا۔

$n \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کے **معکوس**[91] جس کو $\boldsymbol{A}^{-1}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے سے مراد ایسا $n \times n$ قالب ہے جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{8.63}$$

جہاں $\boldsymbol{I}$ اکائی $n \times n$ قالب ہے (حصہ 8.2 دیکھیں)۔

ایسا $\boldsymbol{A}$ جس کا معکوس پایا جاتا ہو **غیر نادر قالب**[92] کہلاتا ہے جبکہ ایسا $\boldsymbol{A}$ جس کا معکوس نہ پایا جاتا ہو **نادر قالب**[93]

[91] inverse
[92] nonsingular matrix
[93] singular matrix

کہلاتا ہے۔

اگر A کا معکوس اگر پایا جاتا ہو، یہ معکوس یکتا ہو گا۔

یقیناً اگر B اور C دونوں A کے معکوس ہوں تب $AB = I$ اور $CA = I$ ہوں گے جن سے یکتائی کا درج ذیل ثبوت ملتا ہے۔

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

اب ہم ثابت کرتے ہیں کہ A کا معکوس< صرف اور صرف< اس صورت میں پایا جائے گا جب A کا مرتبہ n ہو، جو زیادہ سے زیادہ ممکنہ مرتبہ ہے۔ اسی ثبوت سے ظاہر ہو گا کہ اگر A^{-1} موجود ہو تب $Ax = b$ سے مراد $x = A^{-1}b$ ہے۔ یہ ہمیں معکوس کی افادیت اور اس کا خطی نظام سے تعلق دکھلائے گا۔ (البتہ جیسا سوال 8.101 سے صاف ظاہر ہوتا ہے، اس سے ہمیں خطی نظام حل کرنے کا بہتر طریقہ میسر نہیں ہو گا۔)

مسئلہ 8.16: معکوس کی موجودگی
$n \times n$ قالب A کا معکوس A^{-1} صرف اور صرف اس صورت میں موجود ہو گا جب مرتبہ $A = n$ ہو، یعنی (مسئلہ 8.14 کے تحت) صرف اور صرف اس صورت جب مقطع $A \neq 0$ ہو۔ یوں مرتبہ $A = n$ کی صورت میں A غیر نادر ہو گا جبکہ مرتبہ $A < n$ کی صورت میں A نادر ہو گا۔

ثبوت: $n \times n$ قالب A اور درج ذیل نظام

$$Ax = b \tag{8.64}$$

پر غور کریں۔ اگر معکوس A^{-1} موجود ہو تب درج بالا کے بائیں جانب کو A^{-1} سے ضرب دیتے ہوئے، مساوات 8.63 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$A^{-1}Ax = x = A^{-1}b \tag{8.65}$$

جو نظام 8.64 کا حل x دیتا ہے۔ اگر دوسرا حل u ہو تب $Au = b$ ہو گا جس سے $u = A^{-1}b = x$ ملتا ہے لہٰذا x یکتا حل ہے۔ یوں مسئلہ 8.8 کے تحت مرتبہ $A = n$ ہو گا۔

الٹ چلتے ہوئے، اگر مرتبہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو تب مسئلہ 8.8 کے تحت کسی بھی $\boldsymbol{b}$ کے لئے نظام 8.64 کا حل یکتا ہو گا۔ گاوسی اسقاط کے بعد قیمتیں واپس پر کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{x}$ کے ارکان x_j از خود $\boldsymbol{b}$ کے ارکان کے خطی مجموعے ہیں۔ یوں ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{b} \tag{8.66}$$

جہاں $\boldsymbol{B}$ حاصل کرنا باقی ہے۔ مساوات 8.64 میں پر کرنے سے، کسی بھی $\boldsymbol{b}$ کے لئے، درج ذیل ملتا ہے

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{b} \qquad (\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$$

لہٰذا $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ یعنی اکائی قالب ہو گا۔ اسی طرح مساوات 8.64 کو مساوات 8.66 میں پر کرنے سے، کسی بھی $\boldsymbol{x}$ کے لئے،

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

ملتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}$ ہو گا۔ ان نتائج کو ملا کر ثابت ہوتا ہے کہ معکوس $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ موجود ہے۔

□

گاوس جارڈن اسقاط سے معکوس کا حصول

غیر نادر $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس $\boldsymbol{A}^{-1}$ حاصل کرنے کی خاطر تبدیل شدہ گاوسی اسقاط کی ترکیب استعمال کی جا سکتی ہے جس کو گاوس جارڈن اسقاط[94] کہتے[95] ہیں۔ اس ترکیب کی تفصیل درج ذیل ہے۔

$\boldsymbol{A}$ استعمال کرتے ہوئے ہم n عدد خطی مساوات

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{e}_{(1)}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(n)} = \boldsymbol{e}_{(n)}$$

لکھتے ہیں جہاں $\boldsymbol{e}_{(1)}$، $\cdots$، $\boldsymbol{e}_{(n)}$ اکائی $n \times n$ قالب $\boldsymbol{I}$ کے قطار ہیں یعنی:

$$\boldsymbol{e}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \boldsymbol{e}_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \cdots, \boldsymbol{e}_{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$$

---

[94] Gauss-Jordan elimination

[95] ولہلم جارڈن [1842-1899] جرمنی کے ریاضی دان۔

ان n عدد سمتی مساوات کے نا معلوم سمتیات $\boldsymbol{x}_{(1)}$، $\cdots$، $\boldsymbol{x}_{(n)}$ ہیں۔ان تمام مساوات کو ایک ہی قالبی مساوات $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}$ میں لکھا جاتا ہے جہاں نا معلوم قالب $\boldsymbol{X}$ کے قطار $\boldsymbol{x}_{(1)}$، $\cdots$، $\boldsymbol{x}_{(n)}$ ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ n عدد افزودہ قالب $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{e}_{(1)}\end{bmatrix}$، $\cdots$، $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{e}_{(n)}\end{bmatrix}$ کو ملا کر ایک ہی $n \times 2n$ بڑے "افزودہ قالب" $\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$ میں لکھا جاتا ہے۔ اب $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}$ کے بائیں جانب کو $\boldsymbol{A}^{-1}$ سے ضرب دے کر $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}$ کو $\boldsymbol{X}$ کے لئے حل کرنے کی خاطر ہم $\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$ پر گاوسی اسقاط لاگو کر سکتے ہیں۔اس سے $\begin{bmatrix}\boldsymbol{U} & \boldsymbol{H}\end{bmatrix}$ حاصل ہو گا جہاں گاوسی اسقاط کی بنا $\boldsymbol{U}$ بالائی تکونی ہو گا۔ مزید اعمال کے ذریعہ گاوس جارڈن ترکیب $\boldsymbol{U}$ کو ایسی وتری صورت میں لے آتی ہے جس کے تمام وتری ارکان اکائی (1) ہوں۔ $\boldsymbol{U}$ کے وتر کے بالائی جانب ارکان کو حذف کر کے وتری صورت حاصل ہو گی جبکہ وتری ارکان کو موزوں قیمتوں سے ضرب (یا تقسیم) کرتے ہوئے وتر پر اکائی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں (مثال 8.35 سے رجوع کریں)۔ چونکہ یہ ترکیب پورے $\begin{bmatrix}\boldsymbol{U} & \boldsymbol{H}\end{bmatrix}$ پر لاگو ہو گی لہٰذا $\boldsymbol{H}$ سے $\boldsymbol{K}$ حاصل ہو گا اور یوں $\begin{bmatrix}\boldsymbol{U} & \boldsymbol{H}\end{bmatrix}$ سے $\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{K}\end{bmatrix}$ حاصل ہو گا جو $\boldsymbol{IX} = \boldsymbol{K}$ کا "افزودہ قالب" ہو گا۔اب جیسا پہلے بتلایا گیا، $\boldsymbol{IX} = \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ ہے لہٰذا موازنہ کرتے ہوئے $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^{-1}$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\boldsymbol{A}^{-1}$ کو $\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{K}\end{bmatrix}$ سے پڑھا جا سکتا ہے۔

درج ذیل مثال میں گاوس جارڈن کی ترکیب استعمال کی گئی ہے۔

مثال 8.35: گاوس جارڈن کی ترکیب سے قالب کے معکوس کا حصول
درج ذیل قالب $\boldsymbol{A}$ کا معکوس $\boldsymbol{A}^{-1}$ دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

حل: درج ذیل "افزودہ قالب" پر گاوسی اسقاط کی ترکیب لاگو کرتے ہوئے $\begin{bmatrix}\boldsymbol{U} & \boldsymbol{H}\end{bmatrix}$ حاصل کرتے ہیں۔ قالب کے دائیں جانب عمل صف لکھے گئے ہیں جہاں S_1، S_2 اور S_3 گزشتہ قدم کے قالب کی پہلی، دوسری اور

تیسری صف کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 - 4S_1 \\ S_3 + S_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ S_3 + \frac{1}{7}S_2 \end{matrix}$$

حاصل $\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$ پر گاوس جارڈن اسقاط لاگو کرتے ہیں۔پہلے $\boldsymbol{U}$ کے وتر پر اکائی حاصل کی گئی ہے اور بعد میں اس وتر کے بالائی جانب $\boldsymbol{U}$ کے ارکان کو صفر کیا گیا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{14}S_2 \\ \frac{7}{37}S_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -\frac{43}{37} & \frac{2}{37} & \frac{14}{37} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{matrix} S_1 + 2S_3 \\ S_2 + \frac{9}{14}S_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{37} & \frac{10}{37} & -\frac{4}{37} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{matrix} S_1 - 4S_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

آخری تین قطار معکوس $\boldsymbol{A}^{-1}$ ہو گا یعنی:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{37} & \frac{10}{37} & -\frac{4}{37} \\ \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix}$$

آپ اس کو درج ذیل سے ثابت کر سکتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{37} & \frac{10}{37} & -\frac{4}{37} \\ \frac{25}{74} & -\frac{2}{37} & \frac{9}{74} \\ \frac{3}{37} & \frac{1}{37} & \frac{7}{37} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یوں $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ہے اور اسی طرح $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ ہو گا۔ □

معکوس کے کلیات

چونکہ معکوس کا حصول در حقیقت میں خطی مساوات کے نظام کا حل معلوم کرنا ہے لہٰذا قاعدہ کریمر (مسئلہ 8.15) یہاں قابل استعمال ہو گا۔ یہاں بھی قاعدہ کریمر نظریاتی مطالعہ کے لئے مفید ثابت ہوتا ہے مگر اس سے (مسئلہ 8.17 کی مدد سے) 2×2 سے زیادہ جسامت کے قالب کی معکوس حاصل کرنا زیادہ مفید ثابت نہیں ہوتا۔

مسئلہ 8.17: معکوس بذریعہ مقطع
$n \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کا معکوس درج ذیل ہے

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}}[C_{jk}]^T = \frac{1}{\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.67}$$

جہاں مقطع $\boldsymbol{A}$ میں a_{jk} کا ہم ضربی C_{jk} ہے (حصہ 8.7 سے رجوع کریں)۔ (یہاں دھیان رہے کہ $\boldsymbol{A}^{-1}$ میں، C_{jk} کی جگہ وہ ہے جو $\boldsymbol{A}$ میں a_{kj} (نہ کہ a_{jk}) کی جگہ ہے)۔ بالخصوص 2×2 قالب اور اس کے معکوس درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{8.68}$$

ثبوت: ہم مساوات 8.67 کے دائیں ہاتھ کو $\boldsymbol{B}$ لکھ کر ثابت کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ہے۔ ہم درج ذیل لکھ کر

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{G} = [g_{kl}] \tag{8.69}$$

ثابت کرتے ہیں کہ $G = I$ ہے۔ قالبی ضرب کی تعریف اور مساوات 8.67 میں B کی صورت سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$g_{kl} = \sum_{s=1}^{n} \frac{C_{sk}}{\text{مقطع}\, A} a_{sl} = \frac{1}{\text{مقطع}\, A}(a_{1l}C_{1k} + \cdots + a_{nl}C_{nk}) \tag{8.70}$$

اب مساوات 8.60 اور مساوات 8.61 کے تحت $l = k$ کی صورت میں درج بالا کے دائیں ہاتھ میں قوسین مقطع $A = D$ ہو گا جبکہ $l \neq k$ کی صورت میں یہ صفر ہو گا لہٰذا:

$$g_{kk} = \frac{1}{\text{مقطع}\, A}(\text{مقطع}\, A) = 1$$
$$g_{kl} = 0 \qquad (l \neq k)$$

بالخصوص $n = 2$ کی صورت میں مساوات 8.68 حاصل ہوتی ہے۔

□

جیومیٹری میں $n = 2$ کی صورت عموماً پائی جاتی ہے لہٰذا مساوات 8.68 کو یاد رکھنا مفید ثابت ہو گا۔

مثال 8.36: 2×2 قالب کا معکوس
درج ذیل قالب کا معکوس دریافت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: مساوات 8.68 سے معکوس لکھتے ہیں۔

$$A^{-1} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

□

مثال 8.37: 3×3 قالب کا معکوس
درج ذیل قالب کا معکوس مساوات 8.67 کی مدد سے حاصل کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: پہلی قطار سے پھیلا کر $36 = (0-3) - 1(-6-12) + 4(3-0) = 2(0+3)$ مقطع $\boldsymbol{A}$ ملتا ہے جبکہ C_{jk} درج ذیل ہیں

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 3, \quad C_{12} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -6, \quad C_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

$$C_{21} = -\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 18, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -12, \quad C_{23} = -\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = -18$$

$$C_{31} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 3, \quad C_{32} = -\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 6, \quad C_{33} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

لہٰذا معکوس درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 3 & 18 & 3 \\ -6 & -12 & 6 \\ 3 & -18 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

آپ قالبی ضرب سے $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ثابت کر سکتے ہیں۔ □

وتری قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ جہاں $l \neq k$ کی صورت میں $a_{jk} = 0$ ہے کا معکوس صرف اس صورت میں موجود ہو گا جب تمام $a_{jj} \neq 0$ ہوں۔ایسی صورت میں معکوس $\boldsymbol{A}^{-1}$ بھی وتری ہو گا جس کے وتری اندراجات $\frac{1}{a_{11}}$ ، $\cdots$ ، $\frac{1}{a_{nn}}$ ہوں گے۔

ثبوت : وتری قالب کے لئے مساوات 8.67 میں درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{C_{11}}{D} = \frac{a_{22}\cdots a_{nn}}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}} = \frac{1}{a_{11}}, \quad \cdots$$

□

مثال 8.38: وتری قالب کا معکوس

درج ذیل وتری قالب کا معکوس دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{bmatrix}$$

حل: ہر وتری اندراج کا معکوس لکھتے ہوئے قالب کا معکوس حاصل ہو گا لہٰذا پہلی اندارج 2 کی جگہ $0.5 = \frac{1}{2}$ لکھا جائے گا۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.625 \end{bmatrix}$$

□

دو قالبوں کے حاصل ضرب کا معکوس لیتے ہوئے ہر قالب کا انفرادی معکوس لیتے ہوئے ان کے حاصل ضرب الٹے ترتیب سے حاصل کریں یعنی:

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{8.71}$$

اسی طرح دو سے زیادہ قالبوں کے حاصل ضرب کا معکوس درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{AB}\cdots\boldsymbol{MN})^{-1} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1}\cdots\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{8.72}$$

ثبوت: ہم مساوات 8.63 کو $\boldsymbol{A}$ کی بجائے $\boldsymbol{AB}$ کے لئے لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{I}$$

دونوں اطراف کے بائیں جانب کو $\boldsymbol{A}^{-1}$ سے ضرب دیتے ہیں

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{IB}(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}$$

جہاں $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ اور $\boldsymbol{IB} = \boldsymbol{B}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ اب حاصل $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$ کے دونوں اطراف کے بائیں جانب کو $\boldsymbol{B}^{-1}$ سے ضرب دے کر مساوات 8.71 حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{-1} = (\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

اس سے مساوات 8.72 بذریعہ الکراجی ماخوذ حاصل ہوتا ہے۔

□

قالب $\boldsymbol{A}$ کے معکوس کا معکوس وہی قالب $\boldsymbol{A}$ ہو گا۔

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A} \tag{8.73}$$

قالبی ضرب کے غیر معمولی خصوصیات۔ قواعد تنسیخ

قالبی ضرب اور اعداد کے ضرب کے قواعد میں درج ذیل نمایاں فرق پائے جاتے ہیں۔انہیں سمجھنا ضروری ہے۔ شق ب اور پ قالبی ضرب کے قواعد تنسیخ ہیں۔

- (الف) قالبی ضرب قابل تبادل نہیں ہے یعنی عموماً درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA} \tag{8.74}$$

- (ب) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ سے مراد $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ یا $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ اور یا $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0}$ نہیں لیا جا سکتا ہے، مثلاً

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

میں $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ ہے۔

- (پ) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ سے مراد $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ (اگر $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ ہو تب بھی) نہیں لیا جا سکتا ہے۔

شق ب اور پ کی تفصیل درج ذیل مسئلے میں پیش کی گئی ہے۔

مسئلہ 8.18: قواعد تنسیخ
فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ قالبوں کی جسامت $n \times n$ ہے۔

- (الف) اگر مرتبہ $\boldsymbol{A} = n$ اور $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ ہوں تب $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ ہو گا۔

- (ب) اگر مرتبہ $\boldsymbol{A} = n$ ہو تب $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ سے مراد $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ ہے۔یوں اگر $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ لیکن $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ اور $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$ ہوں تب مرتبہ $\boldsymbol{A} < n$ اور مرتبہ $\boldsymbol{B} < n$ ہوں گے۔

- (پ) اگر $\boldsymbol{A}$ نادر ہو تب $\boldsymbol{AB}$ اور $\boldsymbol{BA}$ بھی نادر ہوں گے۔

ثبوت: (الف) مسئلہ 8.16 کے تحت A کا معکوس موجود ہے۔ یوں بائیں طرف کو A^{-1} سے ضرب دے کر $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ سے $B = C$ حاصل ہوتا ہے۔

(ب) فرض کریں کہ مرتبہ $A = n$ ہے لہٰذا A^{-1} موجود ہے۔ یوں $AB = 0$ سے مراد $A^{-1}AB = B = 0$ ہے۔ اسی طرح مرتبہ $B = n$ کی صورت میں B^{-1} موجود ہو گا اور $AB = 0$ سے مراد $ABB^{-1} = A = 0$ ہے جہاں دونوں اطراف کے دائیں جانب کو B^{-1} سے ضرب دیا گیا ہے۔

(پ-1) مسئلہ 8.16 کے تحت مرتبہ $A < n$ ہو گا۔ یوں مسئلہ 8.9 کے تحت $Ax = 0$ کے غیر صفر اہم حل موجود ہوں گے۔ اس متجانس مساوات کو B سے ضرب دے کر ثابت ہوتا ہے کہ یہی حل $BAx = 0$ کے بھی حل ہوں گے لہٰذا مسئلہ 8.9 کے تحت مرتبہ $BA < n$ ہو گا اور مسئلہ 8.16 کے تحت BA نادر ہو گا۔

(پ-2) مسئلہ 8.13-ت کے تحت A^T نادر ہو گا۔ یوں ثبوت پ-1 کے تحت B^TA^T نادر اور مساوات 8.23-ت کے تحت $(AB)^T$ کے برابر ہو گا۔ یوں مسئلہ 8.13-ت کے تحت AB نادر ہو گا۔

□

حاصل قالبی ضرب کا مقطع

اگرچہ عموماً $AB \neq BA$ ہو گا البتہ یہ دلچسپ بات ہے کہ مقطع (BA) = مقطع (AB) ہو گا۔ قالبی حاصل ضرب کا مقطع درج ذیل مسئلہ دیتا ہے۔

مسئلہ 8.19: حاصل قالبی ضرب کا مقطع
$n \times n$ قالب A اور B کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\text{مقطع}\,(AB) = \text{مقطع}\,(BA) = (\text{مقطع}\,A)(\text{مقطع}\,B) \tag{8.75}$$

ثبوت: اگر A یا B نادر ہوں تب مسئلہ 8.18 کے تحت AB اور BA بھی نادر ہوں گے اور مساوات 8.75 کی صورت مسئلہ 8.14 کے تحت $0 = 0$ ہو گی۔

اب فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ غیر نادر ہیں۔یوں ہم $\boldsymbol{A}$ کو گاوس جارڈن ترکیب سے وتری صورت $\hat{\boldsymbol{A}} = [a_{jk}]$ میں لا سکتے ہیں۔ مسئلہ 8.12-الف اور ب اعمال صف سے مقطع کی قیمت -1 سے ضرب ہونے کے علاوہ تبدیل نہیں ہوتی جبکہ مسئلہ 8.12-پ گاوس جارڈن ترکیب استعمال کرتے ہوئے وتری صورت حاصل کرنے میں استعمال نہیں ہوتا ہے۔اب یہی اعمال صف $\boldsymbol{AB}$ کو $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$ میں تبدیل کرتے ہوئے مقطع $\boldsymbol{AB}$ پر ویسا ہی اثر کریں گے۔یوں اگر $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$ کے لئے مساوات 8.75 درست ہو تب یہ $\boldsymbol{AB}$ کے لئے بھی درست ہو گا۔ $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$ کو پھیلا کر لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

اب ہم مقطع $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}$ لیتے ہیں۔

$$\text{مقطع}\,(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}) = \begin{vmatrix} \hat{a}_{11}b_{11} & \hat{a}_{11}b_{12} & \cdots & \hat{a}_{11}b_{1n} \\ \hat{a}_{22}b_{21} & \hat{a}_{22}b_{22} & \cdots & \hat{a}_{22}b_{2n} \\ \vdots \\ \hat{a}_{nn}b_{n1} & \hat{a}_{nn}b_{n2} & \cdots & \hat{a}_{nn}b_{nn} \end{vmatrix}$$

دائیں ہاتھ ہم پہلی صف سے $\hat{a}_{11}$ ، دوسری صف سے $\hat{a}_{22}$ اور اسی طرح چلتے ہوئے آخری صف سے $\hat{a}_{nn}$ باہر لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{مقطع}\,(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}) = \hat{a}_{11}\hat{a}_{22}\cdots\hat{a}_{nn} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

اب $\hat{a}_{11}\hat{a}_{22}\cdots\hat{a}_{nn}$ وتری قالب $\hat{\boldsymbol{A}}$ کا مقطع ہے جبکہ بقایا مقطع $\boldsymbol{B}$ ہے۔یوں مقطع $\boldsymbol{AB}$ کے لئے مساوات 8.75 ثابت ہوا۔اسی طرح مقطع $\boldsymbol{BA}$ کے لئے بھی مساوات 8.75 ثابت کیا جا سکتا ہے۔

□

سوالات

سوال 8.120 تا سوال 8.124 میں A اور اس کا معکوس A^{-1} دیے گئے ہیں۔ گاوس جارڈن اسقاط کی مدد سے A سے A^{-1} یا A^{-1} سے A دریافت کریں۔

سوال 8.120:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

سوال 8.121:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

سوال 8.122:

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 1 \\ 1 & 0.4 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -105 & 40 & -20 \\ 250 & -95 & 50 \\ -50 & 20 & -10 \end{bmatrix}$$

سوال 8.123:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{4}{3} & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ -7 & -\frac{8}{3} & -2 \end{bmatrix}$$

سوال 8.124:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} \\ \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

سوال 8.125 تا سوال 8.129 میں A اور اس کا معکوس A^{-1} دیے گئے ہیں۔ مساوات 8.67 یا مساوات 8.68 کی مدد سے A سے A^{-1} یا A^{-1} سے A دریافت کریں۔

سوال 8.125:

$$A = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

سوال 8.126:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{14} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

سوال 8.127:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

سوال 8.128:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سوال 8.129:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

سوال 8.130: سوال 8.120 میں AA^{-1} حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{I}$

سوال 8.131: سوال 8.125 میں $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{I}$

سوال 8.132 تا سوال 8.137 عمومی نوعیت کے سوالات ہیں۔

سوال 8.132: سوال 8.125 میں دیے گئے $\boldsymbol{A}$ کے لئے ثابت کریں کہ $(\boldsymbol{A}^2)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^2$ ہے۔

سوال 8.133: سوال 8.132 میں دیے گئے کلیے کا عمومی ثبوت پیش کریں۔

سوال 8.134: سوال 8.125 میں دیے گئے $\boldsymbol{A}$ کے لئے ثابت کریں کہ $(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$ ہے۔

سوال 8.135: سوال 8.134 میں دیے گئے کلیے کا عمومی ثبوت پیش کریں۔

سوال 8.136: ثابت کریں: $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$

سوال 8.137: زاویائی تبادلہ
سوال 8.125 میں $\boldsymbol{A}$ گھڑی کی ایک رخ اور $\boldsymbol{A}^{-1}$ گھڑی کی دوسری رخ گھومنے کو ظاہر کرتی ہے۔اس کو سمجھ کر آپ معکوس کا مطلب بہتر سمجھ سکیں گے۔

8.9 سمتی فضا، اندرونی ضرب، خطی تبادلہ

ہم حصہ 8.4 میں سمتی فضا کی لب لباب سمجھ چکے ہیں۔وہاں ہم نے قالب اور خطی نظام میں قدرتی طور پر پائے جانے والے مخصوص سمتی فضا کی بات کی۔ ان سمتی فضا کے ارکان، جنہیں **سمتیات** کہتے ہیں، مساوات 8.7 اور مساوات 8.8 میں دیے گئے قواعد (جو اعداد کے قواعد کی طرح ہیں) پر پورا اترتے ہیں۔ ان خصوصی سمتی فضا کو احاطے جنم دیتے ہیں، یعنی محدود تعداد کے سمتیات کے خطی مجموعے۔مزید، ہر سمتیہ کے **ارکان** n اعداد ہیں۔

ہم اس تصور کو عمومی جامہ پہناتے ہوئے، n عدد ارکان پر مشتمل تمام سمتیات کو لے کر **حقیقی** n **بعدی سمتی فضا** R^n حاصل کرتے ہیں۔سمتیات کو "حقیقی سمتیات" کہیں گے۔یوں R^n میں ہر سمتیہ n عدد منظم اعداد پر مشتمل ہو گا۔

اب ہم n کی مخصوص قیمتیں لیتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں $n = 2$ کے لئے R^2 ملتا ہے جو تمام منظم اعدادی جوڑیوں پر مشتمل ہے۔یہ اعدادی جوڑیاں **سطح پر سمتیات** کو ظاہر کرتی ہیں۔ اسی طرح $n = 3$ سے R^3 ملتا ہے جو تمام منظم سہ اعدادی جوڑیوں پر مشتمل ہے۔یہ سہ اعدادی جوڑیاں **تین بعدی خلا میں سمتیات** کو ظاہر کرتی ہیں۔یہ سمتیات میکانیات، طبیعیات، جیومیٹری اور احصاء میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

اسی طرح اگر ہم n عدد مخلوط اعداد کے تمام جوڑیاں لیں، اور ان مخلوط اعداد کو حقیقی تصور کریں، تو ہمیں **مخلوط سمتی فضا** C^n ملے گا۔

ان کے علاوہ عملی دلچسپی کے دیگر سلسلے جو قالب، تفاعل، تبادل وغیرہ پر مبنی ہوں، پائے جاتے ہیں۔ان کے جمع اور غیر سمتی ضرب کی بالکل قدرتی تعریف کی جا سکتی ہے لہٰذا یہ بھی سمتی فضا بناتے ہیں۔

آئیں اب مساوات 8.7 اور مساوات 8.8 میں دیے گئے بنیادی خصوصیات کو لے کر **حقیقی سمتی فضا** V کی تعریف بیان کریں۔

مسئلہ 8.20: حقیقی سمتی فضا
a ، b ، $\cdots$ ارکان پر مشتمل غیر خالی سلسلہ V **حقیقی سمتی فضا**[96] یا حقیقی خطی فضا کہلاتا ہے اور اگر V میں درج ذیل دو الجبرائی اعمال (جنہیں سمتی جمع اور غیر سمتی ضرب کہتے ہیں) موجود ہوں تب یہ ارکان (جن کے خصوصیات کچھ بھی ہو سکتے ہیں) **سمتیات** کہلاتے ہیں۔

---

[96] real vector space

(الف) سمتی جمع V کے ہر دو سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا مجموعہ کہلاتا اور $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

(الف-1) قانون تبادل۔ V کے ہر دو ارکان $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{8.76}$$

(الف-2) قانون تلازم۔ V کے ہر تین ارکان $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{c}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \tag{8.77}$$

(جو $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ لکھا جاتا ہے)

(الف-3) V میں ایسا منفرد سمتیہ، جو صفر سمتیہ کہلاتا اور $\boldsymbol{0}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، پایا جاتا ہے کہ V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a} \tag{8.78}$$

(الف-4) V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے V میں ایسا سمتیہ $-\boldsymbol{a}$ پایا جاتا ہے کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0} \tag{8.79}$$

(ب) غیر سمتی ضرب۔ حقیقی اعداد غیر سمتی کہلاتے ہیں۔ غیر سمتی ضرب، ہر غیر سمتی c اور V کے ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے ساتھ V کا ایسا منفرد رکن، جو $\boldsymbol{a}$ اور c کا حاصل ضرب کہلاتا اور $c\boldsymbol{a}$ (یا $\boldsymbol{a}c$) سے ظاہر کیا جاتا ہے، وابستہ کرتا ہے کہ جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہو۔

(ب-1) قانون جزئیتی تقسیم۔ ہر غیر سمتی c اور V میں موجود ہر سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b} \tag{8.80}$$

(ب-2) قانون جزئیتی تقسیم۔ ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(c+k)\boldsymbol{a}=c\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a} \tag{8.81}$$

(ب-3) **قانون وابستگی۔** ہر غیر سمتی c ، ہر غیر سمتی k اور V میں موجود ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$c(k\boldsymbol{a}) = (ck)\boldsymbol{a} \qquad (\text{جو } ck\boldsymbol{a} \text{ لکھا جاتا ہے}) \tag{8.82}$$

(ب-4) V میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{8.83}$$

درج بالا تعریف میں حقیقی اعداد کی جگہ مخلوط اعداد کو غیر سمتی لینے سے **مخلوط سمتی فضا** کی مسلمی تعریف حاصل ہو گی۔

درج بالا میں ہر مسلمہ V کی ایک خصوصیت بیان کرتا ہے۔یہ تمام مسلمات مل کر V کے تمام خصوصیات بیان کرتے ہیں۔

درج ذیل تصورات جو سمتی فضا سے تعلق رکھتے ہیں بالکل حصہ 8.4 میں بیان کیے گئے تصورات کی طرح ہیں۔ یوں V میں موجود سمتیات $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(m)}$ کے **خطی مجموعہ** سے مراد درج ذیل ہے۔

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} \qquad (c_1 \text{ ، } \cdots \text{ ، } c_m \text{ کوئی بھی غیر سمتی ہیں})$$

یہ سمتیات اس صورت **خطی طور غیر تابع** سلسلہ بناتے ہیں جب درج ذیل

$$c_1\boldsymbol{a}_{(1)} + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_{(m)} = \boldsymbol{0} \tag{8.84}$$

سے مراد $c_1 = 0$ ، $\cdots$ ، $c_m = 0$ ہو۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ سمتیات **خطی طور غیر تابع** ہیں۔ اس کے برعکس اگر کسی ایک یا ایک سے زیادہ c_j کی قیمت غیر صفر ہونے کی صورت میں بھی مساوات 8.84 درست ہو تب $\boldsymbol{a}_{(1)}$ تا $\boldsymbol{a}_{(m)}$ سمتیات **خطی طور تابع**[97] کہلاتے ہیں۔

$m = 1$ کی صورت میں مساوات 8.84 سے $c\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ملتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ واحد سمتیہ $\boldsymbol{a}$ اس صورت خطی طور غیر تابع ہو گا جب $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ہو۔

---

[97] linearly dependent

اگر V میں n عدد غیر تابع سمتیات ہوں اور V میں n سے زائد تمام سمتیات خطی طور تابع ہوں تب V کا بُعد n ہو گا اور V کو n **بعدی** کہیں گے۔ ان خطی طور غیر تابع n عدد سمتیات کو V کی **اساس**[98] کہتے ہیں اور V میں ہر سمتیہ کو ان اساس کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ کسی مخصوص اساس کو استعمال کرتے ہوئے یہ خطی مجموعہ منفرد ہو گا (مثال 8.39 سے رجوع کریں)۔

مثال 8.39: یکتائی
سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو اساس $\boldsymbol{a}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{a}_{(n)}$ کا خطی مجموعہ $\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{a}_{(1)}+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_{(n)}$ لکھا جا سکتا ہے۔ فرض کریں کہ $\boldsymbol{v}$ کو $\boldsymbol{v}=c_1'\boldsymbol{a}_{(1)}+\cdots+c_n'\boldsymbol{a}_{(n)}$ بھی لکھنا ممکن ہے۔ ان کے فرق $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}=(c_1-c_1')\boldsymbol{a}_{(1)}+\cdots+(c_n-c_n')\boldsymbol{a}_{(n)}=\boldsymbol{0}$$

مساوات 8.84 کے تحت اساس (یعنی خطی طور غیر تابع سمتیات) کے لئے درج بالا صرف اس صورت لکھا جا سکتا ہے جب $c_1-c_1'-0$ ، $\cdots$ ، $c_n-c_n'-0$ ہوں یعنی جب $c_1'=c_1$ ، $\cdots$ ، $c_n'=c_n$ ہوں، لیکن ایسا ہونے سے دونوں مجموعے بالکل یکساں حاصل ہوں گے۔ یوں کسی بھی سمتیہ کو ظاہر کرنے والا خطی مجموعہ منفرد ہو گا۔ □

مثال 8.40: قالب کا سمتی فضا
حقیقی 2×2 قالبوں کی چار بُعدی حقیقی سمتی فضا ہو گی۔ اس کی اساس درج ذیل ہے جسے استعمال کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{B}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} \tag{8.85}$$

کسی بھی 2×2 قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ کو $\boldsymbol{A}=c_{11}\boldsymbol{B}_{11}+c_{12}\boldsymbol{B}_{12}+c_{21}\boldsymbol{B}_{21}+c_{22}\boldsymbol{B}_{22}$ لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح حقیقی $m\times n$ حقیقی قالبوں (جہاں m اور n معین قیمتیں ہیں) کی mn بُعدی سمتی فضا ہو گی۔ □

مثال 8.41: کثیر رکنی کی سمتی فضا
درجہ دو تک کے تمام کثیر رکنی یعنی a ، $bx+c$ اور dx^2+ex+f کے سمتی فضا کا بُعد 3 ہے جس کی اساس $\{1,x,x^2\}$ ہے۔ □

[98] basis

اگر سمتی فضا V میں n خطی طور غیر تابع سمتیات ہوں جہاں n کتنا بھی بڑا عدد ہو، تب V **لامتناہی بعدی**[99] کہلائے گا۔ لامتناہی بعد کی سمتی فضا کی مثال x محور کے کسی وقفے $[a, b]$ پر تمام استمراری تفاعل کی فضا ہے۔

اندرونی ضرب فضا

R^n میں موجود قطاری سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا ضرب $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$، جسامت 1×1 کا قالب ہو گا جس کا واحد اعدادی رکن $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا **اندرونی ضرب**[100] کہلاتا ہے۔ اندرونی ضرب کو $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ اور $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے اور یوں اس کو **ضربِ نقطہ**[101] بھی کہتے ہیں۔اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \tag{8.86}$$

آئیں اب اندرونی ضرب کے اس تصور کو وسعت دے کر، $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ کی بنیادی خصوصیات کو لیتے ہوئے، عمومی سمتی فضا کی "تصوراتی اندرونی ضرب" $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ حاصل کرتے ہیں، یعنی:

مسئلہ 8.21: حقیقی اندرونی ضرب فضا

حقیقی سمتی فضا V اس صورت حقیقی اندرونی ضرب فضا (یا حقیقی قبل از ہلبرٹ[102] فضا) کہلاتا ہے جب وہ درج ذیل خصوصیت رکھتا ہو۔

V میں ہر $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ سمتیات کے ساتھ ایسا حقیقی عدد وابستہ ہے، جو $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا **اندرونی ضرب** کہلاتا اور $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو درج ذیل مسلمات پر پورا اترتا ہے۔

- (الف) ہر غیر سمتیات q_1، q_2 اور V میں موجود ہر سمتیات $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{c}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(q_1\boldsymbol{a} + q_2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = q_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + q_2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \qquad \text{(خطیت)}$$

---

[99] infinite dimensional
[100] inner product
[101] dot product
[102] جرمن ریاضی دان داؤد ہلبرٹ [1862-1943]۔ متناہی بُعدی V کو ہلبرٹ فضا کہتے ہیں۔

- (ب) V میں ہر سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \qquad \text{(تشاکل)}$$

- (پ) V میں ہر $\boldsymbol{a}$ کے لئے

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\geq 0 \qquad \text{(قطعی مثبت)}$$

ہو گا جبکہ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ ہو۔

ایسے سمتیات جن کا اندرونی ضرب صفر کے برابر ہو **عمودی**[103] کہلاتے ہیں۔

V میں موجود سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی لمبائی یا **معیار**[104] $\|\boldsymbol{a}\|$ سے مراد درج ذیل ہے۔

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} \quad (\geq 0) \qquad \text{معیار} \tag{8.87}$$

ایسا سمتیہ جس کا معیار اکائی (1) ہو **اکائی سمتیہ**[105] کہلاتا ہے۔

ان مسلمات اور مساوات 8.87 سے درج ذیل بنیادی **کوشی شوارز**[106] **عدم مساوات**[107] حاصل ہوتی ہے۔

$$\left|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|\leq\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \qquad \text{(کوشی شوارز عدم مساوات)} \tag{8.88}$$

اس سے **تکونی عدم مساوات**[108]

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leq\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\| \qquad \text{(تکونی عدم مساوات)} \tag{8.89}$$

درج ذیل **متوازی الاضلاع مساوات**[109] بھی ثابت کیا جا سکتا ہے۔

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2+\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2=2(\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2) \qquad \text{(متوازی الاضلاع مساوات)} \tag{8.90}$$

---

[103] orthogonal
[104] norm
[105] unit vector
[106] جرمن ریاضی دان ہرمن امندس شوارز [1843-1921]
[107] Cauchy-Schwarz inequality
[108] triangle inequality
[109] parallelogram equality

مثال 8.42: n بُعدی اقلیدسی فضا[110]
n بُعدی اقلیدسی فضا R^n میں سمتیات قطار $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کا اندرونی ضرب درج ذیل ہو گا

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \tag{8.91}$$

جو مسئلہ 8.21 کے شق الف، ب اور پ پر پورا اترتا ہے۔ مساوات 8.87 استعمال کرتے ہوئے اقلیدسی معیار درج ذیل ہو گا۔

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} = \sqrt{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b}} = \sqrt{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n} \tag{8.92}$$

اقلیدسی فضا کو عموماً E^n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ □

مثال 8.43: تفاعل کی اندرونی ضرب
وقفہ $\alpha \le x \le \beta$ پر حقیقی قیمت والے تمام استمراری تفاعل $f(x)$ ، $g(x)$ ، . . . کا سلسلہ، مجموعہ تفاعل اور غیر سمتی سے ضرب کے اصولوں کے تحت، حقیقی سمتی فضا ہو گا۔ اس "تفاعل فضا" پر اندرونی ضرب سے مراد درج ذیل تکمل ہے

$$(f, g) = \int_\alpha^\beta f(x) g(x) \, \mathrm{d}x \tag{8.93}$$

جو مسئلہ 8.21 کے شق الف، ب اور پ پر پورا اترتا ہے۔ مساوات 8.87 معیار دیتا ہے۔

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_\alpha^\beta f(x) g(x) \, \mathrm{d}x} \tag{8.94}$$

□

خطی تبادلہ

فرض کریں کہ X اور Y سمتی فضا ہیں۔ X میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کے ساتھ ہم Y کا منفرد سمتیہ $\boldsymbol{y}$ وابستہ کرتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ X کا Y پر تبادلہ کیا گیا ہے، یا کہ X کی Y پر نقشہ کشی کی گئی ہے اور یا کہ X سے Y کا عامل[111] دیا گیا ہے۔ ایسی نقشہ کشی کو بڑے حرف مثلاً F سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ Y کے سمتیہ

[110] Euclidean space
[111] operator

$\boldsymbol{y}$ ، جسے X کے سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کے ساتھ وابستہ کیا گیا ہے، F میں $\boldsymbol{x}$ کا **عکس**[112] کہلاتا اور $F(x)$ [یا بغیر قوسین $F\boldsymbol{x}$] سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

F کو اس صورت **خطی نقشہ کشی**[113] یا **خطی تبادلہ**[114] کہتے ہیں جب تمام غیر سمتی c اور X میں موجود تمام سمتیات $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{x}$ درج ذیل پر پورا اترتے ہوں۔

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}) &= F(\boldsymbol{v})+F(\boldsymbol{x}) \\ F(c\boldsymbol{x}) &= cF(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{8.95}$$

فضا R^n کا فضا R^m پر خطی تبادلہ

ہم $X=R^n$ اور $Y=R^m$ لیتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں کوئی بھی $m\times n$ قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ فضا R^n کا فضا R^m پر تبادلہ کر سکتا ہے، یعنی:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{8.96}$$

اب چونکہ $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ اور $\boldsymbol{A}(c\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ہیں لہٰذا درج بالا خطی تبادلہ ہے۔

اب الٹ چلتے ہوئے، ہم ثابت کرتے ہیں کہ R^n کے R^m پر ہر تبادلہ F کو، R^n کی اساس اور R^m کی اساس چننے کے بعد، $m\times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

فرض کریں کہ R^n کی کوئی اساس $\boldsymbol{e}_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{e}_{(n)}$ ہے۔یوں R^n میں موجود ہر $\boldsymbol{x}$ کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_{(1)}+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_{(n)}$$

چونکہ F خطی ہے لہٰذا $\boldsymbol{x}$ کا عکس $F(\boldsymbol{x})$ درج ذیل ہو گا۔

$$F(\boldsymbol{x})=F(x_1\boldsymbol{e}_{(1)}+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_{(n)})=x_1F(\boldsymbol{e}_{(1)})+\cdots+x_nF(\boldsymbol{e}_{(n)})$$

---

[112] image
[113] linear mapping
[114] linear transformation

یوں R^n کی اساس $e_{(1)}$ ، $\cdots$ ، $e_{(n)}$ کا عکس F کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔ ہم اب R^n کی درج ذیل **"معیاری اساس"** چنتے ہیں جہاں $e_{(j)}$ کا j عدد رکن 1 کے برابر جبکہ بقایا تمام ارکان 0 کے برابر ہیں۔

$$\boldsymbol{e}_{(1)} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{(2)} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_{(n)} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} \tag{8.97}$$

ہم ثابت کرتے ہیں کہ ہم ایسا $m \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ تعین کر سکتے ہیں کہ R^n میں ہر $\boldsymbol{x}$ اور Y میں اس کے عکس $\boldsymbol{y}$ کا درج ذیل تعلق ہو گا۔

$$\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{8.98}$$

یقیناً $e_{(1)}$ کے عکس $\boldsymbol{y}^{(1)} = F(\boldsymbol{e}_{(1)})$ سے درج ذیل ملتا ہے

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = \begin{bmatrix}y_1^{(1)}\\y_2^{(1)}\\\vdots\\y_m^{(1)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & & & \\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

جس سے $\boldsymbol{A}$ کی پہلی قطار $a_{11} = y_1^{(1)}$ ، $a_{21} = y_2^{(1)}$ ، $\cdots$ ، $a_{m1} = y_m^{(1)}$ حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح $e_{(2)}$ کے عکس سے $\boldsymbol{A}$ کی دوسری قطار حاصل ہو گی اور آخر کار $e_{(m)}$ کے عکس سے $\boldsymbol{A}$ کی آخری قطار حاصل ہو گی۔ یوں ثبوت پورا ہوتا ہے۔

ہم کہتے ہیں کہ R^n اور R^m کے چننے گئے اساس کے لحاظ سے $\boldsymbol{A}$ کو F ظاہر کرتا ہے یا کہ F ، $\boldsymbol{A}$ کا اظہار ہے۔ ہم ایسی شہ، جس کے خصوصیات غیر واضح ہوں، کو ایسی شہ سے ظاہر کرتے ہیں جس کے خصوصیات نسبتاً زیادہ واضح ہوں۔

تین بُعدی اقلیدسی فضا E^3 کی معیاری اساس کو عموماً $\boldsymbol{e}_{(1)} = \boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{e}_{(2)} = \boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{e}_{(3)} = \boldsymbol{k}$ لکھا جاتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{8.99}$$

جو فضا میں کارتیسی نظام محدد[115] کے، محور کی مثبت سمت میں، تین آپس میں عمودی اکائی سمتیات ہیں۔

مثال 8.44: تبادلہ
فضا میں کارتیسی نظام کے محور کا تبادلہ درج ذیل قالب دیتے ہیں۔ یہ تبادلے کیا کام سرانجام دیتے ہیں؟

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

جوابات: $\boldsymbol{A}$: خط $x_2=x_1$ میں انعکاس ہے۔ $\boldsymbol{B}$: خط x_1 میں انعکاس ہے۔ $\boldsymbol{C}$: مبدا میں انعکاس ہے جبکہ $\boldsymbol{D}$ محور x_1 کی سمت میں لمبائی میں اضافہ ($a>1$) یا کمی ($a<1$) پیدا کرتی ہے۔ □

مثال 8.45: خطی تبادلہ
ایسی خطی تبادلہ دریافت کریں جو (x_1, x_2) کا نقش $(5x_1-3x_2, -3x_1+7x_2)$ دے۔

حل: ظاہر ہے کہ ہمیں درج ذیل تعلق چاہیے ہے

$$\begin{aligned}y_1&=5x_1-3x_2\\ y_2&=-3x_1+7x_2\end{aligned}$$

جس سے ہمیں درج ذیل قالب $\boldsymbol{A}$ ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 7\end{bmatrix}$$

□

اگر مساوات 8.96 میں $\boldsymbol{A}$ چکور $n\times n$ قالب ہو تب یہ R^n کا نقش R^n دے گا۔ اگر یہ $\boldsymbol{A}$ غیر نادر قالب (حصہ 8.8 سے رجوع کریں) ہو تب مساوات 8.96 کے دونوں اطراف کے بائیں جانب کو $\boldsymbol{A}^{-1}$ سے ضرب دے کر $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل الٹ بدل[116] ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y} \tag{8.100}$$

یوں مساوات 8.96 جس x_0 کا نقش y_0 دیتا ہے، مساوات 8.100 اس y_0 کا نقش وہی x_0 دیتا ہے۔ خطی مبدل کا الٹ، مساوات 8.100 دے گا لہٰذا یہ بھی خطی ہو گا۔

[115] Cartesian coordinate system
[116] inverse transform

نظم خطی تبادلہ

فرض کریں کہ X ، Y اور W عمومی سمتی فضا ہیں۔پہلے کی طرح X کو Y پر F نقش کرتا ہے جبکہ W کو X پر نقش G کرتا ہے۔اب پہلے G اور بعد میں F ، بالکل اسی ترتیب سے، لاگو کرتے ہوئے تبادلہ H کی نظم[117] حاصل ہوتا ہے۔

$$H = F \circ G = FG = F(G)$$

یوں اگر فضا W میں سمتیہ $\boldsymbol{w}$ ہو تب سمتیہ $G(\boldsymbol{w})$ ، فضا X میں ہو گا جبکہ سمتیہ $F(G(\boldsymbol{w}))$ ، فضا Y میں ہو گا۔یوں W کا Y پر نقش، تبادلہ H دے گا جو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$H(\boldsymbol{w}) = (F \circ G)(\boldsymbol{w}) = (FG)(\boldsymbol{w}) = F(G(\boldsymbol{w})) \tag{8.101}$$

عمومی فضا میں درج بالا خطی تبادلہ کے نظم کی تعریف ہے۔نظم کی خطیت کو مثال 8.46 میں ثابت کیا گیا ہے۔

مثال 8.46: خطی نظام کا نظم خطی ہو گا

H کی خطیت ثابت کرنے کی خاطر ہمیں ثابت کرنا ہو گا کہ H مساوات 8.95 پر پورا اترتا ہے۔فضا W میں دو عدد سمتیات $\boldsymbol{w}_1$ اور $\boldsymbol{w}_2$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
H(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) &= (F \circ H)(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) \\
&= (FG)(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) \\
&= F(G(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2)) \\
&= F(G(\boldsymbol{w}_1) + G(\boldsymbol{w}_2)) && \text{کی خطیت } G \\
&= F(G(\boldsymbol{w}_1)) + F(G(\boldsymbol{w}_2)) && \text{کی خطیت } H \\
&= (F \circ G)(\boldsymbol{w}_1) + (F \circ G)(\boldsymbol{w}_2) && \text{مساوات 8.101 کے تحت} \\
&= H(\boldsymbol{w}_1) + H(\boldsymbol{w}_2) && \text{کی تعریف } H
\end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
H(c\boldsymbol{w}_2) = (F \circ G)(c\boldsymbol{w}_2) = F(G(c\boldsymbol{w}_2)) = F(cG(\boldsymbol{w}_2)) \\
= cF(G(\boldsymbol{w}_2)) = c(F \circ G)(\boldsymbol{w}_2) = cH(\boldsymbol{w}_2)
\end{aligned}$$

---

[117] composition

یوں ثابت ہوا کہ H خطی ہے۔ □

ہم نے عمومی سمتی فضا میں خطی تبادلہ کے کی تعریف بیان کی اور ثابت کیا کہ خطی تبادلہ کا نظم خطی ہے۔ اب ہم خطی تبادلہ کے نظم کا قالبی ضرب کے ساتھ تعلق جاننا چاہیں گے۔

ایسا کرنے کی خاطر ہم $X = R^n$ ، $Y = R^m$ اور $W = R^p$ لکھتے ہیں۔فضا کی یہ مخصوص صورتیں چنتے ہوئے ہم خطی تبادلہ کو قالبی صورت میں لکھ کر مساوات 8.96 کے طرز کی قالبی مساوات لکھ پاتے ہیں۔اس طرح F کو $m \times n$ عمومی قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ اور G کو عمومی $n \times p$ عمومی قالب $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔یوں ہم F کے لئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں جہاں سمتیہ قطار $\boldsymbol{x}$ کے n رکن اور سمتیہ $\boldsymbol{y}$ کے m رکن ہوں گے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{8.102}$$

اسی طرح G کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں سمتیہ قطار $\boldsymbol{w}$ کے p رکن ہوں گے۔

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{w} \tag{8.103}$$

مساوات 8.103 کو مساوات 8.102 میں پر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{w} \qquad (\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \tag{8.104}$$

درج بالا 8.101 کی قالبی صورت ہے۔یوں تبادلہ کی نظم کو قالبی ضرب کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔درج بالا مساوات میں حقیقی $m \times p$ قالب $\boldsymbol{C}$ خطی تبادلہ H کو ظاہر کرتی ہے جو R^p کا نقش R^n دیتی ہے اور سمتیہ $\boldsymbol{w}$ کے p رکن ہیں۔

مثال 8.47: خطی تبادلہ۔ نظم

ہم یہاں مثال 8.44 کے $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{D}$ قالب دوبارہ استعمال کرتے ہیں جہاں $a = 2$ لیا جائے گا۔سمتیہ $[w_1, w_2]^T$ پر $\boldsymbol{D}$ لاگو کرنے سے سمتیہ کا پہلا رکن x_1 سمت میں بڑھ کر $2w_1$ ہو جائے گا۔حاصل سمتیہ $[2w_1, w_2]^T$ ہو گا جس پر $\boldsymbol{A}$ لاگو کرنے سے خط $x_2 = x_1$ میں عکس $[w_2, 2w_1]^T$ حاصل ہو گا۔ اب یہی عمل تبادلہ H ، جسے قالب $\boldsymbol{A}$ ظاہر کرتا ہے، اور تبادلہ G ، جسے قالب $\boldsymbol{D}$ ظاہر کرتا ہے، کا نظم $H = F \circ G$ دے گا۔آئیں اس عمل کو قالبی ضرب سے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

اب مساوات 8.104 کی طرح درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ 2w_1 \end{bmatrix}$$

جو وہی پہلا جواب ہے۔آپ نے دیکھا کہ یقیناً $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AD}$ لکھ کر خطی تبادلہ کے نظم کو خطی تبادلہ $\boldsymbol{C}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جس میں انفرادی تبادلہ کی ترتیب برقرار رکھنا ضروری ہے۔ آپ ایسا نہ کرتے ہوئے $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{DA}$ لے کر تسلی کر لیں کہ حاصل جواب درست نہ ہو گا۔ □

سوالات

سوال 8.138: R^2 کے ممکنہ تین مختلف اساس لکھیں۔

جواب: $[1\ 0]^T, [0\ 1]^T; \quad [1\ 0]^T, [0\ {-1}]^T; \quad [1\ 1]^T, [-1\ 1]^T;$

سوال 8.139 تا سوال 8.142 میں خطی تبادلہ دیا گیا ہے۔آپ سے گزارش ہے کہ الٹ خطی تبادلہ دریافت کریں۔

سوال 8.139:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.5x_1 - 1.5x_2 \\ y_2 &= -x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

جواب: $x_1 = -4y_1 - 3y_2$ ، $x_2 = -2y_1 - y_2$

سوال 8.140:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2x_1 + 3x_2 \\ y_2 &= 3x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

جواب: $x_1 = 0.4y_1 + 0.6y_2$ ، $x_2 = 0.6y_1 + 0.4y_2$

سوال 8.141:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ y_2 &= 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ y_3 &= x_1 - x_2 + x_3 \end{aligned}$$

جواب: $x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3,\ x_2 = \frac{5}{8}y_1 + \frac{3}{8}y_2 + \frac{1}{8}y_3,\ x_3 = \frac{1}{8}y_1 - \frac{1}{8}y_2 + \frac{5}{8}y_3$

سوال 8.142:

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 + x_3\\ y_2 &= -2x_3\\ y_3 &= x_1 - x_2\end{aligned}$$

جواب: $x_1 = y_1 + 0.5y_2,\ x_2 = y_1 + 0.5y_2 - y_3,\ x_3 = -0.5y_2$

سوال 8.143 تا سوال 8.147 کی اقلیدسی معیار حاصل کریں۔

سوال 8.143:

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix}^T$$

جواب: $\sqrt{14}$

سوال 8.144:

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix}^T$$

جواب: $\sqrt{14}$

سوال 8.145:

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0\end{bmatrix}^T$$

جواب: $2\sqrt{5}$

سوال 8.146:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}^T$$

جواب: $\frac{\sqrt{61}}{6}$

سوال 8.147:

$$\begin{bmatrix}0.2 & 0.1 & -0.5\end{bmatrix}^T$$

جواب: $\sqrt{0.3}$

سوال 8.148 تا سوال 8.151 اندرونی ضرب اور عمودیت کے سوالات ہیں۔

سوال 8.148: a کی کس قیمت کے لئے $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$ اور $\begin{bmatrix} -1 & 1 & a & 2 \end{bmatrix}^T$ آپس میں عمودی ہیں۔

جواب: $a = -3$

سوال 8.149: کوشی شوارز عدم مساوات
$a = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ اور $b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T$ کے لئے مساوات 8.88 کی تصدیق کریں۔

جواب: $\|a\| = \sqrt{14}$، $\|b\| = \sqrt{38}$ ہیں جن سے $\|a\|\|b\| = 23.065$ ملتا ہے جبکہ $|a \cdot b| = 23$ ہیں لہٰذا مساوات 8.88 کی تصدیق ہوتی ہے۔

سوال 8.150: تکونی عدم مساوات
$a = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ اور $b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T$ کے لئے مساوات 8.89 کی تصدیق کریں۔

جواب: $\|a\| = \sqrt{14}$، $\|b\| = \sqrt{38}$ اور $\|a + b\| = 7\sqrt{2}$ ہیں لہٰذا مساوات 8.89 کی تصدیق ہوتی ہے۔

سوال 8.151: متوازی الاضلاع مساوات
$a = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ اور $b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T$ کے لئے مساوات 8.90 کی تصدیق کریں۔

جواب: $\|a\| = \sqrt{14}$، $\|b\| = \sqrt{38}$، $\|a + b\|^2 = 98$ اور $\|a - b\|^2 = 6$ ہیں لہٰذا $104 = 104$ حاصل ہوتا ہے جو مساوات 8.90 کی تصدیق کرتی ہے۔

باب 9

خطی الجبرا: امتیازی قدر مسائل قالب

امتیازی قدر مسائل درج ذیل سمتی مساوات پر مبنی ہیں جہاں A چکور قالب، x نا معلوم سمتیہ اور λ نا معلوم غیر سمتیہ ہے۔

$$Ax = \lambda x \tag{9.1}$$

امتیازی قدر مسائل میں ہمیں وہ λ اور x درکار ہیں جو درج بالا مساوات پر پورا اترتے ہوں۔ λ کی ہر قیمت کے لئے $x = 0$ مساوات 9.1 کا غیر اہم صفر حل ہے۔ ہم اس غیر اہم صفر حل میں دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہٰذا ہم غیر صفر حل $x \neq 0$ جاننا چاہیں گے۔

λ کی وہ قیمتیں جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں A کے **امتیازی اقدار** یا **امتیازی اقدار**[1] کہلاتے ہیں اور وہ x جو مساوات 9.1 پر پورا اترتے ہیں A کے **امتیازی سمتیات** یا **امتیازی تفاعل**[2] کہلاتے ہیں۔

اس معصوم نظر آنے والا سمتی مساوات کے اندر حیران کن تفصیل چھپی ہے۔امتیازی قدر مسائل انجینئری، طبیعیات، ریاضی، حیاتیات، ماحولیاتی سائنس، شہری منصوبہ بندی، معاشیات، نفسیات اور دیگر شعبوں میں عموماً درپیش آتے ہیں۔آپ کو یقیناً ان سے زندگی میں واسطہ پڑے گا۔

---

[1] eigenvalues
[2] eigenfunctions

9.1 امتیازی قدر مسائل قالب۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول

درج ذیل پر غور کریں جہاں غیر صفر سمتیہ اور چکور قالب کے ضرب دکھائے گئے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 27 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

بائیں ہاتھ کی ضرب میں ہمیں مکمل طور پر نیا سمتیہ حاصل ہوتا ہے جس کی لمبائی اور سمت ابتدائی سمتیہ کی لمبائی اور سمت سے مختلف ہیں۔ عموماً سمتیہ کو چکور قالب سے ضرب دینے سے مکمل طور پر مختلف سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ کی ضرب میں حاصل سمتیہ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

یعنی حاصل سمتیہ اور ابتدائی سمتیہ کی سمتیں ایک جیسی ہیں جبکہ حاصل سمتیہ کی لمبائی ابتدائی سمتیہ کی لمبائی کے دس گنّا ہے جس کو $\lambda = 10$ لکھا جائے گا۔ چکور قالب $\boldsymbol{A}$ کے لحاظ سے ایسے λ اور غیر صفر سمتیات کا حصول اس باب کا مرکزی مضمون ہے۔

آئیں درج بالا مشاہدے کو دستوری شکل دیں۔ فرض کریں کہ $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ غیر صفر $n \times n$ جسامت کا چکور قالب ہے۔ اب درج ذیل سمتی مساوات پر غور کریں۔

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{9.3}$$

ان λ اور غیر صفر $\boldsymbol{x}$ کے حصول کے مسئلے کو، جو مساوات 9.3 پر پورا اترے ہوں، **امتیازی قدر مسئلہ** کہتے ہیں۔

یہاں توجہ دیں کہ $\boldsymbol{A}$ دیا گیا چکور قالب ہے جبکہ λ نا معلوم غیر سمتیہ اور $\boldsymbol{x}$ نا معلوم سمتیہ ہے۔ ہم وہ λ اور $\boldsymbol{x}$ حاصل کرنا چاہتے ہیں جو مساوات 9.3 پر پورا اترتے ہوں۔ جیومیٹریائی طور پر ہم وہ سمتیات $\boldsymbol{x}$ حاصل کرنا چاہتے ہیں جنہیں $\boldsymbol{A}$ سے ضرب دینا ایسا ہی ہے جیسے ان سمتیوں کو غیر سمتی λ سے ضرب دیا جائے یعنی کہ $\boldsymbol{Ax}$ اور $\boldsymbol{x}$ راست تناسب ہوں۔ یوں مثبت λ کی صورت میں ابتدائی اور حاصل سمتیات کی سمتیں ایک جیسی ہوں گی جبکہ منفی λ کی صورت میں ان کی سمتیں آپس میں الٹ ہوں گی۔ (باب کی شروع میں سادہ مثال سے اس کی وضاحت کی گئی ہے۔)

λ کی وہ مخصوص قیمت جس کے لئے مساوات 9.3 کے غیر صفر $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ حل موجود ہوں $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی قدر**[3] کہلاتی ہے اور مطابقتی سمتیات $\boldsymbol{x}$، اس λ کے لحاظ سے قالب $\boldsymbol{A}$ کے **امتیازی سمتیات**[4] یا **امتیازی سمتیات**[5]

[3] eigenvalue
[4] eigenvectors
[5] characteristic vectors

کہلاتے ہیں۔ $\boldsymbol{A}$ کے تمام امتیازی اقدار کو $\boldsymbol{A}$ کا طیف[6] کہتے ہیں۔ طیف میں کم سے کم ایک عدد امتیازی قدر اور زیادہ سے زیادہ n مختلف امتیازی اقدار ہو سکتے ہیں۔ امتیازی اقدار کی سب سے زیادہ مطلق قیمت کو $\boldsymbol{A}$ کا رداس طیف[7] کہتے ہیں۔

امتیازی قدر مسئلے کا حل چند مثالوں کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

مثال 9.1: امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات کا حصول
درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات قدم بہ قدم دریافت کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

پہلے امتیازی اقدار دریافت کیے جاتے ہیں۔ مساوات 9.3 درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \implies \quad \begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

تمام اجزاء کو ایک طرف منتقل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} (-5-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 + (-2-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{9.4}$$

قالبی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

مسئلہ 8.15 کے تحت اس متجانس نظام کا غیر صفر اہم حل $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ (قالب $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی سمتیہ جس کی ہمیں تلاش ہے) اس صورت ممکن ہو گا جب عددی سر قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو گا۔

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

ہم $D(\lambda)$ کو $\boldsymbol{A}$ کی امتیازی مقطع جبکہ اس کی پھیلی ہوئی صورت کو امتیازی کثیر رکنی اور $D(\lambda) = 0$ کو امتیازی مساوات کہتے ہیں۔ اس دو درجی الجبرائی مساوات کے حل $\lambda_1 = -1$ اور $\lambda_2 = -6$ ہیں جو $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہیں۔

---

[6] spectrum
[7] spectral radius

$\lambda_1 = -1$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ مساوات 9.4 میں $\lambda = \lambda_1 = -1$ پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [-5-(-1)]x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 + [-2-(-1)]x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \implies \quad \begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = 2x_1$ ملتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے متعدد متوازی امتیازی سمتیات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔یوں x_1 (یا x_2) کی کوئی بھی قیمت چن کر x_2 (x_1) حاصل کرتے ہوئے امتیازی سمتیہ حاصل ہو گا۔ہم $x_1 = 1$ چن کر $x_2 = 2$ حاصل کرتے ہیں اور یوں $\boldsymbol{x}_1 = [1 \quad 2]^T$ ہو گا۔اس جواب کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$$

$\lambda_2 = -6$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ مساوات 9.4 میں $\lambda = \lambda_1 = -6$ پر کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} [-5-(-6)]x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 + [-2-(-6)]x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \implies \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ان میں سے کسی بھی مساوات کو حل کرتے ہوئے $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$ ملتا ہے۔یوں $x_1 = 2$ چنتے ہوئے $x_2 = -1$ ملتا ہے لہٰذا $\lambda_2 = -6$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}_2 = [2 \quad -1]^T$ ہو گا۔اس کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix} = (-6)\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$$

آپ حصہ 9.1 کے آغاز میں مساوات 9.2 میں دیے گئے مثال کو حل کرتے ہوئے امتیازی اقدار 10 ، 3 اور مطابقتی امتیازی سمتیات $[4 \quad 3]^T$ ، $[-1 \quad 1]^T$ حاصل کریں۔ □

درج بالا مثال میں استعمال کی گئی ترکیب کی عمومی صورت پیش کرتے ہیں۔ مساوات 9.3 کو اجزاء کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned} \tag{9.5}$$

تمام اجزاء کو بائیں ہاتھ منتقل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=0\\
a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0\\
&\vdots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n&=0
\end{aligned} \tag{9.6}
$$

اس کو قالب کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$
(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0 \tag{9.7}
$$

مسئلہ کریمر (مسئلہ 8.15) کے تحت درج بالا متجانس نظام کا غیر صفر حل صرف اور صرف اس صورت ممکن ہو گا جب اس کے عددی سر قالب کا مقطع صفر کے برابر ہو:

$$
D(\lambda)=\begin{vmatrix}
a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda
\end{vmatrix}=0 \tag{9.8}
$$

$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ کو $\boldsymbol{A}$ کا **امتیازی قالب** جبکہ $D(\lambda)$ کو $\boldsymbol{A}$ کا **امتیازی مقطع** کہتے ہیں۔ مساوات 9.8 کو $\boldsymbol{A}$ کی **امتیازی مساوات** کہتے ہیں۔ مساوات 9.8 کو پھیلا کر $\boldsymbol{A}$ کی امتیازی کثیر رکنی حاصل ہو گی۔

مساوات 9.8 کو پھیلا کر حاصل کثیر رکنی میں λ^n بلند تر طاقت ہے لہٰذا اس سے زیادہ سے زیادہ n مختلف امتیازی اقدار حاصل ہو سکتے ہیں۔

مسئلہ 9.1: امتیازی اقدار
چکور قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی مساوات 9.8 سے حاصل ہوں گے۔
یوں $n\times n$ قالب کی کم سے کم ایک عدد امتیازی قدر اور زیادہ سے زیادہ n مختلف امتیازی اقدار ہو سکتے ہیں۔

n کی بڑی قیمت کی صورت میں امتیازی اقدار عموماً ترکیب نیوٹن یا کسی اور اعدادی ترکیب سے حاصل کئے جائیں گے۔

امتیازی اقدار پہلے حاصل کیے جاتے ہیں۔ باری باری ان امتیازی قدر کو مساوات 9.6 کے نظام میں پر کرتے ہوئے مطابقتی امتیازی سمتیہ (گاوسی اسقاط کی مدد سے) حاصل کیا جاتا ہے۔

امتیازی سمتیات درج ذیل خصوصیات رکھتے ہیں۔

مسئلہ 9.2: امتیازی سمتیات اور امتیازی فضا
اگر قالب $\boldsymbol{A}$ کے کسی ایک امتیازی قدر λ کے مطابقتی امتیازی سمتیات $\boldsymbol{w}$ اور $\boldsymbol{x}$ ہوں تب $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{x}$ (بشرطیکہ $\boldsymbol{w} \neq -\boldsymbol{x}$ ہو) اور $k\boldsymbol{x}$ جہاں $k \neq 0$ ہے بھی اس λ کے مطابقتی بھی امتیازی سمتیات ہوں گے۔

یوں کسی ایک امتیازی قدر کے مطابقتی امتیازی سمتیات اور $\boldsymbol{0}$ سمتیہ مل کر فضا بناتے ہیں جس کو اس λ کے لئے $\boldsymbol{A}$ کی مطابقتی **امتیازی فضا** کہتے ہیں۔

ثبوت: $\boldsymbol{Aw}=\lambda\boldsymbol{w}$ اور $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ سے مراد درج ذیل ہے

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Aw}+\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{w}+\lambda\boldsymbol{x}=\lambda(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{x})$$

اور $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{w})=k(\boldsymbol{Aw})=k(\lambda\boldsymbol{w})=\lambda(k\boldsymbol{w})$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{w}+l\boldsymbol{x})=\lambda(k\boldsymbol{w}+l\boldsymbol{x})$ ہو گا۔

□

امتیازی سمتیہ کو معیار سے تقسیم کرتے ہوئے **معیاری امتیازی سمتیہ** یعنی **اکائی امتیازی سمتیہ** حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً مثال 9.1 میں $\boldsymbol{x}_1=[1 \quad 2]^T$ کی لمبائی $\|\boldsymbol{x}_1\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ہے جس سے معیاری امتیازی سمتیہ (اکائی امتیازی سمتیہ) $[\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{2}{\sqrt{5}}]^T$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9.2: متعدد امتیازی سمتیات
درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

حل: اس قالب کی امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$-\lambda^3-\lambda^2+21\lambda+45=0$$

جس سے $\boldsymbol{A}$ کے جذر $\lambda_1 = 5$ اور $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ ملتے ہیں۔(بلند درجی مساوات کا خط کھینچ کر اس کے جذر با آسانی حاصل کیے جاتے ہیں)۔نظام $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ میں $\lambda = \lambda_1 = 5$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مطابقتی امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{گاوسی اسقاط}} \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{24}{7} & -\frac{48}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جس کا مرتبہ دو (2) ہے۔یوں $-\frac{24}{7}x_2 - \frac{48}{7}x_3 = 0$ میں $x_3 = -1$ چنتے ہوئے $x_2 = 2$ حاصل ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو $-7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 1$ ملتا ہے۔یوں $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ قالب $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی قدر $\lambda = 5$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ ہے۔

$\lambda = -3$ سے درج ذیل امتیازی قالب ملتا ہے جس کی تخفیف شدہ صورت گاوسی اسقاط کی مدد سے حاصل کی گئی ہے۔

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{گاوسی اسقاط}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ سے $x_1 = -2x_2 + 3x_3$ لکھا جا سکتا ہے۔ $x_2 = 1$ چنتے ہوئے $x_3 = 0$ ملتا ہے جبکہ $x_2 = 0$ چنتے ہوئے $x_3 = 1$ ملتا ہے۔اس طرح (مساوات 8.41 میں $n = 3$ اور مرتبہ $\boldsymbol{A} = 2$ ہے لہٰذا) $\lambda = -3$ کے مطابقتی خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

امتیازی کثیر رکنی کے جذر λ کے درجہ کو λ کی الجبرائی کثرت[8] کہا اور M_λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کسی λ کے مطابقتی خطی طور غیر تابع امتیازی سمتیات کی تعداد کو جیومیٹریائی کثرت[9] کہا اور m_λ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں λ کے مطابقتی امتیازی فضا کی بُعد m_λ ہو گی۔

---

[8] algebraic multiplicity
[9] geometric multiplicity

چونکہ امتیازی کثیر رکنی کا درجہ n ہے لہٰذا تمام الجبرائی کثرت کا مجموعہ n ہو گا۔ مثال 9.2 میں $\lambda = -3$ کے لئے $m_\lambda = M_\lambda = 2$ ہے۔ عموماً $m_\lambda \leq M_\lambda$ ہو گا۔ M_λ اور m_λ کے فرق $\Delta_\lambda = M_\lambda - m_\lambda$ کو λ کی خامی[10] کہتے ہیں۔ یوں مثال 9.2 میں $\Delta_{-3} = 0$ ہے۔ مثبت خامی کا پایا جانا عمومی بات ہے۔

مثال 9.3: الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت، مثبت خامی

قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی قدر اور امتیازی سمتیات حاصل کرتے ہوئے الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت اور خامی دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \implies \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0$$

یوں $\lambda = 0$ امتیازی قدر ہے جس کی الجبرائی کثرت $M_0 = 2$ ہے۔ $0x_1 + 2x_2 = 0$ سے $x_2 = 0$ حاصل کرتے ہوئے $\lambda = 0$ کے مطابقتی امتیازی سمتیہ کی صورت $[x_1 \quad 0]^T$ ملتی ہے لہٰذا λ کی جیومیٹریائی کثرت $m_0 = 1$ ہے۔ یوں $\lambda = 0$ کی خامی $\Delta_0 = 2 - 1 = 1$ ہے۔ □

مثال 9.4: الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت، مثبت خامی

قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی قدر اور امتیازی سمتیات حاصل کرتے ہوئے الجبرائی کثرت، جیومیٹریائی کثرت اور خامی دریافت کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \implies \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 = 0$$

یوں $\lambda = 3$ کی الجبرائی کثرت $M_3 = 2$ ہے۔ $0x_1 + 2x_2 = 0$ سے $x_2 = 0$ حاصل کرتے ہوئے مطابقتی امتیازی سمتیے کی صورت $[x_1 \quad 0]^T$ ملتی ہے لہٰذا λ_3 کی جیومیٹریائی کثرت $\mathrm{m}_3 = 1$ ہے خامی $\Delta_3 = 2 - 1 = 1$ ہے۔ □

مثال 9.5: حقیقی قالب کے مخلوط امتیازی اقدار اور مخلوط امتیازی سمتیات

چونکہ حقیقی کثیر رکنی کے مخلوط جذر ممکن ہیں (جو جوڑیوں کی صورت میں پائے جاتے ہیں) لہٰذا حقیقی قالب کے

[10] defect

مخلوط امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات ممکن ہیں۔درج ذیل منحرف تشاکلی قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \implies \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

یوں $\lambda_1 = i = (\sqrt{-1})$ اور $\lambda_2 = -i$ ملتے ہیں جن کے مطابقتی امتیازی سمتیات بالترتیب $-ix_1 + x_2 = 0$ اور $ix_1 + x_2 = 0$ سے حاصل ہوں گے۔ہم $x_1 = 1$ چنتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

□

اگلے حصے میں درج ذیل مسئلے کی ضرورت پیش آئے گی۔

مسئلہ 9.3: تبدیل محل قالب کے امتیازی سمتیات
چکور قالب $\boldsymbol{A}$ کے تبدیل محل قالب $\boldsymbol{A}^T$ کے امتیازی سمتیات وہی ہوں گے جو $\boldsymbol{A}$ کے ہیں۔

ثبوت : صفحہ 605 پر مسئلہ 8.13-ت کے تحت تبدیلی محل سے امتیازی قالب کا مقطع تبدیل نہیں ہوتا ہے۔

□

سوالات

سوال 9.1 تا سوال 9.15 میں دیے قالب کے امتیازی اقدار اور ان کے مطابقتی امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

سوال 9.1: $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: $2,\ [0 \quad 1]^T; \quad 4,\ [1 \quad 0]^T$

سوال 9.2: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $0,\ 0,\ [1 \quad 0]^T,\ [0 \quad 1]^T$

سوال 9.3: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: $3,\ [1 \quad 1]^T; \quad 1,\ [1 \quad -1]^T$

سوال 9.4: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: $2-\sqrt{3},\ [1 \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}]^T; \quad 2+\sqrt{3},\ [1 \quad \frac{1}{\sqrt{3}}]^T$

سوال 9.5: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: $2-i\sqrt{3},\ [1 \quad -\frac{i}{\sqrt{3}}]^T; \quad 2+i\sqrt{3},\ [1 \quad \frac{i}{\sqrt{3}}]^T$

سوال 9.6: $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $-4,\ [1 \quad -1]^T; \quad 4,\ [1 \quad 1]^T$

سوال 9.7: $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $-4i,\ [1 \quad i]^T; \quad 4i,\ [1 \quad -i]^T$

سوال 9.8: $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

جوابات: $a-ib,\ [1 \quad -i]^T; \quad a+ib,\ [1 \quad i]^T$

سوال 9.9: $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

جوابات: $-\frac{i}{\sqrt{5}},\ [1 \quad -\frac{i\sqrt{5}+2}{3}]^T; \quad \frac{i}{\sqrt{5}},\ [1 \quad \frac{i\sqrt{5}-2}{3}]^T$

سوال 9.10: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

جوابات: $\cos\theta - i\sin\theta,\ [1 \quad i]^T; \quad \cos\theta + i\sin\theta,\ [1 \quad -i]^T$

سوال 9.11: $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

جوابات: $-1,\ [1 \quad -3 \quad 2]^T;\quad 0,\ [0 \quad 1 \quad 0]^T;\quad 1,\ [1 \quad 1 \quad 0]^T$

سوال 9.12: $\begin{bmatrix}2 & 5 & 2\\0 & 4 & 6\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

جوابات: $1,\ [1 \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}]^T;\quad 2,\ [1 \quad 0 \quad 0]^T;\quad 4,\ [1 \quad \frac{2}{5} \quad 0]^T$

سوال 9.13: $\begin{bmatrix}13 & 5 & 2\\2 & 7 & -8\\5 & 4 & 7\end{bmatrix}$

جوابات: $9,\ [1 \quad -1 \quad \frac{1}{2}]^T$

سوال 9.14: $\lambda = -1$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ دریافت کریں۔ $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 6 & 0\\0 & -1 & 0 & 6\\0 & 0 & -1 & -2\\0 & 0 & -2 & -1\end{bmatrix}$

جوابات: $[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$

سوال 9.15: $\lambda = 3$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ دریافت کریں۔ $\begin{bmatrix}3 & 0 & 4 & 2\\0 & 1 & -2 & 4\\2 & 4 & -1 & -2\\0 & 2 & -2 & -3\end{bmatrix}$

جوابات: $[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$

$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ کارتیسی محور ہیں۔ سوال 9.16 تا سوال 9.17 میں درکار تبادل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کے لئے $\boldsymbol{A}$ حاصل کریں جہاں $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2]^T$ ہے۔ امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات دریافت کریں اور ان کی جیومیٹریائی اہمیت بیان کریں۔

سوال 9.16: R^2 میں گھڑی کی سوئیوں کی الٹ رخ، کارتیسی محدد کی مبدا کے گرد $\frac{\pi}{2}$ زاویہ گھومنا۔

جوابات: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ امتیازی اقدار i اور $-i$ ہیں۔ ان کے مطابقتی امتیازی سمتیات مخلوط ہیں لہٰذا گھمانے والے تبادلے میں کوئی سمت برقرار نہیں رہتی ہے۔

سوال 9.17: R^2 کا x_2 محور پر تظلیل قائمہ۔

جوابات: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 0; $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 1 محور x_2 اپنے آپ پر ہی گرتی ہے جبکہ x_1 مبدا پر گرتی ہے۔

9.2 امتیازی مسائل کے چند استعمال

مثال 9.6: لچکدار جھلی کا تاننا

x_1x_2 سطح میں دائری سرحد $x_1^2 + x_2^2 = 1$ کی لچکدار جھلی (شکل 9.6) کو یوں کھینچ کر پھیلایا جاتا ہے کہ نقطہ $N(x_1, x_2)$ اپنی جگہ سے نقطہ $Q(y_1, y_2)$ کو منتقل ہوتا ہے جہاں اس نقطے کی ابتدائی اور اختتامی مقام کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} y_1 &= 4x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

وہ صدر محور[11] دریافت کریں جن پر N کی تعین کر سمتیہ اور Q کی تعین کر سمتیہ ایک ہی رخ یا الٹ رخ ہوں۔ تبدیلی کے بعد جھلی کا سرحد کس صورت کا ہو گا؟

حل: ہمیں سمتیہ $\boldsymbol{x}$ اور سمتیہ $\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x}$ درکار ہیں۔ اب چونکہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ ہو گا جو امتیازی مسئلہ بیان کرتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \implies \begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned} \implies \begin{aligned} (4-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

اس کی امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)^2 - 4 = 0$$

---

[11] principal axis

جس کے جذر $\lambda_1 = 6$ اور $\lambda_2 = 2$ ہمارے مسئلے کے امتیازی اقدار ہیں۔امتیازی قدر $\lambda_1 = 6$ کے لئے اس مسئلے کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

جس سے $x_2 = x_1$ ملتا ہے جہاں x_1 اختیاری مستقل ہے۔ہم $x_1 = 1$ چن کر $x_2 = 1$ حاصل کرتے ہیں جس سے $\lambda_1 = 6$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $[1 \quad 1]^T$ ملتا ہے۔امتیازی قدر $\lambda_2 = 2$ کے لئے اس مسئلے کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

جس سے $x_2 = -x_1$ ملتا ہے جہاں x_1 اختیاری مستقل ہے۔ہم $x_1 = 1$ چن کر $x_2 = -1$ حاصل کرتے ہیں جس سے $\lambda_2 = 2$ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $[1 \quad -1]^T$ ملتا ہے۔

یہ امتیازی سمتیات مثبت x_1 محور کے ساتھ 45° اور -45° زاویہ بناتے ہیں۔ صدر محور کے رخ اور ان امتیازی سمتیات کے رخ ایک جیسے ہیں۔امتیازی اقدار کے تحت ان صدر محور کی سمت میں جھلی بالترتیب 6 اور 2 گنّا پھیل گئی ہے۔ شکل 9.6 میں صدر محور کو نقطہ دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اب اگر ہم صدر محور کو نئی کارتیسی نظام u_1u_2 کے محور یوں چنیں کہ x_1x_2 نظام کی پہلی ربع میں مثبت u_1 اور اس کی دوسری ربع میں مثبت u_2 پایا جاتا ہو تب جھلی پر کسی بھی نقطے کو $u_1 = r\cos\phi$ ، $u_2 = r\sin\phi$ لکھا جا سکتا ہے۔اس طرح جھلی کی سرحد ابتدائی طور پر $(\cos\phi, \sin\phi)$ ہو گا۔ کھینچنے کے بعد درج ذیل ہو گا۔

$$z_1 = 6\cos\phi, \quad z_2 = 2\sin\phi$$

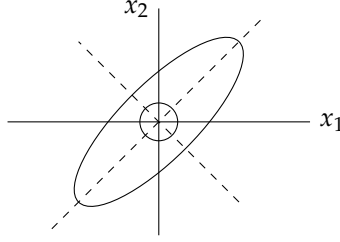
اب چونکہ $\cos\phi + \sin\phi = 1$ کے برابر ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو ترخیم کی مساوات ہے۔یوں کھینچی گئی جھلی کا سرحد ترخیمی ہو گا۔

$$\frac{z_1^2}{6^2} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1$$

□

مثال 9.7: امکانی شماریاتی عمل

صفحہ 550 پر مثال 8.18 میں شہری رقبے کی استعمال کی تقسیم پر غور کیا گیا۔یہ عمل آخر کار تحدیدی حال[12] تک

[12] limit state

شکل 9.1: صدر محور کو نقطہ دار لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ (مثال 9.6)

پہنچ جائے گا جس کے بعد اس میں مزید تبدیلی رو نما نہیں ہو گی۔ یوں امکانی شماریاتی قالب $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$ پر پورا اترے گا۔ اس مساوات کی امتیازی قدر اکائی ہے جبکہ امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ درکار رقبے کی مطلق سمت ہے۔ یوں ہم $\boldsymbol{A}$ سے رو نما ہونے والے عمل کی طویل مدتی اثرات جان سکتے ہیں۔

اس مثال میں

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

ہے جس کے امتیازی اقدار $\frac{7-\sqrt{2}}{10}$ ، $\frac{7+\sqrt{2}}{10}$ اور 1 ہیں۔ ہمیں اکائی امتیازی قدر $\lambda = 1$ سے غرض ہے جو $[1\ 2\ 4]^T$ ہے۔ یوں شہر میں آخر کار رہائشی، تجارتی اور صنعتی تقسیم رقبہ بالترتیب 1 ، 2 اور 4 تناسب سے ہو گی۔ □

مثال 9.8: نمو آبادی کا لزلی نمونہ

لزلی نمونہ[13] جو عمر کے لحاظ سے آبادی میں اضافہ بتاتا ہے پر غور کرتے ہیں۔ لزلی نمونے میں عمر کے لحاظ سے آبادی کی گروہ بندی کی جاتی ہے اور نظر عموماً صرف مادہ جانور پر رکھی جاتی ہے۔ فرض کریں کہ کسی جانور کی آبادی میں مادہ جانور کی زیادہ سے زیادہ عمر 12 سال ہے۔ ہم مادہ آبادی کو چار سال کے برابر وقفے سے تین گروہوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ لزلی قالب درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{L} = [l_{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & 2.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

---

[13] Leslie model

لزلی قالب میں l_{1k} سے مراد k گروہ میں رہتے ہوئے ایک مادہ سے پیدا ہونے والی بیٹیوں کی اوسط تعداد ہے جبکہ گروہ $j-1$ سے گروہ j تک زندہ پہنچنے والی مادہ کی تناسب کو $l_{j,j-1}(j=2,3)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔پہلی چار سال کی عمر میں کم عمری کی بنا مادہ بچہ نہیں دیتی لہٰذا $l_{11}=0$ ہے۔اسی طرح پانچ تا آٹھ سال کی عمر میں جوان مادہ زیادہ سے زیادہ (اوسطاً 2.3) بچے دیتی ہے جبکہ ضعیفی میں مادہ اوسطاً 0.4 بچے دیتی ہے۔اسی طرح بچوں کا 0.6 حصہ یعنی 60% جوانی تک پہنچ پاتا ہے جبکہ جوان جانوروں کا 0.3 حصہ یعنی 30% بڑھاپے تک پہنچتا ہے۔

(الف) اگر ہر گروہ کی ابتدائی مادہ آبادی 2600 ہو تب 4 ، 8 اور 12 سال بعد ان گروہوں کی مادہ آبادی کیا ہو گی؟ (ب) ان گروہوں کی ابتدائی آبادی کیا ہونے سے تمام گروہوں میں تبدیلی کی تناسب برابر ہو گی؟ یہ تناسب کیا ہو گی؟

حل: (الف) ابتدائی طور پر $\boldsymbol{x}_0=[2600 \quad 2600 \quad 2600]^T$ ہے۔چار سال بعد گروہ بندی درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{x}_4=\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}0 & 2.3 & 0.4\\ 0.6 & 0 & 0\\ 0 & 0.3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2600\\2600\\2600\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7020\\1560\\780\end{bmatrix}$$

اسی طرح آٹھ سال بعد آبادی $\boldsymbol{x}_8=\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_4=\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{x}_0=[3900 \quad 4212 \quad 468]^T$ اور بارہ سال بعد آبادی $\boldsymbol{x}_{12}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}_8=\boldsymbol{L}^3\boldsymbol{x}_0=[9875 \quad 2340 \quad 1264]^T$ ہو گی۔

(ب) متناسب تبدیلی آبادی دریافت کرنے کی خاطر ہمیں ایسا امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ درکار ہے جو $\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ پر پورا اترتا ہو جہاں $\lambda>1$ آبادی میں اضافے کے تناسب اور $\lambda<1$ آبادی میں کمی کے تناسب کو ظاہر کرے گا۔امتیازی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 2.3 & 0.4\\ 0.6 & -\lambda & 0\\ 0 & 0.3 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+1.38\lambda+0.072=0$$

جس کے امتیازی اقدار $\frac{6}{5}$ ، $-\frac{\sqrt{30}+6}{10}$ اور $\frac{\sqrt{30}-6}{10}$ ہیں جنہیں کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔امتیازی قدر $\lambda=\frac{6}{5}=1.2$ آبادی میں اضافے کو ظاہر کرتی ہے جس کا مطابقتی امتیازی سمتیہ درج ذیل ہے

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1.2 & 2.3 & 0.4\\ 0.6 & -1.2 & 0\\ 0 & 0.3 & -1.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0 \quad\implies\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}8\\4\\1\end{bmatrix}$$

جہاں $x_3 = 1$ چنتے ہوئے $x_2 = 4$ اور $x_1 = 8$ حاصل کیا گیا ہے۔ابتدائی کل آبادی $3 \times 2600 = 7800$ حاصل کرنے کی خاطر ہم اس امتیازی سمتیہ کو $\frac{7800}{8+4+1} = 600$ سے ضرب دیتے ہوئے ابتدائی آبادی درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$600[8 \quad 4 \quad 1]^T = [4800 \quad 2400 \quad 600]^T$$

آبادی میں تبدیلی کا تناسب 1.2 فی چار سال ہو گا۔ □

سوالات

سوال 9.18 تا سوال 9.23 میں تبدیلی شکل $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کا قالب $\boldsymbol{A}$ دیا گیا ہے۔صدر سمتیں اور ان کی مطابقتی سکڑاو یا پھیلاو کا تناسب دریافت کریں۔

سوال 9.18: $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

جوابات: $3,\ [1 \ -1]^T,\ -45^\circ; \quad 7,\ [1 \ 1]^T,\ 45^\circ$

سوال 9.19: $\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: $-3.23,\ [1 \ -1.529]^T,\ -56.8^\circ; \quad 14.23,\ [1 \ 0.654]^T,\ 33.2^\circ$

سوال 9.20: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

جوابات: $1-2\sqrt{2},\ [1 \ -\sqrt{2}]^T,\ -54.7^\circ; \quad 1+2\sqrt{2},\ [1 \ \sqrt{2}]^T,\ 54.7^\circ$

سوال 9.21: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 43 & 12 \end{bmatrix}$

جوابات: $7-\sqrt{34},\ [1 \ \frac{5-\sqrt{34}}{3}]^T,\ -15.5^\circ; \quad 7+\sqrt{34},\ [1 \ \frac{5+\sqrt{34}}{3}]^T,\ 74.5^\circ$

سوال 9.22: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

جوابات: $2,\ [1 \ -1]^T,\ -45^\circ; \quad 8,\ [1 \ 5]^T,\ 78.7^\circ$

سوال 9.23: $\begin{bmatrix} 1.25 & 0.45 \\ 0.75 & 2.5 \end{bmatrix}$

جوابات: $1.02,\ [1 \quad -0.507]^T,\ -26.9^\circ; \quad 2.73,\ [1 \quad 3.285]^T,\ 73.1^\circ$

سوال 9.24 تا سوال 9.26 میں دیے گئے امکانی شماریاتی عمل کا تحدیدی حال دریافت کریں۔

سوال 9.24: $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$

جواب: $\begin{bmatrix} 5 & 8 \end{bmatrix}^T$

سوال 9.25: $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$

جواب: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

سوال 9.26: $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$

جواب: $\begin{bmatrix} 29 & 27 & 49 \end{bmatrix}^T$

سوال 9.27 اور سوال 9.28 میں لزلی نمونے کا قالب $\boldsymbol{L}$ دیا گیا ہے (مثال 9.8)۔ نمو آبادی کا تناسب دریافت کریں۔

سوال 9.27: $\begin{bmatrix} 0 & 3.45 & 0.6 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0 \end{bmatrix}$

جواب: $\frac{9}{5}$

سوال 9.28: $\begin{bmatrix} 0 & 9 & 5 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$

جواب: 2

سوال 9.29 تا سوال 9.31 لیونٹف نمونہ[14] برائے مدخل و مخرج پر مبنی ہیں۔

سوال 9.29: لیونٹف مدخل و مخرج نمونہ[15] صنعت کی پیداوار اور اس کے اخراجات کا تعلق بیان کرتا ہے۔فرض کریں کہ تین صنعتوں کی پیداوار یہی صنعت استعمال کرتے ہیں اور اس تعلق کو درج ذیل 3×3 قالب صرف[16] پیش کرتا ہے

$$\boldsymbol{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

جہاں a_{jk} صنعت k کی پیداوار کی وہ تناسب ہے جو صنعت j خرید کر استعمال کرتی ہے۔ فرض کریں کہ صنعت j کی کل پیداوار کی آمدن p_j ہے۔ہم چاہتے ہیں کہ ایسی قیمتیں دریافت کریں کہ ہر صنعت کی اخراجات اس صنعت کی آمدی کے برابر ہو۔ اس کو بطور مسئلہ $\boldsymbol{Ap} = \boldsymbol{p}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{p} = [p_1 \;\; p_2 \;\; p_3]^T$ ہے۔ایسا $\boldsymbol{p}$ دریافت کریں کہ p_1 ، p_2 اور p_3 غیر منفی ہوں۔

جواب: $c[10 \quad 18 \quad 25]^T$ جہاں c مستقل ہے۔

سوال 9.30: ثابت کریں کہ سوال 9.29 کے قالب صرف کے ہر قطار کے ارکان کا مجموعہ اکائی (1) ہو گا اور اس قالب صرف کا امتیازی قدر بھی اکائی ہو گا۔

سوال 9.31: آزاد لیونٹف نمونے میں پیداوار کا کچھ حصہ یہی صنعت استعمال کرتے ہیں جبکہ باقی حصہ فروخت کیا جاتا ہے۔یوں $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$ (سوال 9.29) کی بجائے، $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$ ہو گا جہاں $\boldsymbol{x}$ پیداوار ہے جبکہ $\boldsymbol{Ax}$ وہ حصہ ہے جو یہی صنعتیں خود استعمال کرتی ہیں لہٰذا $\boldsymbol{y}$ وہ حصہ ہے جس کو فروخت کیا جا سکتا ہے۔

قالب مانگ[17] $\boldsymbol{y} = [0.1 \;\; 0.3 \;\; 0.1]^T$ کو پورا کرنے کے لئے قالب پیداوار $\boldsymbol{x}$ دریافت کریں جہاں قالب صرف درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

---

[14] Leontief model
[15] روس کے وسیلی وسیلی وچ لیونٹف [1906-1999] نے یہ نمونہ پیش کر کے نوبل انعام حاصل کیا۔
[16] consumption matrix
[17] demand matrix

جواب: $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{y} = [0.6747 \quad 0.7128 \quad 0.7543]^T$

سوال 9.32 تا سوال 9.35 امتیازی قدر مسائل کے عمومی خصوصیات پر مبنی ہیں جنہیں آپ نے ثابت کرنا ہے۔ان مسائل میں فرض کریں کہ $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار λ_1 تا λ_n ہیں جو غیر منفرد ہو سکتے ہیں۔

سوال 9.32: مرکزی وتر کے ارکان کا مجموعہ اور امتیازی اقدار کا مجموعہ برابر ہیں۔

سوال 9.33: طیفی منتقلی
$\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{I}$ کے امتیازی اقدار $\lambda_1 - k$ تا $\lambda_n - k$ ہیں جبکہ اس کے امتیازی سمتیات وہی ہیں جو $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔

سوال 9.34: غیر سمتی مضرب، طاقت
غیر سمتی مضرب $k\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار $k\lambda_1$ تا $k\lambda_n$ ہیں جبکہ $\boldsymbol{A}^m$ جہاں $m = 1, 2, \cdots$ ہے کے امتیازی اقدار λ_1^m تا λ_n^m ہیں۔دونوں صورتوں میں امتیازی سمتیات وہی ہیں جو $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔

سوال 9.35: کثیر رکنی $p(\boldsymbol{A}) = k_m\boldsymbol{A}^m + k_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1} + \cdots + k_1\boldsymbol{A} + k_0\boldsymbol{I}$ کے امتیازی اقدار درج ذیل ہیں

$$p(\lambda_j) = k_j\lambda_j^m + k_{m-1}\lambda_j^{m-1} + \cdots + k_1\lambda_j + k_0$$

جہاں $j = 1, 2, \cdots$ ہے جبکہ اس کثیر رکنی کے امتیازی سمتیات وہی ہیں کو $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔(سوال 9.34 کے نتائج استعمال کریں۔)

9.3 تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب

حقیقی چکور قالب کی تین اقسام پر یہاں غور کیا جائے گا جن کی غیر معمولی خصوصیات پائی جاتی ہیں۔تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کا حصہ 8.2 میں ذکر ہو چکا ہے۔

تعریف: تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
ایسا حقیقی چکور قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ جو تبدیلی محل سے تبدیل نہیں ہوتا تشاکلی[18] قالب کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A} \quad \Longrightarrow \quad [a_{kj}] = [a_{jk}] \tag{9.9}$$

symmetric[18]

ایسا حقیقی چکور قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ جس کا تبدیل محل اس قالب کا منفی ہو **منحرف تشاکلی**[19] قالب کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A} \quad \implies \quad [a_{kj}] = -[a_{jk}] \tag{9.10}$$

ایسا حقیقی چکور قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ جس کا تبدیل محل اس قالب کا معکوس ہو **قائمہ الزاویہ**[20] قالب کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1} \tag{9.11}$$

مثال 9.9: تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب
آپ سے التماس ہے کہ درج ذیل میں تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب کی پہچان کریں۔

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \\ 2 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

کیا آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ ہر منحرف تشاکلی قالب کے مرکزی وتر کے تمام اجزاء صفر ہوں گے؟ □

کسی بھی حقیقی چکور قالب کو تشاکلی قالب $\boldsymbol{R}$ اور منحرف تشاکلی قالب $\boldsymbol{S}$ کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے جہاں تشاکلی قالب اور منحرف تشاکلی قالب درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T), \quad \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T) \tag{9.12}$$

مثال 9.10: قالب بطور تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کا مجموعہ

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

□

---

[19] skew-symmetric
[20] orthogonal

مسئلہ 9.4: تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کے امتیازی اقدار
(الف) تشاکلی قالب کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔
(ب) منحرف تشاکلی قالب کے امتیازی اقدار خیالی یا صفر ہوں گے۔

درج بالا مسئلے کا ثبوت مسئلہ 9.14 میں پیش کیا جائے گا۔

مثال 9.11: تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کے امتیازی اقدار
درج ذیل تشاکلی قالب R کے امتیازی اقدار -2 اور 4 ہیں جبکہ منحرف تشاکلی قالب S کے امتیازی اقدار $-3i$ اور $3i$ ہیں۔ قالب $\boldsymbol{C}$ ناتشاکلی اور نا منحرف تشاکلی ہے جبکہ اس کے امتیازی اقدار 0 اور 4 ہیں۔ مسئلہ 9.4 ایسے قالب کے بارے میں کچھ نہیں کہتا ہے۔

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

□

قائمہ الزاویہ تبادلے اور قائمہ الزاویہ قالب

قائمہ الزاویہ تبادلے سے مراد درج ذیل ہے جہاں $\boldsymbol{A}$ قائمہ الزاویہ قالب ہے۔

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{9.13}$$

قائمہ الزاویہ تبادلہ R^n میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کی جگہ R^n میں سمتیہ $\boldsymbol{y}$ مقرر کرتا ہے۔ مثال کے طور پر سطح میں گھومنا، قائمہ الزاویہ تبادل ہے یعنی:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9.14}$$

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے سطح یا تین بعدی فضا میں قائمہ الزاویہ تبادل گھومنے کو ظاہر کرتا ہے (اور ساتھ ہی بالترتیب کسی خط یا سطح میں انعکاس بھی ممکن ہے)۔

قائمہ الزاویہ قالب کی اہمیت درج ذیل کی بنا ہے۔

مسئلہ 9.5: اندرونی ضرب کی عدم تغیر
R^n میں سمتیات $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے اندرونی ضرب کی قیمت کو قائمہ الزاویہ تبادل برقرار رکھتا ہے جہاں اندرونی ضرب درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}=[a_1\ \cdots\ a_n]\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix} \tag{9.15}$$

یوں $n\times n$ قائمہ الزاویہ قالب $\boldsymbol{A}$ اور R^n میں کسی بھی $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ اور $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$ کی صورت میں $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ہو گا۔

اس طرح R^n میں ہر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کی لمبائی یا معیار کو قائمہ الزاویہ تبادل برقرار رکھتا ہے جہاں سمتیہ کی لمبائی یا معیار درج ذیل ہے۔

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} \tag{9.16}$$

ثبوت: فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ قائمہ الزاویہ ہے اور $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$ ہیں۔اب صفحہ 547 پر مساوات 8.23-ت کے تحت $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})^T=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{A}^T$ ہو گا جبکہ مساوات 9.11 کے تحت $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ ہو گا۔اس طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{9.17}$$

اس میں $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ پر کرنے سے $\|\boldsymbol{a}\|$ عدم تغیر ثابت ہوتا ہے۔

□

مسئلہ 9.6: صف اور قطار کی معیاری قائمیت
حقیقی چکور قالب صرف اور صرف اس صورت قائمہ الزاویہ ہو گا جب اس کے سمتیات قطار $\boldsymbol{a}_1$ تا $\boldsymbol{a}_n$ (اور سمتیات صف) معیاری قائمہ الزاویہ ہوں یعنی:

$$\boldsymbol{a}_j\cdot\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}_k=\begin{cases}0 & j\neq k\\ 1 & j=k\end{cases} \tag{9.18}$$

ثبوت: (الف) فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ قائمہ الزاویہ ہے۔یوں $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ہو گا جس کو سمتیات قطار $\boldsymbol{a}_1$ تا $\boldsymbol{a}_n$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n \\ \vdots & & & \\ \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \tag{9.19}$$

چونکہ $n \times n$ اکائی قالب $\boldsymbol{I}$ کا مرکزی وتر اکائی جبکہ باقی تمام اجزاء صفر ہوتے ہیں لہٰذا مساوات 9.19 کا دائیں ہاتھ مساوات 9.18 دیتا ہے۔مساوات 9.11 کے تحت قائمہ الزاویہ قالب کا معکوس بھی قائمہ الزاویہ ہو گا۔ اب $\boldsymbol{A}^{-1}(=\boldsymbol{A}^T)$ کے سمتیات قطار $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات صف ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات صف بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

(ب) اس کے برعکس اگر $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات قطار مساوات 9.18 پر پورا اترتے ہوں تب مساوات 9.19 دائیں ہاتھ قالب کے مرکزی وتر سے ہٹ کر تمام ارکان صفر (0) ہوں گے جبکہ وتری ارکان اکائی (1) ہوں گے لہٰذا $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ہے چونکہ $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$ ہو گا۔ اس سے مراد $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$ ہو گا۔اسی طرح $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ ہے جبکہ $\boldsymbol{A}^{-1}$ یکتا ہے۔یوں $\boldsymbol{A}$ قائمہ الزاویہ ہو گا۔ثبوت کے حصہ-الف کے آخر کی طرح $\boldsymbol{A}$ کے سمتیات قطار بھی قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

□

مسئلہ 9.7: قائمہ الزاویہ قالب کا مقطع
قائمہ الزاویہ قالب کی مقطع کی قیمت $+1$ یا -1 ہو گی۔

ثبوت: صفحہ 626 پر مسئلہ 8.19 کے تحت درج ذیل ہے

$$\text{مقطع}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (\text{مقطع}\,\boldsymbol{A})(\text{مقطع}\,\boldsymbol{B})$$

جبکہ صفحہ 605 پر مسئلہ 8.13-ت کے تحت $\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}^T = \text{مقطع}\,\boldsymbol{A}$ ہے لہٰذا قائمہ الزاویہ قالب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$1 = \text{مقطع}\,\boldsymbol{I} = \text{مقطع}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}) = \text{مقطع}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = (\text{مقطع}\,\boldsymbol{A})(\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}^T) = (\text{مقطع}\,\boldsymbol{A})^2 \tag{9.20}$$

□

مثال 9.12: مسئلہ 9.7
مثال 9.9 میں دیے گئے قائمہ الزاویہ قالب کا مقطع -1 ہے جبکہ مساوات 9.14 کے قالب کا مقطع $+1$ ہے۔ □

مسئلہ 9.8: قائمہ الزاویہ قالب کے امتیازی اقدار
قائمہ الزاویہ قالب کے امتیازی اقدار حقیقی یا جوڑی دار مخلوط ہوں گے جن کی مطلق قیمت اکائی ہو گی۔

ثبوت: چونکہ حقیقی قالب کی امتیازی کثیر رکنی کے عددی سر حقیقی ہوتے ہیں لہٰذا اس کے امتیازی اقدار (یعنی صفر) مسئلے کے تحت ہوں گے۔یوں مسئلے کا پہلا حصہ کسی بھی حقیقی قالب کے لئے درست ہے۔امتیازی قدر کی مطلق قیمت اکائی کے برابر $|\lambda| = 1$ ہونے کا ثبوت مسئلہ 9.14 میں پیش کیا جائے گا۔

□

مثال 9.13: مثال 9.9 میں دیے گئے قائمہ الزاویہ قالب کی امتیازی کثیر رکنی درج ذیل ہے۔

$$-\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - 1 = 0$$

چونکہ مخلوط جذر صرف جوڑی دار ممکن ہیں لہٰذا اس کثیر رکنی کا ایک جذر حقیقی ہو گا جو مسئلہ 9.7 کے تحت $+1$ یا -1 ہو گا۔ان قیمتوں کو کثیر رکنی میں پر کرتے ہوئے پہلا جذر یعنی امتیازی اقدار $\lambda = -1$ ملتا ہے۔کثیر رکنی کو $\lambda + 1$ سے تقسیم کرتے ہوئے $-(\lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda + 1) = 0$ ملتا ہے جس کے جذر $\frac{5+i\sqrt{11}}{6}$ اور $\frac{5-i\sqrt{11}}{6}$ ہیں جن کی مطلق قیمت 1 ہے۔ □

سوالات

سوال 9.36 تا سوال 9.44 میں قالب تشاکلی، منحرف تشاکلی یا قائمہ الزاویہ ہیں؟ ان کا طیف دریافت کریں جو مسئلہ 9.4 اور مسئلہ 9.8 پر پورا اتریں گے۔ امتیازی سمتیات بھی معلوم کریں۔

سوال 9.36: $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$

جوابات: قائمہ الزاویہ، $\frac{4-i3}{5},\ [1 \quad -i]^T;\quad \frac{4+i3}{5},\ [1 \quad i]^T$

سوال 9.37: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: تینوں قسم نہیں ہے، $2-i3,\ [1 \quad -i]^T;\quad 2+i3,\ [1 \quad i]^T$

سوال 9.38: $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

جوابات: تینوں قسم نہیں ہے، $a-ib,\ [1 \quad -i]^T;\quad a+ib,\ [1 \quad i]^T$

سوال 9.39: $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

جوابات: تشاکلی، $6,\ [0 \quad 1 \quad -2]^T;\quad 1,\ [0 \quad 1 \quad \frac{1}{2}]^T;\quad 4,\ [1 \quad 0 \quad 0]^T$

سوال 9.40: $\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$

جوابات: تشاکلی، $a+2b,\ [1 \quad 1 \quad 1]^T;\quad a-b,\ [1 \quad 0 \quad -1]^T,\ [0 \quad 1 \quad -1]^T$

سوال 9.41: $\begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: منحرف تشاکلی، $\pm 25i,\ [1 \ \pm\frac{16+i15}{15} \ \pm\frac{12-i20}{15}]^T;\ 0,\ [0 \ \frac{3}{5} \ \frac{9}{20}]^T$

سوال 9.42:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$
جوابات: تینوں نہیں، $1,\ [1 \quad 0 \quad 0]^T;\quad \sin\theta \pm i\cos\theta,\ [0 \quad 1 \quad \pm i]^T$

سوال 9.43:
$$\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$$
جوابات: قائمہ الزاویہ، $1,\ [1 \quad 1 \quad -3]^T;\quad \frac{7\pm i5\sqrt{11}}{18},\ [1 \quad \frac{-1\pm i3\sqrt{11}}{10} \quad \frac{3\pm i\sqrt{11}}{10}]^T$

سوال 9.44:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
جوابات: قائمہ الزاویہ، $1,\ [0 \quad 1 \quad 0]^T;\quad \pm i,\ [1 \quad 0 \quad \pm i]^T$

سوال 9.45 تا سوال 9.48 عمومی خصوصیات پر مبنی ہیں۔

سوال 9.45: مجموعہ
کیا $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ کے امتیازی اقدار $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے امتیازی اقدار کا مجموعہ ہوں گے۔

جواب: نہیں

سوال 9.46: ثبوت
ثابت کریں کہ تشاکلی قالب کے منفرد امتیازی اقدار کے مطابقتی امتیازی سمتیات قائمہ الزاویہ ہوں گے۔مثال دیں۔

سوال 9.47: منحرف تشاکلی قالب
ثابت کریں کہ منحرف تشاکلی قالب کا معکوس بھی منحرف تشاکلی قالب ہو گا۔

جواب: $\boldsymbol{A}^{-1} = (-\boldsymbol{A}^T)^{-1} = -(\boldsymbol{A}^{-1})^T$

سوال 9.48: قائمہ الزاویہ قالب
کیا 3×3 منحرف تشاکلی قائمہ الزاویہ قالب موجود ہیں؟

9.4 امتیازی اساس، وتری بنانا، دودرجی صورت

اب تک امتیازی اقدار کی خصوصیات پر غور کیا گیا۔آئیں اب امتیازی سمتیات کی خصوصیات پر غور کرتے ہیں۔ $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات کبھی کبھار فضا R^n کی اساس ہوتے ہیں لہٰذا R^n میں کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کو ان امتیازی سمتیات $\boldsymbol{x}_1$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{x}_n$ کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے مثلاً:

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n \tag{9.21}$$

ان امتیازی سمتیات کے مطابقتی امتیازی اقدار (جو ضروری نہیں کہ منفرد ہوں) کو λ_1 تا λ_n سے ظاہر کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j = \lambda_j\boldsymbol{x}_j$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا تبادلہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n)\\ &= c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n\\ &= c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\boldsymbol{x}_n\end{aligned} \tag{9.22}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{A}$ کا کسی بھی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ پر پیچیدہ عمل اساس کی مدد سے غیر سمتی ضرب کی سادہ عمل میں تبدیل ہو گیا ہے۔ یہی امتیازی اساس کی افادیت ہے۔

اگر تمام امتیازی اقدار منفرد ہوں تب امتیازی سمتیات ضرور امتیازی اساس ہوں گے۔

مسئلہ 9.9: امتیازی سمتیات کی اساس
اگر $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کے n منفرد امتیازی اقدار ہوں تب R^n کی اساس $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات $\boldsymbol{x}_1$ تا $\boldsymbol{x}_n$ ہوں گے۔

ثبوت: ہمیں صرف اتنا ثابت کرنا ہے کہ $\boldsymbol{x}_1$ تا $\boldsymbol{x}_n$ خطی طور غیر تابع ہیں۔فرض کریں کہ ایسا نہیں ہے اور صرف r عدد امتیازی سمتیات خطی طور غیر تابع ہیں۔یوں $r < n$ ہو گا اور سمتیات $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}\}$ کا سلسلہ خطی طور تابع ہو گا۔یوں ایسے غیر سمتی مستقل $\boldsymbol{c}_1$ تا $\boldsymbol{c}_{r+1}$ (جن میں سے کم از کم ایک مستقل غیر صفر ہو) موجود ہوں گے جو درج ذیل مساوات پر پورا اتریں گے (حصہ 8.4)۔

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{r+1}\boldsymbol{x}_{r+1} = \boldsymbol{0} \tag{9.23}$$

دونوں اطراف کو $\boldsymbol{A}$ سے ضرب دے کر $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j = \lambda_j\boldsymbol{x}_j$ استعمال کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{r+1}\boldsymbol{x}_{r+1}) = c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{r+1}\lambda_{r+1}\boldsymbol{x}_{r+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \tag{9.24}$$

درج بالا میں آخری رکن کو ہٹانے کی خاطر مساوات 9.23 کو λ_{r+1} سے ضرب دیتے ہوئے مساوات 9.24 سے منفی کرتے ہیں۔

$$c_1(\lambda_1-\lambda_{r+1})\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_r(\lambda_r-\lambda_{r+1})\boldsymbol{x}_r=\mathbf{0} \tag{9.25}$$

اب چونکہ $\boldsymbol{x}_1$ تا $\boldsymbol{x}_r$ خطی طور غیر تابع ہیں لہٰذا مساوات 9.25 صرف اس صورت ممکن ہو گا جب اس کے عددی سر صفر ہوں یعنی $c_1(\lambda_1-\lambda_{r+1})=0$ تا $c_r(\lambda_r-\lambda_{r+1})=0$ ہوں۔اب چونکہ تمام امتیازی اقدار منفرد ہیں لہٰذا اس سے $c_1=0$ تا $c_r=0$ ملتے ہیں۔اس حقیقت کے تحت مساوات 9.23 سے $c_{r+1}\boldsymbol{x}_{r+1}=\mathbf{0}$ ملتا ہے اور چونکہ امتیازی سمتیہ صفر نہیں ہو سکتا لہٰذا $c_{r+1}=0$ ہو گا۔اب مساوات 9.23 لکھتے ہوئے فرض کیا گیا تھا کہ اس میں کم از کم ایک مستقل غیر صفر ہے جبکہ ہم ثابت کر چکے ہیں کہ تمام مستقل صفر ہیں۔یہ تضاد صرف اس صورت دور کیا جا سکتا ہے جب تمام امتیازی سمتیات خطی طور غیر تابع ہوں۔

□

مثال 9.14: امتیازی اساس۔ غیر منفرد امتیازی اقدار۔ عدم موجودگی
قالب $\left[\begin{smallmatrix}4&2\\2&4\end{smallmatrix}\right]$ کے امتیازی اقدار 6 اور 2 اور مطابقتی امتیازی سمتیات کی اساس $\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}^T$ اور $\begin{bmatrix}1&-1\end{bmatrix}^T$ ہیں۔

بعض اوقات غیر منفرد امتیازی اقدار بھی امتیازی سمتیات کی اساس دیتے ہیں مثلاً مثال 9.2۔

اس کے برعکس عین ممکن ہے کہ قالب کی خطی طور غیر تابع سمتیات کی تعداد اتنی نہ ہو کہ یہ اساس دیں۔مثلاً $\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ کا صرف ایک عدد امتیازی سمتیہ $\begin{bmatrix}k&0\end{bmatrix}^T$ پایا جاتا ہے جہاں k غیر صفر اختیاری ہے اور ایک عدد سمتیہ ناکافی ہے۔
□

حقیقت میں امتیازی اساس مسئلہ 9.9 سے نرم شرائط کی صورتوں میں بھی موجود ہو سکتا ہے۔درج ذیل ایسی ایک صورت ہے۔

مسئلہ 9.10: تشاکلی قالب
تشاکلی قالب کے امتیازی سمتیات R^n کی معیاری قائمہ الزاویہ اساس ہے۔

درج بالا مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مثال 9.15: مثال 9.14 میں پہلے قالب کی معیاری امتیازی سمتیات کی اساس $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T$ اور $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T$ ہے۔
□

قالبوں کی تشابہت۔وتری بنانا

امتیازی اساس کی مدد سے قالب A کی تخفیف سے ایسا وتری قالب حاصل کیا جا سکتا ہے جس کے وتری اجزاء قالب A کے امتیازی اقدار ہوں۔ایسا درج ذیل **متشابہت تبادلہ** کے ذریعہ سے کیا جاتا ہے۔

تعریف : **متشابہ قالب۔ متشابہت تبادلہ**
ایسا $n \times n$ قالب $\hat{A}$ جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو، $n \times n$ قالب A کا **متشابہ قالب**[21] کہلاتا ہے۔

$$\hat{A} = P^{-1}AP \tag{9.26}$$

یہاں $n \times n$ قالب P کوئی غیر نادر قالب ہے۔ A سے $\hat{A}$ حاصل کرنے کے اس عمل کو **متشابہت تبادلہ**[22] کہتے ہیں۔

متشابہت تبادلہ کی خاصیت ہے کہ یہ قالب A کے امتیازی اقدار بر قرار رکھتا ہے۔

مسئلہ 9.11: متشابہ قالب کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات
A کے امتیازی اقدار ہی اس کے متشابہ قالب $\hat{A}$ کے امتیازی اقدار ہوں گے۔
مزید اگر A کا امتیازی سمتیہ x ہو تب $\hat{A}$ کا اسی امتیازی قدر کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $y = P^{-1}x$ ہو گا۔

ثبوت : $Ax = \lambda x$ ($x \neq 0$ اور λ امتیازی قدر ہے) سے $P^{-1}Ax = \lambda P^{-1}x$ ملتا ہے جس میں $I = PP^{-1}$ پر کرتے ہوئے درج حاصل ہوتا ہے۔

$$P^{-1}Ax = P^{-1}AIx = P^{-1}APP^{-1}x = (P^{-1}AP)P^{-1}x = \hat{A}(P^{-1}x) = \lambda P^{-1}x$$

یوں $\hat{A}$ کا امتیازی قدر λ اور مطابقتی امتیازی سمتیہ $P^{-1}x$ ہے۔در حقیقت $P^{-1}x \neq 0$ ہے کیوں کہ $P^{-1}x = 0$ سے $x = Ix = PP^{-1}x = P0 = 0$ لکھا جا سکتا ہے جو تضاد ہے چونکہ $x \neq 0$ ہے۔

□

---

[21] similar matrix
[22] similarity transformation

مثال 9.16: تشابہ قالبوں کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات
فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{P}$ درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 6\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

یوں $\hat{\boldsymbol{A}}$ درج ذیل ہو گا جہاں $-7=$ مقطع $\boldsymbol{P}$ لیتے ہوئے $\boldsymbol{P}^{-1}$ کو مساوات 8.68 کی مدد سے حاصل کیا گیا ہے۔

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{5}{7}\\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 5\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\hat{\boldsymbol{A}}$ کی امتیازی مساوات $(8-\lambda)(1-\lambda)=0$ سے اس کے امتیازی اقدار $\lambda_1=8$ اور $\lambda_2=1$ ملتے ہیں۔ $\boldsymbol{A}$ کی امتیازی مساوات $(3-\lambda)(6-\lambda)-10=\lambda^2-9\lambda+8=0$ سے بھی امتیازی اقدار $\lambda_1=8$ اور $\lambda_2=1$ ملتے ہیں جو مسئلہ 9.11 کے پہلے حصے کے عین مطابق ہے۔

$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$ کے پہلے حصے $(3-\lambda)x_1+5x_2=0$ میں $\lambda=\lambda_1=8$ پر کرنے سے $-5x_1+5x_2=0$ یعنی $x_2=x_1$ حاصل ہوتا ہے۔یوں $x_1=1$ چنتے ہوئے $x_2=1$ ملتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{x}_1=[1 \quad 1]^T$ ہو گا۔اسی طرح $\lambda_2=1$ پر کرنے سے $2x_1+5x_2=0$ حاصل ہو گا جس میں $x_1=5$ چنتے ہوئے $x_2=-2$ یعنی $\boldsymbol{x}_2=[5 \quad -2]^T$ حاصل ہوتا ہے۔ان سے $\hat{\boldsymbol{A}}$ کے امتیازی سمتیات حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{5}{7}\\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{5}{7}\\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

آپ تسلی کر لیں کہ یہی $\hat{\boldsymbol{A}}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔ □

درج بالا مثال میں $\boldsymbol{P}$ کے قطار، $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات ہیں جس سے حاصل وتری قالب $\hat{\boldsymbol{A}}$ کے ارکان، $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہیں۔یوں ہم کسی بھی قالب $\boldsymbol{A}$ کو موزوں تشابہت تبادلے سے ایسے وتری قالب میں تبدیل کر سکتے ہیں جس کے وتری ارکان، $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہوں۔

مسئلہ 9.12: قالب کو وتری بنانا
اگر $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات کی اساس ہو تب

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \tag{9.27}$$

وتری ہو گا جس کے مرکزی وتر کے ارکان $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہوں گے۔یہاں $\boldsymbol{X}$ ایسا قالب ہے جس کے قطار $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات ہیں۔مزید درج ذیل بھی ہو گا۔

$$\boldsymbol{D}^m = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{X} \qquad (m = 2, 3, \cdots) \tag{9.28}$$

ثبوت: فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات $\boldsymbol{x}_1$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{x}_n$ فضا R^n کی اساس ہیں اور ان کے مطابقتی امتیازی اقدار بالترتیب λ_1 ، $\cdots$ ، λ_n ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n = \lambda_n\boldsymbol{x}_n$ ہو گا۔یوں $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n]$ کا مرتبہ مسئلہ 8.4 کے تحت n ہو گا لہٰذا مسئلہ 8.16 کے تحت $\boldsymbol{X}^{-1}$ موجود ہو گا۔ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ درج ذیل درست ہے

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n] = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n] = [\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{x}_n] = \boldsymbol{X}\boldsymbol{D} \tag{9.29}$$

جہاں $\boldsymbol{D}$ کو مساوات 9.27 پیش کرتی ہے۔ہم بائیں ہاتھ دوسری مساوات کو $n = 2$ کے لئے ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

تیسری مساوات $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k = \lambda_k\boldsymbol{x}_k$ سے حاصل ہوتی ہے۔آپ اسی طرح پہلے $n = 2$ اور بعد میں عمومی n کے لئے چوتھی مساوات کو ثابت کر سکتے ہیں۔

مساوات 9.29 کو دائیں $\boldsymbol{X}^{-1}$ سے ضرب کرتے ہوئے مساوات 9.27 حاصل ہوتی ہے۔چونکہ مساوات 9.27 تشابہت تبادلہ ہے لہٰذا مسئلہ 9.11 کے تحت $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہی $\boldsymbol{D}$ کے امتیازی اقدار ہوں گے۔مساوات 9.28 کو $m = 2$ کے لئے ثابت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}^2 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-1})\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \\
&= \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}
\end{aligned}$$

□

مثال 9.17: قالب کو وتری بنانا
درج ذیل قالب کو وتری بنائیں۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ کی امتیازی مقطع سے اس کی امتیازی کثیر رکنی $-\lambda^3+4\lambda^2+27\lambda-90=0$ حاصل ہوتی ہے جس کے جذر $\lambda_1=6$ ، $\lambda_2=3$ اور $\lambda_3=-5$ ہیں۔ مساوات $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ میں باری باری λ_1 ، λ_2 اور λ_3 پر کرتے ہوئے گاوسی اسقاط سے حل کر کے درج ذیل امتیازی سمتیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\ 6\\ 16\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\ -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

ان امتیازی سمتیات سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 6 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 16 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{33} & 0 & \frac{2}{33}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ \frac{7}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{22}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{AX}$ حاصل کر کے بائیں $\boldsymbol{X}^{-1}$ سے ضرب دے کر $\boldsymbol{D}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{AX}=\begin{bmatrix}\frac{1}{33} & 0 & \frac{2}{33}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ \frac{7}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 3 & -5\\ 36 & -\frac{9}{2} & -\frac{5}{2}\\ 96 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

□

آثار قالب

چکور $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کے مرکزی وتر کے اجزاء کے مجموعے کو آثار $\boldsymbol{A}$ کہتے[23] ہیں۔

$$\text{آثار } \boldsymbol{A} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$$

دو قالبوں کے حاصل ضرب کے آثار کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\text{آثار } (\boldsymbol{AB}) = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{AB})_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} B_{ji}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{AB})_{jj} = \text{آثار } (\boldsymbol{BA}) \tag{9.30}$$

لہٰذا ضرب میں قالبوں کی ترتیب کا آثار پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔

$\boldsymbol{A}$ اور اس کے متشابہ قالب $\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ کا آثار ایک جیسا ہو گا یعنی:

$$\begin{aligned} \text{آثار } (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}) &= \text{آثار } (\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{AP})) = \text{آثار } ((\boldsymbol{AP})\boldsymbol{P}^{-1}) \\ &= \text{آثار } (\boldsymbol{APP}^{-1}) = \text{آثار } (\boldsymbol{A}) \end{aligned} \tag{9.31}$$

چونکہ متشابہ قالب $\hat{\boldsymbol{A}}$ کے مرکزی ارکان، $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہوتے ہیں لہٰذا درج بالا کے تحت آثار $\boldsymbol{A}$ امتیازی اقدار کا مجموعہ ہو گا۔

دو درجی صورتیں۔ صدر محوروں پر تبادلہ

سمتیہ $\boldsymbol{x}$ کی دو درجی صورت[24] Q سے مراد x_1، $\cdots$، x_n اجزاء کی n^2 ارکان پر مشتمل درج ذیل مجموعہ ہے۔

$$\begin{aligned} Q = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k \\ &= \quad a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{9.32}$$

---

[23] trace
[24] quadratic form

$A = [a_{jk}]$ کو اس صورت کا **عددی سر قالب** کہتے ہیں۔چونکہ ہم وتر سے ہٹ کر ارکان کے جوڑیوں کے مجموعے کو دو برابر اجزاء کی صورت میں لکھ سکتے ہیں لہٰذا ہم A کو تشاکلی فرض کر سکتے ہیں (درج ذیل مثال میں اس بات کی وضاحت کی گئی ہے)۔

مثال 9.18: فرض کریں کہ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_1 + 7x_2^2 = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$$

درج بالا میں درمیانے دو ارکان کے عددی سر کا مجموعہ $8 = 2 + 6$ ہے جس کو $4 + 4$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\boldsymbol{A}$ کی جگہ مطابقتی تشاکلی قالب C استعمال کرتے ہوئے درج بالا نتیجہ حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 7x_2^2 = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$$

□

مسئلہ 9.10 کے تحت مساوات 9.32 میں تشاکلی عددی سر قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی سمتیات، معیاری قائمہ الزاویہ اساس ہیں۔انہیں سمتیہ قطار لیتے ہوئے ہمیں ایسا قالب $\boldsymbol{X}$ ملتا ہے جو قائمہ الزاویہ ہو گا لہٰذا $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$ ہو گا۔یوں مساوات 9.27 کو بائیں سے $\boldsymbol{X}$ اور دائیں سے $\boldsymbol{X}^{-1}$ کے ساتھ ضرب دینے سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^T$$

اس کو مساوات 9.32 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$Q = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x} \tag{9.33}$$

اگر ہم $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ لیں تب $\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{X}^{-1}$ کی بنا $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ ہو گا جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{y} \tag{9.34}$$

مساوات 9.33 میں $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{y}^T$ اور $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ ہو گا لہٰذا Q کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Q = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{9.35}$$

اس سے مسئلہ صدر محور[25] ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 9.13: مسئلہ صدر محور
دو درجی صورت

$$Q = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k \qquad (a_{kj} = a_{jk}) \tag{9.36}$$

میں مساوات 9.34 پر کرنے سے مساوات 9.35 میں دی گئی صدر محوری صورت یا باضابطہ صورت[26] حاصل ہوتی ہے جہاں λ_1 ، $\cdots$ ، λ_n تشاکلی قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار ہیں (جو غیر منفرد بھی ہو سکتے ہیں) اور $\boldsymbol{X}$ ایسا قائمہ الزاویہ قالب ہے جس کے سمتیہ قطار مطابقتی (بالترتیب) امتیازی سمتیات $\boldsymbol{x}_1$ ، $\cdots$ ، $\boldsymbol{x}_n$ ہیں۔

مثال 9.19: صدر محور پر تبادلہ۔ مخروطی حصے
درج ذیل دو درجی صورت کس مخروطی حصے کو ظاہر کرتی ہے۔ اس کا صدر محور پر تبادلہ کریں۔

$$Q = 17x_1^2 - 30x_1x_2 + 17x_2^2 = 128$$

حل: ہم $Q = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ لکھ سکتے ہیں جہاں $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{x}$ درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

اس سے امتیازی مساوات $(17 - \lambda)^2 - 15^2$ ملتا ہے جس کے جذر $\lambda_1 2$ اور $\lambda_2 = 32$ ہیں لہٰذا مساوات 9.36 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$Q = 2y_1^2 + 32y_2^2$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $Q = 128$ ترخیم $2y_1^2 + 32y - 2^2 = 128$ کو ظاہر کرتا ہے یعنی:

$$\frac{y_1^2}{8^2} + \frac{y_2}{2^2} = 1$$

Principal Axes Theorem[25]
canonical form[26]

x_1x_2 محدد میں صدر محور جاننے کی خاطر ہمیں $\lambda = \lambda_1 = 2$ اور $\lambda = \lambda_2 = 8$ لیتے ہوئے $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ سے معیاری امتیازی سمتیات حاصل کر کے مساوات 9.34 کا استعمال کرنا ہو گا۔یوں

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

سے

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{aligned}$$

ملتا ہے۔یہ $45°$ گھومنے کو ظاہر کرتی ہے۔ □

سوالات

سوال 9.49 تا سوال 9.54 میں $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{P}$ دیے گئے ہیں۔انہیں استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ قالب $\boldsymbol{A}$ اور متشابہ قالب $\hat{\boldsymbol{A}}$ کے ایک جیسے امتیازی اقدار ہیں۔مزید اگر $\hat{\boldsymbol{A}}$ کا امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{y}$ ہو تب ثابت کریں کہ $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ ہو گا۔

سوال 9.49: $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda = -1,\ 1; \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{15} \end{bmatrix}^T; \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^T$

سوال 9.50: $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda = 3,\ 2; \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{11}{32} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}^T; \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$

سوال 9.51: $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

جوابات: $\lambda = -2,\ -1; \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{33}{16} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T; \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$

سوال 9.52:
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

جوابات:
$$\lambda=2,\ -1,\ 1;\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^T$$
$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$$

سوال 9.53:
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

جوابات:
$$\lambda=-1,\ 1,\ 0;\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & \frac{6}{7} & -\frac{5}{7}\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}^T$$
$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix}1 & 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}^T$$

سوال 9.54: مساوات 9.31 کے تحت کسی بھی قالب کا آثار اس قالب کے امتیازی اقدار کا مجموعہ ہو گا۔ سوال 9.49 تا سوال 9.54 میں دیے گئے $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار اور آثار کا موازنہ کرتے ہوئے تسلی کر لیں کہ ایسا ہی ہے۔

سوال 9.55 تا سوال 9.62 میں امتیازی اساس (امتیازی سمتیات کی اساس) دریافت کرتے ہوئے قالب کو وتری بنائیں۔

سوال 9.55:
$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

جوابات:
$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\frac{1}{2} & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

سوال 9.56:
$$\begin{bmatrix}0 & 2\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

جوابات:
$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

سوال 9.57: $\begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$

جوابات: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

سوال 9.58: $\begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 30 & 13 \end{bmatrix}$

جوابات: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

سوال 9.59: $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

سوال 9.60: $\lambda_1 = 2, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{8}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{9}{7} \end{bmatrix}$

جوابات: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

سوال 9.61: $\lambda_1 = 5, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -9 & -7 & -15 \\ 6 & 6 & 11 \end{bmatrix}$

جوابات: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

سوال 9.62: $\lambda_1 = 3 \quad , \quad \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

جوابات: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

سوال 9.63 تا سوال 9.63 میں صدر محور پر منتقل کریں۔ مثال 9.19 کی طرح x کو نئے محور y کی صورت میں لکھیں۔

سوال 9.63: $5x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 10$

جوابات: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{3}{5}y_1^2 + \frac{2}{5}y_2^2 = 1, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ترخیم

سوال 9.64: $-9x_1^2 - 24x_1x_2 + 9x_2^2 = 30$

جوابات: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad -\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2} = 1, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$ قطع زائد

سوال 9.65: $7x_1^2 - 2x_1x_2 + 7x_2^2 = 0$

جوابات: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad 6y_1^2 + 8y_2^2 = 0, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ سیدھے خط

سوال 9.66: $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 16$

جوابات: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{y_1^2}{8} + \frac{y_2^2}{2} = 1, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ترخیم

سوال 9.67: $31x_1^2 - 24x_1x_2 + 21x_2^2 = 13$

جوابات: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad 3y_1^2 + y_2^2 = 1, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 31 & -12 \\ -12 & 21 \end{bmatrix}$ ترخیم

سوال 9.68: $4x_1^2 + 12x_1x_2 + 13x_2^2 = 32$

جوابات: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{y_1^2}{32} + \frac{y_2^2}{2} = 1, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$ ترخیم

9.5 مخلوط قالب اور مخلوط صورتیں

تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالبوں پر حصہ 9.3 میں غور کیا گیا۔ان قالبوں کی مخلوط صورتیں بھی پائی جاتی ہیں جو کوانٹم میکانیات[27] میں استعمال ہوتی ہیں۔

مخلوط قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کے ہر رکن $a_{jk} = \alpha + i\beta$ (جہاں α اور β حقیقی ہیں) کی جگہ اس کا جوڑی دار مخلوط $\bar{a}_{jk} = \alpha - i\beta$ لیتے ہوئے جوڑی دار مخلوط قالب $\bar{\boldsymbol{A}} = [\bar{a}_{jk}]$ ملتا ہے۔اسی طرح $\boldsymbol{A}^T$ کا مخلوط جوڑی دار اور $\boldsymbol{A}$ کا مخلوط تبدیل محل $\bar{\boldsymbol{A}}^T = [\bar{a}_{kj}]$ ہو گا۔

مثال 9.20: قالب $\boldsymbol{A}$ کا مخلوط جوڑی دار $\bar{\boldsymbol{A}}$ اور مخلوط تبدیل محل $\bar{\boldsymbol{A}}^T$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2+i3 & 1-i2 \\ 4 & 3+i \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} -2-i3 & 1+i2 \\ 4 & 3-i \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{A}}^T = \begin{bmatrix} -2-i3 & 4 \\ 1+i2 & 3-i \end{bmatrix}$$

□

تعریف: ہرمشی قالب[28]، منحرف ہرمشی قالب اور اکہرا قالب

چکور قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$

ہرمشی[29] کہلائے گا اگر $\bar{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}$ یعنی $\bar{a}_{kj} = a_{jk}$ ہو،

منحرف ہرمشی[30] کہلائے گا اگر $\bar{\boldsymbol{A}}^T = -\boldsymbol{A}$ یعنی $\bar{a}_{kj} = -a_{jk}$ ہو اور

اکہرا[31] کہلائے گا اگر $\bar{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$ ہو۔

درج بالا تعریف سے ظاہر ہے کہ ہرمشی قالب کے مرکزی وتری ارکان $\bar{a}_{jj} = a_{jj}$ پر پورا اتریں گے لہٰذا یہ ارکان حقیقی ہوں گے۔منحرف ہرمشی قالب کے مرکزی وتری ارکان $\bar{a}_{jj} = -a_{jj}$ پر پورا اتریں گے۔یوں اگر $a_{jj} = \alpha + i\beta$ ہو تب $\alpha - i\beta = -(\alpha + i\beta)$ ہو گا جس سے $\alpha = 0$ ملتا ہے۔یوں منحرف ہرمشی قالب کے مرکزی وتر کے ارکان خالص خیالی یا صفر (0) ہوں گے۔

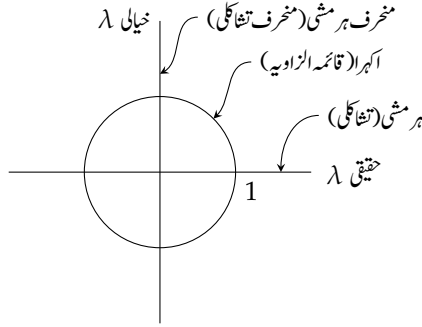
---

[27] quantum mechanics

[28] یہ قالب چارلس ہرمائٹ کے نام ہے۔

[29] Hermitian

[30] skew Hermitian

[31] Unitary

شکل 9.2: مخلوط λ سطح پر ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالبوں کے امتیازی اقدار کا مقام۔

مثال 9.21: ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالب

درج ذیل میں $\boldsymbol{A}$ ہرمشی، $\boldsymbol{B}$ منحرف ہرمشی اور $\boldsymbol{C}$ اکہرا قالب ہے۔

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -4+i5 \\ -4-i5 & -7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} i3 & 2+i \\ -2+i & -i7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} i\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & i\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

□

حقیقی ہرمشی قالب $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$ پر پورا اترے گا لہٰذا حقیقی ہرمشی قالب **تشاکلی** ہو گا۔ اسی طرح حقیقی منحرف ہرمشی قالب $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$ پر پورا اترے گا لہٰذا حقیقی منحرف ہرمشی قالب **منحرف تشاکلی** ہو گا۔ آخر میں حقیقی اکہرا قالب $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^{-1}$ پر پورا اترے گا لہٰذا حقیقی اکہرا قالب **قائمہ الزاویہ** ہو گا۔

اس سے ظاہر ہے کہ ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالب در حقیقت میں تشاکلی، منحرف تشاکلی اور قائمہ الزاویہ قالب کی بالترتیب عمومی صورتیں ہیں۔

امتیازی اقدار

ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالبوں کے طیف (امتیازی اقدار) کا مخلوط λ سطح پر مقام شکل 9.2 میں دکھایا گیا ہے۔

مسئلہ 9.14: امتیازی اقدار

(الف) ہرمشی قالب (اور تشاکلی قالب) کے امتیازی اقدار حقیقی ہوں گے۔

(ب) منحرف ہرمشی قالب (اور منحرف تشاکلی قالب) کے امتیازی اقدار خالص خیالی یا صفر (0) ہوں گے۔
(پ) اکہرا قالب (اور قائمہ الزاویہ قالب) کے امتیازی اقدار کی مطلق قیمت اکائی (1) ہو گی۔

ثبوت: فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی قدر λ اور مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ ہیں۔یوں $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ کو بائیں $\bar{\boldsymbol{x}}^T$ سے ضرب دیتے ہوئے $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}=\lambda\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$ حاصل ہو گا۔اس کو $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\lambda=\frac{\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}}{\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}} \tag{9.37}$$

$\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$ سے تقسیم کرنا اس لئے ممکن ہے کہ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ہے لہٰذا درج ذیل حقیقی اور غیر صفر ہو گا۔

$$\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}=\bar{x}_1x_1+\cdots+\bar{x}_nx_n=x_1^2+\cdots+x_n^2$$

(الف) اگر $\boldsymbol{A}$ ہرمشی ہو تب $\bar{\boldsymbol{A}}^T=\boldsymbol{A}$ یعنی $\boldsymbol{A}^T=\bar{\boldsymbol{A}}$ ہو گا۔چونکہ $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}$ حقیقی ہے لہٰذا اس کا تبدیل محل لینے سے اس کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}=(\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax})^T=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}^T\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}=(\overline{\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}}) \tag{9.38}$$

یوں $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}$ اپنے جوڑی دار مخلوط کے برابر ہے لہٰذا $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}$ حقیقی ہو گا ($\alpha+i\beta=\alpha-i\beta$ سے مراد $\beta=0$ ہے)۔یوں مساوات 9.37 سے λ حقیقی حاصل ہوتا ہے۔
(ب) اگر $\boldsymbol{A}$ منحرف ہرمشی ہو تب $\boldsymbol{A}^T=-\bar{\boldsymbol{A}}$ ہو گا اور مساوات 9.38 کی جگہ

$$\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}=-(\overline{\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}}) \tag{9.39}$$

حاصل ہو گا لہٰذا $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}$ خالص خیالی یا صفر (0) ہو گا [$\alpha+i\beta=-(\alpha-i\beta)$ سے مراد $\alpha=0$ ہے]۔ یوں مساوات 9.37 سے λ خالص خیالی یا صفر (0) حاصل ہوتا ہے۔
(پ) فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ اکہرا قالب ہے۔اب $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ اور اس کے جوڑی دار مخلوط تبدیل محل $(\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}})^T=(\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}})^T=\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}}^T$ کے بائیں اطراف آپس میں ضرب کرتے ہوئے اور ان کے دائیں اطراف آپس میں ضرب کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{Ax}=\bar{\lambda}\lambda\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}=\left|\lambda\right|^2\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$$

اب $\boldsymbol{A}$ اکہرا ہے لہٰذا $\bar{\boldsymbol{A}}^T=\boldsymbol{A}^{-1}$ ہو گا اور یوں بائیں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہو گا۔

$$(\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{Ax}=\bar{\boldsymbol{x}}^T\bar{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{Ax}=\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax}=\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ix}=\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$$

اس طرح $\bar{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{x} = |\lambda|^2 \, \bar{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{x}$ ہو گا جس کو $\bar{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{x} (\neq 0)$ سے تقسیم کرتے ہوئے $|\lambda|^2 = 1$ ملتا ہے۔

یوں موجودہ مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ مسئلہ 9.4 اور مسئلہ 9.8 کا ثبوت بھی مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 9.22: ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالب مثال 9.21 میں دیے گئے ہیں۔ ان کے امتیازی اقدار درج ذیل ہیں۔

اندراج	قالب	امتیازی مساوات	امتیازی اقدار
(الف)	ہرمشی	$\lambda^2 + 4\lambda - 62 = 0$	$-2 + \sqrt{66}, \; -2 - \sqrt{66}$
(ب)	منحرف ہرمشی	$\lambda^2 + i4\lambda + 26 = 0$	$i(-2 - \sqrt{30}), \; i(-2 + \sqrt{30})$
(پ)	اکہرا	$\lambda^2 - i\lambda - 1 = 0$	$\frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \; \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

اور $\left|\frac{1}{2}(i \mp \sqrt{3})\right| = \frac{1}{4}(1+3) = 1$ ہے۔ □

قائمہ الزاویہ قالب کے بنیادی خصوصیات (مثلاً اندرونی ضرب کی عدم تغیر، صفوں اور قطاروں کی معیاری قائمیت) اکہرا قالب میں بھی پائے جاتے ہیں۔

یہ دیکھنے کی خاطر R^n کی جگہ مخلوط سمتی فضا C^n لیتے ہیں۔ایسے مخلوط سمتیات کی اندرونی ضرب کی تعریف درج ذیل ہے (مخلوط جوڑی دار پر لکیر ہے)۔

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{b} \tag{9.40}$$

ایسے مخلوط سمتیہ کی لمبائی یا معیار (جس کی تعریف درج ذیل ہے) حقیقی عدد ہو گا۔

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{\bar{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{a}} = \sqrt{\bar{a}_1 a_1 + \cdots + \bar{a}_n a_n} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \tag{9.41}$$

مسئلہ 9.15: اندرونی ضرب کی عدم تغیر
اکہرا تبادلہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ جہاں $\boldsymbol{A}$ اکہرا قالب ہے، اندرونی ضرب (مساوات 9.40) کی قیمت برقرار رکھتا ہے لہٰذا یہ معیار (مساوات 9.41) کی قیمت بھی برقرار رکھتا ہے۔

ثبوت: یہ مسئلہ حصہ 9.3 میں دیے گئے مسئلہ 9.5 کی عمومی صورت ہے۔یوں اس مسئلے کا ثبوت بالکل مسئلہ 9.5 کی ثبوت کی طرح ہے یعنی:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{v} = (\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{a}})^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{a}}^T \bar{\boldsymbol{A}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{I}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

□

حقیقی سمتیات کے معیاری قائمہ الزاویہ نظام کی مماثل معیاری مخلوط نظام کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اکہرا نظام
اکہرا نظام سے مراد ایسے مخلوط سمتیات کا نظام ہے جو درج ذیل پر پورا اترتے ہوں۔

$$\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_k = \bar{\boldsymbol{a}}_j^T \boldsymbol{a}_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \tag{9.42}$$

مسئلہ 9.6 کی مخلوط صورت درج ذیل ہے۔

مسئلہ 9.16: سمتیات صف اور سمتیات قطار کا اکہرا نظام
مخلوط چکور قالب صرف اور صرف اس صورت اکہرا ہو گا جب اس کے سمتیات صف (اور سمتیات قطار) اکہرا نظام بناتے ہوں۔

ثبوت : اس کا ثبوت مسئلہ 9.6 کی ثبوت کی طرح ہے بس یہاں جوڑی دار مخلوط سمتیات پر لکیر لگائی جائے گی۔یوں $\bar{\boldsymbol{A}}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$ لکھا جائے گا جیسے مساوات 9.40 اور مساوات 9.42 میں لگائے گئے ہیں۔

□

مسئلہ 9.17: مقطع اکہرا قالب
اکہرا قالب $\boldsymbol{A}$ کے مقطع کی مطلق قیمت اکائی (1) ہو گی یعنی $1 = \text{مقطع}\, \boldsymbol{A}$ ہو گا۔

ثبوت : اس کا ثبوت مسئلہ 9.7 کی ثبوت کی طرح ہے۔

$$1 = \text{مقطع}\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}) = \text{مقطع}\,(\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}}^T) = (\text{مقطع}\,\boldsymbol{A})(\text{مقطع}\,\bar{\boldsymbol{A}}^T) \tag{9.43}$$
$$= (\text{مقطع}\,\boldsymbol{A})(\text{مقطع}\,\bar{\boldsymbol{A}}) = (\text{مقطع}\,\boldsymbol{A})(\overline{\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}}) = \left|\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}\right|^2$$

یوں $1 = \left|\text{مقطع}\,\boldsymbol{A}\right|$ ہو گا جہاں $\boldsymbol{A}$ اب مخلوط ہو سکتا ہے۔

□

تشاکلی اور منحرف تشاکلی قالب کی امتیازی اساس کو موجودگی مسئلہ 9.10 بیان کرتی ہے جس کا مماثل مسئلہ درج ذیل ہے۔

مسئلہ 9.18: امتیازی سمتیات کی اساس
ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالب کے امتیازی سمتیات C^n کی اساس ہے۔ یہ امتیازی سمتیات اکہرا نظام بناتے ہیں۔

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہر مشی اور منحرف ہر مشی صورتیں

دو درجی صورت (حصہ 9.4) کے تصور کو وسعت دے کر اس کو مخلوط کے لئے بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔ ہم مساوات 9.37 میں شمار کنندہ $\bar{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کو $\boldsymbol{x}$ کے ارکان x_1 ، $\cdots$ ، x_n ، جو اب مخلوط بھی ہو سکتے ہیں، کی صورت کہتے ہیں۔ یہ صورت (درج ذیل) n^2 ارکان پر مشتمل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\bar{x}_j x_k \\
&= \quad a_{11}\bar{x}_1x_1 + a_{12}\bar{x}_1x_2 + \cdots + a_{1n}\bar{x}_1x_n \\
&\quad + a_{21}\bar{x}_2x_1 + a_{22}\bar{x}_2x_2 + \cdots + a_{2n}\bar{x}_2x_n \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_{n1}\bar{x}_nx_1 + a_{n2}\bar{x}_nx_2 + \cdots + a_{nn}\bar{x}_nx_n
\end{aligned} \tag{9.44}
$$

$\boldsymbol{A}$ کو عددی سر قالب کہتے ہیں۔ اگر $\boldsymbol{A}$ ہر مشی ہو تب اس صورت کو ہر مشی صورت کہیں گے اور اگر $\boldsymbol{A}$ منحرف ہر مشی ہو تب اس کو منحرف ہر مشی صورت
فرہنگمنحرف ہر مشی!صورت کہیں گے۔ ہر مشی صورت کا قدر حقیقی ہو گا جبکہ منحرف ہر مشی کا قدر خالص خیالی یا صفر (0) ہو گا۔ یہ حقائق مساوات 9.38 اور مساوات 9.39 سے ظاہر ہیں جو طبیعیات کے میدان میں ان صورتوں کی اہمیت کا باعث بنتے ہیں۔ دھیان رہے کہ مساوات 9.38 اور مساوات 9.39 کسی بھی سمتیات کے لئے درست ہیں چونکہ ان کے ثبوت میں ہم نے $\boldsymbol{x}$ کو امتیازی سمتیہ تصور نہیں کیا تھا بلکہ صرف اتنا فرض کیا تھا کہ $\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{c}$ حقیقی اور غیر صفر ہے۔

مثال 9.23: ہر مشی صورت
فرض کریں کہ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1-i & i4\end{bmatrix}^T$ ہے اور مثال 9.21 کا $\boldsymbol{A}$ استعمال کرتے ہیں تب درج ذیل ہو گا۔

$$
\bar{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1+i & -i4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4+i5\\ -4-i5 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-i\\ i4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+i & -i4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-17-i19\\ -9-i29\end{bmatrix} = -114
$$

□

ظاہر ہے کہ اگر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{x}$ حقیقی ہوں تب مساوات 9.44 دو درجی صورت دے گا۔

سوالات

سوال 9.69 تا سوال 9.73 میں دریافت کریں کہ آیا دیا گیا قالب ہرمشی، منحرف ہرمشی یا اکہرا ہے۔ان کے امتیازی اقدار اور امتیازی سمتیات بھی دریافت کریں۔

سوال 9.69: $\begin{bmatrix} 3 & i2 \\ -i2 & 6 \end{bmatrix}$

جوابات: ہرمشی، $7, [1 \quad -i2]^T; \quad 2, [1 \quad \frac{i}{2}]^T$

سوال 9.70: $\begin{bmatrix} i & 1-i \\ -1-i & 0 \end{bmatrix}$

جوابات: منحرف ہرمشی، $-i, [1 \quad 1-i]^T; \quad i2, [1 \quad -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}]^T$

سوال 9.71: $\begin{bmatrix} i\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & i\frac{4}{5} \end{bmatrix}$

جوابات: اکہرا، $-\frac{3}{3}+i\frac{4}{5}, [1 \quad -1]^T; \quad \frac{3}{3}+i\frac{4}{5}, [1 \quad 1]^T$

سوال 9.72: $\begin{bmatrix} 0 & i3 \\ i3 & i0 \end{bmatrix}$

جوابات: منحرف ہرمشی، $-i3, [1 \quad -1]^T; \quad i3, [1 \quad 1]^T$

سوال 9.73: $\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & -i2 \end{bmatrix}$

جوابات: منحرف ہرمشی، $i(-\sqrt{2}-1), [0 \quad 1 \quad -\sqrt{2}-1]^T;$
$i(\sqrt{2}-1), [0 \quad 1 \quad \sqrt{2}-1]^T; \quad i, [1\ 0\ 0]^T$

سوال 9.74: **پالی قالب چکر**

درج ذیل **پالی قالب چکر**[32] کہلاتے ہیں۔

$$\boldsymbol{S}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{9.45}$$

---

[32] Pauli spin matrices

پالی قالب چکر[33] کے درج ذیل تعلقات ثابت کریں۔

$$S_x S_y = iS_z, \quad S_y S_x = -iS_z, \quad S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = I^2 \tag{9.46}$$

جواب:
$$S_x S_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = iS_z$$
$$S_x^2 = S_x S_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

سوال 9.75: امتیازی سمتیات
مثال 9.21 میں دیے گئے قالب A ، B اور C کے امتیازی سمتیات دریافت کریں۔

جوابات: $A:\ \begin{bmatrix} 1 & 1.28+i1.6 \end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix} 1 & -0.305-i0.381 \end{bmatrix}^T$
$B:\ \begin{bmatrix} 1 & -2.09-i4.19 \end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix} 1 & -0.09+i0.19 \end{bmatrix}^T \quad C:\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T,\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

سوال 9.76 تا سوال 9.79 مخلوط صورتوں کے سوالات ہیں۔ کیا ان میں A ہر مشی ہے یا منحرف ہر مشی ہے؟ ان سوالات میں $\bar{x}^T A x$ حاصل کریں۔

سوال 9.76:
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i2 \\ 2+i2 & -4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} i2 \\ -4+i2 \end{bmatrix}^T$$
جوابات: ہر مشی، -20

سوال 9.77:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3+i2 \\ 3+i2 & i \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ i3 \end{bmatrix}^T$$
جوابات: منحرف ہر مشی، $-i27$

سوال 9.78:
$$A = \begin{bmatrix} i2 & 1 & 4+i3 \\ -1 & 0 & i5 \\ -4+i3 & i5 & -i \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}^T$$
جوابات: منحرف ہر مشی، $-i7$

[33] آسٹریا کے ماہر طبیعیات اور نوبل انعام یافتہ ولفگنگ ارنسٹ پالی [1900-1958]

سوال 9.79:
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & i & 5\\ -i & -2 & 0\\ 5 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\ -i\\ i\end{bmatrix}^T$$
جوابات: ہرمشی، 4

سوال 9.80 تا سوال 9.85 عمومی سوالات ہیں۔

سوال 9.80: ضرب
کسی بھی $n\times n$ ہرمشی $\boldsymbol{A}$ ، منحرف ہرمشی $\boldsymbol{B}$ اور اکہرا $\boldsymbol{C}$ کے لئے درج ذیل ثابت کریں۔
$$(\overline{\boldsymbol{ABC}})^T=-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{BA}$$
جواب: $(\overline{\boldsymbol{ABC}})^T=\bar{\boldsymbol{C}}^T\bar{\boldsymbol{B}}^T\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{C}^{-1}(-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$

سوال 9.81: ضرب
کسی بھی $n\times n$ ہرمشی $\boldsymbol{A}$ اور منحرف ہرمشی $\boldsymbol{B}$ کے لئے درج ذیل ثابت کریں۔
$$(\overline{\boldsymbol{AB}})^T=-\boldsymbol{BA}$$
جواب: $(\overline{\boldsymbol{AB}})^T=\bar{\boldsymbol{B}}^T\bar{\boldsymbol{A}}=-\boldsymbol{BA}$

سوال 9.82: ثابت کریں کہ کسی بھی قالب $\boldsymbol{A}$ کو ہرمشی قالب $\boldsymbol{H}$ اور منحرف ہرمشی قالب $\boldsymbol{S}$ کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

جواب: $\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\bar{\boldsymbol{A}}^T),\quad \boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\bar{\boldsymbol{A}}^T),\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{S}$

سوال 9.83: اکہرا قالب
ثابت کریں کہ $n\times n$ جسامت کے دو اکہرا قالبوں کا حاصل ضرب بھی اکہرا قالب ہو گا۔
جواب: $(\boldsymbol{AB})(\overline{\boldsymbol{AB}})^T=\boldsymbol{AB}\bar{\boldsymbol{B}}^T\bar{\boldsymbol{A}}^T=\boldsymbol{ABB}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AIA}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$

سوال 9.84: اکہرا قالب
اکہرا قالب کا طاقت استعمال میں بہت آسان ثابت ہوتا ہے۔ثابت کریں کہ $\boldsymbol{C}^5=\boldsymbol{I}$ ہو گا۔

جواب: سوال 9.83 کے نتیجے کے بار بار استعمال اور $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ لیتے ہوئے ثابت ہو گا۔

سوال 9.85: ثابت کریں کہ ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالب $\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}}^T=\bar{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{A}$ پر پورا اترتے ہیں۔

جواب: ہرمشی کے لئے ثابت کرتے ہیں۔ $(\bar{\boldsymbol{A}}^T)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}=\boldsymbol{A}(\bar{\boldsymbol{A}}^T)$

باب 10

سمتی تفرقی احصاء۔ سمتی تفاعل

10.1 غیر سمتی میدان اور سمتی میدان

غیر سمتی تفاعل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو فضا میں کسی سلسلہ نقاط کے ہر نقطے پر معین ہو اور جہاں تفاعل کی قیمتیں حقیقی اعداد ہوں جن کا دارومدار صرف فضا میں نقطوں پر ہو نا کہ چنی گئی محوری نظام پر۔ان نقطوں کے سلسلے کو تفاعل کا دائرہ کار[1] کہتے ہیں۔ عملی استعمال میں تفاعل f کا دائرہ کار D عموماً منحنی یا سطح یا فضا میں تین بُعدی خطہ ہو گا۔تفاعل f دائرہ کار D کے ہر نقطے کے ساتھ ایک غیر سمتی حقیقی عدد وابستہ کرتا ہے اور ہم کہتے ہیں کہ D میں **غیر سمتی میدان**[2] دیا گیا ہے۔

x ، y ، x متعارف کرنے سے تفاعل f کو ان محدد کی مدد سے $f(x,y,z)$ لکھا جا سکتا ہے، پس اتنا یاد رہے کہ کسی بھی نقطہ P پر تفاعل f کی قیمت، چنی گئی محددی نظام پر ہر گز منحصر نہیں ہو گی۔اس حقیقت کو ظاہر کرنے کی خاطر $f(x,y,z)$ کی جگہ عموماً $f(P)$ لکھا جاتا ہے۔تفاعل f وقت پر بھی منحصر ہو سکتا ہے۔

مثال 10.1: غیر سمتی تفاعل
غیر تغیر پذیر نقطہ P_0 سے کسی نقطہ P کا فضا میں فاصلہ غیر سمتی تفاعل ہے جس کا دائرہ کار D پوری فضا

domain[1]
scalar field[2]

ہے۔ $f(P)$ فضا میں غیر سمتی میدان دیتا ہے۔ اگر کارتیسی نظام محدد میں P_0 کے محدد x_0 ، y_0 ، z_0 اور P کے محدد x ، y ، z ہوں تب f درج ذیل ہو گا۔

$$f(P) = f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

نظام محدد تبدیل کرنے سے عموماً P_0 اور P کے محدد تبدیل ہوں گے لیکن $f(P)$ کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی لہٰذا $f(P)$ غیر سمتی تفاعل ہے۔ □

مثال 10.2: غیر سمتی میدان
کسی جسم کے اندر درجہ حرارت T غیر سمتی تفاعل ہے جو غیر سمتی میدان (یعنی جسم میں درجہ حرارت) تعین کرتا ہے۔ □

اگر فضا میں سلسلہ نقاط کے ہر نقطے P کے ساتھ سمتیہ $\boldsymbol{v}(P)$ وابستہ کیا جائے تب ہم کہتے ہیں کہ ان نقاط پر **سمتی میدان**[3] دیا گیا ہے اور $\boldsymbol{v}(P)$ **سمتی تفاعل**[4] کہلاتا ہے۔ یہ سلسلہ نقاط کسی منحنی یا سطح یا حجم میں پایا جا سکتا ہے۔

کارتیسی نظام محدد میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\boldsymbol{i} + v_2(x, y, z)\boldsymbol{j} + v_3(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

یاد رہے کہ کسی بھی نقطے پر $\boldsymbol{v}$ کی قیمت اس نقطے پر منحصر ہے نا کہ نظام محدد پر۔

مثال 10.3: سمتی میدان (سمتی میدان رفتار)
گھومتے ہوئے جسم B کی سمتی رفتار $\boldsymbol{v}(P)$ کو **سمتی میدان رفتار** کہتے ہیں۔ گھومتے جسم کی محور پر کارتیسی محدد کا مبدا رکھتے ہوئے جسم پر کسی نقطہ N کی سمتی رفتار کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (صفحہ 515 پر مثال 7.13 دیکھیں)

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = \boldsymbol{\omega} \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \tag{10.1}$$

---

[3] vector field
[4] vector function

جہاں لمحہ غور پر نقطہ N کے محدد x ، y ، z ہیں۔اگر کارتیسی z محور عین جسم کی محور پر واقع ہو اور ω مثبت z محور کے رخ ہو تب $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$ لکھا جائے گا۔یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{bmatrix} = \omega(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}) \tag{10.2}$$

□

مثال 10.4: سمتی میدان (میدان قوت)

فرض کریں کہ کمیت M مستقل طور پر فضا میں نقطہ N_0 پر موجود ہے جبکہ کمیت m فضا میں کسی بھی نقطہ N پر موجود ہو سکتا ہے۔ اب نیوٹن قانون تجاذب کے تحت m پر قوت کشش

$$|\boldsymbol{f}| = \frac{GMm}{r^2} \tag{10.3}$$

عمل کرے گی جہاں $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kgs^2}$ تجاذبی مستقل ہے اور r ان جسموں کے مابین فاصلہ ہے۔یہاں $\boldsymbol{v}$ فضا میں سمتی میدان دیتا ہے۔اگر ہم کارتیسی محدد کو یوں چنیں کہ N_0 کے محدد x_0 ، y_0 ، z_0 ہوں اور N کے محدد x ، y ، z ہوں تب مسئلہ فیثاغورث کے تحت

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \qquad (r \geq 0)$$

ہو گا۔ اب $r > 0$ فرض کرتے ہوئے سمتیہ

$$\boldsymbol{r} = (x-x_0)\boldsymbol{i} + (y-y_0)\boldsymbol{j} + (z-z_0)\boldsymbol{k} \tag{10.4}$$

متعارف کرتے ہوئے $r = |\boldsymbol{r}|$ لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\boldsymbol{f}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $-\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ ہو گا جہاں منفی کی علامت اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ قوت کشش N_0 سے N کی رخ کو ہے۔یوں درج ذیل لکھ جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{f} = |\boldsymbol{f}|\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = -GMm\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -GMm\left[\frac{x-x_0}{r^3}\boldsymbol{i} + \frac{y-y_0}{r^3}\boldsymbol{j} + \frac{z-z_0}{r^3}\boldsymbol{k}\right] \tag{10.5}$$

یہ سمتی تفاعل m پر قوت کشش دیتا ہے۔ □

10.2 سمتی احصاء

احصاء کے بنیادی تصورات مثلاً ارتکاز، استمراریت اور تفرق پذیری کو بالکل فطری طور پر سمتی احصاء کے لئے بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔

سمتیات $\boldsymbol{a}_{(n)}$ ، جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے، کا لامتناہی تسلسل اس صورت مرکوز تصور کیا جاتا ہے جب ایسا سمتیہ $\boldsymbol{a}$ موجود ہو کہ درج ذیل درست ہو۔

$$\lim_{n \to \infty} \left| \boldsymbol{a}_{(n)} - \boldsymbol{a} \right| = 0 \tag{10.6}$$

$\boldsymbol{a}$ کو اس تسلسل کا **تحدیدی سمتیہ**[5] کہتے ہیں جسے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{a}_{(n)} = \boldsymbol{a} \tag{10.7}$$

کارتیسی نظام محدد استعمال کرتے ہوئے ظاہر ہے کہ سمتیات کا تسلسل اس صورت سمتیہ $\boldsymbol{a}$ پر مرتکز ہو گا جب تسلسل کے تین کارتیسی ارکان کا تسلسل بالترتیب $\boldsymbol{a}$ کے تین کارتیسی ارکان پر مرتکز ہوں۔

اسی طرح اگر حقیقی متغیر t پر مبنی سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ نقطہ t_0 کی پڑوس[6] میں معین ہو (جبکہ t_0 پر یہ غیر معین ہو سکتا ہے) تب t کا t_0 کے قریب تر ہونے سے تفاعل کی حد[7] $\boldsymbol{l}$ سے مراد درج ذیل ہے

$$\lim_{t \to t_0} \left| \boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{l} \right| = 0 \tag{10.8}$$

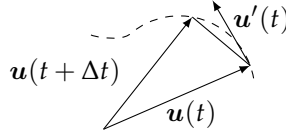
جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{l} \tag{10.9}$$

سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ اس صورت $t = t_0$ پر **استمراری** تصور کیا جاتا ہے جب یہ t_0 کی پڑوس میں معین ہو اور درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(t_0) \tag{10.10}$$

---

[5] limit vector
[6] پڑوس سے مراد t محور پر ایسا وقفہ ہے جس کے اندر t_0 پایا جاتا ہو۔
[7] limit

شکل 10.1: سمتی تفاعل کا تفرق

کارتیسی نظام محدد میں تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ درج لکھا جائے گا

$$\boldsymbol{u}(t) = u_1(t)\boldsymbol{i} + u_2(t)\boldsymbol{j} + u_3(t)\boldsymbol{k} \tag{10.11}$$

اور t_0 پر $\boldsymbol{u}(t)$ اس صورت استمراری ہو گا جب اس کے تینوں کارتیسی اجزاء t_0 پر استمراری ہوں۔

تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ نقطہ t پر اس صورت **قابل تفرق** ہو گا جب درج ذیل حد موجود ہو۔

$$\boldsymbol{u}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t) - \boldsymbol{u}(t)}{\Delta t} \tag{10.12}$$

$\boldsymbol{u}'(t)$ کو $\boldsymbol{u}(t)$ کا **تفرق**[8] کہتے ہیں (شکل 10.1)۔اس شکل میں نقطہ دار لکیر سمتیہ $\boldsymbol{u}(t)$ کی نوک کو آزاد متغیرہ t کے لئے وقفہ t تا $t+\Delta t$ ظاہر کرتی ہے۔

کارتیسی نظام محدد استعمال کرتے ہوئے نقطہ t پر $\boldsymbol{u}(t)$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس نقطے پر درج ذیل تینوں تفرق موجود ہوں۔

$$u'_m(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u_m(t+\Delta t) - u_m(t)}{\Delta t} \qquad (m = 1, 2, 3)$$

یوں سمتیہ تفاعل کا تفرق لینا اس کے تینوں ارکان کا علیحدہ علیحدہ تفرق لینے کے مترادف ہے یعنی:

$$\boldsymbol{u}'(t) = u'_1(t)\boldsymbol{i} + u'_2(t)\boldsymbol{j} + u'_3(t)\boldsymbol{k} \tag{10.13}$$

تفرق کے جانی پہچانی اصولوں کے مطابقتی اصول سمتیہ تفاعل کے تفرق کے لئے بھی حاصل کیے جا سکتے ہیں مثلاً

$$(c\boldsymbol{u})' = c\boldsymbol{u}' \quad (c \text{ مستقل ہے}), \qquad (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}' \tag{10.14}$$

---

[8] derivative

اور

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}' \tag{10.15}$$

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}' \tag{10.16}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2} \tag{10.17}$$

$$(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w})' = (\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}') \tag{10.18}$$

چونکہ سمتی ضرب غیر قابل تبادل ہے لہٰذا مساوات 10.16 میں سمتیات کی ترتیب برقرار رکھنا لازم ہے۔

مثال 10.5: مستقل لمبائی کے تفاعل کا تفرق
اگر تفاعل $\boldsymbol{u}(t)$ کی لمبائی مستقل ہو یعنی $\left|\boldsymbol{u}(t)\right| = c$ تب $|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = c^2$ ہو گا اور مساوات 10.15 کی مدد سے $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})' = 2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' = 0$ حاصل ہو گا جس کے تحت مستقل لمبائی کے سمتی تفاعل کا تفرق یا صفر سمتیہ ہو گا اور یا یہ $\boldsymbol{u}(t)$ کے قائمہ الزاویہ ہو گا۔ □

درج بالا گفتگو سے سمتی تفاعل کی جزوی تفرق کے اصول حاصل کرتے ہیں۔اگر کسی سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k}$$

کے اجزاء n عدد متغیرات t_1 ، $\cdots$ ، t_n کے ساتھ قابل تفرق ہوں تب t_1 کے ساتھ $\boldsymbol{u}$ کے جزوی تفرق کو $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t_1}$ سے ظاہر کیا جائے گا جو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t_1} = \frac{\partial u_1}{\partial t_1}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u_2}{\partial t_1}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u_3}{\partial t_1}\boldsymbol{k}$$

اسی طرح دیگر جزوی تفرقات لکھے جا سکتے ہیں مثلاً:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t_m\partial t_n} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial t_m\partial t_n}\boldsymbol{i}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_2}{\partial t_m\partial t_n}\boldsymbol{j}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_3}{\partial t_m\partial t_n}\boldsymbol{k}$$

مثال 10.6: جزوی تفرق
سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t_1,t_2) = a\cos\omega t_1\boldsymbol{i}+a\sin\omega t_1\boldsymbol{j}+t_2\boldsymbol{k}$ کے جزوی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t_1} = a\omega(-\sin\omega t_1\boldsymbol{i}+\cos\omega t_1\boldsymbol{j}),\qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t_2} = \boldsymbol{k}$$

تفاعل $\boldsymbol{r}$ ایسی نلکی سطح کو ظاہر کرتا ہے جس کا رداس a ہے اور محور z محور ہے۔ □

سوالات

سوال 10.1 تا سوال 10.5 میں ہم قد سطح $f = c$ کیا ہو گا جہاں c مستقل ہے۔

سوال 10.1: $f = x + y + z$
جواب: متوازی سطحیں

سوال 10.2: $f = x^2 + y^2 + z^2$
جواب: ہم مرکز کرہ

سوال 10.3: $f = x^2 + y^2$
جواب: کارتیسی z کے ہم محوری نلکی سطحیں

سوال 10.4: $f = 4x^2 + 5y^2$
جواب: کارتیسی z کے ہم محوری نلکی ترخیم سطحیں

سوال 10.5: $f = x^2 + y^2 - z$
جواب: قطع مکافی نما سطحیں

xy سطح پر سمتیہ $\boldsymbol{v}$ سوال 10.6 تا سوال 10.9 میں دیا گیا ہے۔وہ سطح دریافت کریں جس پر $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی مستقل ہو۔وہ سطح دریافت کریں جس پر $\boldsymbol{v}$ کی یکساں سمت ہو۔

سوال 10.6: $\boldsymbol{v} = 2x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j}$
جوابات: $4x^2 + 9y^2 =$ مستقل، $\frac{y}{x} =$ مستقل

سوال 10.7: $\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{i} + \sqrt{y}\boldsymbol{j}$
جوابات: $x^4 + y =$ مستقل، $\frac{\sqrt{y}}{x^2} =$ مستقل

سوال 10.8: $\boldsymbol{v} = (x^2 - y^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$
جوابات: $x^2 + y^2 =$ مستقل، $\frac{2xy}{x^2-y^2} =$ مستقل

سوال 10.9: $\boldsymbol{v} = (x + y)\boldsymbol{i} + (x - y)\boldsymbol{j}$
جوابات: $x^2 + y^2 =$ مستقل، $\frac{x-y}{x+y} =$ مستقل

سوال 10.10 تا سوال 10.18 میں $\boldsymbol{u}$ دیا گیا ہے۔آپ سے التماس ہے کہ $\boldsymbol{u}'$ اور $\boldsymbol{u}''$ دریافت کریں۔

سوال 10.10: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}t^2$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = 2\boldsymbol{b}t, \ \boldsymbol{u}'' = 2\boldsymbol{b}$

سوال 10.11: $t\boldsymbol{i} + (t^2+2)\boldsymbol{j}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{u}'' = 2\boldsymbol{j}$

سوال 10.12: $4\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = -4\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{u}'' = -4\cos t\,\boldsymbol{i} - 2\sin t\,\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{u}$

سوال 10.13: $4\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} - 3t\,\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = -4\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j} - 3\,\boldsymbol{k}, \ \boldsymbol{u}'' = -4\cos t\,\boldsymbol{i} - 2\sin t\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.14: $t^2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = 2t\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}, \ \boldsymbol{u}'' = 2\boldsymbol{i}$

سوال 10.15: $\cos 2t\,\boldsymbol{i} - 3\sin 2t\,\boldsymbol{j} + t^2\,\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = -2\sin 2t\,\boldsymbol{i} - 6\cos 2t\,\boldsymbol{j} + 2t\,\boldsymbol{k}, \ \boldsymbol{u}'' = -4\cos 2t\,\boldsymbol{i} + 12\sin 2t\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k}$

سوال 10.16: $e^t\,\boldsymbol{i} - 2e^{-3t}\,\boldsymbol{j}$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = e^t\,\boldsymbol{i} + 6e^{-3t}\,\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{u}'' = e^t\,\boldsymbol{i} - 18e^{-3t}\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.17: $e^{-t}(\cos t\,\boldsymbol{i} - \sin t\,\boldsymbol{j})$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = e^{-t}[-(\cos t + \sin t)\,\boldsymbol{i} - (\cos t - \sin t)\,\boldsymbol{j}], \ \boldsymbol{u}'' = e^{-t}(2\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j})$

سوال 10.18: $t^2(2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j})$
جوابات: $\boldsymbol{u}' = 2t(2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}), \ \boldsymbol{u}'' = 2(2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j})$

سوال 10.19 تا سوال 10.23 میں $\boldsymbol{u} = t\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{v} = t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - t^2\boldsymbol{k}$ لیتے ہوئے حل کریں۔

سوال 10.19: $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})'$
جواب: $4t^3$

سوال 10.20: $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})'$
جواب: $-t^4\boldsymbol{i} - 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$

سوال 10.21: $[\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})]'$
جواب: $-8t^3\boldsymbol{i} - (7t^6 + 5t^4 - 6t^2)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$

سوال 10.22: $[(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w}]'$
جواب: $(6t^2 - 7t^6)\boldsymbol{j} + (4t - 6t^5)\boldsymbol{k}$

سوال 10.23: $[(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}]'$
جواب: $-15t^4 - 3t^2$

سوال 10.24 تا سوال 10.29 میں دیے گئے سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$ کا x ، y اور z کے ساتھ جزوی تفرق دریافت کریں۔

سوال 10.24: $x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{i},\ 3\boldsymbol{k},\ 0$

سوال 10.25: $(x^2 - y^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$
جوابات: $2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j},\ -2y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j},\ 0$

سوال 10.26: $x^2\boldsymbol{i} - 3y^2\boldsymbol{j} + 2z^2\boldsymbol{k}$
جوابات: $2x\boldsymbol{i},\ -6y\boldsymbol{j},\ 4z\boldsymbol{k}$

سوال 10.27: $xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$
جوابات: $y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k},\ x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j},\ y\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$

سوال 10.28: $(x + y)\boldsymbol{i} + (y + z)\boldsymbol{j} + (z + x)\boldsymbol{k}$
جوابات: $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

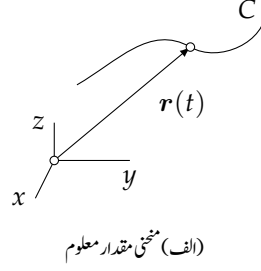
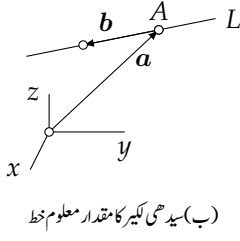
سوال 10.29: $x^2y\boldsymbol{i} + y^2z\boldsymbol{j} + z^2x\boldsymbol{k}$
جوابات: $2xy\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{k},\ x^2\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j},\ y^2\boldsymbol{j} + 2xz\boldsymbol{k}$

سوال 10.30: $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})''$ اور $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})''$ کے لئے مساوات 10.15 اور مساوات 10.16 کی طرز کے کلیات دریافت کریں۔

جوابات: $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})'' = \boldsymbol{u}'' \cdot \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}''$,
$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})'' = \boldsymbol{u}'' \times \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}''$

سوال 10.31: ثابت کریں کہ $\left(\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}')}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})^{\frac{3}{2}}}$
جواب: $\left(\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}\right)' = \left(\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}}\right)'$ لکھتے ہوئے مساوات 10.17 کا استعمال کریں۔

(الف) منحنی مقدار معلوم

(ب) سیدھی لکیر کا مقدار معلوم خط

شکل 10.2: سیدھی لکیر اور منحنی کے مقدار معلوم خطوط۔

10.3 منحنی

کارتیسی نظام میں منحنی C کو درج ذیل سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے (شکل 10.2-الف)۔

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{10.19}$$

آزاد حقیقی متغیرہ t کی ہر قیمت t_0 کا C پر مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے جس کے محدد $x(t_0)$ ، $y(t_0)$ اور $z(t_0)$ تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t_0)$ دیتا ہے۔ مساوات 10.19 کو C کی **منحنی مقدار معلوم**[9] کہتے ہیں جبکہ t کو **مقدار معلوم** کہتے ہیں۔ منحنی مقدار معلوم کی طرز پر منحنی کا اظہار نہایت عمدہ ثابت ہوتا ہے۔

فضا میں منحنی ظاہر کرنے کے دیگر طریقے

$$y=f(x), \quad z=g(x) \tag{10.20}$$

اور

$$F(x,y,z)=0, \quad G(x,y,z)=0 \tag{10.21}$$

ہیں۔ مساوات 10.20 میں $x=t$ پر کرتے ہوئے اس کو مساوات 10.19 کی طرح لکھ سکتے ہیں یعنی:

$$\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+f(t)\boldsymbol{j}+g(t)\boldsymbol{k}$$

مساوات 10.21 میں دو سطحوں کے مساوات دیے گئے ہیں جن کا ملاپ منحنی دیتا ہے۔

---

[9] parametric representation

مستوی منحنی[10] سے مراد ایسی منحنی ہے جو فضا میں کسی سطح مستوی پر پائی جاتی ہو۔غیر مستوی منحنی کو خم دار منحنی[11] کہتے ہیں۔

مثال 10.7: سیدھا خط
کسی بھی سیدھی لکیر L کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ مستقل سمتیات ہیں (شکل 10.2-ب)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = (a_1 + tb_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + tb_2)\boldsymbol{j} + (a_3 + tb_3)\boldsymbol{k} \tag{10.22}$$

L نقطہ A سے گزرتی ہے جس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ ہے جبکہ $\boldsymbol{b}$ کے رخ L ہو گا۔اگر $\boldsymbol{b}$ اکائی سمتیہ ہو تب اس کے ارکان کوسائن رخ[12] ہوں گے اور L پر کسی بھی نقطے کا A سے فاصلہ $|t|$ ہو گا۔ □

مثال 10.8: ترخیم، دائرہ
درج ذیل سمتی تفاعل xy سطح میں ترخیم کو ظاہر کرتا ہے جس کا مرکز کارتیسی نظام کے مبدا اور صدر محور x اور y محور پر ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\boldsymbol{i} + b\sin t\boldsymbol{j} \tag{10.23}$$

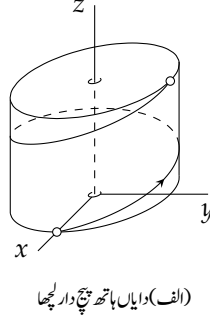
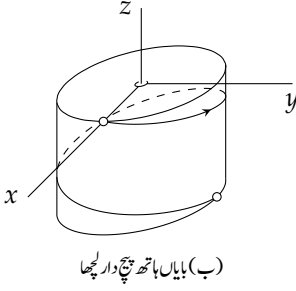
$x = a\cos t$ اور $y = b\sin t$ لیتے ہوئے $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ کے استعمال سے

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0 \tag{10.24}$$

ملتا ہے جو ترخیم کی مساوات ہے۔اگر $a = b$ ہو تب مساوات 10.23 رداس a کی دائرے کی مساوات ہو گی۔ □

سوال 10.32: مبدا سے ہٹ کر دائرہ
xy سطح میں رداس r کا ایسا دائرہ جس کا مرکز نقطہ (x_0, y_0) پر ہو کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\frac{(x - x_0)^2}{r^2} + \frac{(y - y_0)^2}{r^2} = 1$$

---
[10] plane curve
[11] twisted curve
[12] direction cosines

شکل 10.3: پیچ دار لچھے (مثال 10.33)۔

$\frac{x-x_0}{r}=\cos t$ اور $\frac{y-y_0}{r}=\sin t$ لیتے ہوئے $x=x_0+r\cos t$ اور $y=y_0+r\sin t$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا اس دائرے کی مقدار معلوم مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{r}(t)=(x_0+r\cos t)\boldsymbol{i}+(y_0+r\sin t)\boldsymbol{j} \tag{10.25}$$

سوال 10.33: پیچ دار لچھا

پیچ دار لچھے[13] کو

$$\boldsymbol{r}(t)=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+ct\boldsymbol{k} \qquad (c\neq 0) \tag{10.26}$$

ظاہر کرتا ہے۔اس خم دار منحنی کو $c>0$ (دایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) اور $c<0$ (بایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) کے لئے شکل 10.3 میں دکھایا گیا ہے۔

منحنی کے کچھ حصے کو عموماً قوس[14] کہتے ہیں۔اس کتاب میں ہم عموماً قوس کو بھی منحنی کہیں گے۔

ہم قطع منحنی اپنی آپ کو قطع کرتی ہے۔ نقطہ قطع کو منحنی کا متعدد نقطہ[15] کہتے ہیں (شکل 10.4)۔ ایسی منحنی جس کے متعدد نقطے نہ پائے جاتے ہوں سادہ منحنی[16] کہلاتی ہے۔

---

[13] circular helix
[14] arc
[15] multiple point
[16] simple curve

شکل 10.4: دوہرا نقطوں والے منحنی

مثال 10.9: سادہ اور غیر سادہ منحنی
ترخیم اور پیچ دار لچھے سادہ ترخیم کی مثالیں ہیں۔درج ذیل $t=1$ اور $t=-1$ پر مبدا سے دو مرتبہ گزرتی ہے لہٰذا یہ غیر سادہ منحنی کی مثال ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t)=(t^2-1)\boldsymbol{i}+(t^3-1)\boldsymbol{j}$$

□

آخر میں بتاتا چلوں کہ کسی بھی منحنی C کو کئی سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے مثلاً اگر C کو مساوات 10.19 ظاہر کرے تب ہم $t=h(t^*)$ لیتے ہوئے، جہاں مساوات 10.19 میں استعمال t کی تمام قیمتوں کے لئے $h(t^*)$ بھی پائے جاتے ہوں، C کو نئی سمتی تفاعل $\tilde{\boldsymbol{r}}(t^*)=\boldsymbol{r}[h(t^*)]$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثال 10.10: مقدار معلوم کی تبدیلی
xy سطح میں قطع مکافی $y=x^2$ کو درج ذیل سمتیہ تفاعل ظاہر کرتی ہے۔

$$\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}\qquad(-\infty<t<\infty)\tag{10.27}$$

ہم $t=-2t^*$ لیتے ہوئے اس قطع مکافی کو درج ذیل سمتی تفاعل سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t^*)=\boldsymbol{r}(-2t^*)=-2t^*\boldsymbol{i}+4t^{*2}\boldsymbol{j}$$

اگر ہم $t=t^{*2}$ لیں تب ہمیں درج ذیل نیا سمتی تفاعل ملتا ہے

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t^*)=t^{*2}\boldsymbol{i}+t^{*4}\boldsymbol{j}$$

لیکن $t^{*2}>0$ کی بنا یہ تفاعل قطع مکافی کو صرف ربع اول میں ظاہر کرتا ہے۔ □

سوالات

سوال 10.34 تا سوال 10.37 میں نقطہ A سے گزرتی ہوئی سمتیہ $\boldsymbol{b}$ کے رخ سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.34: $A:(0,0,0), \quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$
جواب: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}-t\boldsymbol{j}$

سوال 10.35: $A:(2,-3,1), \quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$
جواب: $\boldsymbol{r}=(t+2)\boldsymbol{i}+(2t-3)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

سوال 10.36: $A:(2,0,-3), \quad \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{i}-t\boldsymbol{j}+3(t-1)\boldsymbol{k}$

سوال 10.37: $A:(-3,2,6), \quad \boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{r}=(5t-3)\boldsymbol{i}+(3t+2)\boldsymbol{j}+(6-7t)\boldsymbol{k}$

سوال 10.38 تا سوال 10.41 میں نقطہ A اور نقطہ B سے گزرتی ہوئی سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.38: $A:(0,0,0), \quad B:(1,1,1)$
جواب: $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$

سوال 10.39: $A:(-3,7,-5), \quad B:(2,0,3)$
جواب: $\boldsymbol{r}=(5t-3)\boldsymbol{i}+7(1-t)\boldsymbol{j}+(8t-5)\boldsymbol{k}$

سوال 10.40: $A:(1,2,-3), \quad B:(7,2,-3)$
جواب: $\boldsymbol{r}=(6t+1)\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$

سوال 10.41: $A:(3,2,0), \quad B:(0,0,0)$
جواب: $\boldsymbol{r}=3(1-t)\boldsymbol{i}+2(1-t)\boldsymbol{j}$ جس میں $t^*=1-t$ چنتے ہوئے $\tilde{\boldsymbol{r}}=3t^*\boldsymbol{i}+2t^*\boldsymbol{j}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 10.42 تا سوال 10.46 میں دیے سیدھی لکیر کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.42: $y = x, \quad z = 0$
جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j}$

سوال 10.43: $y = -3x, \quad z = 2x$
جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} - 3t\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$

سوال 10.44: $2y = 5x, \quad z = x - 3y$
جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + \frac{5}{2}\boldsymbol{j} - \frac{13}{2}\boldsymbol{k}$ یا $\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + 5t\boldsymbol{j} - 13t\boldsymbol{k}$ جہاں t^* کی جگہ t ہی لکھا گیا ہے۔

سوال 10.45: $4x - y + z = 3, \quad -3x + 2y + 3z = 19$
جواب: y اور z حاصل کرتے ہوئے $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + (3t+2)\boldsymbol{j} + (5-t)\boldsymbol{k}$

سوال 10.46: $x - y = 2, \quad 2x + z = 3$
جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + (t-2)\boldsymbol{j} + (3-2t)\boldsymbol{k}$

سوال 10.47 تا سوال 10.55 میں دیے خطوط کی مقدار معلوم مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.47: $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$
جواب: $\boldsymbol{r} = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}$

سوال 10.48: $y = x^3, \quad z = 0$
جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j}$

سوال 10.49: $y = 2x^3, \quad z = -3x^2$
جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + 2t^3\boldsymbol{j} - 3t^2\boldsymbol{k}$

سوال 10.50: $x^2 + y^2 - 4x + 6y = -9, \quad z = 0$
جواب: نقطہ $(2, -3)$ پر رداس 2 کا دائرہ $\boldsymbol{r} = (2 + 2\cos t)\boldsymbol{i} + (-3 + 2\sin t)\boldsymbol{j}$

سوال 10.51: $4(x+1)^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$
جواب: $\boldsymbol{r} = (-1 + 2\cos t)\boldsymbol{i} + 2\sin t\boldsymbol{j}$

سوال 10.52: $x = -5y^2, \quad z = 2y^3$
جواب: $\boldsymbol{r} = -5t^2\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + 2t^3\boldsymbol{k}$

سوال 10.53: $y=\sqrt{x}, \quad z=y-2,$
جواب: $\boldsymbol{r}=t^2\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+(t-2)\boldsymbol{k}$

سوال 10.54: xy سطح میں درج ذیل ترخیم کی مقدار معلوم مساوات لکھیں۔

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

جواب: $\boldsymbol{r}=(x_0+a\cos t)\boldsymbol{i}+(y_0+b\sin t)\boldsymbol{j}$

سوال 10.55: $x^2+y^2=4, \quad z=e^{-x}$
جواب: $\boldsymbol{r}=2\cos t\boldsymbol{i}+2\sin t\boldsymbol{j}+e^{-t}\boldsymbol{k}$

سوال 10.56: پیچ دار لچھے (مساوات 10.26) کا xy ، xz اور yz سطحوں پر عمودی سایہ کیا ہو گا؟

جوابات: xy میں دائرہ، xz میں کوسائن موج اور yz میں سائن موج

10.4 لمبائی قوس

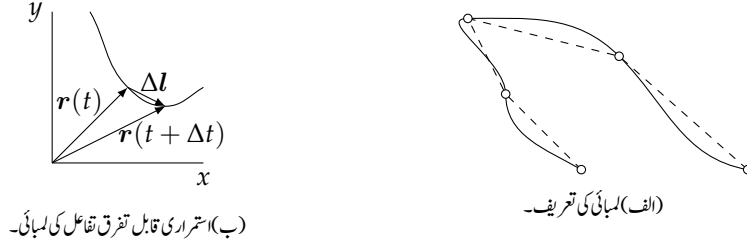
سادہ منحنی C کی لمبائی کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ہم C (شکل 10.5-الف) کے دونوں سروں کے مابین متواتر (اختیاری) نقطوں کو n عدد (نقطہ دار) خط مستقیم سے یوں جوڑتے ہیں کہ $n\to\infty$ کی صورت میں لمبی ترین خط مستقیم کی لمبائی صفر کے قریب تر ہو گی۔تمام خط مستقیم کی لمبائیوں (جنہیں مسئلہ فیثاغورث سے حاصل کیا جا سکتا ہے) کا مجموعہ لیتے ہیں۔اگر n کی بتدریج بڑھتی تعداد n_1 ، n_2 ، . . . لیتے ہوئے مطابقتی خط مستقیم کی لمبائیوں کے مجموعے کی ترتیب l_1 ، l_2 ، . . . مرکوز ہو جس کی حد l ہو تب ہم کہتے ہیں کہ C **قابل تصحیح**[17] ہے اور l کو C کی **لمبائی**[18] کہتے ہیں۔

اگر C از خود سادہ منحنی نہ ہو لیکن یہ محدود تعداد کے قابل تصحیح سادہ منحنیات پر مشتمل ہو تب C کی لمبائی سے مراد ان تمام منحنیات کی لمبائیوں کا مجموعہ ہو گا۔

---

[17] rectifiable
[18] length

(الف) لمبائی کی تعریف۔

(ب) استمراری قابل تفرق تفاعل کی لمبائی۔

شکل 10.5: لمبائی قوس

اگر C کو استمراری[19] قابل تفرق سمتی تفاعل

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad (a \le t \le b) \tag{10.28}$$

سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب $\Delta \boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t + \Delta t) = \Delta \boldsymbol{r}$ ہو گا (شکل 10.5-ب) جس کو Δt سے تقسیم کرتے ہوئے $\frac{\Delta \boldsymbol{l}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں $\Delta t \to 0$ کی صورت میں درج ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

کسی بھی سمتیہ کی طرح $\dot{\boldsymbol{r}}$ کی لمبائی $\sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}}$ ہو گی جس کو $\mathrm{d}t$ سے ضرب دیتے ہوئے تکمل لینے سے منحنی کی کل لمبائی حاصل ہو گی۔

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} \, \mathrm{d}t \qquad (\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}) \tag{10.29}$$

مساوات 10.29 سے حاصل لمبائی منحنی پر محددی نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔

اگر ہم تکمل کی بالائی حد کو مستقل b کی جگہ متغیر t رکھیں تب حاصل تکمل از خود t کا تابع تفاعل ہو گا مثلاً $s(t)$۔ یوں تکمل کے متغیرہ کو t^* لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} \, \mathrm{d}t^* \qquad (\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^*}) \tag{10.30}$$

تفاعل $s(t)$ کو C کا **لمبائی قوس تفاعل** یا C کی **لمبائی قوس**[20] کہتے ہیں۔

[19] استمراری قابل تفرق کا مطلب ہے کہ اس کا تفرق موجود ہے اور یہ تفرق استمراری ہے۔ اسی طرح دوہرا استمراری قابل تفرق کا مطلب ہے کہ اس کا دوہرا تفرق موجود ہے اور یہ دوہرا تفرق استمراری ہے، وغیرہ وغیرہ

[20] arc length

اب تک کے بحث سے ظاہر ہے کہ جیومیٹریائی طور پر کسی مستقل $t = t_0 \geq a$ کے لئے $s(t_0)$ نقطہ $t = a$ اور نقطہ $t = t_0$ کے درمیان حصے کی لمبائی دیتا ہے۔یوں $t = t_0 < a$ کی صورت میں $s(t_0) < 0$ ہو گا لہٰذا لمبائی $-s(t_0)$ ہو گی۔

منحنی کی مقدار معلوم مساوات میں s بطور مقدار معلوم کردار ادا کر سکتا ہے اور جیسا ہم دیکھیں گے اس سے کئی کلیات سادہ صورت اختیار کرتے ہیں۔

مساوات 10.30 میں ابتدائی نقطہ a کی جگہ کوئی دوسرا مستقل لیا جا سکتا ہے یعنی نقطہ $s = 0$ کو ہم خود مختاری کے ساتھ چن سکتے ہیں۔ C پر جس طرف چلنے سے s بڑھتا ہے اس طرف کو C پر **مثبت دائری سمت**[21] کہتے ہیں۔یوں منحنی کی **سمت بندی**[22] کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ کسی بھی C کی سمت بندی دو طریقوں سے کی جا سکتی ہے۔مقدار معلوم کا اس طرح تبادلہ کہ اس کا تفرق منفی حاصل ہو سے دوسری سمت بندی حاصل ہو گی۔

مساوات 10.30 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{10.31}$$

روایتی طور پر عموماً

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}$$

اور

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{10.32}$$

لکھا جاتا ہے جہاں $\mathrm{d}s$ کو C کا **خطی جزو**[23] کہتے ہیں۔

مثال 10.11: لمبائی قوس بطور مقدار معلوم

دائرے کی صورت میں

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\boldsymbol{i} + a\sin t\boldsymbol{j}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = -a\sin t\boldsymbol{i} + a\cos t\boldsymbol{j}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = a^2$$

---

[21] positive sense
[22] orientation
[23] linear element

ہو گا لہٰذا لمبائی قوس درج ذیل حاصل ہو گی۔

$$s(t) = \int_0^t a\,\mathrm{d}t^* = at$$

یوں t کو s کا تفاعل $t(s) = \frac{s}{a}$ لکھتے ہوئے دائرے کی ایسی مساوات لکھتے ہیں جس میں s بطور مقدار معلوم ہو۔

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{s}{a}\right) = a\cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i} + a\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j} \qquad \text{گھڑی کی الٹ رخ}$$

اس مساوات میں $s = 0$ پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$ ملتا ہے جو نقطہ $(a, 0)$ کو ظاہر کرتا ہے۔اسی طرح s کی قیمت بڑھا کر $s = \frac{\pi a}{2}$ کرنے سے $\boldsymbol{r} = 0\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j}$ حاصل ہوتا ہے جو نقطہ $(0, a)$ کو ظاہر کرتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ s کی قیمت بڑھانے سے نقطہ دائرے پر رہتے ہوئے مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ گھومتا ہے۔یوں اس دائرے کی سمت بندی گھڑی کی الٹ رخ ہے۔ہم $s = -\tilde{s}$ پر کرتے ہوئے دائرے پر سمت بندی گھڑی کے رخ رکھ سکتے ہیں۔یوں

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad \text{اور} \quad \sin(\alpha) = -\sin\alpha$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

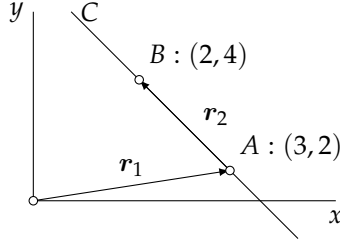
$$\boldsymbol{r}\left(-\frac{\tilde{s}}{a}\right) = a\cos\frac{\tilde{s}}{a}\boldsymbol{i} - a\sin\frac{\tilde{s}}{a}\boldsymbol{j} \qquad \text{گھڑی کی رخ}$$

چونکہ $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{s}} = -1 < 0$ ہے لہٰذا درج بالا میں گھڑی کے رخ چلتے ہوئے بڑھتا $\tilde{s}$ حاصل ہو گا۔ □

مثال 10.12: اکائی رداس کے دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = 1$ ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم

$$\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + \sqrt{1 - t^2}\boldsymbol{j}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں جذر کی مثبت قیمت لی گئی ہے۔اس میں $t = 0$ پر کرنے سے $\boldsymbol{r} = 0\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ یعنی نقطہ $(0, 1)$ ملتا ہے جبکہ $t = 1$ پر کرنے سے $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$ یعنی نقطہ $(1, 0)$ ملتا ہے۔یوں t کی قیمت بڑھانے سے نقطہ دائرے پر گھڑی کی رخ گھومتا ہے لہٰذا یہ مساوات ایسے دائرے کی مساوات ہے جس پر سمت گھڑی کی رخ ہے۔یہ دائرے کی بالائی حصے (جہاں y مثبت ہے) کی مساوات ہے۔اسی دائرے کی نچلی حصے کی مساوات

$$\boldsymbol{r} = t^*\boldsymbol{i} - \sqrt{1 - t^{*2}}\boldsymbol{j}$$

شکل 10.6: خط مستوی کی سمتی مساوات (مثال 10.14)۔

ہو گی جو $t^* = 0$ پر $(1,0)$ اور $t^* = 1$ پر $(0,-1)$ دیتی ہے۔ □

مثال 10.13: قوس مکافی $y = x^2$ کو

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j}$$

لکھا جا سکتا ہے جو $t = 0$ پر $\boldsymbol{r} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$ یعنی نقطہ $(0,0)$ اور $t = 1$ پر $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ یعنی نقطہ $(1,1)$ دیتی ہے۔یوں درج بالا ایسی قوس مکافی کی مساوات ہے جس پر سمت گھڑی کی الٹ رخ ہے۔اس میں $t = -t^*$ پر کرنے سے گھڑی کی رخ قوس مکافی کی مساوات

$$\boldsymbol{r}(t) = -t^*\boldsymbol{i} + t^{*2}\boldsymbol{j}$$

ملتی ہے جو $t^* = 0$ پر $(0,0)$ اور $t^* = 1$ پر $(-1,1)$ دیتی ہے لہٰذا یہ گھڑی کی رخ قوس مکافی کی مساوات ہے۔ □

مثال 10.14: خط مستوی C کو شکل 10.14 میں دکھایا گیا ہے۔اس کی دو ممکنہ سمتیں ہیں۔آئیں بڑھتی y رخ میں اس خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ C پر کوئی ابتدائی نقطہ A چنتے ہیں جس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}_1 = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ ہے۔ابتدائی نقطے سے بڑھتی y رخ میں C پر کوئی دوسرا نقطہ B چنتے ہیں۔ A سے B تک سمتیہ $\boldsymbol{r}_2 = (2-3)\boldsymbol{i} + (4-2)\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ ہے۔یوں بڑھتی y رخ C کی مساوات

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{r}_2 = (3-t)\boldsymbol{i} + 2(1+t)\boldsymbol{j}$$

ہو گی جو $t = 0$ پر ابتدائی نقطہ $(3,2)$ دیتی ہے۔

اس مساوات میں $t=-t^*$ پر کرتے ہوئے گھٹتی y رخ C کی مساوات

$$\boldsymbol{r}(t^*)=(3+t^*)\boldsymbol{i}+2(1-t^*)\boldsymbol{j}$$

لکھی جا سکتی ہے۔اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے $t^*=-1$ پر کرنے سے نقطہ B حاصل ہو گا۔ □

سوالات

تمام سوالات میں لمبائی قوس دریافت کریں۔دیے تفاعل کا خط کھینچیں۔

سوال 10.57: لیزم: $x=0$ سے $x=1$ تک $\quad y=\cosh x,\quad z=0,$
جواب: $\sinh 1$

سوال 10.58: پیچ دار لچھا: $(a,0,0)$ سے $(a,0,2\pi c)$ تک $\quad y=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+ct\boldsymbol{k},$
جواب: $2\pi\sqrt{a^2+c^2}$

سوال 10.59: قطع مکافی: $(0,0,0)$ سے $(2,4,0)$ تک $\quad y=x^2,\quad z=0,$
جواب: $\frac{\operatorname{arcsinh}(8)}{4}+2\sqrt{65}$

سوال 10.60: چار دندان مستدیر: پوری لمبائی $\quad \boldsymbol{r}=a\cos^3 t\boldsymbol{i}+a\sin^3 t\boldsymbol{j},$
جواب:اس کو چار سادہ قابل تصحیح ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے $6a$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 10.61: : $(1,0,0)$ سے $(-1,\pi,0)$ تک $\quad \boldsymbol{r}=(\cos t+t\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t-t\cos t)\boldsymbol{j},$
جواب: $\frac{\pi^2}{2}$

سوال 10.62: $\boldsymbol{r}=e^t\cos t\,\boldsymbol{i}+e^t\sin t\,\boldsymbol{j},\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$
جواب: $\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$

سوال 10.63: ثابت کریں کہ $x=a$ تا $x=b$ منحنی $y=f(x)$ کی لمبائی درج ذیل ہے۔(مساوات 10.29 کی مدد لیں۔)

$$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x\qquad \left(y'=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\tag{10.33}$$

جواب: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + f(t)\boldsymbol{j}$ سے $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{i} + \dot{f}\boldsymbol{j}$ اور $\sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$ لکھ کر جواب حاصل کریں۔

سوال 10.64: درج بالا مساوات (سوال 10.63) کی مساوات استعمال کرتے ہوئے رداس r کے دائرے کی لمبائی دریافت کریں۔

جواب: x محور کے بالائی جانب قوس پر مثبت دائری سمت بائیں سے دائیں ہے جبکہ محور کے نچلی جانب مثبت دائری سمت دائیں سے بائیں ہے۔یوں ایک بار $x = -1$ تا $x = 1$ اور دوسری بار $x = 1$ تا $x = -1$ تکمل لیں۔ کل لمبائی $2\pi r$ حاصل ہو گی۔

سوال 10.65: اگر منحنی کو کروی محدد میں $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ سے ظاہر کیا جائے تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\mathrm{d}s^2 = \rho^2 \, \mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}\phi^2$$

جواب: $x = \rho\cos\phi$ اور $y = \rho\sin\phi$ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

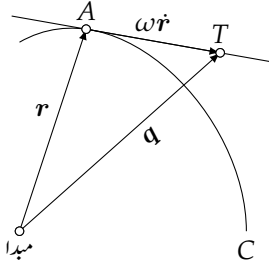
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial x}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \implies \mathrm{d}x = \cos\phi\,\mathrm{d}\rho - \rho\sin\phi\,\mathrm{d}\phi \\
\mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial y}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \implies \mathrm{d}y = \sin\phi\,\mathrm{d}\rho + \rho\cos\phi\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

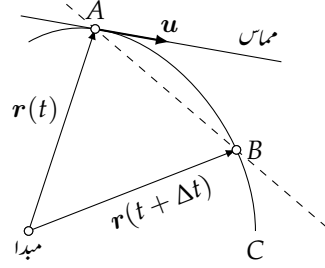
جنہیں مساوات 10.32 میں پر کرنے سے درکار نتیجہ ملتا ہے۔

سوال 10.65 میں دیا گیا کلیہ استعمال کرتے ہوئے سوال 10.66 تا سوال 10.70 میں لمبائی قوس دریافت کریں۔

سوال 10.66: رداس r کے دائرے کی کل لمبائی۔
جواب: $2\pi r$

سوال 10.67: $\rho = e^{\phi}, \quad 0 \le \phi \le \pi$
جواب: $\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$

سوال 10.68: $\rho = \phi^2, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$
جواب: $\frac{(\pi^2+16)^{\frac{3}{2}}}{24} - \frac{8}{3}$

(الف) منحنی کا مماس

(ب) مماس الجبرائی اظہار

شکل 10.7: مماس اور اس کا اظہار

سوال 10.69: قلب نما $\rho = a(1-\cos\theta)$ (اس کا خط جو قلب نما ہے کو کھینچیں۔)
جواب: $8a$

سوال 10.70: $\rho = a(1+\cos\theta)$
جواب: $8a$

10.5 مماس، انحنا اور مروڑ

نقطہ A پر منحنی C کے مماس سے مراد A اور منحنی پر دوسرا نقطہ B سے گزرتے ہوا وہ سیدھا خط ہے جو B کو A کے قریب تر کرنے سے حاصل ہو گا (شکل 10.7-الف)۔

فرض کریں کہ C کو استمراری قابل تفرق تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں t کوئی بھی مقدار معلوم ہو سکتا ہے۔ فرض کریں کہ t اور $t+\Delta t$ بالترتیب A اور B دیتے ہیں۔ ان نقطوں سے گزرتا ہوا سیدھا خط L درج ذیل سمتیہ کے رخ ہو گا۔

$$\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

یوں اگر سمتیہ

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{10.34}$$

صفر سمتیہ نہ ہو تب اس کی سمت ہی نقطہ A پر مماس کی سمت ہو گی۔ یہ سمتیہ بڑھتے t کے رخ ہے۔ $\dot{\boldsymbol{r}}$ کو نقطہ A پر C کا **مماس**[24] کہتے ہیں جس کا مطابقتی اکائی سمتیہ درج ذیل ہو گا جس کو A پر C کا **اکائی سمتیہ مماس**[25] کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{u} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|} \tag{10.35}$$

اب اگر C کو $\boldsymbol{r}(s)$ سے ظاہر کیا جائے، جہاں s لمبائی قوس ہے، تب مساوات 10.31 کے تحت $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ اکائی سمتیہ ہو گا لہٰذا مساوات 10.35 درج ذیل دے گی۔

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \tag{10.36}$$

شکل 10.7-ب سے ظاہر ہے کہ مماس پر کسی بھی نقطہ T کا تعین گر سمتیہ، A کے تعین گر سمتیہ اور A سے مماس کی سمت میں سمتیہ کا مجموعہ ہو گا یعنی

$$\boldsymbol{q}(\omega) = \boldsymbol{r} + \omega\dot{\boldsymbol{r}} \tag{10.37}$$

جہاں ω حقیقی متغیرہ ہے۔

فرض کریں کہ منحنی C کو تین گنا استمراری قابل تفرق تفاعل[26] $\boldsymbol{r}(s)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں s لمبائی قوس ہے۔ تب درج ذیل کو C کی انحنا[27] کہتے ہیں۔

$$\kappa(s) = \left|\boldsymbol{u}'(s)\right| = \left|\boldsymbol{r}''(s)\right| \qquad (\kappa \geq 0) \tag{10.38}$$

اگر $\kappa \neq 0$ ہو تب $\boldsymbol{u}'(s)$ کی سمت میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{p}$ درج ذیل ہو گا جس کو C کا **اکائی صدر عمودی سمتیہ**[28] کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{u}'}{\kappa} \qquad (\kappa > 0) \tag{10.39}$$

---

[24] tangent
[25] unit tangent vector
[26] صفحہ 713 کے آخر پر حاشیہ دیکھیں
[27] curvature
[28] unit principal normal vector

صفحہ 702 پر مثال 10.5 کے نتیجے کے تحت $\boldsymbol{p}$ اور $\boldsymbol{u}$ قائمہ الزاویہ ہوں گے۔درج ذیل کو C کا **دوہرا عمودی اکائی سمتیہ**[29] کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{p} \qquad (\kappa > 0) \tag{10.40}$$

سمتی ضرب کی تعریف کی رو سے $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{p}$ اور $\boldsymbol{b}$ دائیں ہاتھ تین قائمہ الزاویہ اکائی سمتیات ہوں گے (حصہ 7.3 اور حصہ 7.7)۔ ان تین قائمہ الزاویہ اکائی سمتیات کو نقطہ غور پر C کا **سہ سطحی مجسم**[30] کہتے ہیں۔اس نقطے سے گزرتے ہوئے تین سیدھے خطوط جو $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{p}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے رخ ہوں کو بالترتیب C کا **مماس**، **صدر عمود** اور **دوہرا عمود** کہتے ہیں۔

اگر تفرق $\boldsymbol{b}'$ صفر نہ ہو تب مثال 10.5 کے تحت یہ $\boldsymbol{b}$ کے عمودی ہو گا۔ساتھ ہی ساتھ یہ $\boldsymbol{u}$ کے بھی عمودی ہے۔درحقیقت اگر ہم $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} = 0$ کا تفرق لیں تو ہمیں $\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}' = 0$ ملتا ہے۔اب چونکہ $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}' = 0$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{u} = 0$ ہو گا۔یوں $\boldsymbol{b}'$ کی صورت $\boldsymbol{b}' = \alpha \boldsymbol{p}$ ہو گی جہاں α غیر سمتی ہے۔روایتی طور پر $\alpha = -\tau$ لیا جاتا ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{b}' = -\tau \boldsymbol{p} \qquad (\kappa > 0) \tag{10.41}$$

غیر سمتی تفاعل τ کو C کی مروڑ[31] کہتے ہیں۔مساوات 10.41 کے دونوں اطراف کو $\boldsymbol{p}$ سے ضرب دینے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\tau(s) = -\boldsymbol{p}(s) \cdot \boldsymbol{b}'(s) \tag{10.42}$$

درج بالا تصورات منحنیات کے استعمال میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

مثال 10.15: پیچ دار لچھا

پیچ دار لچھے (مساوات 10.26) کی لمبائی $s = t\sqrt{a^2 + c^2}$ حاصل ہوتی ہے لہٰذا پیچ دار لچھے کو

$$\boldsymbol{r}(s) = a \cos \frac{s}{K} \boldsymbol{i} + a \sin \frac{s}{K} \boldsymbol{j} + c \frac{s}{K} \boldsymbol{k}, \qquad K = \sqrt{a^2 + c^2}$$

---

[29] unit binormal vector
[30] trihedron
[31] torsion

لکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(s) = \boldsymbol{r}'(s) &= -\frac{a}{K}\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{i} + \frac{a}{K}\cos\frac{s}{K}\boldsymbol{j} + \frac{c}{K}\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{r}''(s) &= -\frac{a}{K^2}\cos\frac{s}{K}\boldsymbol{i} - \frac{a}{K^2}\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{j} \\
\kappa = \left|\boldsymbol{r}''\right| &= \sqrt{\boldsymbol{r}''\cdot\boldsymbol{r}''} = \frac{a}{K^2} = \frac{a}{a^2+c^2} \\
\boldsymbol{p}(s) &= \frac{\boldsymbol{r}''(s)}{\kappa(s)} = -\cos\frac{s}{K}\boldsymbol{i} - \sin\frac{s}{K}\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{u}(s)\times\boldsymbol{p}(s) &= \frac{c}{K}\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{i} - \frac{c}{K}\cos\frac{c}{K}\boldsymbol{j} + \frac{a}{K}\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{b}'(s) &= \frac{c}{K^2}\cos\frac{c}{K}\boldsymbol{i} + \frac{c}{K^2}\sin\frac{s}{K}\boldsymbol{j} \\
\tau(s) = -\boldsymbol{p}(s)\cdot\boldsymbol{b}'(s) &= \frac{c}{K^2} = \frac{c}{a^2+c^2}
\end{aligned}
$$

اس طرح پیچ دار لچھے میں مستقل انحنا اور مستقل مروڑ پایا جائے گا۔ اگر $c > 0$ (شکل 10.3-الف دایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) ہو تب $\tau > 0$ ہو گا جبکہ $c < 0$ (شکل 10.3-ب بایاں ہاتھ پیچ دار لچھا) کی صورت میں $\tau < 0$ ہو گا۔ یوں □

چونکہ $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{p}$ اور $\boldsymbol{b}$ غیر تابع سمتیات ہیں لہٰذا فضا میں کسی بھی سمتیہ کو ان کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں اگر $\boldsymbol{u}'$ ، $\boldsymbol{p}'$ اور $\boldsymbol{b}'$ موجود ہوں تب انہیں بھی ان غیر تابع سمتیات کی مدد سے (درج ذیل) لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
&(\text{الف}) \quad \boldsymbol{u} = \kappa\boldsymbol{p} \\
&(\text{ب}) \quad \boldsymbol{p}' = -\kappa\boldsymbol{u} + \tau\boldsymbol{b} \\
&(\text{پ}) \quad \boldsymbol{b}' = -\tau\boldsymbol{p}
\end{aligned}
\tag{10.43}
$$

مساوات 10.43-الف کو مساوات 10.39 سے حاصل کیا جا سکتا ہے جبکہ مساوات 10.43-پ در حقیقت مساوات 10.41 ہے۔ سمتی ضرب کی تعریف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{u}$$

ان میں دایاں کلیہ کا تفرق لیتے ہوئے مساوات 10.43-الف اور مساوات 10.43-پ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو مساوات 10.43-ب ہے۔

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}' = -\tau\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}\times\kappa\boldsymbol{p} = -\tau(-\boldsymbol{b}) + \kappa(-\boldsymbol{u})$$

سوالات

سوال 10.71 تا سوال 10.74 میں نقطہ N پر دیے گئے تفاعل کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.71: $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}, \quad N: (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
جواب: $\boldsymbol{q}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\omega)\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\omega)\boldsymbol{j}$

سوال 10.72: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} - t^3\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad N: (1, -1, 1)$
جواب: $\boldsymbol{q}(\omega) = (1+\omega)\boldsymbol{i} - (1+3\omega)\boldsymbol{j} + (1+2\omega)\boldsymbol{k}$

سوال 10.73: $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}, \quad N: (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\pi)$
جواب: $\boldsymbol{q}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\omega)\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\omega)\boldsymbol{j} + (\frac{3}{4}\pi + 3\omega)\boldsymbol{k}$

سوال 10.74: $\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\boldsymbol{i} - 2\sin t\boldsymbol{j}, \quad N: (\sqrt{3}, -1)$
جواب: $\boldsymbol{q}(\omega) = (\sqrt{3}-\omega)\boldsymbol{i} - (1+\sqrt{3}\omega)\boldsymbol{j}$

سوال 10.75: ثابت کریں کہ مثال 10.15 میں دیے گئے پیچ دار لچھے کی $\boldsymbol{u}$ اور z محور کے مابین زاویہ مستقل مقدار ہے۔

جواب: $\cos\alpha = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k} = \frac{c}{a^2+c^2} =$ مستقل

سوال 10.76: ثابت کریں کہ صرف سیدھے خطوط واحد منحنی ہیں جن کے اکائی سمتیات مماس مستقل مقدار ہیں۔

جواب: اکائی سمتیات مماس مستقل مقدار ہونے کی صورت میں $r' = a\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + e\boldsymbol{k}$ ہو گا جہاں a ، c اور e مستقل قیمتیں ہیں۔ تکمل لینے سے منحنی کی عمومی مساوات $r = (at+b)\boldsymbol{i} + (ct+d)\boldsymbol{j} + (et+f)\boldsymbol{k}$ حاصل ہوتی ہے جو سیدھے خط کی عمومی مساوات ہے اور جہاں b ، d اور f تکمل کے مستقل ہیں۔

سوال 10.77: ثابت کریں کہ سیدھے خطوط کی انحنا مکمل صفر ہو گی۔

جواب: سیدھے خطوط کی عمومی مساوات کو سوال 10.76 کی جواب میں پیش کیا گیا ہے جس کا دو رتبی تفرق صفر کے برابر ہے۔

سوال 10.78: ثابت کریں کہ منحنی $\boldsymbol{r}(t)$ کی انحنا درج ذیل ہے، جہاں t مقدار معلوم ہے۔

$$\kappa = \frac{\sqrt{(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})(\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})-(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})^2}}{(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})^{\frac{3}{2}}} \tag{10.44}$$

سوال 10.79: ثابت کریں کہ رداس a کے دائرے کی انحنا $\frac{1}{a}$ کے برابر ہے۔

جواب: ایسے دائرے کی مساوات $\boldsymbol{r}(s) = a\cos\frac{s}{a}\boldsymbol{i} + a\sin\frac{s}{a}\boldsymbol{j}$ ہے جہاں لمبائی قوس کو بطور مقدار معلوم استعمال کیا گیا ہے۔اس سے $\left|\boldsymbol{r}''\right| = \frac{1}{a}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 10.80: ثابت کریں کہ xy سطح میں منحنی $y = y(x)$ کی انحنا $\kappa = \frac{\left|y''\right|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ ہو گی۔مساوات 10.44 استعمال کریں۔

سوال 10.81: مساوات 10.40 اور مساوات 10.42 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل (غیر سمتی سہ ضرب) ثابت کریں۔

$$\tau = (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{p}') \tag{10.45}$$

جواب: مساوات 10.40 اور مساوات 10.42 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\tau = -\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{p})' = -\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{p}') = -(\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{u}'\,\boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}')$$

صفحہ 521 پر مساوات 7.58 کے استعمال سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}|\sin 0^\circ = 0$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$(\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{u}'\,\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{u}'\,\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}) = 0$$

یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\tau = -(\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}') = -(\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}'\,\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{p}')$$

سوال 10.82: ثابت کریں کہ مساوات 10.39 کی مدد سے مساوات 10.45 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\tau = \frac{(\boldsymbol{r}'\,\boldsymbol{r}''\,\boldsymbol{r}''')}{\kappa^2} \tag{10.46}$$

10.6 سمتی رفتار اور اسراع

فرض کریں کہ فضا میں متحرک جسم J کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔یوں $\boldsymbol{r}(t)$ جسم J کا راستہ C دے گا۔گزشتہ حصے سے ظاہر ہے کہ سمتیہ

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{10.47}$$

راستہ C کا مماس ہو گا لہٰذا یہ J کی لمحاتی حرکت کے رخ ہو گا۔مساوات 10.31 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں s لمبائی قوس ہے۔ C پر کسی مقررہ نقطے ($s = 0$) سے لمبائی قوس s کو ناپا جاتا ہے۔

$$\lvert\boldsymbol{v}\rvert = \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{10.48}$$

یوں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ جسم J کی رفتار[32] ہو گی اور سمتیہ $\boldsymbol{v}$ جسم J کی سمتی رفتار سمتیہ[33] ہو گا جس کو عموماً سمتی رفتار[34] کہتے ہیں۔

سمتی رفتار کی تفرق کو سمتیہ اسراع[35] یا اسراع[36] کہتے ہیں اور اس کو $\boldsymbol{a}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) \tag{10.49}$$

مثال 10.16: مرکز مائل اسراع اور مرکز مائل قوت

xy سطح میں مبدا پر واقع، رداس R کے دائرے C پر گھڑی کی سوئی کے مخالف رخ کمیت m کی حرکت (شکل 10.8-الف) کو درج ذیل سمتیہ ظاہر کرتا ہے

$$\boldsymbol{r}(t) = R\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + R\sin\omega t\,\boldsymbol{j} \qquad (\omega > 0)$$

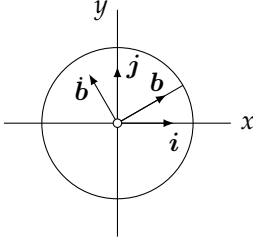
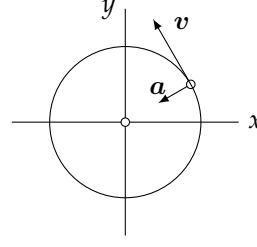
جس کا تفرق سمتی رفتار دے گا جو C کا مماس ہو گا۔

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = -\omega R\sin\omega t\,\boldsymbol{i} + \omega R\cos\omega t\,\boldsymbol{j}$$

اس سے رفتار حاصل کرتے ہیں

$$\lvert\boldsymbol{v}\rvert = \sqrt{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} = \omega R$$

---

[32] speed
[33] velocity vector
[34] velocity
[35] acceleration vector
[36] accleration

(الف) مرکز مائل اسراع (مثال 10.16)

(ب) قرص پر حرکت (مثال 10.17)۔

شکل 10.8: مرکز مائل اسراع

جو مستقل مقدار ہے۔ رفتار کو (دائرے کے مرکز سے فاصلہ) R سے تقسیم کرنے سے زاویائی رفتار[37] ω حاصل ہوتی ہے۔ سمتیہ اسراع درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} = -\omega^2 R\cos\omega t\,\boldsymbol{i} - \omega^2 R\sin\omega t\,\boldsymbol{j} = -\omega^2 \boldsymbol{r} \tag{10.50}$$

جو دائرے کی مرکز کے رخ ہے لہٰذا اس کو مرکز مائل اسراع[38] کہتے ہیں۔ اسراع کی قیمت $|\boldsymbol{a}| = \omega^2 R$ ہے۔ کمیت m پر مرکز مائل قوت[39] $m\boldsymbol{a}$ عمل کرے گا۔ اس کا مخالف قوت $-m\boldsymbol{a}$ ہو گا جس کو مرکز گریز قوت[40] کہتے ہیں۔

□

ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{v}$ کے وقتی تفرق کو $\boldsymbol{a}$ کہتے ہیں۔ مثال 10.16 میں $|\boldsymbol{v}|$ مستقل مقدار ہے لیکن $\boldsymbol{a} \neq 0$ ہے۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ $\boldsymbol{a}$ کی مقدار عموماً $|\boldsymbol{v}|$ کے تفرق کے برابر نہیں ہوتی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ $\boldsymbol{a}$ عموماً راہ C کا مماس نہیں ہوتا ہے۔ آئیں اس حقیقت کو تفصیل سے دیکھیں۔ زنجیری تفرق سے

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا تفرق لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \boldsymbol{r}''\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \boldsymbol{r}'\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \tag{10.51}$$

angular speed[37]
centripetal acceleration[38]
centripetal force[39]
centrifugal force[40]

چونکہ $\boldsymbol{r}'$ راہ C کا اکائی مماس سمتیہ $\boldsymbol{u}$ ہے (مساوات 10.36) جس کا تفرق $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{r}''$ سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے عمودی ہے (حصہ 10.5) لہٰذا مساوات 10.51 اسراع کو مماسی اسراع $\boldsymbol{r}'\ddot{s}$ اور عمودی اسراع $\boldsymbol{r}''\dot{s}^2$ کے مجموعے کے طور پر پیش کرتی ہے۔اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ رفتار کا تفرق صفر ہونے کی صورت $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ میں بھی اسراع ہو گی۔

مثال 10.17: کوریولس اسراع

ایک قرص (شکل 10.8-ب) جو اپنی مرکز کے گرد مستقل زاویائی رفتار ω سے، گھڑی کی سوئیوں کے مخالف رخ، گھوم رہا ہے پر جسم J رداس کی سمت میں حرکت کرتا ہے۔اس حرکت کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{b}$ ایسا اکائی سمتیہ ہے جو قرص کے ساتھ ساتھ گھومتا ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{b} \tag{10.52}$$

J کی اسراع دریافت کریں۔

حل: $\boldsymbol{b}$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{b}(t) = \cos\omega t\,\boldsymbol{i} + \sin\omega t\,\boldsymbol{j} \tag{10.53}$$

مساوات 10.52 کا تفرق سمتی رفتار

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{b} + t\dot{\boldsymbol{b}} \tag{10.54}$$

دیتا ہے۔ظاہر ہے کہ قرص کے لحاظ سے J کی رفتار $\boldsymbol{b}$ ہے جبکہ کے گھومنے کی وجہ سے اضافی رفتار $t\dot{\boldsymbol{b}}$ پایا جاتا ہے۔دوبارہ تفرق سے اسراع

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = 2\dot{\boldsymbol{b}} + t\ddot{\boldsymbol{b}} \tag{10.55}$$

حاصل ہو گی۔ مساوات 10.55 کے آخری جزو میں (مساوات 10.53 کے دو رتبی تفرق سے) $\ddot{\boldsymbol{b}} = -\omega^2\boldsymbol{b}$ ہو گا لہٰذا $t\ddot{\boldsymbol{b}}$ مرکز مائل اسراع ہو گی۔

مساوات 10.55 میں زیادہ دلچسپ جزو $2\dot{\boldsymbol{b}}$ ہے جس کو <u>کوریولس اسراع</u>[41] کہتے ہیں جو قرص کے گھومنے اور قرص پر J کی حرکت کے باہمی عمل سے پیدا ہوتا ہے۔اس کا رخ $\dot{\boldsymbol{b}}$ دیتا ہے جو قرص کے کنارے کا مماس ہے اور جو مقررہ xy کارتیسی نظام میں گھومنے کی رخ ہو گا۔یوں اگر کمیت m کا شخص قرص پر رداسی سمت میں چل رہا ہو تب اس پر قوت $-2m\dot{\boldsymbol{b}}$ عمل کرے گا جو گھومنے کی مخالف رخ ہو گا۔ □

---
[41] Coriolis acceleration

مثال 10.18: دو گھومتے حرکت کا خطی میل
کرہ کے نصف النہار[42] N پر جسم J (کرہ کے لحاظ سے) مستقل رفتار سے حرکت کر رہا ہے جبکہ کرہ از خود مستقل زاویائی رفتار $\omega(>0)$ سے گھوم رہا ہے (شکل 10.9)۔ J کی اسراع دریافت کریں۔

حل: N پر J کی حرکت کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں کرہ کی رداس R ہے، N پر J کی زاویائی رفتار $\gamma(>0)$ ہے، N کی سطح میں $\boldsymbol{b}$ افقی اکائی سمتیہ ہے اور $\boldsymbol{k}$ فضا میں غیر تغیر کارتیسی نظام کی اکائی سمتیہ ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = R\cos\gamma t\,\boldsymbol{b} + R\sin\gamma t\,\boldsymbol{k} \tag{10.56}$$

چونکہ $\boldsymbol{b}$ کرہ کے ساتھ گھومتا ہے لہٰذا اس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ فضا میں غیر تغیر کارتیسی نظام کی اکائی سمتیات ہیں۔

$$\boldsymbol{b} = \cos\omega t\,\boldsymbol{i} + \sin\omega t\,\boldsymbol{j} \tag{10.57}$$

مساوات 10.56 کا تفرق لے کر سمتی رفتار حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = R\cos\gamma t\,\dot{\boldsymbol{b}} - \gamma R\sin\gamma t\,\boldsymbol{b} + \gamma R\cos\gamma t\,\boldsymbol{k} \tag{10.58}$$

سمتی رفتار کا تفرق لے کر اسراع حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = R\cos\gamma t\,\ddot{\boldsymbol{b}} - 2\gamma R\sin\gamma t\,\dot{\boldsymbol{b}} - \gamma^2 R\cos\gamma t\,\boldsymbol{b} - \gamma^2 R\sin\gamma t\,\boldsymbol{k} \tag{10.59}$$

اب مساوات 10.57 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{b}} &= -\omega\sin\omega t\,\boldsymbol{i} + \omega\cos\omega t\,\boldsymbol{j}\\ \ddot{\boldsymbol{b}} &= -\omega^2\cos\omega t\,\boldsymbol{i} - \omega^2\sin\omega t\,\boldsymbol{j} = -\omega^2\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

مساوات 10.56 سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 10.59 کے آخری دو ارکان کا مجموعہ $-\gamma^2\boldsymbol{r}$ کے برابر ہے لہٰذا مساوات 10.59 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 R\cos\gamma t\,\boldsymbol{b} - 2\gamma R\sin\gamma t\,\dot{\boldsymbol{b}} - \gamma^2\boldsymbol{r} \tag{10.60}$$

مساوات 10.60 کے دائیں ہاتھ پہلا جزو کرہ کے گھومنے سے پیدا مرکز مائل اسراع ہے جبکہ مساوات کا آخری جزو N پر J کے گھومنے سے پیدا مرکز مائل اسراع ہے۔ مساوات کا درمیانہ جزو کوریولس اسراع[43] $\boldsymbol{a}_c$ ہے۔

$$\boldsymbol{a}_c = -2\gamma R\sin\gamma t\,\dot{\boldsymbol{b}} \tag{10.61}$$

---

[42] meridian
[43] Coriolis acceleration

شکل 10.9: دو گھومتے حرکت کا خطی میل (مثال 10.18)

شمالی نیم کرہ پر $\sin \gamma t > 0$ ہے لہٰذا مساوات 10.61 میں منفی کی علامت کی بنا کوریولس اسراع $\dot{\boldsymbol{b}}$ کی مخالف رخ ہو گا یعنی کرہ کی سطح کی مماسی، N کے عمودی اور کرہ کی گردش کی مخالف رخ۔اس کی مطلق مقدار $2\gamma R|\sin \gamma t|\,\omega$ کی قیمت شمالی قطب پر زیادہ سے زیادہ ہو گی اور ارضی خط استوا[44] پر اس کی قیمت صفر ہو گی۔یوں شمال کی رخ اڑنے والا ایسا پرندہ جس کی کمیت m ہو پر قوت $m\boldsymbol{a}-c$ کے مخالف رخ قوت $m\boldsymbol{a}_c$ عمل کرے گا جو مثال 10.17 میں محسوس کی گئی قوت کی طرح ہے۔اس قوت کی وجہ سے پرندہ N کے دائیں جانب بھٹک جائے گا۔اس کے برعکس ارضی خط استوا سے جنوب کی رخ اڑنے والا پرندہ، N کے بائیں جانب بھٹک جائے گا۔یہی اثرات جہاز اور مزائل[45] کے اڑنے پر بھی اثر انداز ہوتے ہیں۔کرہ ارض پر ہوا کی حرکت پر بھی ان قوتوں کا اثر پایا جاتا ہے۔ □

---

[44] equator
[45] missile

سوالات

سوال 10.83 تا سوال 10.90 میں حرکت کرتی جسم کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے جہاں $t(>0)$ وقت کو ظاہر کرتی ہے۔اس راہ کی شکل بیان کریں۔سمتیہ رفتار، رفتار اور اسراع دریافت کریں۔

سوال 10.83: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}, \quad |\boldsymbol{v}| = 1, \quad \boldsymbol{a} = 0$

سوال 10.84: $\boldsymbol{r} = t^3\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{v} = 3t^2\boldsymbol{j}, \quad |\boldsymbol{v}| = 3t^2, \quad \boldsymbol{a} = 6t\boldsymbol{j}$

سوال 10.85: $\boldsymbol{r} = (t^2 - 3t)\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{v} = (2t-3)\boldsymbol{j}, \quad |\boldsymbol{v}| = |2t-3|, \quad \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j}$

سوال 10.86: $\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} - t\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{v} = 2t\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}, \quad |\boldsymbol{v}| = \left|\sqrt{4t^2+1}\right|, \quad \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i}$

سوال 10.87: $\boldsymbol{r} = \cos t\,\boldsymbol{i}$

جوابات: $\boldsymbol{v} = -\sin t\,\boldsymbol{j}, \quad |\boldsymbol{v}| = |\sin t|, \quad \boldsymbol{a} = -\cos t\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.88: $\boldsymbol{r} = 2\cos 5t\,\boldsymbol{i} - 4\sin 3t\,\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{v} = -10\sin 5t\,\boldsymbol{i} - 12\cos 3t\,\boldsymbol{j}, \; |\boldsymbol{v}| = \left|\sqrt{100\sin^2 5t + 144\cos^2 3t}\right|$

$\boldsymbol{a} = -50\cos 5t\,\boldsymbol{i} + 36\sin 3t\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.89: $\boldsymbol{r} = 3\cos t^2\,\boldsymbol{i} + 2\sin t^2\,\boldsymbol{j}$

جوابات: $\boldsymbol{v} = -6t\sin t^2\,\boldsymbol{i} + 4t\cos t^2\,\boldsymbol{j}, \; |\boldsymbol{v}| = \left|\sqrt{36t^2\sin^2 t^2 + 16t^2\cos^2 t^2}\right|$

$\boldsymbol{a} = (-6\sin t^2 - 12t^2\cos t^2)\,\boldsymbol{i} + (4\cos t^2 - 8t^2\sin t^2)\,\boldsymbol{j}$

سوال 10.90: $\boldsymbol{r} = 5t^2\,\boldsymbol{i} + 3t\,\boldsymbol{j} + t^3\,\boldsymbol{k}$

جوابات: $\boldsymbol{v} = 10t\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} + 3t^2\,\boldsymbol{k}, \; |\boldsymbol{v}| = \left|\sqrt{9t^4 + 100t^2 + 9}\right|$

$\boldsymbol{a} = 10\,\boldsymbol{i} + 6t\,\boldsymbol{k}$

سوال 10.91: زمین سے چاند تک کا فاصلہ $3.85 \times 10^8\,\mathrm{m}$ ہے اور زمین کے گرد چاند 27.322 دن یعنی $2.36 \times 10^6\,\mathrm{s}$ میں ایک چکر پورا کرتا ہے۔زمین کے رخ چاند کی مرکز مائل اسراع دریافت کریں۔

جواب: $|\boldsymbol{a}| = 0.0027\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ جو سطح زمین پر اسراع $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سے 3593 گنا کم ہے۔

سوال 10.92: وہ حرکت دریافت کریں جس کی اسراع مستقل قیمت ہو۔

جواب: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}_0 \frac{t^2}{2} + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{x}_0$ جہاں $\boldsymbol{a}_0$ ، $\boldsymbol{v}_0$ اور $\boldsymbol{x}_0$ مستقل قیمتیں ہیں۔

سوال 10.93: $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{r} = R\cos\omega t \boldsymbol{i} + R\sin\omega t \boldsymbol{j}$ لیتے ہوئے مساوات 7.55 کے تفرق سے مساوات 10.50 حاصل کریں۔

سوال 10.94: اگر ایک جسم کی حرکت $\boldsymbol{r}(t)$ سے ظاہر کی جائے جہاں t وقت ہے تب $t = \phi\tilde{t}$ تبادلے سے کیا مراد ہو گا؟

جواب: راہ تبدیل نہیں ہو گی البتہ راہ پر حرکت کی نوعیت تبدیل ہو گی۔

10.7 زنجیری ترکیب اور متعدد متغیرات کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ

ہم متعدد متغیرات پر مبنی تفاعل کی خصوصیات پر غور کرتے ہیں۔ہم دو متغیرات کے تفاعل کو استعمال کرتے ہوئے نتائج حاصل کریں گے جو زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لئے بھی درست ہوں گے۔

نقطہ (x_0, y_0) پر تفاعل $f(x, y)$ اس صورت استمراری[46] ہو گا جب اس نقطے کی پڑوس[47] میں f معین ہو اور کسی بھی مثبت عدد ϵ (جو غیر صفر اور کتنا ہی چھوٹا کیوں نا ہو) کے لئے ہم ایسا مثبت عدد σ تلاش کر سکتے ہیں کہ اس کے نقطے کی پڑوس قرص

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \sigma^2 \tag{10.62}$$

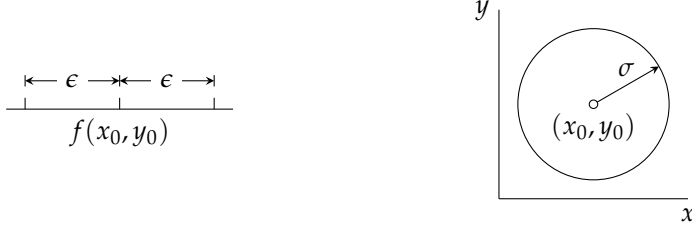
میں تمام (x, y) پر درج ذیل ہو۔

$$\left|f(x, y) - f(x_0, y_0)\right| < \epsilon \tag{10.63}$$

جیومیٹریائی طور پر (x_0, y_0) پر $f(x, y)$ کے استمراری ہونے سے مراد یہ ہے کہ $f(x_0, y_0)$ کو قطع 2ϵ کا وسط لیتے ہوئے ہم غیر صفر رداس σ کا ایسا قرص تلاش کر سکتے ہیں جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو اور اس قرص پر تمام (x, y) کا مطابقتی $f(x, y)$ اس قطع پر پایا جاتا ہو (شکل 10.10)۔

---

[46] continuous

[47] پڑوس سے مراد xy سطح میں قرص $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$ ہے جہاں $r > 0$ ہے۔

شکل 10.10: دو متغیرات کے تفاعل کی استمرار

ہم ابتدائی احصاء سے جانتے ہیں کہ اگر w متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور x از خود t کا قابل تفرق تفاعل ہو تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جس کو تفرق کا زنجیری قاعدہ کہتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{10.64}$$

درج ذیل مسئلہ تفرق کی زنجیری قاعدے کو عمومی بناتا ہے۔

مسئلہ 10.1: (زنجیری قاعدہ)

فرض کریں کہ xy سطح میں دائرہ کار[48] D [49] میں تفاعل $w = f(x, y)$ استمراری ہے اور اس تفاعل کے یک رتبی جزوی تفرقات بھی D میں استمراری ہیں۔مزید فرض کریں کہ کسی وقفہ T میں $x = x(t)$ اور $y = y(t)$ قابل تفرق تفاعل ہیں جہاں T میں ہر t کا مطابقتی نقطہ $[x(t), y(t)]$ ، دائرہ کار D میں پایا جاتا ہے۔ایسی صورت میں T میں تمام t کے لئے $w = f[x(t), y(t)]$ قابل تفرق ہو گا یعنی:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{10.65}$$

ثبوت: ہم T میں t پر Δt اتنا چھوٹا چنتے ہیں کہ $t + \Delta t$ بھی T کا حصہ ہو۔مزید ہم

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) \tag{10.66}$$

اور

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{10.67}$$

---

[48] domain

[49] دائرہ کار D جڑے ہوئے نقطوں کا کھلا سلسلہ ہے، جہاں جڑا ہونے (connected) سے مراد یہ ہے کہ D کے کسی بھی دو نقطوں کو متناہی تعداد کے ایسے سیدھے قطعات سے ملایا جا سکتا ہے جن کے تمام نقطے D کا حصہ ہوں، اور کھلا (open) سے مراد یہ ہے کہ D میں ہر نقطے کی پڑوس کے تمام نقطے بھی D کا حصہ ہیں۔ مثلاً کسی مستطیل یا دائرے کا اندرونی حصہ دائرہ کار ہو گا۔

لیتے ہیں۔ مساوات 10.67 میں $f(x, y+\Delta y)$ جمع اور منفی کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\Delta w = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]$$

درج بالا مساوات کے قوسین پر باری باری ایک متغیر کے تفاعل کا اوسط قیمت مسئلہ لاگو کرتے ہوئے

$$\Delta w = \Delta x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_1, y+\Delta y} + \Delta y \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x, y_1} \tag{10.68}$$

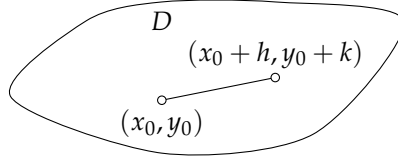
حاصل ہوتا ہے جہاں x اور $x+\Delta x$ کے درمیان کہیں x_1 پایا جاتا ہے، y اور $y+\Delta y$ کے درمیان کہیں y_1 پایا جاتا ہے۔ مساوات 10.68 کے دونوں اطراف کو Δt سے تقسیم کرتے اور $\Delta t \to 0$ لیتے ہوئے، اور چونکہ $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور $\frac{\partial f}{\partial y}$ کو استمراری تصور کیا گیا ہے، مساوات 10.66 حاصل ہوتا ہے۔

□

درج بالا مسئلے کو وسعت دیتے ہوئے درج ذیل مسئلہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 10.2: فرض کریں کہ xy سطح میں دائرہ کار D پر تفاعل $w = f(x, y)$ استمراری ہے اور اس تفاعل کے یک رتبی جزوی تفرقات بھی D میں استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ uv سطح میں کسی وقفہ B میں $x = x(u, v)$ اور $y = y(u, v)$ قابل جزوی تفرق تفاعل ہیں جہاں B میں ہر (u, v) کا مطابقتی نقطہ $[x(u, v), y(u, v)]$ ، دائرہ کار D میں پایا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں B میں تفاعل $w = f[x(u, v), y(u, v)]$ معین ہو گا اور B میں تمام u اور v کے لئے اس تفاعل کے جزوی تفرقات درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned} \tag{10.69}$$

u یا v کو غیر متغیر رکھتے ہوئے مسئلہ 10.1 کے اطلاق سے درج بالا مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

شکل 10.11: مسئلہ اوسط قیمت

ابتدائی احصاء سے ہم جانتے ہیں کہ قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں x_0 اور x_0+h کے درمیان موزوں نقطے پر تفرق لیا جاتا ہے۔

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

اس کو احصاء تفرقیات کا مسئلہ اوسط قیمت کہتے ہیں جس کو وسعت دے کر دو متغیرات کے تفاعل پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 10.3: (مسئلہ اوسط قیمت)
فرض کریں کہ دائرہ کار D میں تفاعل $f(x,y)$ استمراری ہے اور اس تفاعل کے یک رتبی جزوی تفرقات بھی D میں استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ (x_0,y_0) اور (x_0+h,y_0+k) دائرہ کار D میں پائے جانے والے ایسے نقطے ہیں کہ انہیں جوڑنے والا سیدھا قطع بھی D میں پائی جاتی ہو (شکل 10.11)۔ایسی صورت میں

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y} \tag{10.70}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں جزوی تفرقات کو اس قطع پر موزوں نقطے پر حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت: درج ذیل

$$\begin{aligned} x&=x_0+th, \quad y=y_0+tk \quad (0\le t\le 1)\\ F(t)&=f(x_0+th,y_0+tk)\end{aligned}$$

سے

$$f(x_0+h,y_0+k)=F(1), \quad f(x_0,y_0)=F(0)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ایک متغیر تفاعل کے مسئلہ اوسط قیمت کے تحت 0 اور 1 کے درمیان ایسی قیمت t_1 پائی جاتی ہے جس کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=F(1)-F(0)=F'(t_1) \tag{10.71}$$

اب چونکہ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=h$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=k$ ہیں لہٰذا مسئلہ 10.1 کے تحت

$$F'=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k \tag{10.72}$$

ہو گا جہاں دائیں ہاتھ تفرقات کو نقطہ (x_0+t_1h,y_0+t_1k) پر حاصل کیا جائے گا جو اس قطع پر واقع ہے جس کے سر (x_0,y_0) اور (x_0+h,y_0+k) ہیں۔مساوات 10.72 کو مساوات 10.71 میں پر کرنے سے مساوات 10.70 حاصل ہوتا ہے۔

□

تین متغیرات کے تفاعل $f(x,y,z)$ جو مسئلہ 10.3 میں دیے گئے شرائط کے مماثل شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے بالکل اسی مسئلے کی طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$f(x_0+h,y_0+k,z_0+l)-f(x_0,y_0,z_0)=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z} \tag{10.73}$$

جہاں جزوی تفرقات کو (x_0,y_0,z_0) تا (x_0+h,y_0+k,z_0+l) قطع پر موزوں نقطے پر حاصل کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 10.95 تا سوال 10.98 میں مساوات 10.65 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ دریافت کریں۔

سوال 10.95: $w=x-y,\quad x=t,\quad y=\ln t$
جواب: $1-\frac{1}{t}$

سوال 10.96: $w=\sqrt{x^2+y^2},\quad x=e^{-t},\quad y=e^{t}$
جواب: $\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}$

سوال 10.97: $w=\frac{x}{y},\quad x=g(t),\quad y=ht$
جواب: $\frac{g'h-gh'}{h^2}$

سوال 10.98: $w=\frac{x}{y},\quad x=\cos t,\quad y=\sin t$
جواب: $-\operatorname{cosec}^2 t$

سوال 10.99: فرض کریں کہ $w=f(x,y,z)$ ہے جہاں x ، y اور z از خود t کے تفاعل ہیں۔ثابت کریں کہ مسئلہ 10.1 کی طرز کے شرائط کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{10.74}$$

سوال 10.100 اور سوال 10.101 میں مساوات 10.74 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ دریافت کریں۔

سوال 10.100: $w=x^2+y^2+z^2,\quad x=t^2,\quad y=\ln t,\quad z=e^t$
جواب: $\frac{2}{t}\ln t+2e^{2t}+4t^3$

سوال 10.101: $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=t$
جواب: $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

سوال 10.102: مسئلہ 10.2 کو ثابت کریں۔

سوال 10.103 تا سوال 10.105 میں $\frac{\partial w}{\partial u}$ اور $\frac{\partial w}{\partial v}$ دریافت کریں۔

سوال 10.103: $w=\ln(x^2+y^2),\quad x=e^u\cos v,\quad y=e^u\sin v$
جواب: $2,\ 0$

سوال 10.104: $w=xy,\quad x=e^u\cos v,\quad y=e^u\sin v$
جواب: $e^{2u}\sin 2v,\ e^{2u}\cos 2v$

سوال 10.105: $w=x^2-y^2,\quad x=u^2-v^2,\quad y=2uv$
جواب: $4u(u^2-3v^2),\ 4v(v^2-3u^2)$

سوال 10.106: مساوات 10.73 حاصل کریں۔

سوال 10.107: فرض کریں کہ $w=f(x,y)$ ہے جہاں $x=r\cos\theta$ اور $y=r\sin\theta$ ہیں۔درج ذیل ثابت کریں۔

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

جواب: درج ذیل استعمال کرتے ہوئے با آسانی ثابت ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\\ \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial w}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial w}{\partial y}r\cos\theta\end{aligned}$$

سوال 10.108: فرض کریں کہ $w = f(v, z)$ ہے جہاں $v = x + ct$ اور $z = x - ct$ ہیں جبکہ c مستقل قیمت ہے۔ درج ذیل ثابت کریں جہاں تمام تفرقات کو ممکن تصور کریں۔ w_{xx} سے مراد $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ہے۔

$$c^2 w_{xx} - w_{tt} = 4c^2 w_{vz}$$

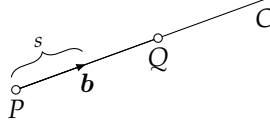
سوال 10.109: فرض کریں کہ $w = f(x, y)$ ہے جہاں $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ ہیں۔ درج ذیل ثابت کریں۔

$$w_{xx} + w_{yy} = w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\theta\theta}$$

جواب: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ سے درج ذیل حاصل کرتے ہوئے ثابت ہو گا۔

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{r},\ \theta_x = -\frac{y}{r^2},\ r_{xx} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \text{وغیرہ}\\ w_{xx} &= x^2 r^{-2} w_{rr} - 2xyr^{-3} w_{r\theta} + y^2 r^{-4} w_{\theta\theta} + y^2 r^{-3} w_r + 2xyr^{-4} w_\theta, \quad \text{وغیرہ}\end{aligned}$$

10.8 سمتی تفرق، غیر سمتی میدان کی ڈھلوان

ہم فضا میں غیر سمتی میدان $f(P) = f(x, y, z)$ پر غور کرتے ہیں (حصہ 10.1)۔ ہم جانتے ہیں کہ x، y اور z رخ میں تفاعل کی تبدیلی کی شرح بالترتیب $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial f}{\partial z}$ ہے۔ آئیں کسی بھی رخ اس تفاعل کی تبدیلی کی شرح یعنی سمتی تفرق حاصل کریں۔

شکل 10.12: سمتی تفرق

ہم فضا میں کوئی نقطہ P اور اس نقطے پر کوئی رخ چنتے ہیں۔اس رخ کو اکائی سمتیہ $\boldsymbol{b}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔نقطہ P سے s فاصلے پر $\boldsymbol{b}$ کی رخ سیدھے خط C پر نقطہ Q پایا جاتا ہے (شکل 10.12)۔اگر درج ذیل حد

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{s\to 0} \frac{f(Q)-f(P)}{s} \tag{10.75}$$

موجود ہو تب اس کو P پر $\boldsymbol{b}$ کی رخ f کی **سمتی تفرق**[50] کہتے ہیں۔ظاہر ہے کہ $\frac{\partial f}{\partial s}$ در حقیقت P پر $\boldsymbol{b}$ کی رخ f کی شرح تبدیلی ہے۔

یوں P پر f کے لامتناہی تعداد میں سمتی تفرقات پائے جاتے ہیں۔اگر P کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{a}$ ہو تب C کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{r}(s) = x(x)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} \qquad (s \geq 0) \tag{10.76}$$

اور $\frac{\partial f}{\partial s}$ سے مراد C پر $f[x(s), y(s), z(s)]$ کا لمبائی s کے ساتھ تفرق ہے۔اب اگر f کے استمراری جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں تب زنجیری قاعدے (مسئلہ 10.1) کے تحت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' \tag{10.77}$$

جہاں $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ کو $s=0$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔اب مساوات 10.76 سے

$$\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k} = \boldsymbol{b}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو دیکھ کر خیال آتا ہے کہ سمتیہ

$$f_{\text{ڈھلوان}} = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{10.78}$$

---

[50] directional derivative

متعارف کرنے سے مساوات 10.77 کو اندرونی ضرب (ضرب نقطہ) کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \boldsymbol{b} \cdot f_{\text{ڈھلوان}} \qquad (|\boldsymbol{b}| = 1) \tag{10.79}$$

سمتیہ $f_{\text{ڈھلوان}}$ کو غیر سمتی تفاعل f کی ڈھلوان[51] کہتے ہیں۔

تفرقی عامل ∇ [52]

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

متعارف کرتے ہوئے مساوات 10.78 کو

$$f_{\text{ڈھلوان}} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{10.80}$$

اور مساوات 10.79 کو

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla f \qquad (|\boldsymbol{b}| = 1) \tag{10.81}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اگر $\boldsymbol{b}$ کارتیسی x محور کی رخ ہو تب $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}$ ہو گا اور f کا سمتی تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

اسی طرح مثبت y اور مثبت z محور کی رخ سمتی تفرق بالترتیب $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial f}{\partial z}$ ہوں گے۔

مثال 10.19: سمتی تفرق

غیر سمتی تفاعل $f(x,y,z) = x^2 + 2y - z^3$ کا نقطہ $P:(-2,1,3)$ پر $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ کی رخ سمتی تفرق دریافت کریں۔

حل: چونکہ $|\boldsymbol{a}| = 5$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{a}$ کی رخ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}$ ہو گا۔ f کی ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\nabla f = 2x\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3z^2\boldsymbol{k} \implies \nabla f(P) = -4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 27\boldsymbol{k}$$

---

[51] gradient

[52] ∇ یونانی حرف تہجی ہے جو نیبلا کہلاتا ہے۔

یوں نقطہ P پر $\boldsymbol{a}$ کی رخ سمتی تفرق درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla f = \frac{1}{5}(3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}) \cdot (-4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 27\boldsymbol{k}) = -4$$

حاصل جواب منفی ہے جس کا مطلب ہے کہ $\boldsymbol{a}$ کی رخ f گھٹتا ہے۔ □

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ ∇f کی قیمت اور رخ پر چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

مساوات 10.78 سمتی تفرق دیتا ہے جو کسی دوسرے کارتیسی نظام میں درج ذیل لکھا جائے گا

$$f_{\text{ڈھلوان}} = \frac{\partial f}{\partial x^*}\boldsymbol{i}^* + \frac{\partial f}{\partial y^*}\boldsymbol{j}^* + \frac{\partial f}{\partial z^*}\boldsymbol{k}^*$$

جہاں x^* ، y^* اور z^* دوسرے نظام کے محور جبکہ $\boldsymbol{i}^*$ ، $\boldsymbol{j}^*$ اور $\boldsymbol{k}^*$ اس کے مطابقتی اکائی سمتیات ہیں۔ان مساوات میں جزوی تفرقات پائے جاتے ہیں اور یہ کہنا مشکل ہو گا کہ دونوں مساوات سے یکساں ڈھلوان حاصل ہو گا۔

اب غیر سمتی تفاعل کی تعریف کی رو سے نقطہ P پر f کی قیمت کا دارومدار P پر ہے نا کہ چنے گئے کارتیسی نظام پر۔اسی طرح C پر لمبائی s پر بھی چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔یوں $\frac{\partial f}{\partial s}$ پر چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ اب مساوات 10.81 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \lvert\boldsymbol{b}\rvert\lvert\nabla f\rvert\cos\gamma = \lvert\nabla f\rvert\cos\gamma$$

جہاں $\boldsymbol{b}$ اور ∇f کے مابین زاویہ γ ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $\cos\gamma = 1$ یعنی $\gamma = 0$ پر $\frac{\partial f}{\partial s}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\lvert\nabla f\rvert = \frac{\partial f}{\partial s}$ پائی جاتی ہے۔اب چونکہ $\frac{\partial f}{\partial s}$ غیر متغیر ہے لہٰذا ∇f کی قیمت اور سمت پر کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔اس سے درج ذیل نتیجہ ملتا ہے۔

مسئلہ 10.4: ڈھلوان
ایسا غیر سمتی تفاعل $f(P) = f(x, y, z)$ جس کے استمراری یک رتبی جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں کی ڈھلوان موجود ہے جس کی لمبائی اور رخ پر چنے گئے کارتیسی نظام محدد کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔اگر نقطہ P پر f کی ڈھلوان غیر صفر سمتیہ ہو تب P پر f کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی ڈھلوان کی رخ ہو گی۔

ڈھلوان کی دوسری جیومیٹریائی خصلت جانتے ہیں۔فضا میں قابل تفرق غیر سمتی تفاعل $f(x, y, z)$ پر غور کرتے ہیں۔ہر مستقل c کے لئے مساوات

$$f(x, y, z) = c = \text{مستقل} \tag{10.82}$$

سطح S کو ظاہر کرتا ہے۔ c کے تمام قیمتیں لیتے ہوئے ہمیں نسل سطح ملتا ہے جنہیں f کی **ہم قد سطحیں**[53] کہتے ہیں۔ تفاعل کی تعریف کی رو سے، فضا میں کسی بھی نقطے پر f کی قیمت منفرد ہو گی لہٰذا فضا میں ہر نقطے سے f کی صرف اور صرف ایک ہم قد سطح گزرے گی۔ہم جانتے ہیں کہ فضا میں کسی بھی منحنی C کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (حصہ 10.4)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{10.83}$$

اب اگر C کو S پر رہنے کا پابند بنایا جائے تب مساوات 10.83 میں تفاعل $x(t)$ ، $y(t)$ اور $z(t)$ کو مساوات 10.82 پر پورا اترنا ہو گا یعنی:

$$f[x(t), y(t), z(t)] = c \tag{10.84}$$

زنجیری تفرق (مسئلہ 10.1) استعمال کرتے ہوئے مساوات 10.84 کا t کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} = (\nabla f) \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = 0 \tag{10.85}$$

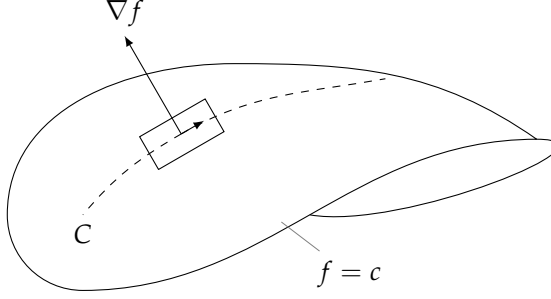
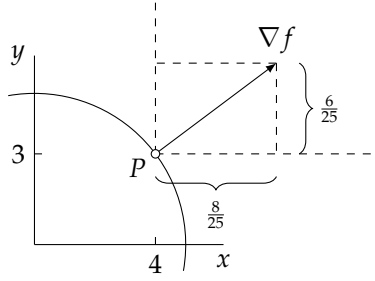
جہاں سمتیہ

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}$$

منحنی C کا مماس ہے (حصہ 10.5)۔ S پر مختلف سمتوں میں نقطہ P سے گزرتی منحنی کے مماس، P پر S کو چھوتی سطح مستوی سے گزریں گے۔اس سطح مستوی کو P پر S کی **مماسی سطح**[54] کہتے ہیں۔ مماسی سطح کے عمودی، نقطہ P سے گزرتا خط، P پر S کا **عمود**[55] کہلاتا ہے (شکل 10.13)۔ صفحہ 494 پر مسئلہ 7.3 کی مدد سے درج ذیل نتیجہ ملتا ہے۔

مسئلہ 10.5: ڈھلوان اور سطح کی عمود
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D پر غیر سمتی تفاعل f معین اور قابل تفرق ہے۔ مزید فرض کریں کہ دائرہ

---

level surfaces[53]
tangent plane[54]
normal[55]

شکل 10.13: ہم قد سطح اور ڈھلوان

شکل 10.14: دائرے کا عمود

کار D میں P کوئی نقطہ ہے جو f کی ہم قد سطح S پر پایا جاتا ہے۔اب اگر P پر f کی ڈھلوان غیر صفر سمتیہ ہو تب یہ ڈھلوان نقطہ P پر S کے عمودی ہو گا۔

مثال 10.20: مستوی منحنی کا عمود
تفاعل $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ کے ہم قد سطحیں $f = c$ مبدا پر ہم مرکز دائرے ہیں۔ڈھلوان

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} = \frac{2x}{x^2 + y^2}\boldsymbol{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2}\boldsymbol{j}$$

کی سمت ان دائروں کے عمودی ہے جو f کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی کی سمت ہے۔مثلاً نقطہ $P : (4, 3)$ پر $\nabla f = \frac{8}{25}\boldsymbol{i} + \frac{6}{25}\boldsymbol{j}$ ہے (شکل 10.14)۔ □

مثال 10.21: سطح کا عمود

مخروط $z^2=2(x^2+y^2)$ کا نقطہ $P:(1,0,3)$ پر اکائی عمودی سمتیہ دریافت کریں۔ہم مخروط کو ہم قد سطح $f=0$ تصور کر سکتے ہیں جہاں $f(x,y,z)=2(x^2+y^2)-z^2$ ہو گا۔یوں

$$\nabla f=4x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k} \implies \nabla f(P)=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{k}$$

ہو گا۔ مسئلہ 10.5 سے اکائی عمودی سمتیہ درج ذیل ملتا ہے۔دوسرا اکائی عمودی سمتیہ $-\boldsymbol{n}$ ہو گا۔

$$\boldsymbol{n}=\frac{\nabla f}{\lvert\nabla f\rvert}=\frac{4}{\sqrt{52}}\boldsymbol{i}-\frac{6}{\sqrt{52}}\boldsymbol{k}$$

□

طبیعیات کے میدان میں کئی ایسے سمتی تفاعل پائے جاتے ہیں جو کسی غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان سے حاصل ہوتے ہیں۔ایسے غیر سمتی تفاعل کو **مخفی تفاعل**[56] کہتے ہیں۔ مخفی تفاعل کے استعمال سے سمتی تفاعل کا تجزیہ نہایت آسان ہو جاتا ہے۔آئیں مخفی تفاعل کے استعمال کی مثال دیکھیں۔

مثال 10.22: ثقلی میدان۔ لاپلاس مساوات

ثقلی میدان پر مثال 10.4 میں غور کیا گیا جہاں درج ذیل مساوات حاصل کی گئی

$$\boldsymbol{f}=\lvert\boldsymbol{f}\rvert\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=-GMm\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-GMm\left[\frac{x-x_0}{r^3}\boldsymbol{i}+\frac{y-y_0}{r^3}\boldsymbol{j}+\frac{z-z_0}{r^3}\boldsymbol{k}\right] \tag{10.86}$$

جہاں

$$\boldsymbol{r}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

کمیت M اور m کے درمیان فاصلہ ہے۔یہاں غور کرنے سے

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{2(x-x_0)}{2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x-x_0}{r^3} \tag{10.87}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{2(y-y_0)}{2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}=-\frac{y-y_0}{r^3} \tag{10.88}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{2(z-z_0)}{2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}=-\frac{z-z_0}{r^3} \tag{10.89}$$

---

[56] potential function

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں f کو درج ذیل غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان لکھا جا سکتا ہے

$$h(x,y,z)=\frac{GMm}{r}\qquad (r>0) \tag{10.90}$$

لہٰذا سمتی تفاعل f کا مخفی تفاعل h ہے۔

تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-x_0)^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-y_0)^2}{r^5},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-z_0)^2}{r^5}$$

حاصل ہوتا ہے جن کا مجموعہ صفر کے برابر ہے لہٰذا تفاعل $h=\frac{GMm}{r}$ درج ذیل پر پورا اترتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0 \tag{10.91}$$

مساوات 10.91 انتہائی اہم جزوی تفرقی مساوات ہے جس کو لاپلاس مساوات[57] کہتے ہیں۔ مساوات کے بائیں ہاتھ کو f کا لاپلاسی[58] کہتے ہیں اور اس کو $\nabla^2 h$ یا Δh سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ تفرقی عامل

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(جو مربع نیبلا پڑھا جاتا ہے) کو لاپلاسی عامل[59] کہتے ہیں۔ لاپلاسی عامل استعمال کرتے ہوئے مساوات 10.91 کو نہایت عمدگی سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla^2 h=0 \tag{10.92}$$

یہ ثابت کرنا ممکن ہے کہ کمیت کی کسی بھی طرز کی تقسیم سے حاصل قوت کو ایسے سمتی تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو کسی غیر سمتی تفاعل h کا ڈھلوان ہو گا جہاں h مساوات 10.91 پر ہر اس مقام پر پورا اترتا ہے جہاں کمیت موجود نہ ہو۔

Laplace equation[57]
Laplacian[58]
Laplacian operator[59]

طبیعیات میں کئی قاعدے نیوٹن کے کشش ثقل کے قانون کی طرز رکھتے ہیں مثلاً فضا میں Q_1 اور Q_2 بار کی باہمی قوت درج ذیل ہے

$$\boldsymbol{f} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \text{کولمب کا قانون}$$

جہاں ϵ برقی مستقل ہے۔یوں $\boldsymbol{f}$ کو مخفی تفاعل $h = -\frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon r}$ کا ڈھلوان لکھا جا سکتا ہے جہاں $r > 0$ کی صورت میں h مساوات 10.91 پر پورا اترتا ہے۔ $\square$

اگر غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان سمتی تفاعل دیتا ہو تب ایسی میدان کو **بقائی میدان**[60] کہتے ہیں۔جیسا کہ ہم حصہ 11.12 میں دیکھیں گے، بقائی میدان میں کسی بھی ذرہ کو نقطہ N_1 سے نقطہ N_2 منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی صرف اور صرف N_1 اور N_2 پر منحصر ہے نا کہ اس راستے پر جو ذرہ منتقل کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہو۔ہم دیکھیں گے کہ ہر میدان بقائی نہیں ہوتا۔

سوالات

سوال 10.110 تا سوال 10.121 میں ڈھلوان ∇f دریافت کریں۔ چند ہم قد منحنیات $f = c$ ترسیم کریں، جہاں c مختلف مستقل ہوں گے، اور ان منحنیات کے کسی نقطہ پر ∇f کو تیر کی نشان سے ظاہر کریں۔

سوال 10.110: $f = 3x + 2y + 4$
جواب: $\nabla f = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$

سوال 10.111: $f = e^y \sin x$
جواب: $\nabla f = e^y(\cos x\,\boldsymbol{i} + \sin x\,\boldsymbol{j})$

سوال 10.112: $f = \ln(x^2 + y^2)$
جواب: $\nabla f = \frac{2x}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}$

سوال 10.113: $f = x^2 + y^2$
جواب: $\nabla f = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$

سوال 10.114: $f = \sin^{-1}\frac{y}{x}$
جواب: $\nabla f = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}(-\frac{y}{x}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$

[60] conservative field

سوال 10.115: $f=\tan^{-1}\frac{y}{x}$
جواب: $\nabla f=\frac{1}{x^2+y^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$

سوال 10.116: $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
جواب: $\nabla f=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$

سوال 10.117: $f=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$
جواب: $\nabla f=3\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$

سوال 10.118: $f=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
جواب: $\nabla f=\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$

سوال 10.119: $f=x^2yz^3$
جواب: $\nabla f=2xyz^3\boldsymbol{i}+x^2z^3\boldsymbol{j}+3x^2yz^2\boldsymbol{k}$

سوال 10.120: $f=\sin(x^2+y^2+z^2)$
جواب: $\nabla f=2\cos(x^2+y^2+z^2)(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$

سوال 10.121: $f=e^{xyz}$
جواب: $\nabla f=e^{xyz}(yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k})$

سوال 10.122 تا سوال 10.127 میں ∇f دریافت کریں۔ کئی مقامات پر ہم قد سطح $f=c$ کی ڈھلوان ∇f کو تیر سے ظاہر کریں۔

سوال 10.122: $f=x-2y$
جواب: $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$

سوال 10.123: $f=\frac{y}{x}$
جواب: $\frac{1}{x^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$

سوال 10.124: $f=\frac{x}{y}$
جواب: $\frac{1}{y^2}(y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j})$

سوال 10.125: $f=xy$
جواب: $y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$

سوال 10.126: $f = x^3y^2$
جواب: $3x^2y^2\boldsymbol{i} + 2x^3y\boldsymbol{j}$

سوال 10.127: $f = 4x^2 + 3y^2$
جواب: $8x\boldsymbol{i} + 6y\boldsymbol{j}$

سوال 10.128 تا سوال 10.134 میں نقطہ $N : (x, y)$ پر مستوی منحنی کا عمودی سمتیہ کھینچیں۔

سوال 10.128: $y = x, \quad N : (2, 2)$
جواب: $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

سوال 10.129: $y = x^2, \quad N : (3, 9)$
جواب: $6\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

سوال 10.130: $y = 2x + 7, \quad N : (-1, 5)$
جواب: $2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

سوال 10.131: $y^2 = 3x + 3, \quad N : (2, 3)$
جواب: $3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}$

سوال 10.132: $x^2 + y^2 = 36, \quad N : (4, 3)$
جواب: $8\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$

سوال 10.133: $y^3 = x^2, \quad N : (4, 8)$
جواب: $16\boldsymbol{i} - 48\boldsymbol{j}$

سوال 10.134: $x^2 - y^2 = 1, \quad N : (1, 0)$
جواب: $2\boldsymbol{i}$

سوال 10.135 تا سوال 10.140 میں نقطہ $N : (x, y, z)$ پر سطح کا عمودی سمتیہ دریافت کریں۔

سوال 10.135: $x + y + z = 0, \quad N : (1, 1, -2)$
جواب: $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال 10.136: $3x - y + 2z = 1, \quad N : (1, -4, 1)$
جواب: $3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

سوال 10.137: $z=x^2+y^2,\quad N:(2,3,13)$
جواب: $4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

سوال 10.138: $x^2+y^2+z^2=9,\quad N:(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$
جواب: $2\sqrt{3}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

سوال 10.139: $2x^2+3y^2+z^2=6,\quad N:(1,-1,1)$
جواب: $4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

سوال 10.140: $z=xy^2,\quad N:(2,1,2)$
جواب: $\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

سوال 10.141 تا سوال 10.146 ایسا f دریافت کریں کہ $\boldsymbol{v}=\nabla f$ ہو۔

سوال 10.141: $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{v}$ کو دیکھ کر $\frac{\partial f}{\partial x}=1$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}=1$ اور $\frac{\partial f}{\partial z}=-1$ لکھا جا سکتا ہے۔ $\frac{\partial f}{\partial x}=1$ کا تکمل $f=x+c$ ہو گا جہاں c از خود y اور z پر منحصر ہو سکتا ہے۔اسی طرح $\frac{\partial f}{\partial y}=1$ سے $f=y+c'$ جبکہ $\frac{\partial f}{\partial z}=-1$ سے $f=-z+c''$ ملتا ہے۔تینوں جوابات کو اکٹھے کرتے ہوئے $f=x+y-z$ لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 10.142: $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{x^2}{2}+y+\frac{z^2}{2}$

سوال 10.143: $\boldsymbol{v}=2x\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$
جواب: x^2+y^3+z

سوال 10.144: $\boldsymbol{v}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$
جواب: xyz

سوال 10.145: $\boldsymbol{v}=\frac{2x}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}+\frac{2y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}$
جواب: $\ln(x^2+y^2)$

سوال 10.146: $\boldsymbol{v}=e^x\cos y\,\boldsymbol{i}-e^x\sin y\,\boldsymbol{j}$
جواب: $e^x\cos y$

سوال 10.147: تفاعل $f=x^2+y^2$ کا نقطہ $N:(3,3)$ پر $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ کی سمت میں سمتی تفرق دریافت کریں۔

جوابات: $6, 6\sqrt{2}, 6, 0$

سوال 10.148 تا سوال 10.153 میں $\boldsymbol{a}$ کی سمت میں N پر f کی سمتی تفرق دریافت کریں۔

سوال 10.148: $f=3x-2y, \quad N:(1,1), \quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$

جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

سوال 10.149: $f=2x^2-3y^2, \quad N:(2,3), \quad \boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$

جواب: $-\frac{12}{\sqrt{13}}$

سوال 10.150: $f=x^2-y^2, \quad N:(-1,1), \quad \boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$

جواب: 0

سوال 10.151: $f=\frac{y}{x}, \quad N:(3,2), \quad \boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$

جواب: $\frac{1}{9\sqrt{5}}$

سوال 10.152: $f=3x-2y+4z, \quad N:(3,2,1), \quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

جواب: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

سوال 10.153: $f=x^2+y^2+z^2, \quad N:(4,0,5), \quad \boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

جواب: $-6\sqrt{3}$

سوال 10.154: مستقل نقطہ $N:(x_0,y_0,z_0)$ سے متغیر نقطہ $Q:(x,y,z)$ تک فاصلہ r ہے۔ثابت کریں کہ N سے Q کے رخ اکائی سمتیہ ∇r ہے۔

سوال 10.155: ثابت کریں کہ سوال 10.110 تا سوال 10.112 کے تفاعل لاپلاس مساوات پر پورا اترتے ہیں۔

سوال 10.156 تا سوال 10.159 میں دیے گئے تمام تفرقات ممکن تصور کرتے ہوئے دیے گیا تعلق ثابت کریں۔

سوال 10.156: $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

سوال 10.157: $\nabla(f^n)=nf^{n-1}\nabla f$

سوال 10.158: $\nabla(\frac{f}{g})=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

سوال 10.159: $\nabla^2(fg)=g\nabla^2 f+2\nabla f\cdot\nabla g+f\nabla^2 g$

10.9 تبادل محددی نظام اور تبادل ارکان سمتیات

اس حصے میں ایسے تبادلے پر غور کیا جائے گا جو ایک کارتیسی محددی نظام کو دوسرے کارتیسی محددی نظام پر منتقل کرتا ہے۔ہم سمتیات کے ارکان پر ایسے تبادلے کے اثرات پر بھی غور کریں گے۔یہ مسئلہ نظریاتی اور عملی استعمال کے اعتبار سے بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔

فرض کریں کہ x ، y ، z اور x^* ، y^* ، z^* کوئی دو کارتیسی محددی نظام ہیں۔مزید فرض کریں کہ کسی سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو ان محددی نظام میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k} \tag{10.93}$$

$$\boldsymbol{v} = v_1^*\boldsymbol{i}^* + v_2^*\boldsymbol{j}^* + v_3^*\boldsymbol{k}^* \tag{10.94}$$

جہاں $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{i}^*$ ، $\boldsymbol{j}^*$ ، $\boldsymbol{k}^*$ **بالترتیب مثبت** x ، y ، z اور x^* ، y^* ، z^* رخ اکائی سمتیات ہیں۔ہم v_1^* ، v_2^* اور v_3^* ارکان کو v_1 ، v_2 اور v_3 کی صورت میں لکھنا چاہتے ہیں۔ اسی طرح ہم v_1 ، v_2 اور v_3 ارکان کو v_1^* ، v_2^* اور v_3^* کی صورت میں لکھنا چاہتے ہیں۔

مساوات 10.93 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{k} \tag{10.95}$$

اسی طرح مساوات 10.94 کا $\boldsymbol{i}^*$ کے ساتھ غیر سمتی ضرب لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{v} = v_1^*\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{i}^* + v_2^*\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{j}^* + v_3^*\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{k}^* \tag{10.96}$$

اب چونکہ دائیں ہاتھ پہلا غیر سمتی ضرب اکائی کے برابر ہے جبکہ باقی دو غیر سمتی ضرب صفر کے برابر ہیں لہٰذا درج بالا کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{v} = v_1^* \tag{10.97}$$

مساوات 10.97 اور مساوات 10.95 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_1^* = \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{i}v_1 + \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{j}v_2 + \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{k}v_3$$

بالکل اسی طرح

$$v_2^* = \boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{i}v_1 + \boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{j}v_2 + \boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{k}v_3$$

$$v_3^* = \boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{i}v_1 + \boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{j}v_2 + \boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{k}v_3$$

یوں سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے کسی ایک کارتیسی نظام میں لکھے گئے ارکان کو کسی دوسرے کارتیسی نظام میں لکھے گئے ارکان کا خطی مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

اس تبادل کو سادہ صورت میں لکھنے کی خاطر ہم

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{i} &= c_{11} \quad & \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{j} &= c_{12} \quad & \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{k} &= c_{13} \\
\boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{i} &= c_{21} \quad & \boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{j} &= c_{22} \quad & \boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{k} &= c_{23} \\
\boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{i} &= c_{31} \quad & \boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{j} &= c_{32} \quad & \boldsymbol{k}^* \cdot \boldsymbol{k} &= c_{33}
\end{aligned} \tag{10.98}
$$

لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
v_1^* &= c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3 \\
v_2^* &= c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3 \\
v_3^* &= c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3
\end{aligned} \tag{10.99}
$$

علامت جمع استعمال کرتے ہوئے اس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
v_k^* = \sum_{l=1}^{3} c_{kl} v_l \qquad k = 1, 2, 3 \tag{10.100}
$$

اسی طرح الٹ تبادل کا کلیہ

$$
\begin{aligned}
v_1 &= c_{11}v_1^* + c_{21}v_2^* + c_{31}v_3^* \\
v_2 &= c_{12}v_1^* + c_{22}v_2^* + c_{32}v_3^* \\
v_3 &= c_{13}v_1^* + c_{23}v_2^* + c_{33}v_3^*
\end{aligned} \tag{10.101}
$$

بھی حاصل کیا جا سکتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
v_l = \sum_{m=1}^{3} c_{ml} v_m^* \qquad l = 1, 2, 3 \tag{10.102}
$$

یہاں غور کریں کہ مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 میں یکساں عددی سر c_{kl} استعمال ہوتے ہیں البتہ c_{11} ، c_{22} اور c_{33} کے علاوہ تمام عددی سر کے مقامات دونوں تبادل میں مختلف ہیں۔

عددی سروں c_{kl} سادہ جیومیٹریائی مطلب رکھتے ہیں۔چونکہ $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{i}^*$ اکائی سمتیات ہیں للہذا صفحہ 493 پر مساوات 7.23 کے تحت $c_{11} = \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{i}$ درحقیقت مثبت x اور مثبت x^* محور کے مابین زاویے کا کوسائن cos ہے۔اسی طرح $c_{12} = \boldsymbol{i}^* \cdot \boldsymbol{j}$ مثبت x^* اور مثبت y محور کے مابین زاویے کا کوسائن ہے۔یہی کچھ باقی عددی سروں کے لئے بھی درست ہے۔

عددی سر c_{kl} چند اہم تعلقات پر پورا اترے ہیں جنہیں اب حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 10.102 کو مساوات 10.100 میں پر کرنے سے

$$v_k^* = \sum_{l=1}^{3} c_{kl} v_l = \sum_{l=1}^{3} c_{kl} \sum_{m=1}^{3} c_{ml} v_m^* = \sum_{m=1}^{3} v_m^* \left(\sum_{l=1}^{3} c_{kl} c_{ml} \right) \tag{10.103}$$

ملتا ہے جہاں $k = 1, 2, 3$ ہے۔ مثلاً $k = 1$ کے لئے اس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$v_1^* = v_1^* \left(\sum_{l=1}^{3} c_{1l} c_{1l} \right) + v_2^* \left(\sum_{l=1}^{3} c_{1l} c_{2l} \right) + v_3^* \left(\sum_{l=1}^{3} c_{1l} c_{3l} \right)$$

ہر سمتیہ $\boldsymbol{v} = v_1^* \boldsymbol{i}^* + v_2^* \boldsymbol{j}^* + v_3^* \boldsymbol{k}^*$ پر پورا اترنے کی خاطر درج بالا میں پہلا مجموعہ اکائی کے برابر ہونا ہو گا جبکہ باقی دو مجموعوں کو صفر کے برابر ہونا ہو گا۔اسی طرح $k = 2$ اور $k = 3$ کے لئے بھی شرائط حاصل کیے جا سکتے ہیں۔یوں مساوات 10.103 صرف اور صرف اس صورت ہر سمتیہ کے لئے درست ہو گا جب یہ درج ذیل شرط پر پورا اترتا ہو۔

$$\sum_{l=1}^{3} c_{kl} c_{ml} = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ 1 & (k = m) \end{cases} \tag{10.104}$$

اس شرط کو کرونیکر ضرب[61] (کرونیکر ڈیلٹا)[62]

$$\delta_{km} = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ 1 & (k = m) \end{cases}$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sum_{l=1}^{3} c_{kl} c_{ml} = \delta_{km} \qquad (k, m = 1, 2, 3) \tag{10.105}$$

ایسے تین عدد سمتیات جن کے اجزاء درج ذیل ہوں

$$c_{11}, c_{12}, c_{13} \qquad c_{21}, c_{22}, c_{23} \qquad c_{31}, c_{32}, c_{33}$$

میں دو عدد سمتیات کا غیر سمتی ضرب مساوات 10.105 کا بایاں ہاتھ دیتا ہے۔مزید مساوات 10.105 سے یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ یہ سمتیات اکائی قائمہ الزاویہ سمتیات ہیں۔یوں ان کے غیر سمتی سہ ضرب کی قیمت $+1$ یا

---

[61] Kronecker delta

[62] جرمنی کے ریاضی دان لیوپولڈ کرونیکر [1823-1891]

-1 ہو گی یعنی:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \mp 1 \tag{10.106}$$

یہاں ثبوت دیے بغیر بتلاتا چلوں کہ اگر دونوں محددی نظام دائیں ہاتھ کے نظام ہوں (یا دونوں محددی نظام بائیں ہاتھ کے نظام ہوں) تب درج بالا مقطع کی قیمت $+1$ ہو گی۔اس کے برعکس اگر ایک محددی نظام دائیں ہاتھ کا نظام ہو اور دوسرا بائیں ہاتھ کا نظام ہو تب درج بالا مقطع کی قیمت -1 ہو گی۔ہم اپنے نتیجے کو درج ذیل مسئلے میں پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 10.6: (سمتیات کے ارکان کے تبادلے کا قاعدہ)
دو عدد کارتیسی محددی نظام میں کسی بھی سمتیہ v کے ارکان v_1 ، v_2 ، v_3 اور v_1^* ، v_2^* ، v_3^* کو ایک دوسرے سے مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں مساوات 10.98 عددی سر c_{kl} دیتا ہے جو مساوات 10.104 اور مساوات 10.106 پر پورا اترتے ہیں۔

ہم اب کسی ایک کارتیسی محددی نظام کا کسی دوسرے کارتیسی نظام میں تبادلہ کے لئے درکار کلیات حاصل کرتے ہیں۔اگر xyz اور $x^*y^*z^*$ کارتیسی محددی نظام کے مبدا ایک ہی نقطے پر پائے جاتے ہوں تب v کی دم کو مبدا پر رکھتے ہوئے v کو نقطہ Q کا تعین گر سمتیہ تصور کیا جا سکتا ہے جہاں v کا اختتامی نقطہ Q ہے۔ اگر ان کارتیسی محددی نظام میں Q کے محدد (x, y, z) اور (x^*, y^*, z^*) ہوں تب مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 میں درج ذیل ہو گا۔

$$v_1 = x,\, v_2 = y,\, v_3 = z \qquad v_1^* = x^*,\, v_2^* = y^*,\, v_3^* = z^*$$

یوں مساوات 10.99 اور مساوات 10.101 کو v_1 ، v_2 ، v_3 اور v_1^* ، v_2^* ، v_3^* کی بجائے x ، y ، z اور x^* ، y^* ، z^* استعمال کرتے ہوئے ہم مبدا محددی نظام کے تبادلے کے باہمی تعلقات حاصل ہوتے ہیں۔

اگر محددی نظام ہم مبدا نہ ہوں تب ان کے مابین تبادلے کو دو حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔پہلے حصے میں درج بالا تبادلہ کیا جائے گا جبکہ دوسرے حصے میں مستقیم حرکت کی جائے گی۔ مستقیم حرکت میں دونوں کارتیسی نظام کے ارکان میں صرف مستقل قیمت کا فرق ہوتا ہے۔یوں عمومی تبادلے کا درج ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 10.7: (کارتیسی محددی نظاموں کے تبادلے کا قاعدہ) کسی ایک کارتیسی محددی نظام xyz سے کوئی دوسرا کارتیسی محددی نظام $x^*y^*z^*$ درج ذیل کلیے کی مدد سے حاصل ہو گا

$$\begin{aligned} x^* &= c_{11}x + x_{12}y + c_{13}z + b_1 \\ y^* &= c_{21}x + x_{22}y + c_{23}z + b_2 \\ z^* &= c_{31}x + x_{32}y + c_{33}z + b_3 \end{aligned} \tag{10.107}$$

جبکہ $x^*y^*z^*$ سے xyz درج ذیل کلیات کی مدد سے حاصل ہو گا

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x^* + c_{21}y^* + c_{31}z^* + \tilde{b}_1 \\ y &= c_{12}x^* + c_{22}y^* + c_{32}z^* + \tilde{b}_2 \\ z &= c_{13}x^* + c_{23}y^* + c_{33}z^* + \tilde{b}_3 \end{aligned} \tag{10.108}$$

جہاں عددی سر c_{kl} ، مساوات 10.98 سے حاصل ہوں گے جو مساوات 10.104 اور مساوات 10.106 پر پورا اترتے ہیں جبکہ b_1 ، b_2 ، b_3 ، $\tilde{b}_1$ ، $\tilde{b}_2$ ، $\tilde{b}_3$ مستقل قیمتیں ہیں۔

سوالات

سوال 10.160: مساوات 10.102 میں دیے گئے تمام عددی سر کی جیومیٹریائی معنی پر غور کریں۔

سوال 10.161 تا سوال 10.166 میں c_{kl} اور b_k دریافت کریں۔

سوال 10.161: ایسا مستقیم حرکت جو مبدا کو $(5, 1, -4)$ پر منتقل کرے۔

جواب: $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1,\ b_1 = 5, b_2 = 1, b_3 = -4$ جبکہ بقایا تمام عددی سر صفر ہیں۔

سوال 10.162: ایسا مستقیم حرکت جو $(1, 0, 3)$ کو $(3, 2, 1)$ پر منتقل کرے۔

جواب: $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1,\ b_1 = 2, b_2 = 2, b_3 = -2$ جبکہ بقایا تمام عددی سر صفر ہیں۔

سوال 10.163: سطح xz میں عکس۔

جواب: $c_{11}=1, c_{22}=-1, c_{33}=1$ جبکہ بقایا تمام مستقل سر صفر ہیں۔

سوال 10.164: سطح $y=x$ میں عکس۔

جواب: $c_{12}=1, c_{21}=1, c_{33}=1$ جبکہ بقایا تمام مستقل سر صفر ہیں۔

سوال 10.165: z محور کے گرد θ زاویہ گھومنا۔

جواب:

سوال 10.166: ایسا مستوی حرکت جو مثبت x ، y ، z کو بالترتیب مثبت y^* ، z^* ، x^* پر منتقل کرے۔

جواب: $c_{13}=c_{21}=c_{32}=1$ جبکہ باقی تمام مستقل صفر ہیں۔

سوال 10.167: مساوات 10.106 کا مقطع سوال 10.161 تا سوال 10.164 میں کیا ہو گا۔

جواب: سوال 10.161 کا مقطع $+1$ ہے۔ باقی مقطع بالترتیب -1 ، 0 اور 0 ہیں۔

سوال 10.168: مساوات 10.101 حاصل کریں۔

10.10 سمتی میدان کی پھیلاو

فرض کریں کہ $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ قابل تفرق سمتی تفاعل ہے جس کے ارکان v_1 ، v_2 ، v_3 ہیں جہاں x ، y ، z فضا میں کارتیسی محدد ہیں۔ ایسی صورت میں درج ذیل تفاعل $\boldsymbol{v}$ کی پھیلاو[63] کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{v}_{\text{پھیلاو}}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z} \tag{10.109}$$

---

[63] divergence

$\boldsymbol{v}$ کی پھیلاو کو عموماً $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= (\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}) \cdot (v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\end{aligned}$$

جہاں غیر سمتی ضرب $(\frac{\partial}{\partial x})v_1$ سے مراد جزوی تفرق $\frac{\partial v_1}{\partial x}$ لیا جاتا ہے (جو محض بہتر علامت نویسی کے علاوہ کوئی معنی نہیں رکھتی)۔ یاد رہے کہ $\nabla \boldsymbol{v}$ سے مراد غیر سمتی $\boldsymbol{v}_{\text{پھیلاو}}$ ہے جبکہ ∇f سے مراد حصہ 10.8 میں بیان کی گئی سمتی $f_{\text{ڈھلوان}}$ ہے۔

مثال کے طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{v} = 2xy\boldsymbol{i} - 5yz\boldsymbol{j} + 2x^2y\boldsymbol{k} \implies \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2y - 5z$$

ہم جلد دیکھیں گے کہ پھیلاو اہم طبعی معنی رکھتا ہے۔ اب ظاہر ہے کہ ایسے تفاعل کی قیمت جو طبعی یا جیومیٹریائی معنی رکھتی ہو پر چنے گئے کارتیسی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے، یعنی ایسی قیمت محددی نظام بدلنے سے تبدیل نہیں ہوتی۔

مسئلہ 10.8: (محددی نظام کے لحاظ سے پھیلاو کی عدم تغیر)
پھیلاو $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ کی قیمت صرف فضا میں نقطے (اور $\boldsymbol{v}$) پر منحصر ہے جبکہ چنے گئے محددی نظام کا مساوات 10.109 میں دی گئی پھیلاو کی قیمت پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں کسی دوسرے کارتیسی محدد x^*، y^*، z^* اور $\boldsymbol{v}$ کے مطابقتی ارکان v_1^*، v_2^*، v_3^* کی صورت میں $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial z^*} \tag{10.110}$$

ثبوت: ہم مساوات 10.110 کو مساوات 10.109 سے حاصل کرتے ہیں۔ ہم درج ذیل استعمال کرتے ہوئے

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z \quad \text{اور} \quad x_1^* = x^*,\ x_2^* = y^*,\ x_3^* = z^*$$

مساوات 10.107 کو مجموعے کی علامت کی مدد سے لکھتے ہیں۔

$$x_k^* = \sum_{l=1}^{3} c_{kl} x_l + b_k \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{10.111}$$

حصہ 10.7 میں دی گئی متعدد متغیرات پر مبنی, تفاعل کے زنجیری قاعدے کے تحت

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} \frac{\partial x_k^*}{\partial x_l} \tag{10.112}$$

ہو گا۔ اس مجموعے میں مساوات 10.111 کے تحت $\frac{\partial x_k^*}{\partial x_l} = c_{kl}$ ہو گا۔مساوات 10.102 کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$v_l = \sum_{m=1}^{3} c_{ml} v_m^*$$

جس کے تفرق

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = \sum_{m=1}^{3} c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*}$$

کو مساوات 10.112 میں پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*} c_{kl} \qquad (l = 1, 2, 3)$$

درج بالا میں باری باری $l = 1, 2, 3$ پر کرتے ہوئے حاصل تین تفاعل کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} c_{kl} c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*}$$

جو مساوات 10.105 کی بنا گھٹ کر درج ذیل دیگا۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \delta_{km} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} \tag{10.113}$$

□

اگر $f(x,y,z)$ دو مرتبہ قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب

$$f_{\text{ڈھلوان}} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 10.109 کے تحت

$$(f_{\text{ڈھلوان}})_{\text{پھیلاو}} = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ہو گا جس کا دایاں ہاتھ، حصہ 10.8 میں دیا گیا، f کا لاپلاسی ہے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(f_{\text{ڈھلوان}})_{\text{پھیلاو}} = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f \tag{10.114}$$

مثال 10.23: کشش ثقل

ثقلی میدان پر مثال 10.22 میں غور کیا گیا۔ثقلی قوت $\boldsymbol{f}$ غیر سمتی تفاعل $h(x,y,z) = \frac{GMm}{r}$ کی ڈھلوان ہے جو لاپلاس کی مساوات $\nabla^2 h = 0$ پر پورا اترتا ہے۔یوں مساوات 10.114 کے تحت $\nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0$ ہو گا (جہاں $r > 0$ ہے)۔ □

درج ذیل مثال ماقواحرکیات[64] سے لی گئی ہے۔ یہ مثال پھیلاو کی طبعی اہمیت ظاہر کرتی ہے۔

مثال 10.24: داب پذیر سیال کی حرکت

ہم ایسے خطہ R میں سیال[65] کی حرکت پر غور کرتے ہیں جس میں نا سیال داخل ہوتا اور اور نا ہی خطے سے سیال کی نکاسی ہوتی ہو۔مائع اور گیس دونوں کو سیال تصور کیا جاتا ہے۔مائع کی داب پذیری انتہائی کم ہوتی ہے جس کو عموماً نظر انداز کیا جا سکتا ہے البتہ گیس کی داب پذیری کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا ہے۔یوں گیس کی کثافت ρ (یعنی کمیت فی اکائی حجم) کا دارومدار فضا میں x ، y ، z (اور ممکن ہے کہ وقت) پر ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمارا سیال داب پذیر ہے۔

ہم ایسے مستطیلی متوازی السطوح[66] W میں سیال کی حرکت پر غور کرتے ہیں جس کے اطراف کی لمبائیاں Δx ، Δy ، Δz ہیں۔ W کے کنارے محددی محور کے متوازی ہیں (شکل 10.15)۔یوں W کا حجم $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ ہو گا۔ اب فرض کریں کہ سمتی رفتار سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k} \tag{10.115}$$

---

[64] hydrodynamics
[65] fluid
[66] rectangular parallelepiped

ہم درج ذیل لکھ کر آگے بڑھتے ہیں

$$\boldsymbol{u} = \rho \boldsymbol{v} = u_1 \boldsymbol{i} + u_2 \boldsymbol{j} + u_3 \boldsymbol{k} \tag{10.116}$$

اور فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ سمتیات x ، y اور z کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ آئیں W کی سطحوں پر سیال کی حرکت سے W میں سیال کی کمیت کی تبدیلی کی شرح پر غور کرتے ہیں۔ کسی بھی سطح پر اندر جانب حرکت سے کمیت بڑھے گی جبکہ باہر جانب حرکت سے کمیت گھٹے گی۔ ہم W سے اکائی وقت میں کمیت کی اخراج حاصل کرتے ہیں۔ W کی بائیں ہاتھ سطح جس کا رقبہ $\Delta x \Delta z$ ہے پر نظر رکھیں۔ $\boldsymbol{v}$ کے ارکان v_1 اور v_3 اس سطح کے متوازی ہیں لہٰذا ان کا اخراج پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔ یوں بائیں ہاتھ سطح سے چھوٹے وقفہ Δt میں کمیت کا دخول

$$(\rho v_2)_y \Delta x \Delta z \Delta t = (u_2)_y \Delta x \Delta z \Delta t$$

ہو گا جہاں زیر نوشت میں y بائیں ہاتھ سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اسی دورانیے میں دائیں ہاتھ سطح سے کمیت کا اخراج تقریباً

$$(u_2)_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta t$$

ہو گا جہاں زیر نوشت میں $y + \Delta y$ دائیں ہاتھ سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ان کا فرق

$$\Delta u_2 \Delta x \Delta z \Delta t = \frac{\Delta u_2}{\Delta y} \Delta V \Delta t \qquad [\Delta u_2 = (u_2)_{y+\Delta y} - (u_2)_y]$$

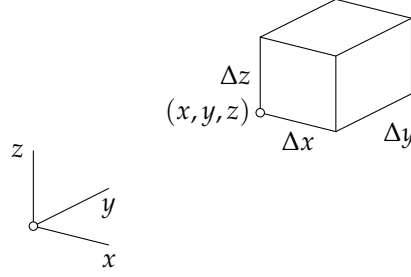
تقریباً کل اخراج ہو گا۔ W کے باقی جڑواں سطحوں سے بالکل اسی طرح اخراج حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں تمام سطحوں سے کل اخراج تقریباً

$$\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta y} + \frac{\Delta u_3}{\Delta z} \right) \Delta V \Delta t \tag{10.117}$$

ہو گا جہاں

$$\Delta u_1 = (u_1)_{x+\Delta x} - (u_1)_x \quad \text{اور} \quad \Delta u_3 = (u_3)_{z+\Delta z} - (u_3)_z$$

ہیں۔وقت کے ساتھ W میں کثافت کی تبدیلی کی شرح کی بنا درج بالا اخراج ممکن ہو گا لہٰذا کل اخراج تقریباً

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta V \Delta t \tag{10.118}$$

شکل 10.15: مستطیلی متوازی السطوح (مثال 10.24)

ہو گا جہاں منفی کی علامت کثافت کے گھٹنے کو ظاہر کرتی ہے۔مساوات 10.117 اور مساوات 10.118 کو آپس میں برابر پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کو $\Delta V \Delta t$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta y} + \frac{\Delta u_3}{\Delta z} = \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

یا

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{10.119}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو داب پذیر سیال کے حرکت کی **استمراری مساوات**[67] کہتے ہیں۔

وقت کے ساتھ نا تبدیل ہونے والے حرکت، جسے برقرار حرکت کہتے ہیں، کی صورت میں $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں استمراری مساوات درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{10.120}$$

داب نا پذیر سیال کی صورت میں کثافت ρ مستقل قیمت ہو گی اور برقرار حرکت کی استمراری مساوات

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{v}) = 0 \tag{10.121}$$

ہو گی جو **غیر داب پذیری** کا شرط کہلاتا ہے جس کے تحت کمیت کا دخول ہر لمحے کمیت کے اخراج کے برابر ہو گا۔ □

---

[67] continuity equation

سوالات

سوال 10.169 تا سوال 10.176 میں پھیلاو دریافت کریں۔

سوال 10.169: $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$
جواب: 3

سوال 10.170: $x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$
جواب: $2x+2y+2z$

سوال 10.171: $3x^2\boldsymbol{i}-5y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$
جواب: $6x-10y+2z$

سوال 10.172: $x^2yz^3(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$
جواب: $2xyz^3+x^2z^3+3x^2yz^2$

سوال 10.173: $2x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$
جواب: 0

سوال 10.174: $yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$
جواب: 0

سوال 10.175: $\tan\frac{y}{z}\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$
جواب: $1+2z$

سوال 10.176: $\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$
جواب: 0

سوال 10.177 تا سوال 10.180 میں دیے گئے تعلق ثابت کریں۔

سوال 10.177: $\nabla\cdot(k\boldsymbol{v})=k\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ جہاں k مستقل ہے۔

سوال 10.178: $\nabla\cdot(f\boldsymbol{v})=f\nabla\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla f$ جہاں f تفاعل ہے۔

سوال 10.179: $\nabla\cdot(f\nabla g)=f\nabla^2 g+\nabla f\cdot\nabla g$ جہاں f اور g تفاعل ہیں۔

سوال 10.180: $\nabla \cdot (f\nabla g) - \nabla \cdot (g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$ جہاں f اور g تفاعل ہیں۔

سوال 10.181: ثابت کریں کہ استمراری مساوات 10.119 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

سوال 10.182 اور سوال 10.183 میں پھیلاو دریافت کریں۔ سوال 10.178 میں دیا گیا کلیہ استعمال کریں۔

سوال 10.182: $e^x(\sin y\boldsymbol{i} + \cos y\boldsymbol{j})$

جواب: 0

سوال 10.183: $\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

جواب: 0

سوال 10.184: سیال کے ایسے حرکت پر غور کریں جس کا $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i}$ ہے۔ اس کے درج ذیل خواص ثابت کریں۔ سیال کا بہاو غیر داب پذیر ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر وہ ذرات جو ایسے مکعب میں موجود ہوں جس کے اطراف $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ ، $z = 0$ ، $z = 1$ ہوں، کا حجم لمحہ $t = 1$ پر اکائی ہو گا۔

سوال 10.185: سیال کے ایسے حرکت پر غور کرتے ہیں جس کی حرکت $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$ ہو۔ ثابت کریں کہ انفرادی ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t) = c_1e^t\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$ ہو گا جہاں c_1 ، c_2 ، c_3 مستقل ہیں۔ ثابت کریں کہ سیال کی بہاو داب پذیر ہے۔ ثابت کریں کہ لمحہ $t = 0$ پر وہ ذرات جو ایسے مکعب میں موجود ہوں جس کے اطراف $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ ، $z = 0$ ، $z = 1$ ہوں، کا حجم لمحہ $t = 1$ پر e ہو گا۔

سوال 10.186: نقطہ $N : (4, 2, 4)$ پر کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ کے باہر رخ عمود کی سمت میں تفاعل $\boldsymbol{u} = x^4\boldsymbol{i} + y^4\boldsymbol{j} + z^4\boldsymbol{k}$ کے پھیلاو کا سمتی تفرق دریافت کریں۔

جواب: 272

سوال 10.187: نقطہ $N : (4, 2, 4)$ پر کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ کے باہر رخ عمود کی سمت میں تفاعل $\boldsymbol{u} = xz\boldsymbol{i} + yx\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$ کے پھیلاو کا سمتی تفرق دریافت کریں۔

جواب: $\frac{5}{3}$

10.11 سمتی تفاعل کی گردش

فرض کریں کہ فضا میں x ، y ، z دائیں ہاتھ کارتیسی نظام محدد ہے اور

$$\boldsymbol{v}(x,y,z)=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$$

قابل تفرق سمتیہ ہے۔ایسی صورت میں درج ذیل تفاعل کو سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کی گردش[68] کہتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\text{گردش}}=\nabla\times\boldsymbol{v}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}\\&=\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{10.122}$$

بائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں درج بالا مساوات کے ساتھ منفی کی علامت ہو گی۔

مسئلہ 10.9: گردش کی عدم تغیر
گردش کی لمبائی اور سمت پر چنے گئے محددی نظام کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

گردش کے تصور کی وضاحت ایک مثال کی مدد سے کرتے ہیں۔

مثال 10.25: ٹھوس جسم کا گھومنا
ہم صفحہ 515 پر مثال 7.13 میں دیکھ چکے ہیں کہ مستحکم محور کے گرد ٹھوس جسم کے گھومنے کو محور کی رخ سمتیہ $\boldsymbol{\omega}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جس کی مقدار ω ہے۔ہم $\omega(>0)$ کو زاویائی رفتار کہتے ہیں۔ $\boldsymbol{\omega}$ محور کی اس رخ ہو گا جس کی سمت میں دیکھتے ہوئے جسم کی حرکت گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی سمت میں نظر آتی ہے۔مساوات 7.55 کے تحت ٹھوس جسم پر نقطہ N کی سمتی رفتار

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

---

[68] curl

ہو گی جہاں ٹھوس جسم پر نقطہ N کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہے اور محدد کا مبدا گھومنے کے محور پر پایا جاتا ہے۔ہم دائیں ہاتھ کارتیسی نظام یوں چنتے ہیں کہ $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$ لکھا جا سکتا ہو یعنی گھومنے کا محور مثبت z کی رخ ہے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (مثال 10.3 دیکھیں)

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$$

لہٰذا

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\boldsymbol{k}$$

یعنی

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega} \tag{10.123}$$

ہو گا۔یوں ٹھوس جسم کے گھومنے کی صورت میں سمتی رفتار کی گردش، گھومنے کی محور کے رخ ہو گا جبکہ اس کی مقدار زاویائی رفتار کی دگنا ہو گی۔

یہاں غور کریں کہ یہ نتیجہ چنے گئے کارتیسی نظام پر منحصر نہیں ہے۔ □

کسی بھی دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل f کے لئے درج ذیل ہو گا

$$\nabla \times (\nabla f) = \boldsymbol{0} \tag{10.124}$$

جس کو با آسانی ثابت کیا جا سکتا ہے۔یوں اگر کوئی سمتیہ کسی غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان ہو تب اس کی گردش صفر کے برابر ہو گی۔چونکہ گردش گھومنے کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ڈھلوان میدان **غیر گردشی**[69] حرکت کو ظاہر کرتی ہے۔(ایسا کوئی بھی میدان، جو سمتی رفتار کا میدان نہ ہو، کو **بقائی میدان**[70] (حصہ 10.8 کا آخر دیکھیں) کہتے ہیں ۔)

مثال 10.26: ثقلی میدان جس پر مثال 10.22 میں غور کیا گیا کا $\nabla \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ ہے جو غیر گردشی میدان ہے۔ مثال 10.25 کا میدان غیر گردشی نہیں ہے۔ □

---

[69] irrotational
[70] conservative field

سوالات

سوال 10.188 تا سوال 10.193 میں دائیں ہاتھ کارتیسی نظام کے لحاظ سے v کی گردش دریافت کریں۔

سوال 10.188: $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$
جواب: $-2\boldsymbol{k}$

سوال 10.189: $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$
جواب: $-\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

سوال 10.190: $\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{0}$

سوال 10.191: $\boldsymbol{v} = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$
جواب: $-2z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} - 2y\boldsymbol{k}$

سوال 10.192: $\boldsymbol{v} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$
جواب: $\boldsymbol{0}$

سوال 10.193: $\boldsymbol{v} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$
جواب: $\boldsymbol{0}$

سوال 10.194 تا سوال 10.195 میں سمتیہ حرکت v دیا گیا ہے۔کیا سیال داب پذیر ہے؟ ذرات کی راہ دریافت کریں۔

سوال 10.194: $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$
جواب: $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$ ہے۔چونکہ $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2$ ہے لہٰذا سیال داب پذیر ہے۔ $\boldsymbol{r} = c_1 e^t \boldsymbol{i} + c_2 e^t \boldsymbol{j} + c_3 \boldsymbol{k}$

سوال 10.195: $\boldsymbol{v} = y^3\boldsymbol{i}$
جواب: $\nabla \times \boldsymbol{v} = -3y^2\boldsymbol{k}$ ہے۔چونکہ $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ ہے لہٰذا سیال غیر داب پذیر ہے۔

سوال 10.196 تا سوال 10.201 میں دیے گئے تعلق ثابت کریں۔ فرض کریں کہ تفاعل درکار حد تک قابل تفرق ہے۔

سوال 10.196: $\nabla \times (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \nabla \times \boldsymbol{u} + \nabla \times \boldsymbol{v}$

سوال 10.197: $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})=0$

سوال 10.198: $\nabla\times(f\boldsymbol{v})=\nabla f\times\boldsymbol{v}+f\nabla\times\boldsymbol{v}$

سوال 10.199: $\nabla\times(\nabla\boldsymbol{v})=0$

سوال 10.200: $\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot\nabla\times\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}$

سوال 10.201: $\nabla\cdot(g\nabla f\times f\nabla g)=0$

سوال 10.202 اور سوال 10.203 میں $\boldsymbol{u}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{v}=xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$ لیتے ہوئے دائیں ہاتھ کارتیسی نظام کے لحاظ سے حل کریں۔

سوال 10.202: $\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}),\quad \nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$

جوابات: $\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=(-2yz-xz+xy)\boldsymbol{i}+(yz+2xz-xy)\boldsymbol{j}+(-yz+xz+2xy)\boldsymbol{k}$
$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy$

سوال 10.203: $\boldsymbol{u}\times\nabla\times\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{u}$

جوابات: $\boldsymbol{u}\times\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{u}=(xz-yz)\boldsymbol{i}+(xy-xz)\boldsymbol{j}+(yz-xy)\boldsymbol{k}$

باب 11

سمتی تکملی احصاء۔ تکمل کے مسئلے

تکمل سے آپ بخوبی واقف ہیں جس کو سمتی تکملی احصاء[1] وسعت دیتا ہے۔یوں منحنی پر تکمل، جسے خطی تکمل[2] کہتے ہیں، سطح پر تکمل جسے سطحی تکمل[3] کہتے ہیں اور حجم پر تکمل جسے حجمی تکمل[4] کہتے ہیں، حاصل کیا جا سکتا ہے۔مزید ایک قسم کی تکمل کا دوسری قسم کی تکمل میں تبادلہ کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے سے بعض اوقات نسبتاً آسان تکمل حاصل ہوتا ہے۔یوں سطح میں مسئلہ گرین[5] کی مدد سے خطی (ایک گنا) تکمل کو دو گنا تکمل میں یا دو گنا تکمل کو خطی تکمل (ایک گنا) میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ گاوس مسئلہ ارتکاز[6] کی مدد سے حجمی تکمل کو سطحی تکمل یا سطحی تکمل کو حجمی تکمل میں تبدیل کیا جاتا ہے۔مسئلہ سٹوکس[7] کی مدد سے تین گنا تکمل کو خطی (ایک گنا) تکمل یا خطی تکمل کو تین گنا تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

سمتی تکملی الاحصاء کا انجینئری، طبیعیات، ٹھوس میکانیات، سیالی میکانیات اور دیگر میدان میں اہم کردار پایا جاتا ہے۔

---

[1] vector calculus
[2] line integral
[3] surface integral
[4] volume integral
[5] Green's theorem
[6] Gauss's convergence theorem
[7] Stoke's theorem

11.1 خطی تکمل

درج ذیل تفاعل f کی x محور پر $x = a$ تا $x = b$ قطعی تکمل ہے

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.1}$$

جہاں وقفہ a اور b کے درمیان ہر نقطے پر f معین ہے۔ خطی تکمل میں f کا تکمل سطح میں (یا فضا میں) منحنی C پر حاصل کیا جاتا ہے جہاں C کے ہر نقطے پر f معین ہے۔

خطی تکمل کی تعریف عین قطعی تکمل کی تعریف کی مانند ہے۔ خطی تکمل کچھ یوں ہے۔

ہم فضا میں منحنی C لیتے ہیں اور اس پر ایک رخ کو **مثبت سمت** کہتے ہیں۔ یوں منحنی پر الٹ چلتے ہوئے منفی سمت حاصل ہو گی۔ مثبت سمت میں چلتے ہوئے منحنی پر ابتدائی نقطے کو A اور اختتامی نقطے کو B کہتے ہیں۔ جیسا شکل 11.1-ب میں دکھایا گیا ہے ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ ہم مقام ہو سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں C بند راہ کہلاتا ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ C سادہ منحنی (حصہ 10.3) ہے جس کو

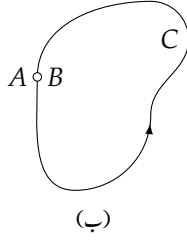
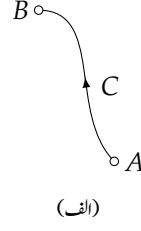
$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k} \qquad (a \le s \le b) \tag{11.2}$$

ظاہر کرتی ہے [جہاں s منحنی کی لمبائی قوس ہے (حصہ 10.4)] اور پورے C پر $\boldsymbol{r}(s)$ استمراری ہے جس کا (پورے C پر) تفرق $\boldsymbol{r}'$ موجود ہے اور یہ تفرق غیر صفر سمتیہ ہے۔ اس طرح C ہموار منحنی[8] کہلائے گی یعنی C کے ہر نقطے پر C کا منفرد مماس پایا جاتا ہے اور منحنی پر چلنے سے مماس کی سمت میں تبدیلی استمراری ہوتی ہے۔

فرض کریں کہ $f(x, y, z)$ متغیر s کا ایسا استمراری تفاعل ہے جو (کم از کم) C کے ہر نقطے پر معین ہے۔ ہم C کو بلا منصوبہ n عدد ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 11.2)۔ یوں ہر ٹکڑے کی لمبائی مختلف ہو سکتی ہے۔ ہم ابتدائی سر سے شروع کرتے ہوئے ان ٹکڑوں کے سروں کو $P_0\,(=A)$ ، P_1 ، P_2 ، $\cdots$ ، $P_n\,(=B)$ سے اور s کی مطابقتی قیمتوں کو

$$s_0\,(=a) < s_1 < s_2 < \cdots < s_n\,(=b)$$

---

[8] smooth curve

شکل 11.1: سمت بند منحنی

سے ظاہر کرتے ہیں۔ہم ہر ٹکڑے پر بلا منصوبہ کوئی نقطہ چنتے ہیں مثلاً P_0 اور P_1 کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ Q_1 چنتے ہیں، P_1 اور P_2 کے درمیان ٹکڑے پر ہم نقطہ Q_2 چنتے ہیں وغیرہ وغیرہ۔یوں ہر ٹکڑے پر نقطہ باقی ٹکڑوں پر نقطوں سے ضروری نہیں کہ کوئی مشابہت رکھتا ہو۔ ان نقطوں پر f کی قیمتوں کو لیتے ہوئے ہم مجموعہ

$$J_n = \sum_{m=1}^{n} f(x_m, y_m, z_m)\Delta s_m \tag{11.3}$$

لیتے ہیں جہاں x_m ، y_m ، z_m نقطہ Q_m کے محدد ہیں اور Δs_m اس ٹکڑے کی لمبائی ہے جس پر Q_m واقع ہے۔

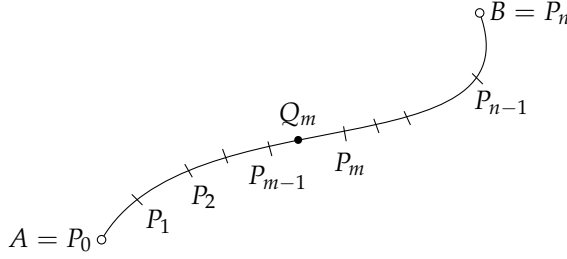
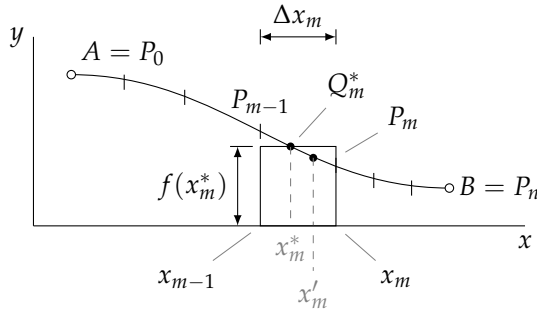
$$\Delta s_m = s_m - s_{m-1}$$

ہم اس طرح کے مجموعے بلا منصوبہ $n = 2, 3, \cdots$ کے لئے یوں حاصل کرتے ہیں کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی تک پہنچے، Δs کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر تک پہنچتی ہو۔یوں ہمیں مجموعوں کا تسلسل $J_2, J_3, \cdots$ ملتا ہے۔ اس تسلسل کی حد کو C پر A تا B تفاعل f کی **خطی تکمل**[9] کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s$$

منحنی C کو **تکمل کی راہ** کہتے ہیں جبکہ $f(x, y, z)$ کو **متکمل**[10] کہتے ہیں۔

چونکہ f کو استمراری فرض کیا گیا اور C ہموار ہے لہٰذا یہ حد موجود ہو گا جس کی قیمت پر ٹکڑوں کی چناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کی چناؤ کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ C پر کسی بھی نقطہ P کا تعین لمبائی قوس s سے کیا جاتا ہے۔یوں

[9] line integral
[10] integrand

شکل 11.2: C کی ٹکڑوں میں تقسیم

شکل 11.3: رقبہ اور تکمل (مثال 11.1)

A اور B کا تعین مطابقتی $s = a$ اور $s = b$ سے کیا جائے گا لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)]\,\mathrm{d}s \tag{11.4}$$

جو قطعی تکمل ہے۔ہم جانتے ہیں کہ قطعی تکمل بھی تسلسل $J_2, J_3, \cdots$ کی حد کو کہتے ہیں جس کی قیمت پر نا تو ٹکڑوں کی تقسیم اور نا ہی ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر پایا جاتا ہے۔مثال 11.1 میں مزید تفصیل دی گئی ہے۔

مثال 11.1: تکمل کی قیمت پر ٹکڑوں کی چناؤ اور ٹکڑوں پر نقطوں کے چناؤ کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے
آئیں دیکھتے ہیں کہ تکمل کی قیمت پر راہ کی ٹکڑوں میں تقسیم اور ان ٹکڑوں پر نقطوں کی چنائی کا کوئی اثر کیوں نہیں پایا جاتا ہے۔شکل 11.3 میں تفاعل $y = f(x)$ دکھایا گیا ہے جس کا ابتدائی نقطہ A اور اختتامی نقطہ B ہے۔ ان نقطوں کے درمیان تفاعل کو بلا منصوبہ ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ وقفہ P_m تا P_{m-1} کے مابین تفاعل

کے نیچے چھوٹا رقبہ ΔS_m ہے۔شکل 11.3 میں ایک مستطیل دکھایا گیا ہے جو نقطہ Q_m^* سے گزرتا ہے۔ Q_m^* یوں چنا گیا ہے کہ مستطیل کا رقبہ عین ΔS_m کے برابر ہو۔

$$\Delta S_m = f(x_m^*)\Delta x_m \qquad (\Delta x_m = x_m - x_{m-1})$$

اس وقفے پر بغیر کسی قاعدہ دوسرا نقطہ Q_m بھی چنا گیا ہے۔اس نقطے سے گزرتی مستطیل کا رقبہ $f(x'_m)\Delta x_m$ ہو گا جہاں Q_m کا x محدد x'_m ہے۔

اب استمراری تفاعل سے مراد یہ ہے کہ ہم کسی بھی نقطہ پر Δx اتنی کم لے سکتے ہیں کہ Δx وقفے پر تفاعل میں کل تبدیلی زیادہ سے زیادہ ϵ ہو جہاں ϵ جتنی بھی چھوٹی قیمت کیوں نا ہو۔یوں درج ذیل ہو گا

$$\left|f(x'_m) - f(x_m^*)\right| \le \epsilon$$

جس کو

$$f(x'_m) = f_m^* + t\epsilon \qquad (-1 \le t \le 1)$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں t ایسا متغیر ہے جس کی قیمت منفی اکائی سے مثبت اکائی تک ممکن ہے۔یوں Q'_m سے گزرتی مستطیل کا رقبہ

$$f(x'_m)\Delta x_m = (f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m$$

ہو گا۔یہ رقبہ اس صورت کم سے کم ہو گا جب $t = -1$ ہو اور اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب $t = 1$ ہو۔ان دونوں صورتوں میں مستطیل کا رقبہ اصل تفاعل کے نیچے رقبے سے مختلف ہو گا۔تمام ٹکڑوں پر بلا منصوبہ نقطے چنتے ہوئے تمام مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=1}^{n}(f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{m=1}^{n} f_m^*\Delta x_m + \epsilon\sum_{m=1}^{n} t\Delta x_m$$

اب چونکہ $|t| \le 1$ ہے لہٰذا دائیں جانب مجموعے کے اندر قیمت کی زیادہ سے زیادہ ممکنہ قیمت $t = 1$ پر $\sum_{m=1}^{n}\Delta x_m = b - a$ حاصل ہو گی۔(حقیقت میں چونکہ ضروری نہیں ہے کہ t کی قیمت ہر مرتبہ اکائی ہی ہو لہٰذا اس مجموعے کی قیمت $b-a$ سے کم ہو گی۔) اب چونکہ ϵ کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں لہٰذا ہم اسے اتنا کم رکھتے ہیں کہ $\epsilon(b-a)$ قابل نظر انداز ہو۔درج بالا میں پہلا مجموعہ اُن مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ ہے جن کا رقبہ عین تفاعل کے نیچے رقبے کے برابر رکھا گیا تھا لہٰذا Δx_m کی ہر قیمت پر یہ مجموعہ اصل رقبے کے برابر ہی ہو گا۔یوں درج بالا سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\sum_{m=1}^{n}(f_m^* + t\epsilon)\Delta x_m = \sum_{i=m}^{n} f_m^*\Delta x_m$$

جو $x = a$ تا $x = b$ تفاعل کے نیچے کل رقبہ ہے۔

یوں آپ نے دیکھا کہ ہر ٹکڑے پر Q_m بلا منصوبہ چنتے ہوئے تفاعل کے نیچے اصل رقبہ حاصل ہوتا ہے۔ □

عمومی مفروضہ

اس کتاب میں فرض کیا جائے گا کہ خطی تکمل کی ہر راہ ٹکڑوں میں ہموار[11] ہے، یعنی کہ راہ کو محدود تعداد کی ہموار ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

بدن راہ پر خطی تکمل کو عموماً درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

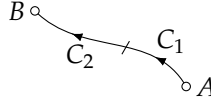
$$\oint_C \qquad \left(\int_C \text{ جگہ کی } \right)$$

خطی تکمل کی تعریف سے ظاہر ہے کہ قطعی تکمل کی درج ذیل جانی پہچانی خصوصیات خطی تکمل کے لئے بھی درست ہیں

$$\text{(الف)} \qquad \int_C kf\,\mathrm{d}s = k\int_C f\,\mathrm{d}s \qquad (k \text{ مستقل})$$
$$\text{(ب)} \qquad \int_C (f+g)\,\mathrm{d}s = \int_C f\,\mathrm{d}s + \int_C g\,\mathrm{d}s \tag{11.5}$$
$$\text{(پ)} \qquad \int_C f\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f\,\mathrm{d}s$$

جہاں مساوات 11.5-پ میں راہ C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ ان ٹکڑوں کی سمت بندی عین C کی طرح ہے (شکل 11.4)۔ راہ پر تکمل لیتے ہوئے دائری سمت تبدیل کرنے سے حاصل قیمت -1 سے ضرب ہو گی۔

---

[11] piecewise smooth

شکل 11.4: تکمل کی راہ کو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

11.2 خطی تکمل کا حل

خطی تکمل کو قطعی تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے اس کو حل کیا جاتا ہے۔ایسا تکمل کی راہ C کی روپ کی مدد سے کیا جاتا ہے۔آئیں اس عمل کو دیکھتے ہیں۔

اگر C کی روپ

$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k} \qquad a \le s \le b$$

ہو (جہاں s راہ C کی لمبائی قوس ہے) تب ہم مساوات 11.4 کی مدد سے درج ذیل استعمال کرتے ہیں۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)]\,\mathrm{d}s \tag{11.6}$$

اگر C کی روپ

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

ہو (جہاں t کوئی مقدار معلوم ہے) تب ہم

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t), z(t)]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{11.7}$$

استعمال کرتے ہیں جہاں مساوات 10.31 سے

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

ہے اور گزشتہ حصے کی طرح یہاں بھی فرض کیا گیا ہے کہ $\boldsymbol{r}(t)$ اور $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ دونوں استمراری ہیں اور $\dot{\boldsymbol{r}}(t) \neq \boldsymbol{0}$ ہے۔

آئیں مساوات 11.7 حاصل کرتے ہیں۔ہم $\boldsymbol{r}$ کی جگہ

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t)=\tilde{x}(t)\boldsymbol{i}+\tilde{y}(t)\boldsymbol{j}+\tilde{z}(t)\boldsymbol{k}$$

لکھ کر قوس لمبائی $s(t)$ حاصل کرتے ہیں۔اس کے بعد $\boldsymbol{r}(s(t))=\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ یعنی $x(s(t))=\tilde{x}(t)$، وغیرہ لکھ کر مساوات 11.6 کے دائیں ہاتھ میں قطعی تکمل کے قاعدے کے تحت

$$\int_a^b f[x(s),y(s),z(s)]\,\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{t_1} f[\tilde{x}(t),\tilde{y}(t),\tilde{z}(t)]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

حاصل کرتے ہیں جو (استعمال کی گئی علامتوں میں تبدیل کے علاوہ) عین مساوات 11.7 ہے۔

چونکہ عموماً $\boldsymbol{r}(t)$ معلوم یا قابل معلوم ہو گا لہٰذا مساوات 11.7 عملی مسائل کی تقریباً تمام صورتوں کو حل کر پاتا ہے۔

مثال 11.2: برائے مساوات 11.6
تفاعل $f(x,y)=x^3y$ کا شکل 11.5 میں دکھائی گئی گول قوس

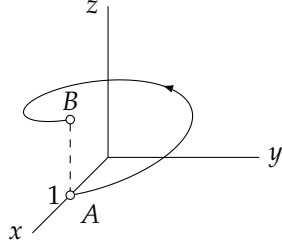
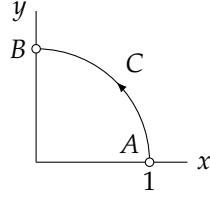
$$\boldsymbol{r}(s)=\cos s\boldsymbol{i}+\sin s\boldsymbol{j} \qquad 0\le s\le\frac{\pi}{2}$$

پر تکمل حاصل کریں۔

حل: چونکہ $x(s)=\cos s$ اور $y(s)=\sin s$ ہیں لہٰذا مساوات 11.5 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s&=\int_C x^3y\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 s\sin s\,\mathrm{d}s\\&=\int_1^0 -u^3\,\mathrm{d}u=\frac{1}{4} \qquad (u=\sin s)\end{aligned}$$

□

مثال 11.3: برائے مساوات 11.7
xy مستوی میں نقطہ $A:(-1,1,0)$ سے نقطہ $B:(1,5,0)$ تک راہ $y=2x+3$ پر $\int_C x^2y\,\mathrm{d}s$ کی قیمت دریافت کریں۔

(ب) فضا میں خطی تکمل کی راہ (مثال 11.4)

(الف) سطح میں تکمل کی راہ (مثال 11.2)

شکل 11.5: سطح میں راہ اور فضا میں راہ۔

حل: ہم C کو درج ذیل مقدار معلوم روپ[12] میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (2t+3)\boldsymbol{j} \qquad -1 \le t \le 1$$

یوں

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} \quad \implies \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} = \sqrt{5}$$

ہو گا۔ راہ پر رہتے ہوئے $x^2y = t^2(2t+3) = 2t^3 + 3t^2$ ہو گا لہٰذا مساوات 11.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_C x^2 y \, \mathrm{d}s = \sqrt{5} \int_{-1}^{1} (2t^3 + 3t^2) \, \mathrm{d}t = 2\sqrt{5}$$

□

مثال 11.4: فضا میں راہ پر خطی تکمل
پیچ دار راہ کو شکل 11.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس پر $\int_C (x^2+y^2+z^2)^2 \, \mathrm{d}s$ دریافت کریں۔

حل: پیچ دار راہ کی مساوات

$$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

[12] ظاہر ہے کہ ہم $t = x$ لیتے ہوئے راہ کو $\boldsymbol{r}(x) = x\boldsymbol{i} + (2x+3)\boldsymbol{j}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ہے لہٰذا

$$\dot{\boldsymbol{r}} = -\sin t\boldsymbol{i} + \cos \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} = \sqrt{2}$$

ہو گا۔ اس راہ پر چلتے ہوئے

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)^2 = (1 + t^2)^2$$

ہو گا اور یوں مساوات 11.7 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 \,\mathrm{d}s &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2)^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\Big[\frac{(2\pi)^5}{5} + \frac{2(2\pi)^3}{3} + 2\pi\Big] \approx 3013\end{aligned}$$

□

ایسا خطی تکمل جس کا متکمل تجربی تفاعل ہو یا جو پیچیدہ قطعی تکمل دیتا ہو کو تکمل کے اعدادی طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے۔

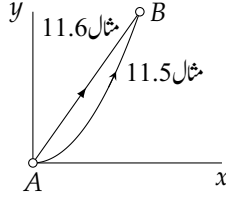
کئی معاملوں میں خطی تکمل کے متکمل درج ذیل روپ رکھتے ہیں

$$g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \quad g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \quad g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \tag{11.8}$$

جہاں $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$ تکمل کی راہ کی مقدار معلوم روپ میں موجود تفاعل کے تفرق ہیں۔ایسی صورت میں ہم

$$\int_C g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = \int_C g(x,y,z)\,\mathrm{d}x \tag{11.9}$$

لکھتے ہیں۔ باقی دو صورتوں کے لئے بھی ایسا کیا جاتا ہے۔ایک ہی راہ C پر ان طرز کے تکمل کے مجموعے کو درج ذیل سادہ صورت میں لکھا جاتا ہے۔

$$\int_C f\,\mathrm{d}x + \int_C g\,\mathrm{d}y + \int_C h\,\mathrm{d}z = \int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.10}$$

شکل 11.6: تکمل کے دو مختلف راہ (مثال 11.5 اور مثال 11.6)

راہ C کی روپ استعمال کرتے ہوئے تین میں سے دو آزاد متغیرات کو حذف کرتے ہوئے حاصل قطعی تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ تیسرا آزاد متغیر اس قطعی تکمل کا متغیر ہو گا۔

مثال 11.5: برائے مساوات 11.9 اور مساوات 11.10
خطی تکمل $\int_C [x^2y^2 \,\mathrm{d}x + (x-y+z)\,\mathrm{d}y + xz\,\mathrm{d}z]$ کی قیمت دریافت کریں۔ تکمل کی راہ سطح $z=5$ میں قوس مکافی $y=x^2$ میں نقطہ $A:(0,0,5)$ تا نقطہ $B:(1,1,5)$ ہے (شکل 11.6-الف)۔

حل: چونکہ $y=x^2$ ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ یا $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔ چونکہ $z=5$ غیر متغیر ہے لہٰذا متکمل کے آخری جزو کا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_0^1 [x^2x^4\,\mathrm{d}x + (x-x^2+5)2x\,\mathrm{d}x] = \int_0^1 (x^6-2x^3+2x^2+10x)\,\mathrm{d}x = \frac{223}{42} \approx 5.31$$

□

مثال 11.6: درج بالا مثال کے تکمل کو انہیں دو نقطوں کے درمیان سطح $z=5$ میں راہ $y=x$ پر حاصل کریں (شکل 11.6-ب)۔

حل: اب $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 [x^2x^2\,\mathrm{d}x + (x-x+5)x\,\mathrm{d}x] = \int_0^1 (x^4+5)\,\mathrm{d}x = \frac{26}{5} = 5.2$$

□

مثال 11.5 اور مثال 11.6 میں ایک جیسے متکمل، ابتدائی نقطہ اور اختتامی نقطہ پائے گئے البتہ ان مثالوں میں راہ مختلف تھی۔ تکمل کے جوابات بھی مختلف تھے۔اس نتیجے کے مطابق تکمل کی قیمت ابتدائی نقطہ، اختتامی نقطہ اور متکمل کے علاوہ راہ پر بھی منحصر ہوتی ہے۔ اس بنیادی حقیقت پر مزید غور اسی باب میں کیا جائے گا۔

بعض اوقات مساوات 11.10 کے f ، g ، h سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے ارکان v_1 ، v_2 ، v_3 ہوں گے

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$$

لہٰذا

$$v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z = \left(v_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + v_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + v_3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

ہو گا جہاں قوسین میں بند حصہ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ اور اکائی مماسی سمتیہ

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k} \qquad \text{(حصہ 10.5 دیکھیں)}$$

کا اندرونی ضرب ہے۔ $\boldsymbol{r}$ تکمل کی راہ C ہے۔یوں درج ذیل ہو گا

$$\int_C (v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z) = \int -C\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \tag{11.11}$$

جس کو عموماً

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = \int_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

لکھا جاتا ہے جہاں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k} \tag{11.12}$$

ہے۔

مثال 11.7: قوت اور کام

ایک ذرہ پر متغیر قوت $\boldsymbol{f}$ عمل کرتی ہے جو ذرے کو راہ C پر ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک منتقل کرتی ہے۔اس قوت سے سر زد کام[13] درج ذیل خطی تکمل دیتی ہے

$$W = \int_C \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{11.13}$$

---

[13] work

جہاں تکمل کو راہ پر منتقلی کی سمت میں حاصل کیا جاتا ہے۔ مثال 7.7 میں کام کی تعریف اور تکمل کی تعریف بطور مجموعہ استعمال کرتے ہوئے درج بالا خطی تکمل لکھا گیا ہے۔

ہم وقت t کو تکمل کا متغیر چنتے ہیں۔ یوں

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$$

ہو گا جہاں $\boldsymbol{v}$ سمتی رفتار سمتیہ ہے۔ یوں مساوات 11.13 درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t \tag{11.14}$$

جہاں ابتدائی لمحہ t_0 اور اختتامی لمحہ t_1 ہے۔ نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت

$$\boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\dot{\boldsymbol{v}} \tag{11.15}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 11.14 سے درج ذیل ملتا ہے

$$W = \int_{t_0}^{t_1} m\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2\right)\mathrm{d}t = \left.\frac{m}{2}\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2\right|_{t_0}^{t_1}$$

جس کے تحت ذرے کی میکانی توانائی میں اضافہ عین کام کے برابر ہے۔ یہ میکانیات کا بنیادی قاعدہ ہے۔ □

سوالات

راہ پر مثبت سمت کو ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے کی رخ رکھتے ہوئے $\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت سوال 11.1 تا سوال 11.8 میں دریافت کریں۔

سوال 11.1: سیدھے خط $y=-4x$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(1,-4)$ ۔

جواب: $\frac{17\sqrt{17}}{3}$

سوال 11.2: سیدھے خط $y=3x$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(2,6)$ ۔

جواب: $\frac{80\sqrt{10}}{3}$

سوال 11.3: سیدھے خط پر نقطہ $(1,2)$ تا نقطہ $(3,0)$ ۔

جواب: $\frac{34\sqrt{2}}{3}$

سوال 11.4: سیدھے خط پر نقطہ $(3,0)$ تا نقطہ $(1,2)$ ۔

جواب: $-\frac{34\sqrt{2}}{3}$

سوال 11.5: گھڑی کی الٹ رخ دائرہ $x^2+y^2=9$ پر نقطہ $(3,0)$ تا نقطہ $(0,3)$ ۔

جواب: $\frac{27\pi}{2}$

سوال 11.6: x محور پر $(0,0)$ تا $(2,0)$ اور یہاں سے y محور کے متوازی $(2,2)$ تک۔

جواب: $\frac{40}{3}$

سوال 11.7: y محور پر $(0,0)$ تا $(0,2)$ اور یہاں سے x محور کے متوازی $(2,2)$ تک۔

جواب: $\frac{40}{3}$

سوال 11.8: نقطہ $(0,0)$ سے سیدھے خط پر نقطہ $(2,2)$ تک۔

جواب: $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

سوال 11.9: تکمل $\int_C (x+z)y\,\mathrm{d}s$ کی قیمت کو دائرہ $x^2+y^2=1$ ، $z=2$ پر نقطہ $(0,0,2)$ تا نقطہ $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},2)$ دریافت کریں (گھڑی کی الٹ رخ)۔

جواب: $\frac{9}{4}-\sqrt{2}$

تکمل $\int_C (3y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y)$ کی قیمت کو سوال 11.10 تا سوال 11.12 میں دیے راہ پر دریافت کریں۔

سوال 11.10: سیدھے خط پر نقطہ $(0,1)$ تا نقطہ $(1,0)$ ۔

جواب: $\frac{4}{3}$

سوال 11.11: قوس مکافی $y=x^2$ پر نقطہ $(0,0)$ تا نقطہ $(1,1)$ ۔

جواب: $\frac{1}{10}$

سوال 11.12: دائرہ $x^2+y^2=1$ پر گھڑی کی الٹ رخ نقطہ $(1,0)$ تا نقطہ $(1,1)$ ۔

جواب: $-\frac{8}{3}$

سوال 11.13 تا سوال 11.18 میں دی گئی راہ پر قوت $\boldsymbol{f}=2x\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{k}$ کا کام دریافت کریں۔

سوال 11.13: x محور پر $(0,0,0)$ تا $(1,0,0)$ ۔

جواب: 1

سوال 11.14: $z=2$ سطح میں y محور پر $(0,0,2)$ تا $(0,1,2)$ ۔

جواب: 2

سوال 11.15: سطح مکافی $y=x^2$ ، $z=1$ پر $(0,0,1)$ تا $(1,1,1)$ ۔

جواب: 2

سوال 11.16: سطح مکافی $y=z^4$ ، $x=2$ پر $(0,2,0)$ تا $(1,2,1)$ ۔

جواب: $\frac{3}{5}$

سوال 11.17: سیدھے خط $y=x$ ، $z=2x$ پر $(0,0,0)$ تا $(1,1,2)$ ۔

جواب: 1

سوال 11.18: سیدھے خط $y=x^2$ ، $z=2x^3$ پر $(0,0,0)$ تا $(1,1,2)$ ۔

جواب: $\frac{3}{5}$

سوال 11.19: مان لیں کہ قوس C کے تمام نقطوں پر $\boldsymbol{p}$ معین ہے اور کہ $|\boldsymbol{p}|$ محدود ہے یعنی C پر $|\boldsymbol{p}| < M$ ہے جہاں M کوئی مثبت عدد ہے۔ ثابت کریں کہ

$$\left| \int_C \boldsymbol{p} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \right| < Ml \tag{11.16}$$

ہو گا جہاں C کی لمبائی l ہے۔

جواب: اندرونی ضرب کے تحت $\boldsymbol{p} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{p}||\mathrm{d}\boldsymbol{r}| \cos\theta$ ہو گا۔ چونکہ $|\boldsymbol{p}| < M$ ہے اور $\cos\theta \le 1$ ہے لہٰذا $|\boldsymbol{p}|\cos\theta < M$ ہو گا۔ خطی تکمل کی تعریف مساوات 11.3 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \Delta s$ لکھی گئی ہے۔

$$J_n = \sum_{m=1}^{n} |\boldsymbol{p}| \cos\theta \Delta s_m < \sum_{m=1}^{n} M \Delta s_m = M \sum_{m=1}^{n} \Delta s_m = Ml$$

11.3 دوہرا تکمل

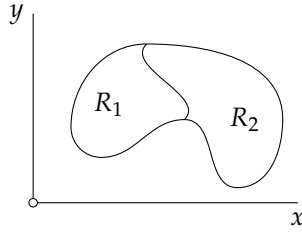
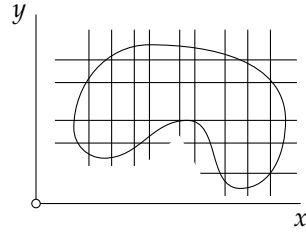
وقفہ $a \le x \le b$ کے ہر نقطے پر معین تفاعل $f(x)$ کا x محور پر a تا b قطعی تکمل

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

لکھا جاتا ہے۔ دوہرا تکمل کی صورت میں xy سطح میں بند محدود[14] خطہ R کے ہر نقطے پر معین تفاعل $f(x,y)$ متکمل ہو گا۔

دوہرا تکمل کی تعریف قطعی تکمل کی تعریف سے مشابہت رکھتی ہے۔ ہم x اور y محور کے متوازی خطوط کھینچ کر خطہ R کو ٹکڑے کرتے ہیں (شکل 11.7-الف)۔ ہم R کے ٹکڑوں کو 1 تا n سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہر ٹکڑے میں کوئی نقطہ چنتے ہیں مثلاً k مستطیلی ٹکڑے میں نقطہ (x_k, y_k) ہو گا۔ تمام ٹکڑوں کا مجموعہ

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k \tag{11.17}$$

[14] "بند" سے مراد ہے کہ وقفے کی سرحد بھی وقفے کا حصہ ہے اور "محدود" سے مراد ہے کہ پورے وقفے کو کافی وسعت کے دائرے میں گھیرا جا سکتا ہے۔

(ب) خطے کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ (الف) R کے متعدد ٹکڑے

شکل 11.7: دوہرا تکمل کی تعریف اور خواص

لیتے ہیں جہاں k مستطیلی ٹکڑے کا رقبہ A_k ہے۔ہم مثبت عدد صحیح n کی قیمت بتدریج بڑھاتے ہوئے بالکل آزادانہ طریقے سے اس طرح کے مجموعے حاصل کرتے ہیں پس اتنا خیال رکھا جاتا ہے کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی کے قریب پہنچتی ہو، مستطیلی ٹکڑوں کی وتر کی زیادہ سے زیادہ لمبائی صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، . . . کا سلسلہ حاصل ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ R میں $f(x,y)$ استمراری ہے اور R کو لامتناہی تعداد کی ہموار منحنیات گھیرتی ہیں۔ایسی صورت میں یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، . . . کا سلسلہ مرتکز ہو گا جس کا حد ٹکڑوں کی چنائی یا ٹکڑوں میں نقطوں (x,y_k) کی چنائی سے بالکل آزاد ہو گا (مثال 11.1 کی طرح)۔ اس حد کو خطہ R پر $f(x,y)$ کا دوہرا تکمل[15] کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

دوہرا تکمل کی تعریف سے ظاہر ہے یہ قطعی تکمل کی طرح کئی خواص رکھتا ہے۔فرض کریں کہ خطہ R میں متعین اور استمراری f اور g تفاعل کے متغیرات x اور y ہیں۔ تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\iint\limits_R kf\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = k\iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (k \text{ مستقل ہے})$$

$$\iint\limits_R (f+g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_R g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.18}$$

$$\iint\limits_R f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{R_1} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{R_2} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (\text{شکل 11.7-ب})$$

[15] double integral

مزید R میں کم از کم ایک ایسا نقطہ (x_0, y_0) ضرور پایا جاتا ہے کہ درج ذیل تعلق درست ثابت ہو

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(x_0,y_0)A \tag{11.19}$$

جہاں خطہ R کا رقبہ A ہے۔یہ تعلق دوہرا تکملات کا اوسط قیمت مسئلہ[16] کہلاتا ہے۔

خطہ R پر دوہرا تکملات کو یکے بعد دیگرے دو عدد تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔آئیں اس ترکیب کو سمجھیں۔

فرض کریں کہ R کو درج ذیل غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہے (شکل 11.8-الف)

$$a \le x \le b, \quad g(x) \le y \le h(x)$$

تب $y = g(x)$ اور $y = h(x)$ خطہ R کی سرحد کو ظاہر کریں گے اور

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{11.20}$$

ہو گا۔ہم پہلے (چکور قوسین میں بند) اندرونی تکمل

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

کی قیمت حاصل کرتے ہیں جہاں x بطور مقدار معلوم کردار ادا کرتا ہے لہٰذا اس تکمل کا حاصل x کا تفاعل $F(x)$ ہو گا۔اس کے بعد x محور پر $F(x)$ کا تکمل a تا b حاصل کرتے ہوئے دوہرا تکمل (مساوات 11.20) کی قیمت حاصل ہو گی۔

اسی طرح اگر R کو درج ذیل غیر مساوات (شکل 11.8-ب)

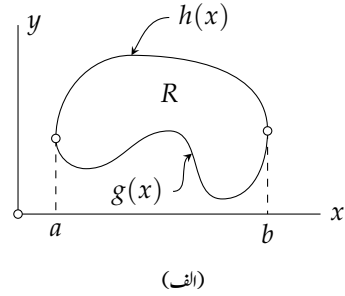
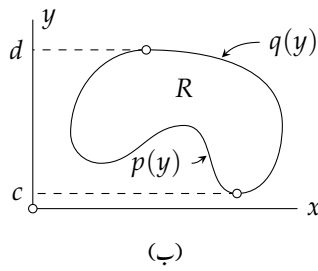
$$c \le y \le d, \quad p(y) \le x \le q(y)$$

سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب درج ذیل ہو گا

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{11.21}$$

---

[16] mean value theorem

شکل 11.8: تخمینہ دوہرا تکمل

جہاں اندرونی تکمل کا حاصل y کا تفاعل ہو گا جس کو y محور پر c تا d تکمل کرتے ہوئے دوہرا تکمل کی قیمت حاصل ہو گی۔

اگر R کو غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن نہ ہو لیکن R کو ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے کو غیر مساوات سے ظاہر کرنا ممکن ہو تب علیحدہ علیحدہ ہر ٹکڑے پر $f(x,y)$ کا دوہرا تکمل حاصل کرتے ہوئے تمام کا مجموعہ لیتے ہوئے R پر $f(x,y)$ کے دوہرا تکمل کی قیمت حاصل ہو گی۔

دوہرا تکمل کے عملی استعمال

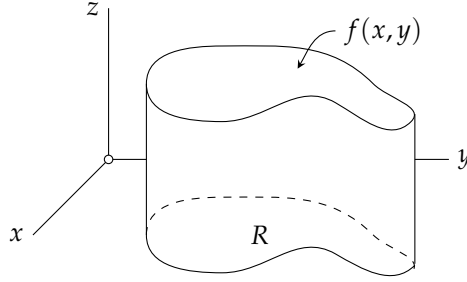
دوہرا تکمل کے کئی عملی جیومیٹریائی اور طبعی استعمال پائے جاتے ہیں۔ مثلاً R کا رقبہ[17] A درج ذیل ہے۔

$$A = \iint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

چونکہ مساوات 11.17 میں جزو $f(x_k,y_k)\Delta A_k$ سے مراد اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم ہے جس کے بنیاد کا رقبہ A_k اور قد $f(x_k,y_k)$ ہے (شکل 11.9) لہٰذا خطہ R کے اوپر سطح $z = f(x,y)\ (>0)$ کے نیچے حجم H درج ذیل ہے۔

$$H = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

---

[17] area

شکل 11.9: دوہرا تکمل بطور حجم

فرض کریں کہ مستوی xy میں پھیلے کمیت کی کثافت (کمیت فی اکائی رقبہ) کو $f(x,y)$ ظاہر کرتی ہے۔تب R میں کل کمیت M درج ذیل ہو گی۔

$$M = \iint\limits_R f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

R میں موجود کمیت کی مرکز ثقل[18] کے محدد

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint\limits_R x f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint\limits_R y f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

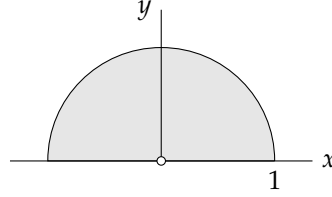
ہوں گے۔خطہ R میں موجود کمیت کے x اور y محور کے گرد جمودی معیار اثر[19] بالترتیب I_x اور I_y ہوں گے

$$I_x = \iint\limits_R y^2 f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \quad I_y = \iint\limits_R x^2 f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

جبکہ مبدا کے گرد اس کی قطبی جمودی معیار اثر[20] I_0 ہو گی۔

$$I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_R (x^2 + y^2) f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

---

[18] center of gravity
[19] moment of inertia
[20] polar moment of inertia

شکل 11.10: کثافت کمیت (مثال 11.8)

مثال 11.8: عملی دوہرا تکمل
خطہ $R: 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, \; -1 \le x \le 1$ میں کثافت کمیت $f(x,y) = 1$ ہے (شکل 11.10)۔ مرکز ثقل اور جمودی معیار اثر I_x ، I_y ، I_0 دریافت کریں۔

حل: R میں کل کمیت M درج ذیل ہے (جہاں آخری قدم پر تکمل میں $x = \sin\theta$ پر کیا گیا ہے)۔

$$M = \iint\limits_R 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$

چونکہ $f(x,y) = 1$ ہے لہٰذا کل کمیت عین نصف دائرے کے رقبے کے برابر ہے۔ مرکز ثقل کے محدد

$$\begin{aligned}
\bar{x} = \frac{2}{\pi}\iint\limits_R x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^0 z^2 \,\mathrm{d}z = 0 \qquad (\sqrt{1-x^2} = z)
\end{aligned}$$

اور

$$\bar{y} = \frac{2}{\pi}\iint\limits_R y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi}{3}$$

ہیں۔ مزید

$$\begin{aligned}
I_x = \iint\limits_R y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

اور

$$I_y = \iint\limits_R x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 \,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$$

سے قطبی جمودی معیار اثر I_0 درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi}{4}$$

مثال 11.9 میں I_x کو نسبتاً آسان ترکیب سے حاصل کیا گیا ہے۔ □

ہم جانتے ہیں کہ قطعی تکمل

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$$

میں

$$x = x(u)$$

پر کرتے ہوئے نیا متغیر u متعارف کیا جاتا ہے، جہاں کسی وقفہ $\alpha \le u \le \beta$ پر تفاعل $x(u)$ اور اس کا تفرق استمراری اور $x(\alpha) = a$ ، $x(\beta) = b$ [یا $x(\alpha) = b$ ، $x(\beta) = a$] ہیں اور جیسے جیسے $x(u)$ وقفہ a تا b پر تبدیل ہوتا ہو ویسے ویسے وقفہ α تا β پر u تبدیل ہوتا ہو۔یوں

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[x(u)] \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \,\mathrm{d}u \tag{11.22}$$

لکھا جاتا ہے۔مثال کے طور پر $f(x) = \sqrt{1-x^2}, a = 0, b = 1$ کی صورت میں $x = \sin u$ پر کرتے ہوئے

$$f[x(u)] = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos u, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

ہوں گے جن سے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$$

دوہرا تکمل

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

کی صورت میں ہم نئے متغیرات u ، v متعارف کرنے کی خاطر

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

لکھتے ہیں، جہاں uv سطح میں کسی خطہ R^* پر تفاعل $x(u,v)$ ، $y(u,v)$ اور ان کے یک رتبی جزوی تفرق استمراری ہوں تا کہ R^* میں ہر نقطہ (u_0,v_0) کا خطہ R میں مطابقتی نقطہ $[x(u_0,v_0), y(u_0,v_0)]$ پایا جائے اور مزید پورے R^* پر یعقوبی[21] J

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

مثبت اور یا پورے R^* پر یعقوبی[22] J منفی ہو۔تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{R^*} f[x(u,v), y(u,v)] \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{11.23}$$

یوں متکمل کو u ، v کی صورت میں لکھا جاتا ہے جبکہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ ضرب یعقوبی J کی مطلق قیمت لکھی جاتی ہے۔

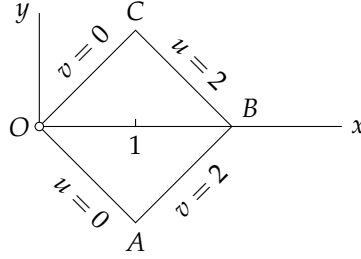
مثال کے طور پر قطبی محدد[23] r اور θ متعارف کرنے کی خاطر ہم

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

لکھتے ہیں لہٰذا

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

---

[21] Jacobian
[22] جرمن ریاضی دان [1804-1851] کارل گستاف یعقوب یعقوبی
[23] polar coordinates

شکل 11.11: مثال 11.10 میں تکمل کا خطہ

ہو گا اور یوں

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{R^*} f[r\cos\theta, r\sin\theta]r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

لکھا جائے گا جہاں xy سطح میں خطہ R کا سطح $r\theta$ میں مطابقتی خطہ R^* ہے۔

مثال 11.9: مساوات 11.23 استعمال کرتے ہوئے مثال 11.8 کی I_x دوبارہ دریافت کریں۔

حل:

$$I_x = \iint\limits_R y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2\sin^2\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

□

مثال 11.10: درج ذیل دوہرا تکمل حل کریں

$$\iint\limits_R (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

جہاں R کو شکل 11.11 میں دکھایا گیا ہے۔

حل: چکور R کے اطراف کو محور (u,v) لینے سے مسئلے کا حل نسبتاً آسان ہو جاتا ہے۔آئیں اس تبادل پر غور کرتے ہیں جو (x,y) کو (u,v) میں بدلے۔چکور کے کونوں کو دونوں محدد میں جدول 11.1 میں لکھا گیا

جدول 11.1: تبادل محور (مثال 11.10)

(u,v)	(x,y)	
$(0,2)$	$(1,-1)$	A
$(2,2)$	$(2,0)$	B
$(2,0)$	$(1,1)$	C

ہے۔ (x,y) محدد سے (u,v) کے تبادل کو درج ذیل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

جس میں کونا A پر کرنے سے

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \begin{matrix} a - b = 0 \\ c - d = 2 \end{matrix}$$

ملتا ہے اور کونا B پر کرنے سے

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{matrix} a = 1 \\ c = 1 \end{matrix}$$

ملتا ہے۔یوں $b = 1$ اور $d = -1$ ہوں گے۔یوں درکار تبادل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

یوں $x + y = u$ اور $x - y = v$ تبادل یعنی $x = \frac{1}{2}(u + v)$ اور $y = \frac{1}{2}(u - v)$ ہو گا اور یعقوبی درج ذیل ہو گا۔

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

R کا مطابقتی چکور $0 \le u \le 2$ ، $0 \le v \le 2$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \left| -\frac{1}{2} \right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \frac{8}{3}$$

□

سوالات

سوال 11.20 تا سوال 11.26 حل کریں۔ تکمل کا خطہ بیان کریں۔

سوال 11.20: $\int_0^1 \int_0^2 (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
جواب: $\frac{10}{3}$

سوال 11.21: $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
جواب: $\frac{\pi}{8}$

سوال 11.22: $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.23: $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{1}{24}$

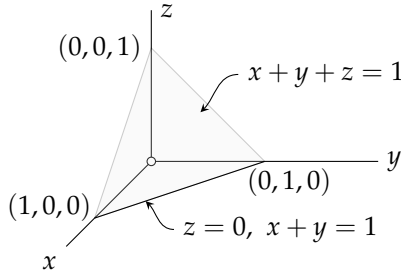
سوال 11.24: $\int_0^2 \int_0^{4-2x} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
جواب: 8

سوال 11.25: $\int_0^2 \int_{1+x}^{5-x} (1+xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
جواب: 12

سوال 11.26: $\int_0^1 \int_{1+x}^{5-x} (1-xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
جواب: -1

سوال 11.27 تا سوال 11.30 میں فضا میں خطہ دیا گیا ہے۔اس کا حجم دریافت کریں۔

سوال 11.27: کارتیسی نظام کے ربع اول میں سطح $x+y+z=1$ کے نیچے چو سطحہ۔

جواب: شکل 11.12 میں سطح $x+y+z=1$ کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے جو x ، y اور z محور کو بالترتیب $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ پر چھوتی ہے۔ربع اول میں چو سطحی کے کونے $(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ ہیں۔مستوی xy پر $z=0$ ہو گا للہذا دی گئی سطح xy مستوی کو خط $x+y=1$ یعنی $x=1-y$ پر قطع کرتی ہے۔یوں ربع اول میں $x=0$ اور $x=1-y$

شکل 11.12: سطح $x+y+z=1$ کے نیچے ربع اول میں چوسطحہ

کے مابین خطہ R ہو گا۔ R کے کونے $(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ اور $(0,1,0)$ ہیں۔ اس طرح ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

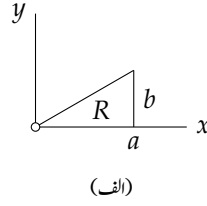
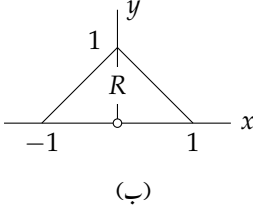
$$H=\int_0^1\int_0^{1-y} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^{1-y}(1-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 \left(x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Big|_0^{1-y}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{2}(y^2-2y+1)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$$

سوال 11.28: وہ چو سطح جس کو سطح $2x+6y+z=12$ ربع اول سے کاٹتی ہے۔
جواب: 216

سوال 11.29: وہ حجم جس کو نلکی $x^2+y^2=1$ اور نلکی $y^2+z^2=1$ گھیرتی ہیں۔
جواب: نلکی $y^2+z^2=1$ سے حجم کی بالائی سطح $z=\sqrt{1-y^2}$ اور نچلی سطح $z=-\sqrt{1-y^2}$ ملتے ہیں۔ مشابہت سے ہم تکمل کو بالائی سطح اور xy مستوی کے درمیان حاصل کرتے ہوئے حاصل جواب کو 2 سے ضرب دے سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا جہاں $x^2+y^2=1$ سے x کے حدود $-\sqrt{1-y^2}$ اور $\sqrt{1-y^2}$ لکھے گئے ہیں۔

$$H=2\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{16}{3}$$

سوال 11.30: سطح $z=x^2$ اور سطح $x=z^2$ کے درمیان $y=0$ تا $y=2$
جواب: یہ سطحیں $x=0$ اور $x=1$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔ بالائی سطح $z=\sqrt{x}$ ہے (تسلی

(ب) (الف)

شکل 11.13: خطہ کثافت (سوال 11.35)

کر لیں)۔ یوں xy مستوی اور بالائی سطح کے مابین حجم معلوم کرتے ہوئے اس سے xy مستوی اور نچلی سطح کے مابین حجم منفی کرتے ہیں۔

$$H = \int_2^0 \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \tfrac{2}{3}$$

سوال 11.31 تا سوال 11.34 میں کمیت کے مرکز ثقل کے محدد $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ معلوم کریں۔ خطہ R اور اس میں کمیت کی کثافت $f(x,y)$ دی گئی ہے۔

سوال 11.31: $f(x,y) = 1, \quad R: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$
جوابات: $\bar{x} = 1,\ \bar{y} = \frac{3}{2}$

سوال 11.32: $f(x,y) = 1, \quad R: x^2 + y^2 \le 1,$ ربع اول
جوابات: $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4\pi}{3}$

سوال 11.33: $f(x,y) = x + y, \quad R: 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4$
جوابات: $\bar{x} = \frac{12}{7},\ \bar{y} = \frac{50}{21}$

سوال 11.34: $f(x,y) = xy, \quad R: y \le 4 - 3x$ ربع اول
جوابات: $\bar{x} = \frac{8}{15},\ \bar{y} = \frac{8}{5}$

سوال 11.35: شکل 11.13 میں دکھائے گئے خطہ R میں کمیتی کثافت $f(x,y) = 1$ پایا جاتا ہے۔ جمودی معیار اثر I_x ، I_y ، I_z دریافت کریں۔

جوابات:

(الف) $I_x=\frac{ab^3}{12},\ I_y=\frac{a^3b}{4},\ I_0=I_x+I_y$

(ب) $I_x=I_y=\frac{1}{6},\ I_0=\frac{1}{3}$

قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے سوال 11.36 تا سوال 11.39 میں $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.36: $f=x+y,\ R: x^2+y^2<4,\ \ y\geq 0$

جواب: $\frac{11}{3}$

سوال 11.37: $f=\sqrt{x^2+y^2},\ R: x^2+y^2\leq a,\ \ y\geq 0,\ \ x\geq 0$

جواب: $\frac{a^3\pi}{6}$

سوال 11.38: $f=x^2+y^2,\ R: x^2+y^2\leq a$

جواب: $\frac{\pi a^4}{2}$

سوال 11.39: $f=e^{-x^2-y^2}$، R: $x^2+y^2=9$ اور $x^2+y^2=16$ کے درمیان چھلا

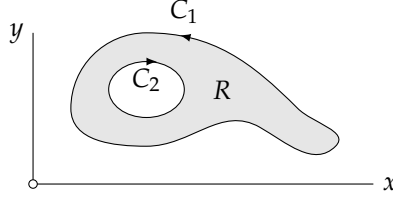
جواب: $\pi(e^{-9}-e^{-16})$

سوال 11.40 تا سوال 11.41 میں یعقوبی دریافت کریں۔ حاصل جواب کی جیومیٹریائی وجہ بیان کریں۔ (اشارہ: (x,y) سے (u,v) تبادل کے لئے مثال 11.10 دیکھیں۔)

سوال 11.40: مستقیم حرکت $x=u+a,\quad y=v+b$

جواب: 1

سوال 11.41: مرکز کے گرد گھومنا $x=u\cos\phi-v\sin\phi,\quad y=u\sin\phi+v\cos\phi$

جواب: 1

شکل 11.14: خطہ R کی سرحد کے دو حصے C_1 اور C_2 ہیں۔ C_1 پر گھڑی کی الٹ رخ جبکہ C_2 پر گھڑی کی رخ چلتے ہوئے خطی تکمل حاصل کیا جائے گا۔

11.4 دوہرا تکمل کا خطی تکمل میں تبادلہ

سطح میں کسی خطے پر دوہرا تکمل کو اس خطے کے سرحد پر خطی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ بعض اوقات ایسا کرنے سے آسانی سے حل ہونے والا تکمل حاصل ہوتا ہے۔ تکمل پر نظریاتی غور و فکر کے دوران یہ تبادل سود مند ثابت ہوتا ہے۔ یہ تبادل درج ذیل مسئلے کے تحت ممکن ہے۔

مسئلہ 11.1: سطح میں مسئلہ گرین[24] (دوہرا تکمل سے خطی تکمل اور خطی تکمل سے دوہرا تکمل کا حصول)
فرض کریں کہ مستوی xy میں R ایک ایسا بند اور محدود خطہ ہے کہ جس کی سرحد C، محدود تعداد کی ہموار منحنیات سے بنی ہوئی ہے۔ مزید فرض کریں کہ کسی ایسے پورے خطے میں، جس کا R حصہ ہو، تفاعل $f(x,y)$ اور $g(x,y)$ اور ان کے جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial g}{\partial x}$ استمراری ہوں۔ تب درج ذیل ہو گا

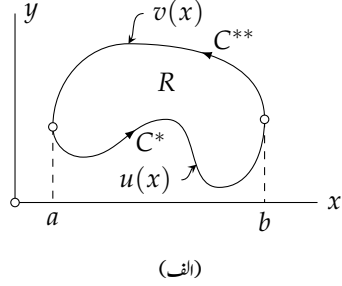
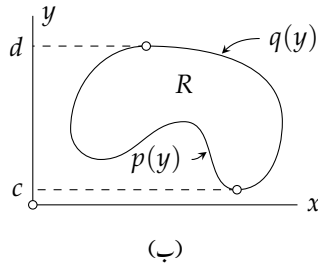
$$\iint\limits_R \left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_C (f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y) \tag{11.24}$$

جہاں خطی تکمل R کی پوری سرحد C پر یوں حاصل کیا جاتا ہے کہ تکمل لینے کی رخ C پر چلتے ہوئے R بائیں ہاتھ کو ہو (شکل 11.14)۔

ثبوت: ہم مسئلہ گرین[25] کو پہلے ایسے خطے کے لئے ثابت کرتے ہیں جس کو درج ذیل دونوں صورتوں سے ظاہر کرنا ممکن ہو (شکل 11.15)۔

$$\text{(الف)}\quad a\le x\le b,\quad u(x)\le y\le v(x),$$
$$\text{(ب)}\quad c\le y\le d,\quad p(y)\le x\le q(y)$$

(الف)

(ب)

شکل 11.15: مخصوص قسم کا خطہ (مسئلہ گرین)

مساوات 11.20 استعمال کرتے ہوئے

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \tag{11.25}$$

لکھ کر (جہاں متکمل $\frac{\partial f}{\partial y}$ ہے) اندرونی تکمل

$$\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}y = f(x,y)\Big|_{u(x)}^{v(x)} = f[x, v(x)] - f[x, u(x)]$$

حاصل کر کے مساوات 11.25 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_a^b f[x, v(x)] \, \mathrm{d}x - \int_a^b f[x, u(x)] \, \mathrm{d}x \\
&= -\int_a^b f[x, u(x)] \, \mathrm{d}x - \int_b^a f[x, v(x)] \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

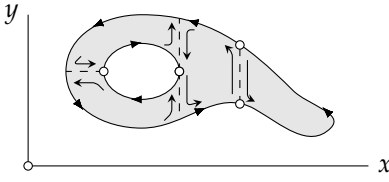
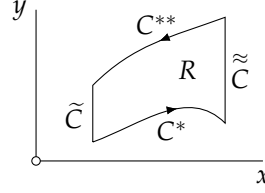
چونکہ $y = u(x)$ شکل 11.15-الف میں سمت بند منحنی C^* کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $y = v(x)$ منحنی C^{**} کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا بائیں ہاتھ کے تکملات کو C^* اور C^{**} پر خطی تکملات

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}y = -\int_{C^*} f(x,y) \, \mathrm{d}x - \int_{C^{**}} f(x,y) \, \mathrm{d}x = -\int_C f(x,y) \, \mathrm{d}x \tag{11.26}$$

---

[24] Green's theorem

[25] برطانوی ریاضی دان جارج گرین [1793-1841]

(الف) (ب)

شکل 11.16: مسئلہ گرین کا ثبوت

لکھا جا سکتا ہے۔ آخری قدم پر سرحد C^* اور سرحد C^{**} پر حاصل تکملات کو پوری سرحد C پر حاصل تکمل لکھا گیا ہے۔

اگر C کے کچھ حصے y محور کے متوازی ہوں (جیسے شکل 11.16-الف میں $\widetilde{C}$ اور $\widetilde{\widetilde{C}}$ ہیں) تب بھی مساوات 11.26 درست ہو گا۔ایسا اس لئے ہو گا کہ y محور کے متوازی حصوں پر تکمل کی قیمت صفر ہو گی لہٰذا سرحد کی ان حصوں (یعنی $\widetilde{C}$ اور $\widetilde{\widetilde{C}}$) پر تکمل کو بھی مساوات 11.26 میں شامل کرتے ہوئے R کی پوری سرحد پر تکمل لکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح مساوات 11.21 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int\limits_c^d \left[\int\limits_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d g[q(y),y]\,\mathrm{d}y + \int_d^c g[p(y),y]\,\mathrm{d}y \\
&= \int_C g(x,y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{11.27}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 11.26 اور مساوات 11.27 ملا کر مخصوص خطے کے لئے مساوات 11.24 ثابت ہوتی ہے۔

اب ہم مسئلے کو ایسی خطے کے لئے ثابت کرتے ہیں جو از خود مخصوص خطہ نہیں ہے لیکن اس کو محدود تعداد کی مخصوص خطوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے (شکل 11.16-ب)۔ایسی صورت میں ہم تمام ضمنی مخصوص خطوں پر مسئلہ لاگو کرتے ہوئے جوابات کا مجموعہ لیتے ہیں۔بائیں ہاتھ کے ارکان کا مجموعہ R پر تکمل دیگا جبکہ دائیں ہاتھ کے

ارکان سرحد C پر خطی تکمل جمع اضافی پیدا کردہ سرحدوں پر تکمل دیگا۔ہر اضافی سرحد پر خطی تکمل دو مرتبہ آپس میں الٹ سمتوں میں حاصل کیا جائے گا۔آپس میں الٹ سمتوں میں خطی تکمل کا مجموعہ صفر ہوتا ہے لہٰذا تمام اضافی سرحدوں پر حاصل خطی تکملوں کا مجموعہ صفر ہو گا۔اس طرح دائیں ہاتھ ارکان کا مجموعہ R کی سرحد C پر خطی تکمل کے برابر ہو گا۔

مسئلہ کو ایسی عمومی خطہ R جو مسئلہ کی شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے ثابت کرنے کی خاطر ہم R کو تخمیناً ایسی خطوں میں تقسیم کرتے ہیں جو ان شرائط پر پورا اترتے ہوں اور تحدیدی طریقہ اختیار کرتے ہیں۔

□

مسئلہ گرین انتہائی اہم مسئلہ ہے جس کو ہم بار بار استعمال کریں گے۔آئیں اس کی استعمال کی چند مثالیں دیکھیں۔

مثال 11.11: مستوی کا رقبہ بطور سرحد پر خطی تکمل
مسئلہ گرین یعنی مساوات 11.24 میں $f = 0$ اور $g = x$ پر کرنے سے

$$A = \iint_R \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_C x \, \mathrm{d}y$$

ملتا ہے جس کا بایاں ہاتھ R کا رقبہ A دیتا ہے۔اسی طرح اگر ہم مساوات 11.24 میں $f = -y$ اور $g = 0$ پر کریں تب

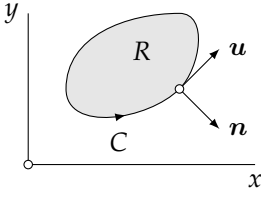
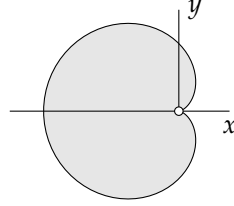
$$A = \iint_R \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -\int_C y \, \mathrm{d}x$$

ملتا ہے۔ان دونوں جوابات سے

$$A = \frac{1}{2} \int_C (x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x) \tag{11.28}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں خطی تکمل کو مسئلہ گرین میں دیے گئے رخ حاصل کیا جائے گا۔یہ تکمل مستوی xy پر رقبے کو بطور اسی رقبے کی سرحد پر خطی تکمل پیش کرتا ہے۔کئی سطح پیما[26] اسی کلیے پر مبنی ہیں۔ □

---

[26] planimeter

(الف) منحنی قلب نما

(ب) منحنی برائے مثال 11.14

شکل 11.17: اشکال منحنیات برائے مثال 11.13 اور مثال 11.14

مثال 11.12: قطبی محدد میں مستوی سطح کا رقبہ
قطبی محدد r اور θ ہیں جہاں $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ ہیں۔یوں

$$\mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}y = \sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

ہو گا جنہیں مساوات 11.28 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ ملتا ہے۔

$$A = \frac{1}{2}\int_C r\cos\theta(\sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta) - r\sin\theta(\cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) = \frac{1}{2}\int_C r^2\,\mathrm{d}\theta \tag{11.29}$$

□

مثال 11.13: مساوات 11.29 کی مدد سے قلب نما منحنی $r = a(1-\cos\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$ کا رقبہ دریافت کرتے ہیں (شکل 11.17-الف)۔

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi a^2}{2}$$

□

مثال 11.14: لاپلاسی تفاعل کے دوہرا تکمل سے تفاعل کی عمودی مماس کے خطی تکمل کا تبادل
فرض کریں کہ xy مستوی میں مسئلہ گرین میں بیان کردہ خطے میں تفاعل $w(x,y)$ اور اس کا یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ہم $f = -\frac{\partial w}{\partial y}$ اور $g = \frac{\partial w}{\partial x}$ لیتے ہیں۔یوں $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial g}{\partial x}$ خطہ میں استمراری ہوں گے۔یوں درج ذیل ہو گا جو w کا لاپلاسی ہے (حصہ 10.8)۔

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w \tag{11.30}$$

دی گئی f اور g استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y) = \int_C \left(f\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s = \int_C \left(-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s \tag{11.31}$$

جہاں s سرحد C کی لمبائی ہے جس کی سمت بندی شکل 11.13-ب میں دکھائی گئی ہے۔دائیں ہاتھ آخری متکمل کو درج ذیل دو سمتیات

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}$$

کا اندرونی ضرب

$$-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = (\nabla w)\cdot\boldsymbol{n} \tag{11.32}$$

لکھا جا سکتا ہے۔درج ذیل سمتیہ $\boldsymbol{u}$ سرحد C کا مماس ہے (حصہ 10.5)

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}$$

اور چونکہ $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ ہے لہٰذا $\boldsymbol{n}$ سرحد C کا قائمہ سمتیہ ہے۔مزید $\boldsymbol{n}$ کا رخ خطہ R کی باہر کو ہے۔اس نتیجے اور مساوات 10.79 سے ظاہر ہے کہ مساوات 11.32 کا دایاں ہاتھ C کی بیرونی رخ قائمہ سمتیہ کی سمت میں w کا سمتی تفرق ہے جس کو $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}n}$ لکھتے ہوئے اور مساوات 11.30، مساوات 11.31 اور مساوات 11.32 کو مد نظر رکھتے ہوئے مسئلہ گرین سے درج ذیل کلیہ ثابت ہوتا ہے۔

$$\iint\limits_R \nabla^2 w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_C \frac{\partial w}{\partial n}\,\mathrm{d}s \tag{11.33}$$

□

اسی باب میں مسئلہ گرین کی استعمال اور اس سے حاصل مزید نتائج پر غور کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 11.42 تا سوال 11.48 کو پہلے جوں کا توں حل کریں۔ بعد میں اس کو مسئلہ گرین کی مدد سے حل کریں۔

سوال 11.42: راہ C ، گھڑی کی الٹ رخ، چکور کی سرحد ہے۔

$$\int_C (y^2 \,\mathrm{d}x - x^2 \,\mathrm{d}y), \quad C: -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$$

جواب: 0

سوال 11.43: راہ C ، گھڑی کی الٹ رخ، چکور کی سرحد ہے۔

$$\int_C (y \,\mathrm{d}x + x \,\mathrm{d}y), \quad C: -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$$

جواب: 0

سوال 11.44: راہ C ، گھڑی کی رخ، چکور کی سرحد ہے۔

$$\int_C (y \,\mathrm{d}x - x \,\mathrm{d}y), \quad C: -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$$

جواب: 8

سوال 11.45: راہ C ، گھڑی کی رخ تکون کی سرحد ہے۔ تکون کے کونے دیے گئے ہیں۔

$$\int_C [(x^2 - y) \,\mathrm{d}x + y^2 \,\mathrm{d}y], \quad (0,0), (3,0), (0,1)$$

جواب: $-\frac{3}{2}$

سوال 11.46: راہ C ، گھڑی کی الٹ رخ دو قوسین میں بند خطے کی سرحد ہے۔

$$\int_C [y^2 \,\mathrm{d}x + (x^3 + 2xy) \,\mathrm{d}y], \quad y = x^2,\ y = x$$

جواب: $-\frac{3}{20}$

سوال 11.47: راہ C ، گھڑی کی رخ دو قوسین میں بند $0 \le x \le 2$ خطے کی سرحد ہے۔

$$\int_C [y^3 \,\mathrm{d}x + (x^3 + 3y^2 x) \,\mathrm{d}y], \quad y = x^3,\ y = 4x$$

جواب: 16

سوال 11.48: راہ C، گھڑی کی الٹ رخ ربع اول میں قوس $y = 1 - x^2$ اور محدد کے محوروں کے درمیان بند خطے کی سرحد ہے۔

$$\int_C [-xy^2 \, dx + x^2 y \, dy]$$

جواب: $\frac{1}{3}$

سوال 11.49 تا سوال 11.55 میں $f \, dx + g \, dy$ دیا گیا ہے۔خطے کے گرد گھڑی کی الٹ رخ چلتے ہوئے، مسئلہ گرین کی مدد سے $\int_C (f \, dx + g \, dy)$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.49: مستطیل خطہ۔ $(x + 2y) \, dx - x^2 \, dy, \quad 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 1$
جواب: -8

سوال 11.50: تکونی خطے کے کونے دیے گئے ہیں۔ $(x^2 - 2y) \, dx + 2x^2 \, dy, \quad (0,0), \ (1,0), \ (0,1)$
جواب: $\frac{5}{3}$

سوال 11.51: مستطیل خطہ۔ $(x^2 + y) \, dx + (2x + \sin y) \, dy, \quad 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.52: گول دائرے میں بند خطہ۔ $(e^{2x} + 3y) \, dx + (2e^y + 4x) \, dy, \quad C: \ x^2 + y^2 = 1$
جواب: π

سوال 11.53: گول دائرے میں بند خطہ۔ $-\frac{y^3}{3} \, dx + \frac{x^3}{3} \, dy, \quad C: \ x^2 + y^2 = 1$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.54: مستطیل خطہ۔ $(x + \sinh y) \, dx + (y^2 + \sin x) \, dy, \ 0 \le x \le \pi, \ 0 \le y \le 1$
جواب: $-\pi \sinh 1$

سوال 11.55: قوسین میں بند خطہ۔ $\frac{e^y}{x} \, dx + (e^y \ln x + x) \, dy, \ y = 5, \ y = 1 + x^2$
جواب: $\frac{64}{3}$

سوال 11.56 تا سوال 11.58 میں دیے مستوی خطہ کا رقبہ مثال 11.11 کی کلیات استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔

سوال 11.56: اندرون ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
جواب: $ab\pi$

سوال 11.57: ربع اول میں تین قوسین میں بند خطہ۔ $y = x,\ y = \frac{x}{4},\ y = \frac{1}{x}$
جواب: $\ln 2$

سوال 11.58: قوسین میں بند خطہ۔ $y = 2x + 3,\ y = x^2$
جواب: $\frac{32}{3}$

سوال 11.59 تا سوال 11.61 میں $\int_C \frac{\partial w}{\partial n}\,\mathrm{d}s$ کی قیمت کو مساوات 11.33 کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 11.59: $w = 3y^2 - x^2, \quad C : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
جواب: 72π

سوال 11.60: مستطیل خطہ۔ $w = 3x^2y - y^3, \quad C : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$
جواب: 0

سوال 11.61: مستطیل خطہ۔ $w = e^x + 2xy, \quad C : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$
جواب: $3(e^2 - 1)$

سوال 11.62: اگر تفاعل $w(x, y)$ کسی خطہ R میں لاپلاس مساوات $\nabla^2 w = 0$ پر پورا اترتا ہو تب درج ذیل ثابت کریں۔(اشارہ: مثال 11.14 کی طرز پر ثابت کریں۔)

$$\iint_R \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_C w\frac{\partial w}{\partial n}\,\mathrm{d}s \tag{11.34}$$

جواب: مسئلہ گرین میں $f = -ww_y$ اور $g = ww_x$ لیں جہاں زیر نوشت میں x اور y جزوی تفرق کو ظاہر کرتی ہیں۔یوں $g_x - f_y = w_x^2 + w_y^2$ ہو گا جہاں $w_{xx} + w_{yy} = 0$ استعمال کیا گیا ہے۔مزید درج ذیل ہو گا جہاں $'$ سے مراد s کے ساتھ تفرق ہے۔

$$\begin{aligned} f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y &= (-ww_yx' + ww_xy')\,\mathrm{d}s = w(\nabla w)\cdot(y'\boldsymbol{i} - x'\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}s \\ &= w(\nabla w)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = w\frac{\partial w}{\partial n}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

سوال 11.63 تا سوال 11.64 میں $\int_C w \frac{\partial w}{\partial n} \,\mathrm{d}s$ کی قیمت کو مساوات 11.34 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 11.63: مستطیل خطہ۔ $w = x + y, \quad 0 \le x \le 4, \; 0 \le y \le 5$

جواب: 40

سوال 11.64: مستطیل خطہ۔ $w = e^x \cos y, \quad 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 2$

جواب: $e^2 - 1$

سوال 11.65: سمتیہ $\boldsymbol{v} = g\boldsymbol{i} - f\boldsymbol{j}$ متعارف کرتے ہوئے ثابت کریں کہ مسئلہ گرین کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\iint\limits_R \nabla \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int\limits_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}s \tag{11.35}$$

جہاں $\boldsymbol{n}$ سرحد کی باہر رخ قائمہ اکائی سمتیہ ہے (شکل 11.17-ب) اور s راہ C کی لمبائی قوس ہے۔

سوال 11.66: مسئلہ گرین کی دوسری صورت یعنی مساوات 11.35 کو $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ اور دائرہ $C : x^2 + y^2 = 1$ کے لئے درست ثابت کریں۔

جواب: 2π

سوال 11.67: ثابت کریں کہ مسئلہ گرین کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\iint\limits_R (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{k} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int\limits_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}s \tag{11.36}$$

جہاں $\boldsymbol{k}$ مستوی xy کا قائمہ اکائی سمتیہ ہے، $\boldsymbol{u}$ راہ C کی اکائی مماس سمتیہ ہے اور s راہ C کی لمبائی قوس ہے۔

سوال 11.68: مسئلہ گرین کی تیسری صورت یعنی مساوات 11.36 کو $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کے لئے ایسی تکون پر ثابت کریں جس کے کونے $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، $(1,1)$ ہیں۔

جواب: 1

11.5 سطحیں

ہم سطحی تکمل پر حصہ 11.7 میں غور کریں گے۔اس لئے ضروری ہے کہ ہمیں سطحوں سے واقفیت ہو۔آئیں انہیں پر غور کرتے ہیں۔

سطح S کو

$$f(x,y,z)=0 \tag{11.37}$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں x ، y ، z فضا میں کارتیسی محدد ہیں اور یوں f کی ڈھلوان سطح S کو عمودی ہو گا (مسئلہ 10.5)، بشرطیکہ $\nabla f \neq \mathbf{0}$ ہو۔نتیجتاً S کے ہر نقطہ پر یکتا عمود، جس کی سمت سطح پر حرکت کرنے سے استمراری تبدیل ہوتی ہو، کے لئے لازم ہے کہ f کی استمراری یک رتبی جزوی تفرق موجود ہوں اور ہر نقطے پر ان تین میں سے کم از کم ایک جزوی تفرق غیر صفر ہو۔تب درج ذیل سمتیہ

$$\boldsymbol{n}=\frac{\nabla f}{\left|\nabla f\right|} \tag{11.38}$$

سطح S کا اکائی عمودی سمتیہ ہو گا (اور $-\boldsymbol{n}$ اس کا دوسرا اکائی عمودی سمتیہ ہو گا)۔

مثال 11.15: اکائی عمودی سمتیہ
کرہ $x^2+y^2+z^2-a^2=0$ کا اکائی عمودی سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{n}(x,y,z)=\frac{x}{a}\boldsymbol{i}+\frac{y}{a}\boldsymbol{j}+\frac{z}{a}\boldsymbol{k}$$

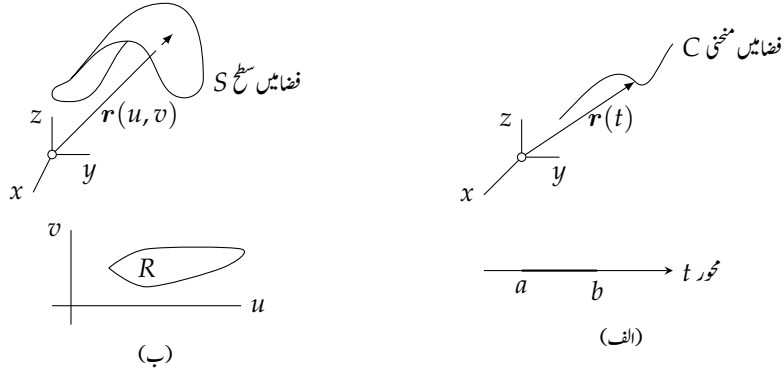
□

بعض اوقات سطح کی صریح روپ

$$z=g(x,y) \tag{11.39}$$

استعمال کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ظاہر ہے کہ اس کو $z-g(x,y)=0$ لکھ کر مساوات 11.37 طرز کی خفی روپ حاصل ہوتی ہے۔

سطح S کو مقدار معلوم روپ

$$\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k} \tag{11.40}$$

شکل 11.18: منحنی اور سطح کی مقدار معلوم روپ

سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں u اور v غیر تابع حقیقی متغیرات ہیں جنہیں اس روپ کی مقدار معلوم کہتے ہیں۔ $\boldsymbol{r}(u,v)$ آزاد متغیرات u اور v کا تابع تفاعل ہے۔ سطح S پر نقاط کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(u,v)$ ہے۔ مستوی uv میں کسی خطہ R پر (u,v) تبدیل کرنے سے اس سمتیہ کی نوک سطح S پر حرکت کرے گی۔ R میں ہر نقطہ (u_0,v_0) کا سطح S پر مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے جس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ ہے۔یوں مستوی uv میں خطہ R کا عکس سطح S ہے (شکل 11.18)۔ یہ منحنی C کی مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(t)$ کی طرح ہے جس پر حصہ 10.3 میں غور کیا گیا جہاں t محور پر کسی وقفہ کا عکس منحنی C ہے (شکل 11.18)۔ پس فرق اتنا ہے کہ سطح کی صورت میں دو عدد مقدار معلوم ہوں گے جبکہ منحنی کی صورت میں ایک عدد مقدار معلوم ہو گا۔

سطحوں کی جیومیٹریائی خواص بھی ہو سکتے ہیں جن کو یقینی بنانے کی خاطر ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

مفروضہ مستوی uv میں کسی خطہ میں، جس کا R حصہ ہے، (مساوات 11.40 میں دیا گیا) سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(u,v)$ استمراری ہے اور اس کے استمراری یک رتبی جزوی تفرقات $\boldsymbol{r}_u$ اور $\boldsymbol{r}_v$ پائے جاتے ہیں، اور R سادہ **تعلق**[27] کا **محدود**[28] خطہ ہے۔مزید پورے R پر درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{0} \tag{11.41}$$

---

[27] simply connected

[28] سادہ تعلق کے خطے سے مراد ہے کہ اس خطے میں کسی بھی بند منحنی کو، اس خطے میں رہتے ہوئے، گھٹا کر نقطہ مانند بنایا جا سکتا ہے۔ محدود سے مراد ہے کہ اس خطے کو کافی رداس کے دائرے میں بند کیا جا سکتا ہے۔

ہموار سطح S کی تعریف کی رو سے، سطح کا منفرد عمود پایا جاتا ہے جس کی سمت S پر نقطہ بدلنے سے استمراری تبدیل ہوتی ہے۔

ہم اگلے حصے میں دیکھیں گے کہ درج بالا مفروضہ پر پوری اترتی سطح $\boldsymbol{r}(u,v)$ ہموار سطح ہو گی۔

ٹکڑوں میں ہموار سطح[29] سے مراد ایسی سطح ہے جس کو محدود تعداد کی ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے کہ ہر ٹکڑا ہموار سطح ہو۔ مثلاً کرہ ہموار سطح ہے جبکہ مکعب کی سرحدی سطح ٹکڑوں میں ہموار ہے۔

مثال 11.16: کرہ کی مقدار معلوم روپ
رداس a کی کرہ کی مقدار معلوم روپ

$$\boldsymbol{r}(u,v) = a\cos v\cos u\,\boldsymbol{i} + a\cos v\sin u\,\boldsymbol{j} + a\sin v\,\boldsymbol{k} \tag{11.42}$$

ہے جہاں $0 \le u \le 2\pi$ اور $-\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$ ہیں (شکل 11.19)۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$x = a\cos v\cos u, \quad y = a\cos v\sin u, \quad z = a\sin v$$

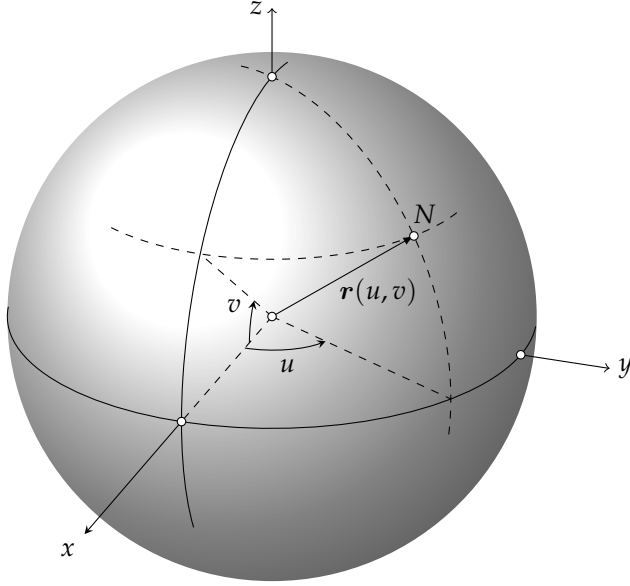
$u = c_1$ اور $v = c_2$ ، جہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں، بالترتیب **خطوط طول بلد**[30] اور **خطوط عرض بلد**[31] کو ظاہر کرتے ہیں۔ مساوات 11.41 کی شرط قطبین $v = -\frac{\pi}{2}$ اور $v = \frac{\pi}{2}$ کے علاوہ کرہ کی ہر نقطہ پر پورا ہوتا ہے۔ مساوات 11.42 کو استعمال کرتے ہوئے زمین کی سطح پر نقطہ کے خط طول بلد اور خط عرض بلد دریافت کیے جاتے ہیں (شکل 11.19)۔ □

سوالات

سوال 11.69 تا سوال 11.76 میں کس سطح کی مقدار معلوم روپ دی گئی ہے؟ ان میں **محددی منحنی**[32] ($u =$ مستقل اور $v =$ مستقل) کیا ہوں گی۔

سوال 11.69: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$
جوابات: xy مستوی؛ x کے متوازی خطوط اور y کے متوازی خطوط۔

---

[29] piecewise smooth surface
[30] longitude
[31] latitude
[32] coordinate curves

شکل 11.19: کرہ کی مقدار معلوم روپ

سوال 11.70: $r = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j}$

جوابات: رداس u کی دائری سطحیں جن کا مرکز مبدا پر ہے۔ یہ در حقیقت xy مستوی ہے؛ رداس u کے دائرے اور زاویہ v پر مبدا سے گزرتی سیدھے خطوط۔

سوال 11.71: $r = \cos u\boldsymbol{i} + \sin u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$

جوابات: z محور پر $x^2 + y^2 = 1$ بیلن؛ گول دائرہ؛ سیدھا خط۔

سوال 11.72: $r = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + uv\boldsymbol{k}$

جوابات: $z = xy$ ؛ $z = x$ اور $z = y$ خط۔

سوال 11.73: $r = 3\cos u\boldsymbol{i} + \sin u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$

جوابات: z محور پر $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ بیلن؛ $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ترخیم اور z محور کے متوازی خط۔

سوال 11.74: $r = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (u + v)\boldsymbol{k}$

جوابات: $z = x + y$ سطح؛ سیدھے خط۔

سوال 11.75: $\boldsymbol{r} = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}$
جوابات: $z^2 = x^2 + y^2$ ؛ سیدھے خط۔

سوال 11.76: $\boldsymbol{r} = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + u^2\boldsymbol{k}$
جوابات: $z = x^2 + y^2$ ؛ دائرے؛ $z = x^2 = y^2$

سوال 11.77 تا سوال 11.82 میں مقدار معلوم روپ کیا ہے؟

سوال 11.77: yz مستوی۔
جواب: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$

سوال 11.78: $z = y$ سطح۔
جواب: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}$

سوال 11.79: سطح $x + y + z = 2$
جواب: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (2 - u - v)\boldsymbol{k}$

سوال 11.80: دائری بیلن $x^2 + z^2 = a^2$
جواب: $\boldsymbol{r} = a\cos u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + a\sin u\boldsymbol{k}$

سوال 11.81: $z = y^2$ قطع مکافی بیلن۔
جواب: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + v^2\boldsymbol{k}$

سوال 11.82: $4y^2 + z^2 = 4$ ترخیمی بیلن۔
جواب: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + \cos v\boldsymbol{j} + 2\sin v\boldsymbol{k}$

سوال 11.83 تا سوال 11.86 میں دیے گئی سطحوں کو مساوات 11.37 کی طرز میں لکھیں۔

سوال 11.83: $\boldsymbol{r} = a\cos v\sin u\boldsymbol{i} + b\cos v\sin u\boldsymbol{j} + c\sin v\boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

سوال 11.84: $\boldsymbol{r} = au\cos v\boldsymbol{i} + bu\sin v\boldsymbol{j} + u^2\boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

سوال 11.85: $\boldsymbol{r} = au\cosh v\boldsymbol{i} + bu\sinh v\boldsymbol{j} + u^2\boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

سوال 11.86: $\boldsymbol{r} = a \sinh u \cos v \boldsymbol{i} + b \sinh u \sin v \boldsymbol{j} + c \cosh u \boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$

سوال 11.87: درج ذیل کی اکائی قائمہ سمتیہ دریافت کریں۔ $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + uv\boldsymbol{k}$
جواب: $\frac{v\boldsymbol{i}+u\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$

سوال 11.88: کرہ پر مثال 11.16 میں غور کیا گیا۔دریافت کریں کہ کرہ کی مقدار معلوم روپ کہاں مساوات 11.41 کی مفروضہ پر پورا نہیں اترتی۔
جوابات: $v = \mp\frac{\pi}{2}$

11.6 مماسی سطح۔بنیادی صورت اول۔رقبہ

اگر سطح S کو $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ سے ظاہر کیا جائے تب S پر منحنی کو حقیقی مقدار معلوم t کے درج ذیل دو عدد استمراری تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

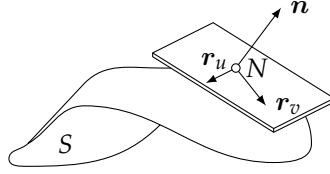
$$u = g(t), \quad v = h(t) \tag{11.43}$$

مثال 11.17: سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(u, v) = a \cos u \boldsymbol{i} + a \sin u \boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$ رداس a کی بیلن S کو ظاہر کرتا ہے۔مساوات $u = t$ اور $v = ct$ سطح S پر پیچ دار لچھے کو ظاہر کرتے ہیں۔ان مساوات کو S کی مساوات میں پر کرنے سے

$$\boldsymbol{r}[u(t), v(t)] = a \cos t \boldsymbol{i} + a \sin t \boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}$$

ملتا ہے (مثال 10.15)۔ □

فرض کریں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(u, v)$ ہموار سطح S کو ظاہر کرتی ہے اور S میں منحنی C کو مساوات 11.43 کی طرز سے ظاہر کیا جاتا ہے۔تب فضا میں منحنی C کو درج ذیل سمتی تفاعل ظاہر کرے گا۔

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}[u(t), v(t)] \tag{11.44}$$

شکل 11.20: مماسی سطح اور عمودی سمتیہ

فرض کریں کہ مساوات 11.43 میں دیے دونوں تفاعل کے یک رتبی تفرق پائے جاتے ہوں اور ہر t پر ان میں سے کم از کم ایک تفرق غیر صفر ہو۔تب C کے ہر نقطے پر C کا ایسا مماس پایا جائے گا جس کی سمت نقطہ تبدیل کرنے سے استمراری تبدیل ہو گی اور C کا مماسی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_u\dot{u} + \boldsymbol{r}_v\dot{v}$$

یوں مساوات 11.41 کے تحت سمتیات $\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ اور $\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ خطی طور غیر تابع ہوں گے اور ایک سطح تعین کریں گے۔اس سطح کو نقطہ N پر S کی **مماسی سطح**[33] کہتے ہیں۔مماسی سطح کو $T(N)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ $T(N)$ سطح S کو نقطہ N پر چھوتی ہے۔ مساوات 11.44 سے ظاہر ہے کہ نقطہ N پر سطح S کا ہر مماس نقطہ N پر سطح کی مماسی سطح $T(N)$ میں پایا جائے گا (حصہ 10.8)۔

نقطہ N سے گزرتا وہ سیدھا خط جو $T(N)$ کو عمودی ہو نقطہ N پر S کا **عمود**[34] کہلاتا ہے۔چونکہ $\boldsymbol{r}_u$ اور $\boldsymbol{r}_v$ سطح $T(N)$ میں پائے جاتے ہیں لہٰذا اکائی سمتیہ

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\lvert \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \rvert} \tag{11.45}$$

$T(N)$ کو عمودی ہو گا (شکل 11.20)۔اس سمتیہ کو N پر S کا **اکائی عمودی سمتیہ**[35] کہتے ہیں۔ $\boldsymbol{n}$ کی سمت u اور v کی انتخاب پر منحصر ہے۔تبادل $u = -\bar{u}$ ، $v = \bar{v}$ یا کوئی اور ایسی تبادل جس کی یعقوبی (حصہ 11.3) کی قیمت منفی ہو سے $\boldsymbol{n}$ کی سمت الٹ ہو گی۔

ہم اب سطح S جس کو $\boldsymbol{r}(u,v)$ لکھا گیا ہے، پر منحنی C جس کو مساوات 11.43 کی طرز پر لکھا گیا ہے، کا خطی جزو دریافت کرتے ہیں۔ مساوات 10.32 اور

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\,\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}v$$

---

tangent plane[33]
normal[34]
unit normal vector[35]

استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} ds^2 = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} &= (\boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv) \cdot (\boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv) \\ &= \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u\,du^2 + 2\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v\,du\,dv + \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v\,dv^2 \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔معیاری علامتیں

$$E = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u, \quad F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v, \quad G = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v \tag{11.46}$$

ہوئے اس کو

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{11.47}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس دو رتبی تفرقی مساوات کو S کی **بنیادی صورت اول**[36] کہتے ہیں۔

مثال 11.18: قطبی محدد میں بنیادی صورت اول
درج ذیل سمتی تفاعل

$$\boldsymbol{r}(u, v) = u\cos v\,\boldsymbol{i} + u\sin v\,\boldsymbol{j}$$

xy مستوی کو ظاہر کرتی ہے جہاں u اور v قطبی محدد ہیں۔ان کا تفرق لینے سے

$$\boldsymbol{r}_u = \cos v\,\boldsymbol{i} + \sin v\,\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{r}_v = -u\sin v\,\boldsymbol{i} + u\cos v\,\boldsymbol{j}$$

ملتا ہے لہٰذا $E = 1$ ، $F = 0$ اور $G = v^2$ ہوں گے۔یوں قطبی محدد $u = \rho$ اور $v = \theta$ استعمال کرتے ہوئے بنیادی صورت اول درج ذیل ہو گی۔

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2 \tag{11.48}$$

□

ہم اب دیکھیں گے کہ اول بنیادی صورت اس لئے اہم ہے کہ اس کی مدد سے لمبائیاں، قوسین کے مابین زاویے اور مطابقتی سطح S پر رقبے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

---

[36] first fundamental form

لمبائی

مساوات 10.29، مساوات 10.32 اور مساوات 11.47 کو استعمال کرتے ہوئے سطح $S: \boldsymbol{r}(u,v)$ پر منحنی

$$C: u(t),\ v(t), \quad a \le t \le b$$

کی لمبائی درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\;\mathrm{d}t \tag{11.49}$$

زاویہ

سطح $S: \boldsymbol{r}(u,v)$ میں درج ذیل دو عدد منحنیات پر غور کریں

$$C_1: u = g(t),\, v = h(t) \quad \text{اور} \quad C_2: u = p(t),\, v = q(t)$$

جو S پر نقطہ N پر ایک دوسرے کر قطع کرتی ہیں۔نقطہ N پر درج ذیل سمتیات

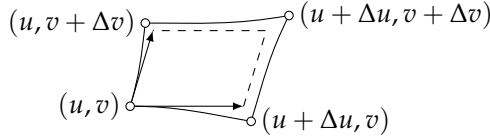
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}[g(t),h(t)] = \boldsymbol{r}_u\dot{g} + \boldsymbol{r}_v\dot{h} \\
\boldsymbol{b} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}[p(t),q(t)] = \boldsymbol{r}_u\dot{p} + \boldsymbol{r}_v\dot{q}
\end{aligned}$$

بالترتیب C_1 اور C_2 کو مماسی ہیں۔ N پر C_1 اور C_2 کا متقاطع زاویے سے مراد $\boldsymbol{a}$ اور $\boldsymbol{b}$ کے مابین زاویہ γ ہے۔صفحہ 494 پر مساوات 7.25 کے تحت

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \tag{11.50}$$

ہو گا جہاں

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (\boldsymbol{r}_u\dot{g} + \boldsymbol{r}_v\dot{h})\cdot(\boldsymbol{r}_u\dot{p} + \boldsymbol{r}_v\dot{q}) = E\dot{g}\dot{p} + F(\dot{g}\dot{q} + \dot{h}\dot{p}) + G\dot{h}\dot{q} \\
|\boldsymbol{a}| &= \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{E\dot{g}^2 + 2F\dot{g}\dot{h} + G\dot{h}^2} \\
|\boldsymbol{b}| &= \sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}} = \sqrt{E\dot{p}^2 + 2F\dot{p}\dot{q} + G\dot{q}^2}
\end{aligned}$$

ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی سطح پر متقاطع منحنیات کے درمیان زاویے کو E ، F ، G اور منحنیات کو ظاہر کرنے والی تفاعل کی نقطہ قطع پر تفرق سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

شکل 11.21: چھوٹا رقبہ

رقبہ

سطح $S : \boldsymbol{r}(u, v)$ کے رقبہ A سے مراد uv سطح پر S کے مطابقتی خطہ R پر درج ذیل دوہرا تکمل ہے

$$A = \iint_R \left|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{11.51}$$

جہاں

$$\mathrm{d}A = \left|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{11.52}$$

رکن رقبہ[37] کہلاتا ہے۔

مساوات 11.51 کو شکل 11.21 سے یوں اخذ کیا جا سکتا ہے کہ سمتی ضرب کی تعریف کی رو سے اس چھوٹے متوازی الاضلاع کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta A = \left|\boldsymbol{r}_u \Delta u \times \boldsymbol{r}_v \Delta v\right| = \left|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\right| \Delta u \Delta v$$

مساوات 11.51 کا تکمل حاصل کرنے کی خاطر S کو S_1 ، $\cdots$ ، S_n ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر S_k کے رقبے کو S_k میں کسی نقطے پر مماسی سطح کے کچھ رقبے کے لگ بھگ فرض کرتے ہوئے تمام چھوٹے رقبوں کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ایسا مجموعہ ہر $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے یوں حاصل کیا جاتا ہے کہ n کی قیمت لامتناہی تک پہنچنے سے سب سے بڑے S_k کے اطراف کی لمبائی صفر تک پہنچے۔ان مجموعوں کی حد مساوات 11.51 کا تکمل ہو گا۔

ہم مساوات 11.51 کو E ، F ، G کی صورت میں لکھ کر اول بنیادی صورت سے رقبہ حاصل کرتے ہیں۔مساوات 7.48 اور مساوات 11.46 سے

$$\left|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\right|^2 = (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u)(\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2 \tag{11.53}$$

[37] element of area

لکھ کر مساوات 11.51 کو

$$A = \iint\limits_R \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{11.54}$$

اور مساوات 11.52 کو

$$\mathrm{d}A = \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{11.55}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 11.19: اندرسہ
کسی محور کے گرد بند قوس (عموماً دائرے) کو (محور قطع کیے بغیر) گھمانے سے اندرسہ[38] حاصل ہوتا ہے (آپ نے بچپن میں اندرسے ضرور کھائے ہوں گے)۔ شکل 11.22-الف میں دائرہ C کو z محور کے گرد گمانے سے اندرسہ حاصل کیا گیا ہے جس کی سطح کی سمتی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (a + b\cos v)\cos u\,\boldsymbol{i} + (a + b\cos v)\sin u\,\boldsymbol{j} + b\sin v\,\boldsymbol{k} \qquad (a > b > 0)$$

مساوات 11.46 سے

$$E = (a + b\cos v)^2, \quad F = 0, \quad G = b^2$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = EG - F^2 = b^2(a + b\cos v)^2$$

ہو گا جس سے اندرسہ کی سطح کا رقبہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

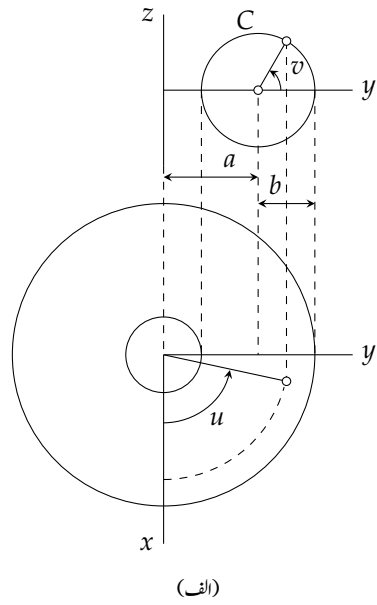
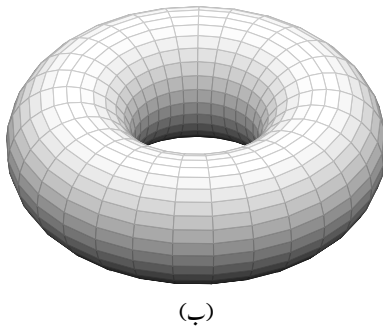
$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a + b\cos v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = 4ab\pi^2$$

□

فرض کریں کہ کسی سطح کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$z = g(x,y) \tag{11.56}$$

---

[38] torus

شکل 11.22: اندرسہ

اس میں $x = u$ اور $y = v$ پر کرتے ہوئے مقدار معلوم روپ

$$r(u, v) = ui + vj + g(u, v)k \tag{11.57}$$

میں لکھا جا سکتا ہے جس کے u اور v کے ساتھ جزوی تفرق درج ذیل ہیں۔

$$r_u = i + g_u k, \quad r_v = j + g_v k \tag{11.58}$$

اس طرح اول بنیادی صورت کے عددی سر

$$E = 1 + g_u^2, \quad F = g_u g_v, \quad G = 1 + g_v^2$$

ہوں گے لہٰذا

$$|r_u \times r_v|^2 = EG - F^2 = 1 + g_u^2 + g_v^2$$

ہو گا۔اب چونکہ $u = x$ اور $v = y$ ہیں لہٰذا رقبہ درج ذیل ہو گا

$$A = \iint_{\overline{S}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{11.59}$$

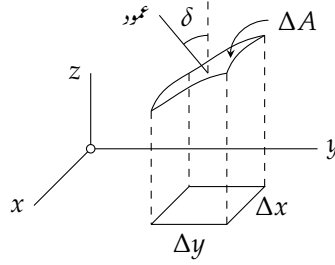
جہاں سطح S کا xy مستوی پر عمودی سایہ $\overline{S}$ ہے۔اس سے ظاہر ہے کہ

$$\mathrm{d}A = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{11.60}$$

ہو گا۔بعد میں استعمال کی خاطر ہم ثابت کرتے ہیں کہ اس کو

$$\mathrm{d}A = \sec\delta\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{11.61}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں S کی (غیر سمتی) عمود اور z محور کے درمیان زاویہ حادہ δ ہے۔ شکل 11.23 سے اس کی جیومیٹریائی وجہ ظاہر ہے جہاں چھوٹا رقبہ ΔA کا xy مستوی پر عمودی عکس $\Delta A \cos\delta$ ہو گا جو $\Delta x \Delta y$ کے برابر ہو گا جس کو $\overline{\Delta A}$ لکھا جاتا ہے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta A = \overline{\Delta A}\sec\delta = \sec\delta\, \Delta x \Delta y$$

شکل 11.23: مساوات 11.61 کا ثبوت

مساوات 11.61 کی اب تحلیلی ثبوت پیش کرتے ہیں۔فرض کریں کہ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ ہے۔یہ جانتے ہوئے کہ $u = x$ اور $v = y$ ہیں اور مساوات 11.58 کو استعمال کرتے ہوئے سمتی ضرب کی تعریف سے

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k} = 1$ ہو گا۔اب اندرونی ضرب کی تعریف سے $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k} = |\boldsymbol{a}| \cos \delta^*$ ہو گا جہاں $\boldsymbol{a}$ اور مثبت z محور کے درمیان زاویہ δ^* ہے۔ان کو ملا کر $|\boldsymbol{a}| \cos \delta^* = 1$ ملتا ہے جس سے $\cos \delta^* > 0$ اخذ ہوتا ہے لہٰذا $\delta^* < \frac{\pi}{2}$ ہو گا یعنی δ^* زاویہ حادہ ہے اور یوں $\delta^* = \delta$ ہے۔اس طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جس سے مساوات 11.61 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

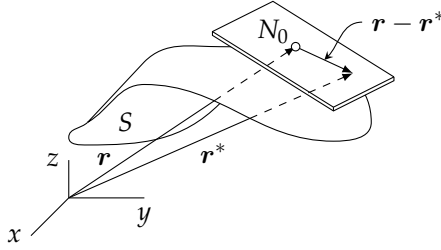
$$|\boldsymbol{a}| \cos \delta = 1, \quad \implies \quad \sec \delta = |\boldsymbol{a}| \qquad \left(\delta < \frac{\pi}{2}\right)$$

سوالات

سوال 11.89: ثابت کریں کہ نقطہ N پر سطح $S : \boldsymbol{r}(u, v)$ کی مماسی سطح کو

$$\boldsymbol{r}^*(p, q) = \boldsymbol{r} + p\boldsymbol{r}_u + q\boldsymbol{r}_v \tag{11.62}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ کی قیمتیں نقطہ N کے لحاظ سے ہیں۔مزید ثابت کریں کہ اس کو درج ذیل غیر سمتی سہ ضرب لکھا جا سکتا ہے۔

$$(\boldsymbol{r}^* - \boldsymbol{r} \quad \boldsymbol{r}_u \quad \boldsymbol{r}_v) = 0$$

شکل 11.24: مماسی سطح کی مساوات (سوال 11.89 اور سوال 11.90)

جواب: شکل 11.20 میں مماسی سطح پر نقطہ N سے کسی بھی نقطے تک سمتیہ کو خطی طور غیر تابع سمتیات $\boldsymbol{r}_u$ اور $\boldsymbol{r}_v$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔یوں شکل 11.24 میں تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}^*$ کو مساوات 11.62 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 11.90: سطح $f(x,y,z)=0$ کا نقطہ N_0 پر مماسی سطح کی مساوات دریافت کریں۔اس نقطے پر اس کا اکائی عمودی سمتیہ بھی دریافت کریں۔
جوابات: اگر نقطہ N_0 کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ جبکہ مماسی سطح پر عمومی نقطے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}^*$ ہو (شکل 11.24) تب سمتیہ $\boldsymbol{r}^*-\boldsymbol{r}$ نقطہ N_0 پر سطح کا مماس ہو گا۔چونکہ ∇f سطح کا عمود ہے لہٰذا مماسی سطح کی مساوات $(\boldsymbol{r}^*-\boldsymbol{r})\cdot\nabla f=0$ ہو گی۔اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}=\frac{\nabla f}{\lvert\nabla f\rvert}$ ہو گا۔

سوال 11.91: سطح $z=g(x,y)$ کا نقطہ N_0 پر مماسی سطح کی مساوات دریافت کریں۔ مزید اس نقطے پر اکائی عمودی سمتیہ بھی دریافت کریں۔
جوابات: $xg_x+yg_y-z=x_0g_x+y_0g_y-g(x_0,y_0), \quad \boldsymbol{n}=\frac{g_x\boldsymbol{i}+g_y\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}}$

سوال 11.92: اگر سطح $S:\ \boldsymbol{r}(u,v)$ کا اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہو (مساوات 11.45) تب $u=-\tilde{u}$ ، $v=\tilde{v}$ پر کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $\boldsymbol{r}^*(\tilde{u},\tilde{v})$ کا اکائی عمودی سمتیہ $-\boldsymbol{n}$ ہو گا۔
جواب: مساوات 11.45 کے تحت $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\lvert\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\rvert}$ ہے۔ $\boldsymbol{r}^*(\tilde{u},\tilde{v})$ استعمال کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{r}_u^*(\tilde{u},\tilde{v})=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\tilde{u}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\tilde{v}}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}=-\boldsymbol{r}_u, \quad \boldsymbol{r}_v^*(\tilde{u},\tilde{v})=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\tilde{u}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\tilde{v}}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}=\boldsymbol{r}_v$$

سے اکائی عمودی سمتیہ $-\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\lvert\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\rvert}$ حاصل ہوتا ہے جو $-\boldsymbol{n}$ کے برابر ہے۔

سوال 11.93 تا سوال 11.98 میں نقطہ $N_0 : (x_0, y_0, z_0)$ پر سطح کی مماسی سطح کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 11.93: $z = xy, \quad N_0 : (3, 2, 6)$

جواب: $f = xy - z = 0$ لکھتے ہوئے $\nabla f = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ ملتا ہے جس کی N_0 پر قیمت $\nabla f_N = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ ہے۔ہم N_0 کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ اور مماسی سطح پر عمومی نقطے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}^* = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ لکھتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^* = (x-3)\boldsymbol{i} + (y-2)\boldsymbol{j} + (z-6)\boldsymbol{k}$ ہو گا۔ اس طرح $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^*) \cdot \nabla f_N = 0$ سے مماسی سطح کی مساوات $2x + 3y - z = 6$ حاصل ہوتی ہے۔

سوال 11.94: $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad N_0 : (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$

جواب: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 3z = 13$

سوال 11.95: $y = x^2, \quad N_0 : (2, 4, 3)$

جواب: $4x - y = 4$

سوال 11.96: $x^2 + y^2 = 8, \quad N_0 : (2, 2, 3)$

جواب: $x + y = 4$

سوال 11.97: $z = x^2 + y^2, \quad N_0 : (2, 3, 13)$

جواب: $4x + 6y - z = 13$

سوال 11.98: $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 9, \quad N_0 : (1, 2, 1)$

جواب: $2x + 2y - 3z = 3$

سوال 11.99 تا سوال 11.104 میں اول بنیادی صورت دریافت کریں۔

سوال 11.99: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$

جواب: $\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$

سوال 11.100: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + uv\boldsymbol{k}$

جواب: $(v^2 + 1)\,\mathrm{d}u^2 + 2uv\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (u^2 + 1)\,\mathrm{d}v^2$

سوال 11.101: کرہ $\boldsymbol{r} = a\cos v \cos u\boldsymbol{i} + a\cos v \sin u\boldsymbol{j} + a\sin v\boldsymbol{k}$

جواب: $a^2 \cos^2 v\,\mathrm{d}u^2 + a^2\,\mathrm{d}v^2$

سوال 11.102: اندرسہ $\boldsymbol{r} = (a + b\cos v)\cos u\boldsymbol{i} + (a + b\cos v)\sin u\boldsymbol{j} + b\sin v\boldsymbol{k}, \quad (a > b > 0)$
جواب: $(a^2 + 2ab\cos v + b^2\cos^2 v)\,\mathrm{d}u^2 + b^2\,\mathrm{d}v^2$

سوال 11.103: $\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + v^2\boldsymbol{k}$
جواب: $\mathrm{d}u^2 + (1 + 4v^2)\,\mathrm{d}v^2$

سوال 11.104: بیلن $\boldsymbol{r} = a\cos u\boldsymbol{i} + a\sin u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$
جواب: $a^2\,\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$

سوال 11.105: ثابت کریں کہ سطح $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ پر محددی منحنیات $u = c_1$ اور $v = c_2$ صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتی ہیں جب $F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = 0$ ہو۔ یہاں c_1 اور c_2 مستقل ہیں۔
جواب: $\boldsymbol{r}_u$ اور $\boldsymbol{r}_v$ ان منحنیات کو مماسی ہیں۔یوں اندرونی ضرب کی تعریف سے ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

سوال 11.106 تا سوال 11.109 میں دیے گئے سطحوں کا رقبہ مساوات 11.51 کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 11.106: $x^2 + y^2 = a^2, \quad 0 \le z \le b$
جواب: $2\pi ab$

سوال 11.107: کرہ $\boldsymbol{r} = a\cos v\cos u\boldsymbol{i} + a\cos v\sin u\boldsymbol{j} + a\sin v\boldsymbol{k}$
جواب: $4\pi a^2$

سوال 11.108: $z = x^2 + y^2, \quad 0 \le z \le 1$
جواب: $\frac{\pi}{6}(\sqrt{125} - 1)$

سوال 11.109: $z^2 = x^2 + y^2, \quad -1 \le z \le 1$
جواب: $2\sqrt{2}\,\pi$

11.7 سطحی تکمل

دوہرا تکمل (حصہ 11.3) کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے سطحی تکمل کا تصور پیدا ہوتا ہے۔ سطحی تکمل کی تعریف عین دوہرا تکمل کی طرز پر ہے۔

فرض کریں کہ S کسی سطح کا محدود حصہ ہے اور تفاعل $f(x,y,z)$ سطح S پر معین اور استمراری ہے۔ ہم بلا منصوبہ S کو S_1 ، $\cdots$ ، S_n ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں جن کے رقبے بالترتیب ΔA_1 ، $\cdots$ ، ΔA_n ہیں۔ ہم بلا منصوبہ ہر S_k میں کوئی نقطہ N_k منتخب کرتے ہیں جس کے محدد x_k ، y_k ، z_k ہوں گے۔ اب ہم درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta A_k \tag{11.63}$$

ہم ایسے مجموعے $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے بلا منصوبہ یوں حاصل کرتے ہیں کہ n کی قیمت لامتناہی کے قریب کرنے سے سب سے بڑا حصہ S_k نقطہ مانند ہوتا ہو۔ یوں حاصل اعداد J_1 ، J_2 ، $\cdots$ کا ایک حد پایا جاتا ہے جس کی قیمت پر نا تو حصوں کی انتخاب اور نا ہی ہر حصے میں نقطہ کی انتخاب کا کوئی اثر پایا جاتا ہے (مثال 11.1 کی طرح)۔ اس حد کو S پر تفاعل $f(x,y,z)$ کی **سطحی تکمل**[39] کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}A \tag{11.64}$$

سطحی تکمل (مساوات 11.64) کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر آئیں اس کو دوہرا تکمل میں تبدیل کرتے ہیں۔

اگر S کی مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(u,v)$ ہو تب $\mathrm{d}A = \lvert \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \rvert \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ ہو گا (مساوات 11.52 اور مساوات 11.55) لہٰذا

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S} f(x,y,z)\,\mathrm{d}A &= \iint\limits_{R} f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\lvert \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \rvert \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \iint\limits_{R} f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{11.65}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں uv سطح میں R سطح S کا مطابقتی خطہ ہے۔

---

[39] surface integral

اسی طرح اگر S کو $z = g(x,y)$ سے ظاہر کیا گیا ہو تب مساوات 11.60 کی مدد سے درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}A = \iint_{\bar{S}} f[x,y,g(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.66}$$

مثال 11.20: جمودی معیار اثر

کروی یکساں خاصیت کی جھلی $S:\ x^2+y^2+z^2=a^2$ جس کی کمیت M ہے کا z محور کے لحاظ سے جمودی معیار اثر دریافت کریں۔

اگر کمیت سطح S پر یوں پھیلا ہو کہ کمیت کی سطحی کثافت $\mu(x,y,z)$ ہو تب کسی محور L کے لحاظ سے جمودی معیار اثر

$$I = \iint_S \mu D^2\,\mathrm{d}A \tag{11.67}$$

ہو گا جہاں L سے نقطہ (x,y,z) تک فاصلہ $D(x,y,z)$ ہے۔

چونکہ موجودہ مثال میں جھلی یکساں خاصیت رکھتی ہے لہٰذا μ ایک مستقل ہو گا۔ کروی جھلی کا رقبہ $A = 4\pi a^2$ ہے لہٰذا

$$\mu = \frac{M}{A} = \frac{M}{4\pi a^2}$$

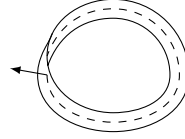
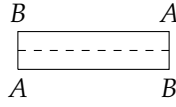
ہو گا۔ کرہ کو مساوات 11.42 سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 11.46 سے

$$E = a^2\cos^2 v,\quad F=0,\quad G=a^2$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$\mathrm{d}A = |\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = a^2\cos v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

ہو گا۔ مزید z محور سے کسی نقطہ (x,y,z) کا فاصلہ $D = \sqrt{x^2+y^2} = a\cos v$ ہو گا۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$I = \iint_S \mu D^2\,\mathrm{d}A = \frac{M}{4\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} a^4\cos^3 v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{2Ma^2}{3}$$

شکل 11.25: موبیوس پٹی

□

کئی عملی سطحی تکمل میں سطح کی سمت بندی اہمیت رکھتی ہے لہٰذا ہموار سطح (حصہ 11.5) سے شروع کرتے ہوئے سطح کی سمت بندی پر غور کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ S ایک ہموار سطح ہے جس پر N کوئی نقطہ ہے۔ہم N پر S کا اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ منتخب کر سکتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{n}$ کی سمت N پر S کی مثبت عمودی سمت ہو گی۔ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{n}$ کو دو ہی طریقوں سے (آپس میں الٹ رخ) چنا جا سکتا ہے۔

ایک ہموار سطح اس صورت **قابل سمت بند**[40] کہلاتی ہے جب اس سطح پر کسی نقطہ N_0 پر دی گئی مثبت سمت کو پوری سطح پر یکتا اور استمراری طور پر جاری رکھنا ممکن ہو۔

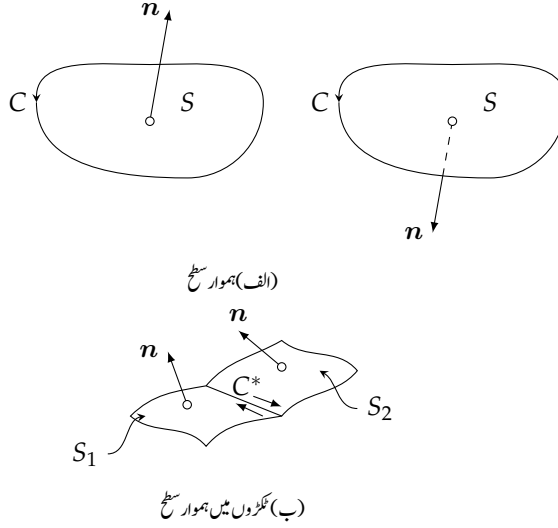
یوں سطح S اس صورت قابل سمت بند ہو گی جب اس پر نقطہ N_0 سے گزرتی کوئی ایسی سطح C نہ پائی جاتی ہو جس پر منتخب کردہ مثبت سمت کو C پر مسلسل ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے کے بعد واپس N_0 لانے سے سمت الٹ ہوتی ہو۔

ہموار سطح کا کافی چھوٹا حصہ ہر صورت قابل سمت بند ہوتا ہے۔البتہ وسیع سطح کے لئے ایسا نہیں کہا جا سکتا ہے۔غیر قابل سمت بند سطحیں پائی جاتی ہیں جن کی مشہور مثال **موبیوس پٹی**[41] کو شکل 11.25 میں دکھایا گیا ہے۔اس شکل میں نقطہ N_0 پر عمودی سمتیہ کو نقطہ دار لکیر پر حرکت دے کر واپس N_0 پہنچانے سے عمودی سمتیہ کا رخ الٹ ہو جائے گا۔کاغذ کی لمبی مستطیل پٹی کو بل دے کر چھوٹے اطراف کو آپس میں یوں جوڑنے سے کہ A اور A آپس میں ملیں اور B اور B آپس میں ملیں، موبیوس پٹی[42] بنائی جا سکتی ہے۔ اگر S قابل سمت بند ہو تب ہم $\boldsymbol{n}$ کی دو میں سے ایک ممکنہ رخ کو مثبت سمت کہتے ہوئے S کو سمت بند بنا سکتے ہیں۔

---

[40] orientable
[41] Mobius strip
[42] جرمن ریاضی دان اگست فرڈینانڈ موبیوس [1790-1868]

(الف) ہموار سطح

(ب) ٹکڑوں میں ہموار سطح

شکل 11.26: سطح کی سمت بندی

اگر S کی سرحد C سادہ بند منحنی ہو تب ہم $\boldsymbol{n}$ کے لحاظ سے C کو سمت بند بنا سکتے ہیں۔ یہ عمل شکل 11.26-الف میں دونوں ممکنہ عمودی سمتیات کے لحاظ سے دکھایا گیا ہے۔ ہم اب سمت بندی کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے اس کو ٹکڑوں میں ہموار سطحوں کے لئے بیان کرتے ہیں۔ ٹکڑوں میں ہموار سطح S اس صورت قابل سمت بند ہو گی جب ایسا ممکن ہو کہ ہر دو ٹکڑوں S_1 اور S_2 کے مابین مشترکہ سرحدی منحنی C^* پر مثبت سمت S_1 اور S_2 کے لحاظ سے آپس میں الٹ ہوں۔ شکل 11.26-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔

فرض کریں کہ S ٹکڑوں میں قابل سمت بند سطح ہے۔ہم اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ چنتے ہوئے S کو سمت بند کرتے ہیں۔ $\boldsymbol{n}$ اور مثبت x ، y ، z محور کے درمیان زاویوں کو α ، β ، γ سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{n} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k} \tag{11.68}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ تفاعل $u_1(x,y,z)$ ، $u_2(x,y,z)$ ، $u_3(x,y,z)$ سطح S کے ہر نقطہ پر معین اور استمراری ہیں۔ ہمیں عموماً درج ذیل تکملات حل کرنے ہوں گے۔

$$\iint\limits_S u_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad \iint\limits_S u_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z, \qquad \iint\limits_S u_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

تکمل کی تعریف کی رو سے ان سے مراد درج ذیل ہے (شکل 11.23 سے رجوع کریں)۔

$$\begin{aligned}\iint_S u_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_S u_1\cos\alpha\,\mathrm{d}A\\ \iint_S u_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z &= \iint_S u_2\cos\beta\,\mathrm{d}A\\ \iint_S u_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_S u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A\end{aligned}\tag{11.69}$$

صاف ظاہر کہ ان تکملات کی قیمت کا دارومدار $\boldsymbol{n}$ کی انتخاب یعنی S کی سمت بندی پر ہو گا۔ S کی سمت بندی الٹ کرنے سے $\boldsymbol{n}$ کے اجزاء $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ ، $\cos\gamma$ منفی اکائی سے ضرب ہوں گے لہٰذا تکمل کی قیمت بھی منفی ایک (-1) سے ضرب ہو گی۔

اس طرح کے تین عدد تکملات کو سمتیہ کی استعمال سے نہایت سادہ طرز میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں سمتیہ

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$$

متعارف کرتے ہوئے مساوات 11.69 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}&\iint_S (u_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + u_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + u_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)\\ &\qquad= \iint_S (u_1\cos\alpha + u_2\cos\beta + u_3\cos\gamma)\,\mathrm{d}A = \iint_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A\end{aligned}\tag{11.70}$$

مساوات 11.69 کے تکملات حل کرنے کی خاطر انہیں مستوی سطح پر دوہرا تکملات میں تبدیل کیا جاتا ہے۔اس عمل پر غور کرتے ہیں۔

اگر S کو $z = h(x, y)$ سے ظاہر کیا گیا ہو اور اس کی سمت بندی یوں ہو کہ $\boldsymbol{n}$ اوپر کی رخ ہو تب γ زاویہ حادہ ہو گا لہٰذا مساوات 11.61 میں $\delta = \gamma$ ہو گا۔اس طرح مساوات 11.69 سے

$$\iint_S u_3(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = +\iint_{\overline{R}} u_3[x, y, h(x, y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\tag{11.71}$$

حاصل ہو گا جہاں S کا قائمہ الزاویہ سایہ xy مستوی پر $\overline{R}$ ہے۔اگر $\boldsymbol{n}$ کا رخ نیچے کو ہو تب γ زاویہ منفرجہ ہو گا اور ہمیں درج ذیل ملے گا۔

$$\iint\limits_S u_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint\limits_{\overline{R}} u_3[x,y,h(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.72}$$

مساوات 11.69 کے باقی دو عدد تکمل کو بھی اسی طرح دوہرا تکمل میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

اگر S کو مقدار معلوم روپ

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}$$

سے ظاہر کیا گیا ہو تب S کی دو ممکنہ عمودی سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$\text{(الف)}\quad \boldsymbol{n} = +\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} \qquad \text{(ب)}\quad \boldsymbol{n} = -\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} \tag{11.73}$$

اب مساوات 11.68 کے دونوں اطراف کا $\boldsymbol{k}$ کے ساتھ اندرونی ضرب لینے سے $\cos\gamma = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}$ ملتا ہے جبکہ مساوات 11.52 کے تحت $\mathrm{d}A = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ ہے لٰہذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
\cos\gamma\,\mathrm{d}A = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A = \mp\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= \mp\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \mp\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر یعقوبی پایا جاتا ہے (حصہ 11.3)۔ اس طرح مساوات 11.69 میں

$$\iint\limits_S u_3(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mp\iint\limits_R u_3[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{11.74}$$

ہو گا جہاں مثبت علامت مساوات 11.73-الف اور منفی علامت مساوات 11.73-ب کی صورت میں استعمال ہو گا۔یہاں S کا مطابقتی خطہ uv مستوی میں R ہے۔

سوالات

سوال 11.110 تا سوال 11.117 میں S کو مقدار معلوم روپ میں لکھ کر مساوات 11.65 استعمال کرتے ہوئے $\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}A$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.110: $f = 2x - 1, \quad S: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le 4$
جواب: -8π

سوال 11.111: $f = 2x, \quad S: z = x^2, \quad 0 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$
جواب: $\frac{2}{3}(17\sqrt{17} - 1)$

سوال 11.112: $f = xy, \quad S: z = xy, \quad -1 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 1$
جواب: 0

سوال 11.113: $f = 3x^3 \cos y, \quad S: z = x^3, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$
جواب: $\frac{10\sqrt{10}-1}{18}$

سوال 11.114: $f = xy, \quad S: x^2 + y^2 = 9, \quad -1 \le z \le 2$
جواب: 0

سوال 11.115: $f = 2x - y + z, \quad S: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le 1$
جواب: π

سوال 11.116: $f = x - 2y, \quad S: x + y + z = 1$ ربع اول میں
جواب: $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$

سوال 11.117: $f = 2x + 3y, \quad S: z = y^2, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$
جواب: $\frac{7\sqrt{5} - 1 \sinh^{-1} 2}{4}$

سوال 11.118: فضا میں سطح S کی کثافت کمیت (کمیت فی اکائی رقبہ) $\sigma(x, y, z)$ ہے۔ کل کمیت M اور مرکز ثقل $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ کی درج ذیل کلیات درست ہونے کا جواز پیش کریں۔

$$M = \iint\limits_S \sigma \, \mathrm{d}A, \quad \bar{x} = \frac{1}{M} \iint\limits_S x\sigma \, \mathrm{d}A, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint\limits_S y\sigma \, \mathrm{d}A, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iint\limits_S z\sigma \, \mathrm{d}A$$

سوال 11.119: فضا میں سطح S کی کثافت کمیت (کمیت فی اکائی رقبہ) $\sigma(x, y, z)$ ہے۔ درج ذیل کلیات x ، y ، z محور کے لحاظ سے بالترتیب جمودی معیار اثر I_x ، I_y ، I_z دیتے ہیں۔ ان کی درست ہونے کا جواز پیش کریں۔

$$I_x = \iint\limits_S (y^2 + z^2)\sigma \, \mathrm{d}A, \quad I_y = \iint\limits_S (x^2 + z^2)\sigma \, \mathrm{d}A, \quad I_z = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\sigma \, \mathrm{d}A$$

سوال 11.120 تا سوال 11.124 میں دیے محور کے لحاظ سے جھلی S کی جمودی معیار اثر دریافت کریں۔ کثافت $\sigma = 1$ ہے۔

سوال 11.120: $S: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le h, \quad z$ محور
جواب: $2\pi h$

سوال 11.121: $S: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le h, \quad z$ محور
جواب: $\frac{\sqrt{2}h\sqrt{1-h^2}}{3}(2h^2+1) + \sqrt{2}\sinh^{-1} h$

سوال 11.122: اندرسہ $\boldsymbol{r} = (a + b\cos v)\cos u\boldsymbol{i} + (a + b\cos v)\sin u\boldsymbol{j} + b\sin v\boldsymbol{k},$
$(a > b > 0)$ z محور
جواب: $2\pi^2 ab(2a^2 + 3b^2)$

سوال 11.123: اندرسہ (سوال 11.122) جبکہ محور xz مستوی میں خط $x = a$ ہے۔
جواب: $2\pi^2 ab(4a^2 + 3b^2)$

سوال 11.124: اندرسہ (سوال 11.122) جبکہ محور xz مستوی میں خط $x = a - b$ ہے۔
جواب: $2\pi^2 ab(4a^2 - 4ab + 5b^2)$

سوال 11.125: (مسئلہ سٹائنر[43]) اگر کل کمیت M کے مرکز ثقل سے گزرتی محور A کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر I_A ہو تب ثابت کریں کہ A کے متوازی اور اس سے k فاصلہ پر محور B کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر I_B درج ذیل ہو گی۔

$$I_B = I_A + k^2 M$$

سوال 11.126: مسئلہ سٹائنر[44] استعمال کرتے ہوئے سوال 11.122 کی جواب سے سوال 11.123 اور سوال 11.124 کے جوابات حاصل کریں۔

سوال 11.127: موبیوس پٹی کو نقطہ دار لکیر پر کھینچی سے کاٹ کر دیکھیں کیا ملتا ہے؟

---

[43] Steiner's theorem

[44] سوئزرلینڈ کے یعقوب سٹائنر [1796-1863]

11.8 تہرا تکمل۔گاوس کا مسئلہ پھیلاو

دہرا تکمل (حصہ 11.3) کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے تہرا تکمل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ فرض کریں کہ فضا کے کسی بند محدود[45] خطہ T میں تفاعل $f(x, y, z)$ معین ہے۔ہم تینوں محور کے متوازی سطحوں سے T کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ہم T کے متوازی السطوح ٹکڑوں کو ہم 1 تا n سے ظاہر کرتے ہیں۔ایسے ہر ٹکڑے کے اندر ہم بلا منصوبہ کوئی نقطہ منتخب کرتے ہیں، مثلاً ٹکڑا k میں نقطہ (x_k, y_k, z_k) چنا جاتا ہے، اور درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta H$$

جہاں ٹکڑا k کی حجم ΔH_k ہے۔ہم مثبت عدد صحیح n کی قیمت بتدریج بڑھاتے ہوئے بالکل آزادانہ طریقے سے اس طرح کے مجموعے حاصل کرتے ہیں پس اتنا خیال رکھا جاتا ہے کہ جیسے جیسے n کی قیمت لامتناہی کے قریب پہنچتی ہو، مستطیلی ٹکڑوں کی وتر کی زیادہ سے زیادہ لمبائی صفر تک پہنچتی ہو۔ یوں ہمیں حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، . . .کا سلسلہ حاصل ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی ایسے خطہ میں، جس کا T حصہ ہو، $f(x, y, z)$ استمراری ہے اور T کو لامتناہی تعداد کی ہموار سطحیں گھیرتی ہیں۔ایسی صورت میں یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ حقیقی اعداد J_{n1} ، J_{n2} ، . . .کا سلسلہ مرتکز ہو گا جس کا حد ٹکڑوں کی چنائی یا ٹکڑوں میں نقطوں (x, y_k, z_k) کی چنائی سے بالکل آزاد ہو گا (مثال 11.1 کی طرح)۔ اس حد کو خطہ T پر $f(x, y, z)$ کا تہرا تکمل[46] کہتے ہیں جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iiint_T f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{یا} \quad \iiint_T f(x, y, z)\,\mathrm{d}H$$

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ ایسا استمراری سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$ جس کے استمراری یک رتبی جزوی تفرق پائے جاتے ہوں کی پھیلاو کا فضا میں خطہ T پر تہرا تکمل کا تبادلہ T کی سطح پر $\boldsymbol{u}$ کے عمودی جزو کی سطحی تکمل میں کیا جا سکتا ہے۔ایسا مسئلہ پھیلاو کی مدد سے کیا جاتا ہے جو دو بعدی مسئلہ گرین کا تین بعدی مماثل ہے۔ مسئلہ پھیلاو کئی نظریاتی اور عملی مسائل میں بنیادی اہمیت رکھتی ہے۔

مسئلہ 11.2: گاوس کا مسئلہ پھیلاو (حجمی تکمل سے سطحی تکمل اور سطحی تکمل سے حجمی تکمل کا حصول)
فرض کریں کہ فضا میں بند محدود خطہ T کی سرحد S ٹکڑوں میں ہموار (حصہ 11.5) اور قابل سمت بند

[45] "بند" سے مراد ہے کہ وقفے کی سرحد بھی وقفے کا حصہ ہے اور "محدود" سے مراد ہے کہ پورے وقفے کو کافی وسعت کی کرہ میں گھیرا جا سکتا ہے۔
[46] triple integral

ہے۔مزید فرض کریں کہ خطہ T میں $\boldsymbol{u}(x,y,z)$ ایک استمراری سمتی تفاعل ہے جس کے T میں استمراری یک رتبی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔ تب درج ذیل ہو گا

$$\iiint\limits_T \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}H=\iint\limits_S u_n\,\mathrm{d}A \tag{11.75}$$

جہاں T کی لحاظ سے سطح S پر $\boldsymbol{u}$ کا باہر رخ عمودی جزو

$$u_n=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \tag{11.76}$$

ہے اور $\boldsymbol{n}$ سطح S کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ ہے۔

ثبوت: ہم $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{n}$ کو ارکان کی صورت میں لکھتے ہیں

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k}\qquad \boldsymbol{n}=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k}$$

جہاں $\boldsymbol{n}$ اور مثبت x ، y ، z محور کے مابین زاویے بالترتیب α ، β ، γ ہیں۔یوں مساوات 11.75 درج ذیل لکھی جا سکتی ہے

$$\iiint\limits_T\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_S(u_1\cos\alpha+u_2\cos\beta+u_3\cos\gamma)\,\mathrm{d}A \tag{11.77}$$

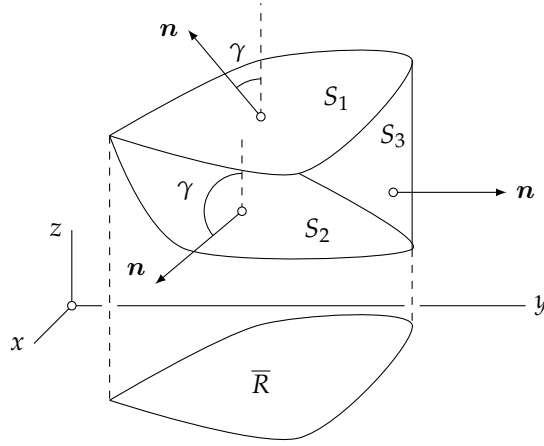
جسے مساوات 11.70 کی مدد سے درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\iiint\limits_T\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_S(u_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+u_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+u_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) \tag{11.78}$$

اب ظاہر ہے کہ اگر درج ذیل تین تعلقات یک وقت درست ہوں تب مساوات 11.77 درست ہو گا۔

$$\iiint\limits_T\frac{\partial u_1}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_S u_1\cos\alpha\,\mathrm{d}A \tag{11.79}$$

$$\iiint\limits_T\frac{\partial u_2}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_S u_2\cos\beta\,\mathrm{d} \tag{11.80}$$

$$\iiint\limits_T\frac{\partial u_3}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_S u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A \tag{11.81}$$

شکل 11.27: مخصوص خطہ

ہم مساوات 11.81 کو ایک خصوصی خطہ T کے لئے ثابت کرتے ہیں جس کی سرحد ٹکڑوں میں ہموار قابل سمت بند سطح S ہے۔اس مخصوص T کی خاصیت ہے کہ x ، y یا z محور کے متوازی کوئی بھی خط جو T کو قطع کرتی ہو، کا زیادہ سے زیادہ صرف ایک حصہ (یا صرف ایک نقطہ) T کے ساتھ مشترک ہو گا۔اس خاصیت کا مطلب ہے کہ T کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

$$g(x,y) \leq z \leq h(x,y) \tag{11.82}$$

جہاں xy مستوی پر T کے قائمہ الزاویہ سائے $\overline{R}$ میں نقطہ (x,y) ہو گا۔ظاہر ہے کہ $g(x,y)$ سطح S کی نچلی سطح S_2 کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $h(x,y)$ سطح S کی بالائی سطح S_1 کو ظاہر کرتی ہے (شکل 11.27)۔عین ممکن ہے کہ S کا کوئی کھڑا حصہ S_3 بھی پایا جاتا ہو۔(حصہ S_3 کی انحطاطی شکل ایک منحنی ہو سکتی ہے مثلاً کروی T کی صورت میں S_3 ایک گول دائرہ ہو گا۔)

مساوات 11.81 کو مساوات 11.82 کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔چونکہ کسی خطہ جس کا T حصہ ہے میں $\boldsymbol{u}$ استمراری قابل تفرق ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_{T} \frac{\partial u_3}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{\overline{R}} \Big[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial u_3}{\partial z}\,\mathrm{d}z\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.83}$$

اس میں اندرونی تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_g^h \frac{\partial u_3}{\partial z}\,\mathrm{d}z = u_3(x,y,h) - u_3(x,y,g)$$

یوں مساوات 11.83 کا بایاں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہو گا۔

$$\iint_{\overline{R}} u_3[x,y,h(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{\overline{R}} u_3[x,y,g(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.84}$$

آئیں اب ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 11.81 کا دایاں ہاتھ بھی اسی کے برابر ہے۔ چونکہ S_3 پر $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ہے لہٰذا $\cos\gamma = 0$ ہو گا اور یوں مساوات 11.83 کے دائیں ہاتھ S_3 پر سطحی تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں درج ذیل رہ جاتا ہے۔

$$\iint_S u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A = \iint_{S_1} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A + \iint_{S_2} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A$$

S_1 پر γ زاویہ حادہ ہے لہٰذا $\sigma = \gamma$ لیتے ہوئے مساوات 11.61 سے $\mathrm{d}A = \sec\gamma\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ملتا ہے۔ چونکہ $\cos\gamma\sec\gamma = 1$ کے برابر ہے لہٰذا یوں

$$\iint_{S_1} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A = \iint_{\overline{R}} u_3[x,y,h(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

حاصل ہو گا جو مساوات 11.84 میں پہلی دوہرا تکمل کے برابر ہے۔ اسی طرح S_2 پر γ زاویہ منفرجہ ہے لہٰذا $\pi - \gamma$ مساوات 11.61 میں زاویہ حادہ σ کے مترادف ہو گا۔ یوں

$$\mathrm{d}A = \sec(\pi-\gamma)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\sec\gamma\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

لکھتے ہوئے

$$\iint_{S_2} u_3\cos\gamma\,\mathrm{d}A = -\iint_{\overline{R}} u_3[x,y,g(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.85}$$

ہو گا جو عین 11.61 میں دوسرے دوہرا تکمل کے برابر ہے۔ یوں مساوات 11.81 ثابت ہوا۔

مساوات 11.79 اور مساوات 11.80 کو بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے جہاں مساوات 11.82 کی طرح T کو درج ذیل سے ظاہر کیا جائے گا۔

$$\tilde{g}(y,z) \le x \le \tilde{h}(y,z) \quad \text{اور} \quad g^*(x,z) \le y \le h^*(x,z)$$

اس طرح مسئلہ پھیلاو کا مخصوص خطے میں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

ایسا خطہ T جس کو اضافی سطحوں کی مدد سے محدود تعداد کی مخصوص ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کے ہر ٹکڑے پر مسئلہ پھیلاو لاگو کرتے ہوئے تمام جوابات کو مجموعہ لینے سے پوری خطے پر مسئلہ ثابت ہو گا۔اس ترکیب بالکل مسئلہ گرین میں استعمال کی گئی ترکیب کی طرح ہے۔ہر اضافی سطح پر دو مرتبہ حاصل سطحی تکمل کے جوابات کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا جبکہ باقی سطحوں پر سطحی تکمل T کی پوری سطح S پر سطحی تکمل ہی ہو گا۔ T کے تمام ٹکڑوں کے حجمی تکملات کا مجموعہ T کے حجمی تکمل کے برابر ہو گا۔

یوں کسی بھی عملی استعمال کے محدود خطہ T کے لئے مسئلہ پھیلاو کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

مسئلہ کو ایسی عمومی خطہ T جو مسئلہ کی شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے ثابت کرنے کی خاطر ہم T کو تخمیناً ایسی خطوں میں تقسیم کرتے ہیں جو ان شرائط پر پورا اترتے ہوں اور تحدیدی طریقہ اختیار کرتے ہیں۔ یہ ترکیب مسئلہ گرین کی ثبوت میں اختیار کی گئی ترکیب کی طرح ہے۔

□

مسئلہ گرین خطی تکمل کے حل میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔اسی طرح مسئلہ پھیلاو سطحی تکمل کے حل میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔

مثال 11.21: سطحی تکمل کا حصول بذریعہ مسئلہ پھیلاو
درج ذیل کو تہرا تکمل میں تبدیل کرتے ہوئے حل کریں جہاں S بیلن $x^2+y^2=a^2\,(0\le z\le b)$ اور اس کے دونوں اطراف کی ڈھکنوں کی سطح ہے۔

$$I=\iint_S (x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+x^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$$

حل: یہاں مساوات 11.77 اور مساوات 11.78 میں $u_1=x^3$ ، $u_2=x^2y$ ، $u_3=x^2z$ ہیں۔یوں خطہ T کی تشاکل کو دیکھ کر ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\iiint_T (3x^2+x^2+x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=4\cdot 5\int_0^b\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

اندرونی تکمل $\frac{1}{3}(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$ کے برابر ہے۔یوں $y=a\cos t$ چنتے ہوئے

$$\mathrm{d}y=-a\sin t\,\mathrm{d}t,\quad (a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}=a^3\sin^3 t$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب y پر تکمل

$$\frac{1}{3}\int_0^a (a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}a^4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi a^4}{16}$$

ہو گا اور آخر میں z پر تکمل جزو b دیتا ہے لہٰذا جواب درج ذیل ہو گا۔

$$I=4\cdot 5\frac{\pi a^4}{16}b=\frac{5}{4}\pi a^4 b$$

□

11.9 مسئلہ پھیلاو کے نتائج اور استعمال

مسئلہ پھیلاو کی عملی استعمال اور اس کے چند اہم نتائج کی مثالیں اس حصے میں پیش کی جائیں گی۔ان مثالوں میں فرض کیا جاتا ہے کی تفاعل اور خطہ مسئلہ پھیلاو کے شرائط پر پورا اترتے ہیں۔مزید کہ سطح S پر خطہ T کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔

مثال 11.22: محدد سے آزاد پھیلاو

مسئلہ پھیلاو کی (مساوات 11.75) کے دونوں اطراف کو خطہ T کی حجم $H(T)$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{H(T)}\iiint_T \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}H=\frac{1}{H(T)}\iint_{S(T)} u_n\,\mathrm{d}A \tag{11.86}$$

ملتا ہے جہاں T کی سرحدی سطح $S(T)$ ہے۔دوہرا تکمل کی خصوصیات کو حصہ 11.3 میں بیان کیا گیا۔تہرا تکمل بھی یہی خصوصیات رکھتا ہے۔بالخصوص تہرا تکمل کا مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ خطہ T میں کسی بھی استمراری تفاعل $f(x,y,z)$ کے لئے T میں ایسا نقطہ $Q:(x_0,y_0,z_0)$ پایا جائے گا کہ درج ذیل درست ہو گا۔

$$\iiint_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}H=f(x_0,y_0,z_0)H(T)$$

یوں $f = \nabla \cdot \boldsymbol{u}$ پر کرتے ہوئے مساوات 11.86 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{1}{H(T)} \iiint_T \nabla \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}H = \nabla \cdot \boldsymbol{u}(x_0, y_0, z_0) \tag{11.87}$$

فرض کریں کہ T میں $N : (x_1, y_1, z_1)$ کوئی مقررہ نقطہ ہے اور T نقطہ N کے گرد یوں سکڑتا ہے کہ N سے T کے دور ترین نقطے کا فاصل $d(T)$ صفر کے قریب پہنچے۔اس طرح نقطہ Q نقطہ N کے قریب پہنچے گا اور مساوات 11.86 اور مساوات 11.87 سے ظاہر کہ کہ نقطہ N پر $\boldsymbol{u}$ کی پھیلاو درج ذیل ہو گی۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(x_1, y_1, z_1) = \lim_{d(T) \to 0} \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} u_n \, \mathrm{d}A \tag{11.88}$$

اس کلیہ کو بعض اوقات پھیلاو کی تعریف تصور کیا جاتا ہے۔جہاں حصہ 10.10 میں پھیلاو کی تعریف میں x ، y ، z محدد پائے جاتے ہیں مساوات 11.88 میں دی گئی پھیلاو کی تعریف محدد سے پاک ہے۔اس سے یک دم اخذ کیا جا سکتا ہے کہ پھیلاو کی قیمت پر محددی نظام کی انتخاب کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ □

مثال 11.23: پھیلاو کا طبعی مفہوم

مسئلہ پھیلاو سے سمتیہ کی پھیلاو کا مفہوم سمجھا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرنے کی خاطر ہم اکائی کمیتی کثافت $\rho = 1$ کی داب نا پذیر سیال کی برقرار حال (وقت کے ساتھ نہ تبدیل ہوتا) بہاو پر غور کرتے ہیں (مثال 10.24 بھی دیکھیں)۔ کسی بھی نقطہ N پر ایسی بہاو کا تعین اس نقطہ پر سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v}(N)$ سے کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ فضا میں خطہ T کی سرحدی سطح S ہے اور $\boldsymbol{n}$ باہر رخ S کا اکائی عمودی سمتیہ ہے۔اس سطح کے چھوٹے حصہ ΔS جس کا رقبہ ΔA ہے سے، اندرون S سے بیرون S رخ، اکائی وقت میں کمیت کی اخراج $v_n \Delta A$ [47] ہو گی جہاں $v_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا $\boldsymbol{n}$ رخ جزو ہے (یعنی S کا عمودی جزو ہے) اور $\boldsymbol{n}$ کو ΔS کے کسی موزوں نقطے پر لیا گیا ہے۔یوں T سے کل اخراج جو S سے گزرتا ہے سطحی تکمل

$$\iint_S v_n \, \mathrm{d}A$$

[47] کسی نقطہ پر v_n منفی ہو سکتا ہے لہٰذا ایسے نقطے پر سیال S میں داخل ہو گا۔

سے حاصل ہو گا۔یہ تکمل T کا کل اخراج دیتا ہے۔یوں T کی اوسط اخراج

$$\frac{1}{H}\iint_S v_n \,\mathrm{d}A \tag{11.89}$$

ہو گی جہاں T کا حجم H ہے۔چونکہ بہاو برقرار حال ہے اور سیال داب نا پذیر ہے لہٰذا T سے اخراج برابر کمیت T کو مہیا کی جاتی ہو گی۔یوں اگر مساوات 11.89 کے تکمل کی قیمت غیر صفر ہو تب T میں **منبع**[48] (مثبت منبع یا منفی منبع) پایا جاتا ہو گا جہاں سیال پیدا یا غائب ہوتا ہے۔

اگر ہم T کو ایک نقطہ N مانند کر دیں تب مساوات 11.89 ہمیں N پر **شدتِ منبع**[49] دیگا (مساوات 11.88 کا دائیں ہاتھ جہاں v_n کی جگہ u_n لکھا گیا ہے)۔ اس سے ظاہر ہے کہ داب نا پذیر سیال کی برقرار حال سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا نقطہ N پر پھیلاو سے مراد N پر شدت منبع ہے۔صرف اور صرف اس صورت T میں کوئی منبع نہ ہو گا جب $\nabla \cdot \boldsymbol{v} \equiv 0$ ہو اور ایسی صورت میں میں کسی بھی بند سطح S^* کے لئے درج ذیل درست ہو گا۔

$$\iint_{S^*} v_n \,\mathrm{d}A = 0$$

آپ نے دیکھا کہ کسی نقطہ سے سیال کی اخراج کو اس نقطہ پر $\boldsymbol{v}$ کی پھیلاو ظاہر کرتی ہے۔ہم کہتے ہیں سیال اس نقطہ سے نکل کر پھیلتا ہے۔اسی سے اس عمل کو پھیلاو کہتے ہیں۔ □

مثال 11.24: مساوات حرارت۔ حراری بہاو

ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی جسم میں حراری توانائی کا بہاو گرم سے سرد مقام کے رخ ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ حراری بہاو کی سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ درج طرز کی ہو گی

$$\boldsymbol{v} = -K\nabla U \tag{11.90}$$

جہاں $U(x,y,z,t)$ لمحہ t پر نقطہ (x,y,z) کا درجہ حرارت ہے اور K جسم کی **حراری موصلیت**[50] ہے۔عمومی طبعی حالات میں K ایک مستقل ہو گا۔

---

[48] source
[49] source intensity
[50] thermal conductivity

فرض کریں کہ جسم میں R کوئی خطہ ہے جس کی سرحدی سطح S ہے۔یوں اکائی وقت میں R سے کل حراری توانائی کا اخراج

$$\iint_S v_n \,\mathrm{d}A$$

ہو گا جہاں $v_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ سرحد S پر باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کی رخ $\boldsymbol{v}$ کا جزو ہے۔یہ تعلق گزشتہ مثال کی حاصل کیا گیا ہے۔ مساوات 11.90 اور مسئلہ پھیلاو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (مساوات 10.114)۔

$$\iint_S v_n \,\mathrm{d}A = -K \iiint_R \nabla \cdot (\nabla U) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = -K \iiint_R \nabla^2 U \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \tag{11.91}$$

R میں کل حراری توانائی W درج ذیل ہے

$$W = \iiint_R \sigma \rho U \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

جہاں σ جسم کے مواد کی **خصوصی حراری استعداد**[51] ہے جبکہ ρ جسم کی کمیتی کثافت (کمیت فی اکائی حجم) ہے۔یوں جسم میں حراری توانائی کی وقت کے ساتھ گھٹاو

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = -\iiint_R \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

ہو گی جو عین R سے توانائی کی اخراج کے برابر ہو گا یعنی

$$-\iiint_R \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = -K \iiint_R \nabla^2 U \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

یا:

$$\iiint_R \left(\sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} - K \nabla^2 U\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 0$$

چونکہ یہ مساوات کسی بھی خطہ R کے لئے درست ہے لہٰذا متکمل (اگر استمراری ہو تب) تمام R میں صفر کے برابر ہو گا یعنی:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \nabla^2 U \qquad \left(c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}\right) \tag{11.92}$$

یہ **حراری مساوات**[52] کہلاتی ہے جو حراری بہاو کی بنیادی مساوات ہے۔حرارت کے مسئلوں کو حل کرنے کے تراکیب

---

specific heat capacity[51]
heat equation[52]

پر باب 6 میں غور کیا جائے گا۔ □

مثال 11.25: لاپلاسی مساوات کے حل کی بنیادی خصوصیت
مسئلہ پھیلاو کی مساوات

$$\iiint_T \nabla \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}H = \iint_S u_n \, \mathrm{d}A \tag{11.93}$$

پر غور کریں۔فرض کریں کہ $\boldsymbol{u}$ کسی غیر سمتی تفاعل کی ڈھلوان $\boldsymbol{u} = \nabla f$ ہے۔یوں

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$$

ہو گا (مساوات 10.114)۔مزید

$$u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla f$$

لکھا جائے گا جو مساوات 10.81 کے تحت S کے باہر رخ f کا سمتی تفرق ہے جس کو $\frac{\partial f}{\partial n}$ سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 11.93 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\iiint_T \nabla^2 f \, \mathrm{d}H = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} \, \mathrm{d}A \tag{11.94}$$

ظاہر ہے کہ یہ مساوات 11.33 کی تین بعدی مماثل ہے۔ □

مسئلہ پھیلاو کے لئے درکار شرائط کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 11.94 سے درج ذیل اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 11.3: (لاپلاسی مساوات کے حل کی خصوصیت)
فرض کریں کہ کسی دائرہ کار D میں تفاعل $f(x, y, z)$ لاپلاسی مساوات

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

کا حل ہے اور D میں f کے دو رتبی جزوی تفرق استمراری ہیں۔تب D میں کسی بھی ٹکڑوں میں ہموار بند اور قابل سمت بند سطح S پر f کے عمودی (سمتی) تفرق کا تکمل صفر ہو گا۔

مثال 11.26: مسئلہ گرین
فرض کریں کہ f اور g ایسے غیر سمتی تفاعل ہیں کہ کسی خطہ T میں $\boldsymbol{u} = f\nabla g$ مسئلہ پھیلاو کی شرائط پر پورا اترتا ہو۔تب درج ذیل ہو گا (سوال 10.179)۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot (f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$$

مزید

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot (f\nabla g) = f(\boldsymbol{n} \cdot \nabla g)$$

ہو گا جہاں $\boldsymbol{n} \cdot \nabla g$ سے مراد مسئلہ پھیلاو کی سطح S پر باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کی سمت میں g کا سمتی تفرق ہے۔ اس سمتی تفرق کو $\frac{\partial g}{\partial n}$ لکھنے سے مسئلہ پھیلاو کی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\iiint\limits_T (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,\mathrm{d}H = \iint\limits_S f\frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}A \tag{11.95}$$

جس کو **گرین کلیہ اول**[53] یا (لاگو شرائط کو شامل کرتے ہوئے) مسئلہ گرین کی پہلی صورت کہتے ہیں۔

f اور g کو آپس میں بدلنے سے اسی طرح کی دوسری مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو مساوات 11.95 سے منفی کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\iiint\limits_T (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,\mathrm{d}H = \iint\limits_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}A \tag{11.96}$$

جس کو **گرین کلیہ دوم**[54] یا (لاگو شرائط کو شامل کرتے ہوئے) مسئلہ گرین کی دوسری صورت کہتے ہیں۔ □

مثال 11.27: لاپلاس مساوات کی حل کی یکتائی
فرض کریں کہ f مسئلہ 11.3 کے شرائط پر پورا اترتا ہے اور D میں ٹکڑوں میں ہموار بند اور قابل سمت بند سطح S پر ہر جگہ صفر کے برابر ہے۔تب مساوات 11.95 میں $f = g$ پر کرتے ہوئے اور S کے اندرونی حصہ کو T سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\iiint\limits_T \nabla f \cdot \nabla f\ \mathrm{d}H = \iiint\limits_T \left|\nabla f\right|^2 \mathrm{d}H = 0$$

---

[53] Green's first formula
[54] Green's second formula

ملتا ہے جہاں مسئلہ 11.3 میں دیے شرط کے مطابق $\nabla^2 f = 0$ لیا گیا ہے اور مساوات 11.95 کے دائیں ہاتھ چونکہ سطح S پر $f = 0$ ہے لہٰذا اس سطحی تکمل کو صفر لیا گیا ہے۔اب چونکہ ہمارے مفروضہ کے تحت T کے اندر اور S پر $|\nabla f|$ استمراری اور غیر منفی ہے لہٰذا یہ ضرور پورے T میں ہر جگہ صفر کے برابر ہو گا۔یوں $f_x = f_y = f_z = 0$ ہو گا لہٰذا T میں f ایک مستقل ہو گا اور چونکہ f استمراری ہے لہٰذا T کے اندر اس کی قیمت وہی ہو گی جو S پر ہے یعنی $f = 0$ ہو گا۔ □

اس سے درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 11.4:
اگر تفاعل $f(x, y, z)$ مسئلہ 11.3 کے شرائط پر پورا اترتا ہے اور D میں ٹکڑوں میں ہموار بند اور قابل سمت بند سطح S پر ہر جگہ صفر کے برابر ہے۔تب S کے احاطہ خطہ T میں $f = 0$ ہو گا۔

اس مسئلہ کے اہم نتائج پائے جاتے ہیں۔فرض کریں کہ تفاعل f_1 اور f_2 مسئلہ 11.3 کے شرائط پر پورا اترتے ہیں اور S پر دونوں یکساں ہوں۔تب ان کا فرق $f_1 - f_2$ بھی ان شرائط پر پورا اترتا ہے اور پوری S پر اس کی قیمت صفر کے برابر ہے۔یوں مسئلہ 11.4 کے تحت پوری T میں $f_1 - f_2 = 0$ ہو گا جس سے درج ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 11.5: (لاپلاس مساوات کی حل کی یکتائی)
فرض کریں کہ f لاپلاس مساوات کا حل ہے اور دائرہ کار D میں اس کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔مزید فرض کریں کہ D میں خطہ T مسئلہ پھیلاو کی شرائط پر پورا اترتا ہے۔تب T میں f کی قیمت یکتا ہو گی اور یہ T کی سرحدی سطح S پر قیمت کے برابر ہو گی۔

سوالات

سوال 11.128 تا سوال 11.131 میں حجم بذریعہ تہرا تکمل دریافت کریں۔

سوال 11.128: چو سطحہ جس کے کونے $A:(0,0,0)$ ، $B:(3,0,0)$ ، $C:(0,2,0)$ ، $D:(0,0,1)$ ہیں۔
جواب: یہ چو سطح ربع اول میں جس سطح کے نیچے پایا جاتا ہے پہلے اس (بالائی) سطح کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

B تا C سمتیہ $\boldsymbol{r}_1 = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ اور B تا D سمتیہ $\boldsymbol{r}_2 = -3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ دونوں جو سطح کی اس بالائی سطح پر پائے جاتے ہیں لہٰذا دونوں سطح کے مماسی سمتیات ہیں۔ان سے بالائی سطح کی اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|} = \frac{2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}}{7}$$

یوں بالائی سطح کی مساوات $[(x-3)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}] \cdot \boldsymbol{n} = 0$ سے

$$2x + 3y + 6z = 6$$

حاصل ہوتی ہے۔اس طرح چو سطح کا حجم درج ذیل ہو گا (سوال 11.27 دیکھیں)۔

$$\begin{aligned} H = \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x &= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) \mathrm{d}x = 1 \end{aligned}$$

سوال 11.129: ربع اول میں وہ خطہ جس کی سرحدیں $y = x$ ، $y = x^2$ اور $z = 3 - 2x$ ہیں۔
جواب: $\frac{1}{3}$

سوال 11.130: سطح $z = 1 - x^2 - y^2$ اور xy مستوی کے مابین خطہ۔
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 11.131: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ اور $x^2 + z^2 = 1$ کا مشترکہ حصہ۔
جواب: $\frac{16}{3}$

سوال 11.132 تا سوال 11.135 میں کمیتی کثافت σ دیا گیا ہے۔خطہ T میں کل کمیت دریافت کریں۔

سوال 11.132: مکعب $\sigma = xy, \quad T: 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le z \le 1$
جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 11.133: چو سطح جس کے کونے $(0,0,0)$ ، $(3,0,0)$ ، $(0,2,0)$ ، $(0,0,1)$ ہیں اور $\sigma = x + y + z$ ہے۔
جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 11.134: چو سطح جس کے کونے $(0,0,0)$ ، $(3,0,0)$ ، $(0,2,0)$ ، $(0,0,1)$ ہیں اور $\sigma = xy$ ہے۔
جواب: $\frac{3}{10}$

سوال 11.135: ربع اول میں $y = 1 - x^2$ اور $z = x$ کے درمیان T جہاں $\sigma = xy$ ہے۔
جواب: $\frac{4}{105}$

سوال 11.136 تا سوال 11.140 میں خطہ T میں کمیتی کثافت $\sigma = 1$ لیتے ہوئے z محور کے لحاظ سے جمودی معیار اثر $I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\sigma \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ دریافت کریں۔

سوال 11.136: مکعب $0 \le x \le c,\ 0 \le y \le c,\ 0 \le z \le c$
جواب: $\frac{2}{3}c^5$

سوال 11.137: بیلن $x^2 + y^2 \le c^2, 0 \le z \le h$
جواب: $\frac{1}{2}\pi c^4 h$

سوال 11.138: بیلن $x^2 + z^2 \le c^2, 0 \le y \le h$
جواب: $\frac{\pi c^2 h}{12}(4h^2 + 3c^2)$

سوال 11.139: مخروط $x^2 + y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le h$
جواب: $\frac{\pi h^5}{10}$

سوال 11.140: اندرون کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$
جواب: $\frac{4}{15}\pi c^5$

سوال 11.141: مسئلہ پھیلاو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ خطہ T جس کی سرحد سطح S ہو کا حجم H درج ذیل ہے۔

$$H = \iint\limits_S x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iint\limits_S y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z = \iint\limits_S z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{1}{3} \iint\limits_S (x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z + z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y)$$

سوال 11.142: مکعب کا حجم سوال 11.141 کے کلیات کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 11.143: بیلن $x^2+y^2 \le 1,\; 0 \le z \le h$ کا حجم سوال 11.141 کے کلیات کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 11.144: $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ لیتے ہوئے مساوات 11.75 کی مدد سے ثابت کریں کہ خطہ T جس کی سرحدی سطح S ہو کا حجم درج ذیل ہے

$$H = \frac{1}{3} \iint\limits_S r \cos\theta \, \mathrm{d}A$$

جہاں S پر نقطہ $N:(x,y,z)$ کا مبدا O سے فاصلہ r ہے اور O سے N تک سمتی خط اور N پر باہر رخ عمودی سمتیہ کے مابین زاویہ θ ہے۔

سوال 11.145: رداس a کی کرہ کا حجم سوال 11.144 کے کلیے کی مدد سے دریافت کریں۔

سوال 11.146 تا سوال 11.152 میں S مسئلہ پھیلاو کی شرط کے مطابق سمت بند ہے۔ سطحی تکمل کو مسئلہ پھیلاو کی مدد سے حل کریں۔

سوال 11.146:

$$\iint\limits_S [(x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y], \qquad S:\; x^2+y^2+z^2 = a^2$$

جواب: $\frac{8\pi a^3}{3}$

سوال 11.147: سطح مکعب سوال 11.132 $\iint\limits_S (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$

جواب: 3

سوال 11.148: سطح بیلن سوال 11.137 $\iint\limits_S (x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$

جواب: $\pi c^2 h^2$

سوال 11.149: سطح سوال 11.146 $\iint\limits_S (yz^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$

جواب: 0

سوال 11.150: $\iint\limits_S x(y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ S: 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 0 \le$ متوازی السطوح $z \le 4$
جواب: 72

سوال 11.151: سطح سوال 11.150 $\iint\limits_S [x\cos y\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y-\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z]$
جواب: 24

سوال 11.152: سطح سوال 11.146 $\iint\limits_S [(y\cos^2 x + y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z(\sin^2 x - 3y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y]$
جواب: $\frac{4}{3}\pi a^3$

سوال 11.153 تا سوال 11.157 میں T بند محدود خطہ ہے جس کی سرحدی سطح S ہے۔ مسئلہ پھیلاو استعمال کرتے ہوئے دیے گئے فقرے ثابت کریں جہاں ہارمونی[55] سے مراد لاپلاس مساوات کا حل ہے جس کے T میں استمراری دو رتبی جزوی تفرق پائے جاتے ہوں۔

سوال 11.153: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g ہارمونی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S \frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}A = 0$$

جواب: مساوات 11.95 میں $f = 1$ پر کریں۔

سوال 11.154: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g ہارمونی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S g\frac{\partial g}{\partial n}\,\mathrm{d}A = \iiint\limits_T |\nabla g|^2\,\mathrm{d}H$$

جواب: مساوات 11.95 میں $f = g$ پر کریں۔

سوال 11.155: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g ہارمونی ہو اور S پر $\frac{\partial g}{\partial n} = 0$ ہو تب T میں g ایک مستقل ہو گا۔
جواب: سوال 11.154 کو استعمال کریں۔

[55] harmonic

سوال 11.156: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g اور f ہارمونی ہوں اور S پر $\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial g}{\partial n}$ ہو تب T میں $f=g+c$ ہو گا جہاں c مستقل قیمت ہے۔

سوال 11.157: اگر کسی خطہ جس کا T حصہ ہو میں g اور f ہارمونی ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}A=0$$

سوال 11.158: ثابت کریں کہ لاپلاسی کو محدد سے پاک صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\nabla^2 f=\lim_{d(T)\to 0}\frac{1}{H(T)}\iint_{S(T)}\frac{\partial f}{\partial n}\,\mathrm{d}A$$

جہاں جس نقطے پر لاپلاسی درکار ہو، اس نقطے سے T میں دور ترین نقطے کا فاصلہ $d(T)$ ہے اور $H(T)$ خطہ T کا حجم ہے جس کی سرحدی سطح $S(T)$ ہے۔ (اشارہ: مساوات 11.88 میں $\boldsymbol{u}=\nabla f$ پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{n}$ لیتے ہوئے مساوات 10.81 استعمال کریں جہاں $\boldsymbol{n}$ سطح S کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ ہے۔)

11.10 مسئلہ سٹوکس

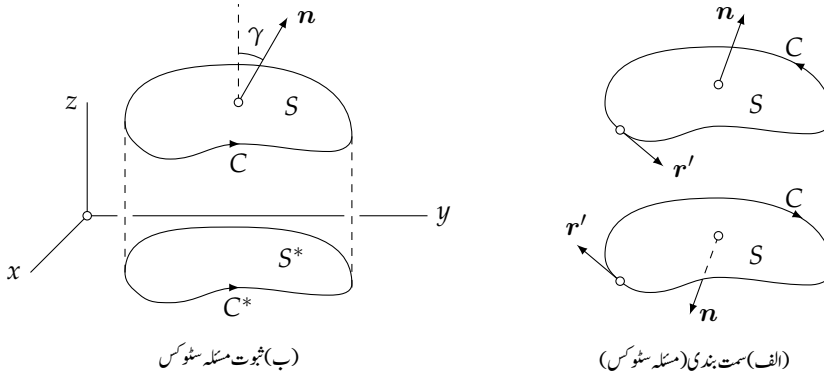
ہم نے حصہ 11.4 میں دیکھا کہ مستوی پر دوہرا تکمل کو سطح کی سرحد پر خطی تکمل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ آئیں اس نتیجے کو عمومی بناتے ہوئے سطحی تکمل کے تبادل پر غور کریں۔

مسئلہ 11.6: مسئلہ سٹوکس[56] (سطحی تکمل سے خطی تکمل اور خطی تکمل سے سطحی تکمل کا حصول)
فرض کریں کہ فضا میں ٹکڑوں میں ہموار سمت بند سطح S کی سرحد C ٹکڑوں میں ہموار سادہ بند منحنی ہے۔ مزید فرض کریں کہ کسی ایسے خطہ میں جس کا S حصہ ہو، $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ استمراری سمتی تفاعل ہے اور اس خطے میں اس کے استمراری یک رتبی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔ تب مسئلہ سٹوکس[57] کہتا ہے کہ

$$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{v})_n\,\mathrm{d}A=\int_C v_t\,\mathrm{d}s \tag{11.97}$$

[56] آئرستانی ریاضی دان اور ماہر طبیعیات جارج جبرائیل سٹوکس [1819-1903]
[57] Stokes' theorem

(ب) ثبوت مسئلہ سٹوکس

(الف) سمت بندی (مسئلہ سٹوکس)

شکل 11.28: مسئلہ سٹوکس

ہو گا جہاں S کے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کی سمت میں $\nabla \times \boldsymbol{v}$ کا جزو $(\nabla \times \boldsymbol{v})_n = (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}$ ہے؛ C پر تکمل کا رخ شکل 11.28-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں C کی مماس $\boldsymbol{r}'$ (شکل 11.28-الف) کی سمت میں $\boldsymbol{v}$ کا جزو v_t ہے۔

ثبوت: ہم مسئلہ سٹوکس کو ایسی سطح S کے لئے ثابت کرتے ہیں جس کو درج ذیل تینوں طریقوں سے ظاہر کرنا ممکن ہو

$$\text{(الف)}\; z = f(x,y), \quad \text{(ب)}\; y = g(x,z), \quad \text{(پ)}\; x = h(y,z) \tag{11.98}$$

جہاں f ، g اور h اپنے آزاد متغیرات کے استمراری تفاعل ہیں اور ان کے استمراری یک رتبی جزوی تفرقات پائے جاتے ہیں۔فرض کریں کہ S کا بالائی رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ درج ذیل

$$\boldsymbol{n} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k} \tag{11.99}$$

ہے (شکل 11.28-ب) اور $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ ایک سمتی تفاعل ہے۔اگر C کو $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ لکھا جائے جہاں قوس لمبائی s تکمل کے رخ بڑھتی ہو تب اکائی مماسی سمتیہ

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}$$

ہو گا لہٰذا

$$v_t = \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = v_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + v_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + v_3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$v_t \, \mathrm{d}s = \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \, \mathrm{d}s = v_1 \, \mathrm{d}x + v_2 \, \mathrm{d}y + v_3 \, \mathrm{d}z$$

یوں گردش کو دائیں ہاتھ کارتیسی نظام (حصہ 10.1) میں لکھتے ہوئے مسئلہ سٹوکس کی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\iint\limits_S \Big[\Big(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\Big)\cos\alpha + \Big(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\Big)\cos\beta + \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big] \, \mathrm{d}A = \int\limits_C (v_1 \, \mathrm{d}x + v_2 \, \mathrm{d}y + v_3 \, \mathrm{d}z) \tag{11.100}$$

جہاں α ، β ، γ مساوات 11.99 میں بیان کیے گئے ہیں۔

ہم ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 11.100 میں دونوں اطراف وہ تکمل جن میں v_1 پایا جاتا ہے عین برابر ہیں یعنی:

$$\iint\limits_S \Big(\frac{\partial v_1}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial v_1}{\partial y}\cos\gamma\Big) \, \mathrm{d}A = \int\limits_C v_1 \, \mathrm{d}x \tag{11.101}$$

فرض کریں کہ xy مستوی پر S کا قائمہ سایہ S^* ہے جس کی سرحد C^* کی سمت بندی شکل 11.28-ب میں دکھائی گئی ہے۔ S کو مساوات 11.98-الف سے ظاہر کرتے ہوئے C پر خطی تکمل کو C^* پر خطی تکمل لکھتے ہیں۔

$$\int\limits_C v_1(x, y, a) \, \mathrm{d}x = \int\limits_{C^*} v_1[x, y, f(x, y)] \, \mathrm{d}x$$

اب مسئلہ گرین (حصہ 11.4) کو [f اور g کی بجائے] $v_1[x, y, f(x, y)]$ اور 0 پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int\limits_{C^*} v_1[x, y, f(x, y)] \, \mathrm{d}x = -\iint\limits_{S^*} \frac{\partial v_1}{\partial y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

دائیں ہاتھ تکمل میں

$$\frac{\partial v_1[x,y,f(x,y)]}{\partial y} = \frac{\partial v_1(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v_1(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad [z = f(x,y)]$$

لکھتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_C v_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x = -\iint_{S^*} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11.102}$$

ہم ثابت کرتے ہیں کہ مساوات 11.101 کے بائیں ہاتھ کا تکمل مساوات 11.102 کے دائیں ہاتھ کے تکمل کے برابر ہے۔ہم پہلے تکمل میں x اور y کو بطور متغیرات تکمل متعارف کرتے ہیں۔مساوات 11.98-الف کو

$$F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$$

لکھتے ہوئے

$$\nabla F = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i} - \frac{\partial F}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

ملتا ہے جس سے ڈھلوان F کی لمبائی a لکھتے ہیں۔

$$a = |\nabla F| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

چونکہ ∇F سطح S کو عمودی ہے لہٰذا S کی اکائی عمودی سمتیات $\boldsymbol{n}$ درج ذیل حاصل ہوتی ہیں۔

$$\boldsymbol{n} = \mp\frac{\nabla F}{a}$$

اب مثبت z رخ میں $\boldsymbol{n}$ اور ∇F دونوں کے اجزاء مثبت ہیں لہٰذا

$$\boldsymbol{n} = +\frac{\nabla F}{a}$$

ہو گا۔ xyz کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{n}$ اور ∇F کی روپ سے یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos\alpha = -\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{a}$$

مزید مساوات 11.60 کے تحت مساوات 11.101 میں $\mathrm{d}A = a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہو گا لہٰذا

$$\iint\limits_{S}\Big(\frac{\partial v_1}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial v_1}{\partial y}\cos\gamma\Big)\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{S^*}\Big[\frac{\partial v_1}{\partial z}\Big(-\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial y}\Big) - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{1}{a}\Big]a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

لکھا جا سکتا ہے جو مساوات 11.102 کے دائیں ہاتھ تکمل برابر ہے۔یوں مساوات 11.101 ثابت ہوتی ہے۔

اگر $-\boldsymbol{n}$ کو مثبت اکائی عمودی سمتیہ چنا جاتا تب C کی مثبت سمت الٹ رخ ہوتی لہٰذا حاصل جواب پر کوئی اثر نہ ہوتا۔یوں مساوات 11.101 S کے دونوں مثبت اکائی عمودی سمتیات کے لئے درست ہے۔

مساوات 11.98-ب اور مساوات 11.98-پ میں دیے روپ استعمال کر کر بالکل اسی طرح درج ذیل ثابت ہوں گے۔

$$\iint\limits_{S}\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial v_2}{\partial z}\cos\alpha\Big)\,\mathrm{d}A = \int\limits_{C} v_2\,\mathrm{d}y \tag{11.103}$$

$$\iint\limits_{S}\Big(\frac{\partial v_3}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial v_3}{\partial x}\cos\beta\Big)\,\mathrm{d}A = \int\limits_{C} v_3\,\mathrm{d}z \tag{11.104}$$

مساوات 11.101، مساوات 11.103 اور مساوات 11.104 جمع کرتے ہوئے مساوات 11.97 ملتا ہے۔اس طرح مسئلہ سٹوکس ایسی سطح S کے لئے ثابت ہوتا ہے جس کو بیک وقت مساوات 11.98-الف، مساوات 11.98-ب اور مساوات 11.98-پ کی روپ میں لکھنا ممکن ہو۔

مسئلہ پھیلاو کی طرح موجودہ ثبوت کو وسعت دیتے ہوئے اسے ایسی سطح پر لاگو کیا جا سکتا ہے جس کو محدود تعداد کے ایسی ٹکڑوں میں تقسیم کرنا ممکن ہو کہ ہر ٹکڑے کو مساوات 11.98 کی روپ میں لکھا جا سکے۔عموماً عملاً استعمال کی سطحیں ایسی ہی ہوتی ہیں۔

مسئلہ کو ایسی عمومی سطح S جو مسئلہ کی شرائط پر پورا اترتا ہو کے لئے ثابت کرنے کی خاطر ہم S کو تخمیناً ایسی سطحوں میں تقسیم کرتے ہیں جو ان شرائط پر پورا اترتے ہوں اور تحدیدی طریقہ اختیار کرتے ہیں۔ یہ ترکیب مسئلہ گرین کی ثبوت میں اختیار کی گئی ترکیب کی طرح ہے۔

□

11.11 مسئلہ سٹوکس کے نتائج اور عملی استعمال

مثال 11.28: سطح میں مسئلہ گرین در حقیقت مسئلہ سٹوکس کی خصوصی شکل ہے
فرض کریں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ مستوی xy میں کسی ایسا خطہ میں استمراری قابل تفرق ہے جس میں سادہ تعلق بند محدود خطہ S پایا جاتا ہے جس کی سرحد C ٹکڑوں میں ہموار بند سادہ منحنی ہے۔تب مساوات 10.122 کے تحت

$$(\nabla \times \boldsymbol{v})_n = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

ہو گا۔مزید $v_t \, \mathrm{d}s = v_1 \, \mathrm{d}x + v_2 \, \mathrm{d}y$ لیتے ہوئے مساوات 11.97 درج ذیل لکھا جائے گا

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \, \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}A = \int\limits_C (v_1 \, \mathrm{d}x + v_2 \, \mathrm{d}y)$$

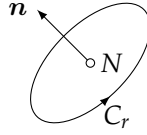
جو سطح میں مسئلہ گرین (حصہ 11.4) ہے۔ □

مثال 11.29: گردش کا طبعی مفہوم
فرض کریں کہ رداس r کے دائری قرص S_r کا مرکز N اور سرحد دائرہ C_r ہے (شکل 11.29)۔مزید فرض کریں کہ کسی خطہ جس کا S_r حصہ ہو میں $\boldsymbol{v}(Q) = \boldsymbol{v}(x, y, z)$ استمراری قابل تفرق سمتی تفاعل ہے۔تب مسئلہ سٹوکس اور سطحی تکمل کے اوسط قیمت مسئلہ کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\int\limits_{C_r} v_t \, \mathrm{d}s = \iint\limits_{S_r} (\nabla \times \boldsymbol{v})_n \, \mathrm{d}A = [\nabla \times \boldsymbol{v}(N^*)]_n A_r$$

جہاں S_r کا رقبہ A_r اور S_r میں N^* کوئی موزوں نقطہ ہے۔اس کو یوں

$$[\nabla \times \boldsymbol{v}(N^*)]_n = \frac{1}{A_r} \int\limits_{C_r} v_t \, \mathrm{d}s$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔سیال کی حرکت کی صورت میں تکمل

$$\int\limits_{C_r} v_t \, \mathrm{d}s$$

شکل 11.29: قرص (مثال 11.29)

C_r پر سیال کی دائری بہاو[58] کی ناپ ہے۔اب r کو صفر مانند کرنے سے

$$[\nabla \times \boldsymbol{v}(N)]_n = \lim_{r \to 0} \frac{1}{A_r} \int_{C_r} v_t \, \mathrm{d}s \tag{11.105}$$

ملتا ہے جس کو N پر فی اکائی رقبہ دائری بہاو کہا جا سکتا ہے۔ □

مثال 11.30: خطی تکمل کا حصول بذریعہ مسئلہ سٹوکس

تکمل $\int_C v_t \, \mathrm{d}s$ حل کریں جہاں مبدا سے دیکھتے ہوئے دائیں ہاتھ کارتیسی نظام میں دائرہ $C: x^2 + y^2 = 4, z = -3$ گھڑی کی الٹ رخ سمت بند ہے جبکہ $\boldsymbol{v}$ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} + xz^3\boldsymbol{j} - zy^3\boldsymbol{k}$$

ہم C کے احاطہ S کو مستوی دائری قرص $x^2 + y^2 \leq 4, z = -3$ لیتے ہیں۔یوں مسئلہ سٹوکس میں $\boldsymbol{n}$ کی سمت مثبت z رخ ہو گی لہٰذا $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$ ہو گا۔یوں $(\nabla \times \boldsymbol{v})_n$ سے مراد مثبت z رخ میں $\nabla \times \boldsymbol{v}$ کا جزو۔چونکہ $z = -3$ پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء $v_1 = y$ ، $v_2 = -27x$ اور $v_3 = 3y^3$ ملتے ہیں لہٰذا

$$(\nabla \times \boldsymbol{v})_n = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = -27 - 1 = -28$$

ہو گا۔یوں مسئلہ سٹوکس میں تکمل کی قیمت قرص کا رقبہ ضرب -28 یعنی -112π ہو گی۔

یہاں مسئلہ سٹوکس کی افادیت جاننے کی خاطر آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ مسئلہ سٹوکس استعمال کیے بغیر اس تکمل کو حل کریں۔ □

---

[58] circulation

سوالات

سوال 11.159 تا سوال 11.161 میں $\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{v})_n \, \mathrm{d}A$ کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.159: $\boldsymbol{v} = xz\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j},\; S :$ مکعب $0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1,\, z = 1$
جواب: ∓ 1

سوال 11.160: $\boldsymbol{v} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k},\; S :$ مکعب $0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1,\, z = -1$
جواب: ∓ 1

سوال 11.161: $\boldsymbol{v} = -\frac{1}{3}y^3\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}x^3\boldsymbol{j},\; S :$ قرص دائری $x^2 + y^2 \le a^2,\, z = 0$
جواب: $\mp \frac{\pi a^4}{2}$

سوال 11.162: مسئلہ سٹوکس کا دوسرا ہاتھ استعمال کرتے ہوئے سوال 11.159 حل کریں۔

سوال 11.163: مسئلہ سٹوکس کا دوسرا ہاتھ استعمال کرتے ہوئے سوال 11.161 حل کریں۔

سوال 11.164: ثابت کریں کہ اگر $\boldsymbol{v}$ اور S مسئلہ سٹوکس کے شرائط پر پورا اترتے ہوں اور $\boldsymbol{v} = \nabla f$ ہو تب $\int_C v_t \, \mathrm{d}s = 0$ ہو گا جہاں S کی سرحد C ہے۔

سوال 11.165 تا سوال 11.169 میں $\int_C v_t \, \mathrm{d}s$ کو مسئلہ سٹوکس سے حل کریں جہاں معلومات دائیں ہاتھ کارتیسی نظام کے لحاظ سے فراہم کی گئی ہیں۔

سوال 11.165: $\boldsymbol{v} = 3y\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}$ جبکہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ اور $z = x + 2$ کا قطع C ہے جو مبدا سے دیکھتے ہوئے گھڑی کی سوئیوں کی الٹ رخ سمت بند نظر آتا ہے۔
جواب: $\frac{27\pi}{\sqrt{2}}$

سوال 11.166: $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$ جبکہ دائرہ $x = cos\alpha$ ، $y = \sin\alpha$ ، $z = 1$ ، $0 \le \alpha \le 2\pi$ سرحد C ہے۔
جواب: 3π

سوال 11.167: $\boldsymbol{v} = y^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} - (y + z)\boldsymbol{k}$ جبکہ گھڑی کی الٹ رخ تکون کی سرحد C ہے۔ تکون کے کونے $(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ ، $(1,3,0)$ ہیں۔
جواب: -1

سوال 11.168: $\boldsymbol{v} = 2z\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ جبکہ گھڑی کی الٹ رخ بیلن $x^2 + y^2 = 1$ اور سطح $z = y + 3$ کا قطع سرحد C ہے۔
جواب: -3π

سوال 11.169: $\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ جبکہ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ اور مکافی $z = x^2 + y^2$ کا قطع سرحد C ہے۔
جواب: 0

سوال 11.170 تا سوال 11.173 کو مساوات 11.100 کی مدد سے حل کریں۔ مبدا سے دیکھتے ہوئے C گھڑی کی رخ ہے۔

سوال 11.170: $\boldsymbol{v} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ جبکہ $x^2 + y^2 = 1$ اور مکافی $z = y^2$ کا قطع سرحد C ہے۔
جواب: 0

سوال 11.171: $\boldsymbol{v} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ تکون $(1,0,0)$ ، $(0,2,0)$ ، $(0,0,1)$ کا محیط C ہے۔
جواب: 5

سوال 11.172: $\boldsymbol{v} = \sin z\boldsymbol{i} - \cos x\boldsymbol{j} + \sin y\boldsymbol{k}$ مستطیل $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ ، $0 \le y \le 2$ ، $z = 2$ کا محیط C ہے۔
جواب: 2

سوال 11.173: $\boldsymbol{v} = 2e^x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ ، $z = 2$ کا محیط C ہے۔
جواب: 0

11.12 راہ سے آزاد خطی تکمل

ہم نے حصہ 11.2 میں دیکھا کہ خطی تکمل

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.106}$$

کی قیمت عموماً راہ C اور اس کے سروں P اور Q پر منحصر ہوتی ہے؛ یعنی P تا Q تکمل کو مختلف راہوں پر حاصل کرنے سے عموماً مختلف جوابات حاصل ہوں گے۔ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کن صورتوں میں تکمل کی قیمت راہ کی سروں پر نا کہ راہ پر منحصر ہو گی۔یہ ایک اہم مسئلہ ہے۔ہم پہلے درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ فضا کے دائرہ کار D میں تفاعل $f(x,y,z)$ ، $g(x,y,z)$ اور $h(x,y,z)$ استمراری اور معین ہیں۔تب مساوات 11.106 اس صورت D میں راہ سے آزاد[59] کہلاتی ہے جب D میں P اور Q سروں کی ہر جوڑی کے لئے مساوات 11.106 کی قیمت D میں P تا Q ہر C کے لئے یکساں ہو۔ تکمل کی یہ قیمت عموماً راہ کی سروں P اور Q پر منحصر ہو گی جبکہ ان نقطوں کو ملانے والی راہ کا تکمل کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔

یہاں یاد دہانی کرتا چلوں کہ واحد قیمتی[60] تعلق کو تفاعل کہتے ہیں یعنی دائرہ کار D ، جہاں تفاعل معین ہو، کے ہر نقطہ کے لئے تفاعل واحد ایک قیمت مختص کرتا ہے۔ یہ ہماری موجودہ بحث کے لئے ضروری ہے معلومات ہے۔

فضا کے دائرہ کار D میں معین تفاعل f ، g ، h کا تعلق

$$f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z \tag{11.107}$$

تین متغیرات کی یک رتبی تفرقی روپ[61] کہلاتی ہے۔اگر پورے D میں ہر جگہ یہ روپ قابل تفرق تفاعل $u(x,y,z)$ کا تفرق

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{11.108}$$

ہو تب یہ D میں قطعی تفرقی روپ یا قطعی[62] کہلاتی ہے.یوں پورے D میں ہر جگہ درج ذیل ہو گا۔

$$f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}u \tag{11.109}$$

مساوات 11.108 اور مساوات 11.109 کا موازنہ کرنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ D میں مساوات 11.107 صرف اور صرف اس صورت قطعی تفرقی ہو گا کہ ایسا تفاعل $u(x,y,z)$ پایا جاتا ہو کہ پورے D میں

$$f = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad g = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad h = \frac{\partial u}{\partial z} \tag{11.110}$$

---

[59] independent of path
[60] single valued
[61] first order differential form
[62] exact

ہو۔ سمتی ریاضی کی زبان میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ مساوات 11.107 صرف اور صرف اس صورت D میں قطعی تفرقی ہو گا کہ سمتی تفاعل

$$\boldsymbol{v} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$$

تفاعل $u(x,y,z)$ کا D میں ڈھلوان ہو یعنی:

$$\boldsymbol{v} = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{11.111}$$

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ آزادی راہ کے لئے قطعیت کی شرط لازم اور کافی ہے۔

مسئلہ 11.7: (آزادی راہ اور قطعیت)
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D میں $f(x,y,z)$ ، $g(x,y,z)$ اور $h(x,y,z)$ استمراری ہیں۔ تب تکمل

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.112}$$

D میں صرف اور صرف اس صورت راہ سے آزاد ہو گا کہ تکمل کے اندر تفرقی صورت D میں قطعی تفرقی ہو۔

مساوات 11.112 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

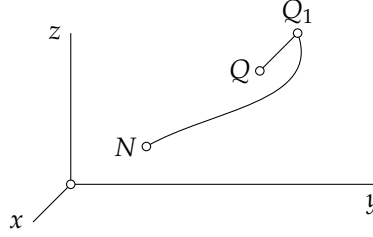
$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{11.113}$$

جہاں $\boldsymbol{v} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$ اور $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{k}$ ہیں۔

ثبوت: (الف) فرض کریں کہ دیا گیا تکمل D میں راہ سے آزاد ہے۔ ہم D میں کوئی مقررہ نقطہ N اور نقطہ Q منتخب کرتے ہیں۔ مزید ہم تفاعل $u(x,y,z)$ جس کی تعریف درج ذیل ہے لیتے ہیں

$$u(x,y,z) = u_0 + \int_N^Q (f\,\mathrm{d}x^* + g\,\mathrm{d}y^* + h\,\mathrm{d}z^*) \tag{11.114}$$

جہاں u_0 مستقل ہے اور D میں N تا Q کسی بھی راہ پر تکمل لیا گیا ہے۔ اب چونکہ N غیر تغیر پذیر ہے اور تکمل راہ سے آزاد ہے لہٰذا تکمل کی قیمت Q کے محدد x ، y ، z پر منحصر ہو گی جو یقیناً

z, Q_1, Q, N, x, y

شکل 11.30: ثبوت مسئلہ 11.7

D میں تفاعل $u(x, y, z)$ کی تعریف ہے۔اب مساوات 11.110 میں دیے گئے تعلقات، جو D میں $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$ کی قطعی تفرق ہونے کا ثبوت ہے، کو مساوات 11.114 سے حاصل کرتے ہیں ۔ ہم ان تین تعلقات میں سے ایک کو ثابت کرتے ہیں۔چونکہ تکمل راہ سے آزاد ہے لٰہذا ہم N سے نقطہ Q_1 : (x_1, y, z) تک تکمل لے سکتے ہیں۔یہاں Q_1 کو اس طرح چنا جاتا ہے کہ پورا QQ_1 قطع D کے اندر ہو (شکل 11.30)۔یوں Q_1 تک تکمل لینے کے بعد x محور کے متوازی Q_1 سے Q تک تکمل لے سکتے ہیں۔

$$u(x, y, z) = u_0 + \int_N^{Q_1} (f\,\mathrm{d}x^* + g\,\mathrm{d}y^* + h\,\mathrm{d}z^*) + \int_{Q_1}^{Q} (f\,\mathrm{d}x^* + g\,\mathrm{d}y^* + h\,\mathrm{d}z^*) \tag{11.115}$$

ہو گا۔ ہم مساوات 11.115 کا x کے ساتھ جزوی تفرق لیتے ہیں۔چونکہ N اور Q_1 دونوں x سے آزاد ہیں لٰہذا پہلی تکمل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔چونکہ قطع QQ_1 پر y اور z دونوں غیر تغیر پذیر ہیں لٰہذا آخری تکمل کو قطعی تکمل

$$\int_{x_1}^{x} f(x^*, y, z)\,\mathrm{d}x^*$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا x کے ساتھ تفرق $f(x, y, z)$ ہے۔یوں مساوات 11.115 کی تفرق سے

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f$$

حاصل ہوتا ہے لٰہذا مساوات 11.110 میں دیا گیا ایک تعلق ثابت ہوتا ہے۔

مساوات 11.110 میں دیے گئے باقی تعلقات کو بھی اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔

(ب) مذکورہ بالا کے برعکس فرض کریں کہ D میں $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرق ہے۔ تب D میں مساوات 11.110 تفاعل $u(x,y,z)$ کے لئے درست ہو گی۔ فرض کریں کہ D میں N تا Q کوئی راہ C ہے جس کی مقدار معلوم روپ

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \qquad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

ہے جہاں $t = t_0$ نقطہ N اور $t = t_1$ نقطہ Q دیتا ہے۔ تب درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}\int_N^Q (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) &= \int_N^Q \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z\Big)\\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = u[x(t), y(t), z(t)]\Big|_{t_0}^{t_1} = u(Q) - u(N)\end{aligned}$$

جس کے تحت تکمل کی قیمت C کے سروں پر u کی قیمت کے فرق کے برابر ہے۔ یوں تکمل راہ سے آزاد ہے۔

□

مذکورہ بالا ثبوت میں آخری مساوات

$$\int_N^Q (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) = u(Q) - u(N) \tag{11.116}$$

درج ذیل قطعی تکمل کی مماثل ہے جو ہم بنیادی احصاء سے جانتے ہیں۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad [F'(x) = f(x)]$$

راہ سے آزاد تکمل کو حل کرنے کی خاطر مساوات 11.116 استعمال کی جاتی ہے۔ مثال 11.33 میں ایسا کیا گیا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ تغیر پذیر قوت $\boldsymbol{p} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$ کسی ذرہ کو راہ C پر منتقل کرتے ہوئے درج ذیل کام W سرانجام دیتی ہے

$$W = \int_C \boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)$$

جہاں راہ پر چلنے کی سمت میں تکمل لیا جاتا ہے۔مسئلہ 11.7 کے تحت کام اس صورت راہ سے آزاد ہو گا جب تکمل کے اندر قطعی تفرقی روپ پایا جاتا ہو اور ایسا تب ہو گا جب قوت $\boldsymbol{p}$ کسی غیر سمتی تفاعل u کی ڈھلوان ہو۔ایسی قوت کا میدان بقائی[63] کہلاتا ہے (حصہ 10.8 کا آخر دیکھیں)۔

مثال 11.31: متغیر قوت کا سرانجام کام
قوت $\boldsymbol{p} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ ایک ذرہ کو $N:(3,2,4)$ سے سیدھی راہ پر $Q:(5,4,6)$ منتقل کرتی ہے۔اس کام کو

$$W = \int_C (yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z)$$

لکھا جا سکتا ہے جو مساوات 11.106 کی طرز کا تکمل ہے جہاں

$$f = yz, \quad xz, \quad h = xy$$

ہیں جو $u = xyz$ لیتے ہوئے مساوات 11.110 پر پورا اترتے ہیں۔یوں W تکمل کی راہ سے آزاد ہے لہٰذا ہم مساوات 11.116 استعمال کر سکتے ہیں جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$W = u(Q) - u(N) = u(5,4,6) - u(3,2,4) = 120 - 24 = 96$$

□

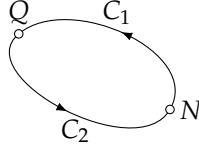
مسئلہ 11.7 سے درج ذیل اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 11.8: (راہ سے آزادی)
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D میں f ، g ، h استمراری ہوں تب تکمل

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)$$

صرف اور صرف اس صورت D میں راہ سے آزاد ہو گا جب D میں ہر سادہ بند راہ پر تکمل کی قیمت صفر کے برابر ہو۔

---

[63] conservative

شکل 11.31: ثبوت مسئلہ 11.8

ثبوت: (الف) فرض کریں کہ D میں C ایک سادہ بند راہ ہے اور تکمل راہ سے آزاد ہے۔ہم C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 11.31)۔یوں

$$\oint_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) = \int_{C_1} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) + \int_{C_2} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.117}$$

ہو گا۔راہ سے آزادی کی بنا

$$\begin{aligned}\int_{C_2} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) &= \int_{C_1^*} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)\\ &= -\int_{C_1} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)\end{aligned}$$

ہو گا جہاں C_1 پر الٹ رخ چلنے کو C_1^* سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس سے مساوات 11.117 کا بایاں ہاتھ صفر کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ (ب) مذکورہ بالا کے برعکس فرض کریں کہ D میں ہر سادہ بند راہ پر دیا گیا تکمل صفر کے برابر ہے۔مزید فرض کریں کہ N اور Q دائرہ کار D میں کوئی دو نقطے ہیں اور ان نقطوں کے مابین D میں C_1 اور C_2 دو ایسے راہ ہیں جو ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے ہیں (شکل 11.31)۔ C_1 اور C_2 مل کر سادہ بند راہ دیتے ہیں۔یوں

$$\int_{C_1} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) + \int_{C_2} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) = \oint_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) = 0$$

ہو گا جس سے

$$\begin{aligned}\int_{C_2} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) &= -\int_{C_1} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)\\ &= \int_{C_1^*} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اس مسئلہ کو فوری وسعت دیتے ہوئے، اپنی آپ کو محدود مرتبہ قطع کرتی ہوئی راہ پر لاگو کیا جا سکتا ہے۔

اس سادہ مسئلہ کو قابل استعمال بنانے کی خاطر ایسا اصول درکار ہو گا جس سے جاننا ممکن ہو کہ آیا تکمل کے اندر قطعی تفرقی روپ پایا جاتا ہے یا نہیں۔ ایسا اصول مسئلہ 11.9 میں پیش کیا گیا ہے۔اس مسئلے کو بیان کرنے کی خاطر درج ذیل تصور ضروری ہے۔

دائرہ کار D اس صورت سادہ تعلق[64] رکھتا ہے جب D میں رہتے ہوئے D میں ہر بند راہ کو مسلسل گھٹاتے ہوئے نقطہ مانند بنانا ممکن ہو۔

مثلاً کرہ یا مکعب کی اندرون، ایسی کرہ کا اندرون جس میں محدود تعداد کے نقطے شامل نہ ہوں، یا دو ہم مرکز کرہ کے مابین دائرہ کار سادہ تعلق رکھتے ہیں۔اس کے برعکس اندرسہ کی اندرون کا دائرہ کار سادہ تعلق نہیں رکھتا ہے۔

مسئلہ 11.9: (اصول قطعیت اور راہ سے آزادی)
فرض کریں کہ فضا میں دائرہ کار D میں تفاعل $f(x,y,z)$ ، $g(x,y,z)$ ، $h(x,y,z)$ اور ان کے یک رتبی جزوی تفرقات استمراری ہیں۔اگر خطی تکمل

$$\int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) \tag{11.118}$$

D میں راہ سے آزاد ہو (اور یوں D میں $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرق ہو) تب پورے D میں ہر جگہ

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{11.119}$$

ہو گا جس کو سمتی ریاضی میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{v} = f\boldsymbol{i} + g\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}) \tag{11.120}$$

اس کے برعکس اگر D سادہ تعلق رکھتا ہو اور D میں ہر جگہ مساوات 11.119 درست ہو تب مساوات 11.118 میں دیا گیا تکمل D میں راہ سے آزاد ہو گا (اور نتیجتاً D میں $f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہو گا)۔

---

[64] simply connected

ثبوت:
(الف) فرض کریں کہ مساوات 11.118 D میں راہ سے آزاد ہے۔ تب مسئلہ 11.7 کے تحت $f\boldsymbol{i}+g\boldsymbol{j}+h\boldsymbol{k}$ دائرہ کار D میں قطعی تفرق ہو گا اور مساوات 11.111 کے تحت درج ذیل ایسا تفاعل $u(x,y,z)$ پایا جائے گا کہ D میں درج ذیل ہو

$$\boldsymbol{v}=f\boldsymbol{i}+g\boldsymbol{j}+h\boldsymbol{k}=\nabla u$$

لہٰذا مساوات 10.124 کی مدد سے درج ذیل ہو گا۔

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla\times(\nabla u)=\boldsymbol{0}$$

(ب) اس کے برعکس فرض کریں کہ D سادہ تعلق رکھتا ہے اور پورے D میں ہر جگہ مساوات 11.120 درست ثابت ہوتی ہے۔ مزید فرض کریں کہ D میں C سادہ بند راہ ہے۔ چونکہ D سادہ تعلق رکھتا ہے لہٰذا ہم D میں ایسی سطح S دریافت کر سکتے ہیں جس کی تحدیدی سرحد C ہو۔ یہاں مسئلہ سٹوکس (مسئلہ 11.6) قابل استعمال ہے جس سے

$$\int_C(f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y+h\,\mathrm{d}z)=\int_C v_t\,\mathrm{d}s=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{v})_n\,\mathrm{d}A=0$$

ملتا ہے جہاں C پر درست سمت کے لحاظ سے S کا اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ استعمال کیا جائے گا۔ اس نتیجے کے ساتھ مسئلہ 11.8 ملاتے ہوئے ثابت ہوتا ہے کہ مساوات 11.118 کا تکمل D میں راہ سے آزاد ہے۔

□

ہم دیکھتے ہیں کہ xy مستوی میں خطی تکمل

$$\int_C(f\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y)$$

کی صورت میں مساوات 11.119 سے درج ذیل ایک شرط حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y} \tag{11.121}$$

D کی سادہ تعلق رکھنے کا شرط لازم ہے جس کی وضاحت درج ذیل مثال میں ہوتی ہے۔

مثال 11.32: فرض کریں کہ درج ذیل ہو۔

$$f = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad g = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad h = 0$$

ان کا تفرق لینے سے ثابت ہوتا ہے کہ xy مستوی میں مبدا کو نہ شامل کرتے ہوئے کسی بھی دائرہ کار پر یہ تفاعل مساوات 11.121 پر پورا اترتے ہیں مثلاً دائرہ کار $D: \frac{1}{2} < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{3}{2}$ میں (شکل 11.32)۔ظاہر ہے کہ D سادہ تعلق نہیں رکھتا ہے۔اگر تکمل

$$I = \int_C (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y) = \int_C \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

D میں راہ سے آزاد ہوتا تب D میں کسی بھی بند راہ مثلاً دائرہ $x^2+y^2=1$ پر $I=0$ ہوتا۔ ہم $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ پر کرتے ہوئے اور راہ کو $r=1$ لکھتے ہوئے

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi$$

حاصل ہوتا ہے جہاں دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ ایک مرتبہ گھومتے ہوئے تکمل حاصل کیا گیا ہے۔چونکہ D سادہ تعلق نہیں رکھتا لہٰذا مسئلہ 11.9 لاگو نہیں ہو گا اور ہم یہ نہیں کہہ سکتے ہیں کہ I راہ سے آزاد ہے۔مزید درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

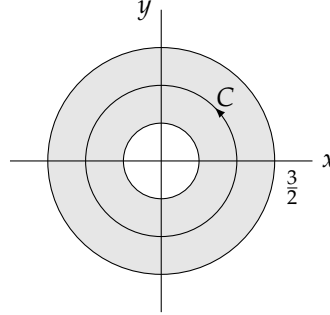
$$f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}u, \quad u = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \theta$$

لیکن D میں u واحد قیمت نہیں ہے۔اس کے برعکس اگر ہم u کی "صدر قیمت" لیں جس کو $-\pi < u \le \pi$ لیں تب منفی x محور پر u نا تو قابل تفرق ہے (اور نا ہی استمراری ہے) جو قطعیت کی بنیادی شرط ہے۔ □

اگر خطی تکمل راہ سے آزاد ہو تب اس کو مساوات 11.116 کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 11.33: راہ سے آزاد خطی تکمل کا حل

درج ذیل خطی تکمل کی قیمت $N:(0,0,1)$ تا $Q:(1,\frac{\pi}{4},2)$ کسی بھی راہ پر دریافت کرتے ہیں۔

$$I = \int_C [2xyz^2\,\mathrm{d}x + (x^2z^2 + z\cos yz)\,\mathrm{d}y + (2x^2yz + y\cos yz)\,\mathrm{d}z]$$

شکل 11.32: شکل برائے مثال 11.32

مسئلہ 11.9 کے تحت تکمل راہ سے آزاد ہے۔ چونکہ $f = 2xyz^2$ ہے لہٰذا مساوات 11.110 میں دیے پہلا تعلق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$u = \int f \,\mathrm{d}x = x^2yz^2 + a(y,z) \tag{11.122}$$

جس کو مساوات 11.110 کے دوسرے تعلق میں پر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2z^2 + \frac{\partial a}{\partial y} = g = x^2z^2 + z\cos yz$$

ملتا ہے جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial a}{\partial y} = z\cos yz, \qquad \implies \qquad a = \sin yz + c(z)$$

اس کو مساوات 11.110 کے تیسرے تعلق اور مساوات 11.122 کے ساتھ ملاتے ہوئے

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2x^2yz + y\cos yz + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z} = h = 2x^2yz + y\cos yz$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z} = 0$$

ملتا ہے جس سے $c =$ مستقل حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$u(x,y,z) = x^2yz + a = x^2yz^2 + \sin yz + c$$

ہو گا۔آپ سے التماس ہے کہ تکمل کو دیکھ کر u لکھنے کی کوشش کریں۔مساوات 11.116 استعمال کرتے ہوئے تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$I = [x^2yz^2 + \sin yz + c]\Big|_N^Q = \pi + \sin\frac{\pi}{2} = \pi + 1$$

□

سوالات

سوال 11.174 تا سوال 11.181 میں کیا قطعی تفرق دیا گیا ہے؟

سوال 11.174: $yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$

جواب: قطعی تفرق

سوال 11.175: $(y+z)\,\mathrm{d}x + (x+z)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z$

جواب: قطعی تفرق

سوال 11.176: $(xy+z)\,\mathrm{d}x + (x+yz)\,\mathrm{d}y + (xz+y)\,\mathrm{d}z$

جواب: غیر قطعی تفرق

سوال 11.177: $e^x\,\mathrm{d}x + e^y\,\mathrm{d}y + e^z\,\mathrm{d}z$

جواب: قطعی تفرق

سوال 11.178: $e^y\,\mathrm{d}x + e^z\,\mathrm{d}y + e^x\,\mathrm{d}z$

جواب: غیر قطعی تفرق

سوال 11.179: $\cos x\,\mathrm{d}x - \sin y\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$

جواب: قطعی تفرق

سوال 11.180: $x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z$

جواب: قطعی تفرق

سوال 11.181: $y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z$
جواب: غیر قطعی تفرق

سوال 11.182 تا سوال 11.187 میں ثابت کریں کہ قطعی تفرق روپ دی گئی ہے۔ایسا تفاعل u دریافت کریں کہ دیا گیا تفرق $\mathrm{d}u$ لکھا جا سکے۔

سوال 11.182: $x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y - z\,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{1}{2}(x^2 - y^2 - z^2)$

سوال 11.183: $\mathrm{d}x - \mathrm{d}y - \mathrm{d}z$
جواب: $x - y - z$

سوال 11.184: $2xy^3z\,\mathrm{d}x + 3x^2y^2z\,\mathrm{d}y + x^2y^3\,\mathrm{d}z$
جواب: x^2y^3z

سوال 11.185: $-(yz + \sin x)\,\mathrm{d}x + (\cos x - xz)\,\mathrm{d}y + (\cos z - xy)\,\mathrm{d}z$
جواب: $y\cos x - xyz + \sin z$

سوال 11.186: $(\cos z + e^{x+y})\,\mathrm{d}x + e^{x+y}\,\mathrm{d}y - x\sin z\,\mathrm{d}z$
جواب: $e^{x+y} + x\cos z$

سوال 11.187: $(2x\cos x\sin y - x^2\sin x\sin y)\,\mathrm{d}x + (z + x^2\cos x\cos y)\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$
جواب: $x^2\sin y\cos x + yz$

سوال 11.188 تا سوال 11.192 میں ثابت کریں کہ تکمل کے اندر قطعی تفرق دیا گیا ہے۔تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 11.188: $\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)$
جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 11.189: $\int\limits_{(1,0,1)}^{(3,1,2)} [(y + z^2)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 2xz\,\mathrm{d}z]$
جواب: 14

سوال 11.190: $\int_{(0,0,1)}^{(2,\frac{\pi}{2},2)} (\sin y \, \mathrm{d}x + x \cos y \, \mathrm{d}y + e^z \, \mathrm{d}z)$

جواب: $e^2 - e + 2$

سوال 11.191: $\int_{(1,1,1)}^{(3,2,4)} [(y + \frac{1}{x}) \, \mathrm{d}x + (x + \frac{1}{y}) \, \mathrm{d}y + \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z)]$

جواب: $5 + \ln 24$

سوال 11.192: $\int_{(3,2,1)}^{(5,2,-1)} (\sqrt{y} \, \mathrm{d}x + \frac{x}{2\sqrt{y}} \, \mathrm{d}y)$

جواب: $2\sqrt{2}$

باب 12

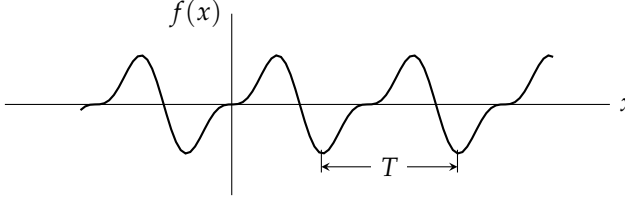
فوریئر تسلسل

انجینئری مسائل میں دوری تفاعل عموماً پائے جاتے ہیں جن کو سادہ دوری تفاعل مثلاً $\sin$ اور $\cos$ کی روپ میں لکھنا مفید ثابت ہوتا ہے۔اسی عمل سے فوریئر تسلسل[1] ابھر کر سامنے آتی ہے جو سادہ تفرقی مساوات اور جزوی تفرقی مساوات کے حل میں کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

فوریئر تسلسل کا نظریہ پیچیدہ ہے جبکہ اس کا استعمال نہایت آسان ہے۔چونکہ بہت سارے غیر استمراری تفاعل کا فوریئر تسلسل حاصل کرنا ممکن ہے جبکہ ان کا ٹیلر تسلسل نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا فوریئر تسلسل کو ٹیلر تسلسل کی عالمگیر صورت تصور کیا جا سکتا ہے۔

اس باب میں فوریئر تسلسل سے وابستہ تصورات، حقائق اور تکنیکی تراکیب پر غور کیا جائے گا۔اس کے علاوہ ان کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں ان کا استعمال دکھایا جائے گا۔

اس باب کی آخری حصے میں فوریئر تکمل پر غور کیا جائے گا جنہیں اگلے باب میں جزوی تفرقی مساوات کی حل میں استعمال کیا جائے گا۔

[1]فرانسیسی ریاضی دان اور ماہر طبیعیات ژاں باپٹیسٹ یوسف فوریئر [1768-1830]

شکل 12.1: دوری تفاعل

12.1 دوری تفاعل، تکونیاتی تسلسل

تفاعل $f(x)$ اس صورت دوری[2] کہلاتا ہے کہ جب پورے حقیقی x پر $f(x)$ معین ہو اور ایسا مثبت عدد T پایا جاتا ہو کہ تمام x پر درج ذیل درست ہو۔

$$f(x+T) = f(x) \qquad \text{تمام } x \text{ کے لئے} \tag{12.1}$$

عددی T کو $f(x)$ کا دوری عرصہ[3] کہتے[4] ہیں۔ T کے برابر $f(x)$ کے کسی بھی وقفے کا ترسیم دہراتے ہوئے ایسے تفاعل کا ترسیم حاصل کیا جاتا ہے (شکل 12.1)۔ عملی استعمال میں عموماً دوری اعمال اور تفاعل پائے جاتے ہیں۔

دوری تفاعل کی مثالیں $\sin x$ اور $\cos x$ ہیں۔اس کے علاوہ مستقل $f = c =$ بھی دوری تفاعل کی تعریف (مساوات 12.1 پر ہر مثبت T کے لئے) پورا اترنے کی بنا دوری تفاعل ہے۔

مساوات 12.1 سے ظاہر ہے کہ عدد صحیح n کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$f(x+nT) = f(x) \qquad \text{تمام } x \text{ کے لئے}$$

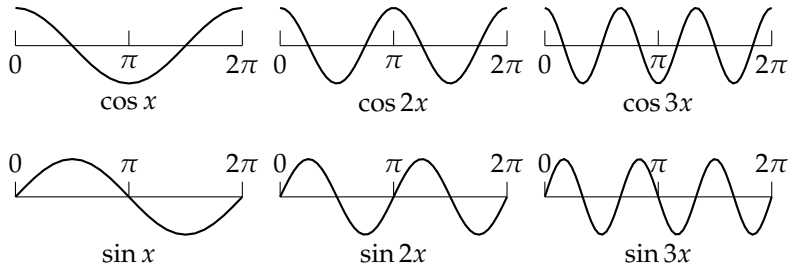
یوں $2T$ ، $3T$ ، $4T$ ، . . . بھی تفاعل $f(x)$ کے دوری عرصے ہیں۔مزید اگر تفاعل $f(x)$ کا اور $g(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب درج ذیل تفاعل

$$h(x) = af(x) + bg(x) \qquad \text{مستقل } a\text{، }b$$

---

[2] periodic

[3] period

[4] تفاعل $f(x)$ کا کم تر دوری عرصہ $T(>0)$، اگر موجود ہو، $f(x)$ کا اوّلی دوری عرصہ کہلاتا ہے۔ مثلاً $\sin x$ اور $\sin 2x$ کا بالترتیب اوّلی دوری عرصہ 2π اور π ہے جبکہ مستقل $= f$ کا کوئی دوری عرصہ نہیں پایا جاتا ہے۔

شکل 12.2: سائن اور کوسائن تفاعل جن کا دوری عرصہ 2π ہے

کا دوری عرصہ بھی T ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

اس باب کی شروع میں ہم ایسے مختلف تفاعل جن کا دوری عرصہ 2π ہو کو درج ذیل سادہ تفاعل کی روپ میں ظاہر کرنا سیکھیں گے

$$1, \quad \cos x, \sin x, \quad \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \quad \cos nx, \sin nx, \cdots$$

جن کا دوری عرصہ 2π ہے (شکل 12.2)۔ہم دیکھیں گے کہ ایسا کرتے ہوئے درج ذیل طرز کی تسلسل حاصل ہو گی

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots \tag{12.2}$$

جہاں a_0 ، a_1 ، a_2 ، $\cdots$ ، b_1 ، b_2 ، $\cdots$ حقیقی مستقل ہوں گے۔اس تسلسل کو **تکونیاتی تسلسل**[5] کہتے ہیں جبکہ a_n اور b_n تسلسل کی **عددی سر**[6] کہلاتے ہیں۔چونکہ اس تسلسل کے ہر رکن کا دوری عرصہ 2π ہے لہٰذا اگر یہ تسلسل مرکوز ہو تب یہ ایسا تفاعل ہو گا جس کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔

انجینئری میں واقع تفاعل پیچیدہ ہوتے ہیں جنہیں سادہ دوری تفاعل کی روپ میں لکھنا مددگار ثابت ہوتا ہے۔ہم دیکھیں گے کہ عملی استعمال، مثلاً ارتعاش، میں پائے جانے والا تقریباً ہر دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو کو فوریئر تسلسل کی روپ میں لکھنا ممکن ہو گا۔ہم مساوات 12.2 کے عددی سر حاصل کرنے کے ایسے کلیات دریافت کریں گے جو $f(x)$ پر منحصر ہوں گے اور جنہیں استعمال کرتے ہوئے حاصل تسلسل مرکوز ہو گا جس کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا۔اس کے بعد ہم حاصل کلیات کو عمومی شکل دیتے ہوئے ان کو کسی بھی دوری عرصہ کے تفاعل کے لئے قابل استعمال بنائیں گے۔ایسا کرنا نہایت آسان ثابت ہو گا۔

[5] trigonometric series
[6] coefficients

سوالات

سوال 12.1: دیے گئے تفاعل کا کم تر دوری عرصہ دریافت کریں۔

$$\cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos \pi x,\ \sin \pi x,\ \cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x$$

جوابات: $2\pi, 2\pi, \pi, \pi, 2, 2, 1, 1$

سوال 12.2: اگر تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب ثابت کریں کہ nT جہاں $n = 2, 3, \cdots$ ہے بھی اس تفاعل کا دوری عرصہ ہو گا۔

سوال 12.3: ثابت کریں کہ اگر تفاعل $f(x)$ کا اور تفاعل $g(x)$ کا دوری عرصہ T ہو تب تفاعل $h(x) = af(x) + bg(x)$ کا دوری عرصہ بھی T ہو گا، جہاں a اور b مستقل ہیں۔یوں دوری عرصہ T رکھنے والے تمام تفاعل سمتی فضا پیدا کرتے ہیں۔

سوال 12.4: ثابت کریں کہ تفاعل $f(x) =$ مستقل ایسا دوری تفاعل ہے جس کا دوری عرصہ T کوئی بھی مثبت عدد ہو سکتا ہے۔

سوال 12.5: ثابت کریں کہ تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ T ہونے کی صورت میں x کے دوری تفاعل $f(ax), a \neq 0$ کا دوری عرصہ $\frac{T}{a}$ ہو گا جبکہ x کے دوری تفاعل $f(\frac{x}{b}), b \neq 0$ کا دوری عرصہ bT ہو گا۔ان نتائج کی تصدیق $f(x) = \cos x,\ a = b = 2$ کے لئے کریں۔

سوال 12.6 تا سوال 12.12 میں دیے گئے تفاعل کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.6: $\sin x, \quad \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x, \quad \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$

سوال 12.7: $f(x + 2\pi) = f(x)$ اور

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & -\pi \le x \le 0 \\ \frac{\pi}{4} & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ہے۔سوال 12.6 کی ترسیم کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 12.8:

$$\sin 2\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi x, \quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi x + \frac{1}{5}\sin 10\pi x$$

سوال 12.9:

$$\sin x, \quad \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x,$$
$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

سوال 12.10:

$$-\cos x, \quad -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x, \quad -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x,$$
$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

سوال 12.11: $f(x) = x^2, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

سوال 12.12: $f(x) = e^{|x|}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

سوال 12.13 تا سوال 12.16 میں دوری تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہے جس کا دوری عرصہ 2π ہے۔اس کی ترسیم کھینچیں۔وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ کے لئے $f(x)$ دیا گیا ہے۔

سوال 12.13:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -\pi \le x \le 0 \\ 0 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

سوال 12.14:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x \le 0 \\ \cos x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

سوال 12.15:

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & -\pi \le x \le 0 \\ \pi - x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

سوال 12.16:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x\le 0\\ \sin\frac{x}{2} & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

سوال 12.17 تا سوال 12.25 میں دیے گئے تکمل ہمیں آگے درکار ہوں گے۔ان تکمل میں $n=0,1,2,\cdots$ ہے۔تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 12.17: $\int\limits_0^\pi \sin nx \,\mathrm{d}x$

جواب: طاق n کے لئے $\frac{2}{n}$ اور جفت n کے لئے صفر۔

سوال 12.18: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos nx \,\mathrm{d}x$

جواب: جفت n کے لئے صفر اور طاق n کے لئے $\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$

سوال 12.19: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin nx \,\mathrm{d}x$

جواب: $(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}$

سوال 12.20: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx \,\mathrm{d}x$

جواب: طاق n ، $\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$ یعنی $\frac{2}{n^2}(-1)^{\frac{n+3}{2}}$ جبکہ جفت n ، $-\frac{\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$ یعنی $\frac{\pi}{n}(-1)^{\frac{n+2}{2}}$

سوال 12.21: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx \,\mathrm{d}x$

جواب: 0

سوال 12.22: $\int\limits_0^\pi x\sin nx \,\mathrm{d}x$

جواب: $\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}$

سوال 12.23: $\int\limits_{-\pi}^{0} e^x \sin nx \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{n}{n^2+1}[(-1)^n e^{-\pi} - 1]$

سوال 12.24: $\int\limits_{0}^{\pi} e^x \cos nx \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{1}{n^2+1}[e^{\pi}(-1)^n - 1]$

سوال 12.25: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{4\pi}{n^2}(-1)^n$

12.2 فوریئر تسلسل۔یولر کلیات

فرض کریں کہ دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہے کو درج ذیل تکونیاتی تسلسل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{12.3}$$

ہم دیے گئے تفاعل $f(x)$ کی تکونیاتی تسلسل (مساوات 12.3) کے عددی سر a_n، اور b_n جاننا چاہتے ہیں۔

ہم سب سے پہلے a_0 دریافت کرتے ہیں۔مساوات 12.3 کے دونوں اطراف کا $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] \mathrm{d}x$$

اگر تسلسل کے ارکان کا جزو با جزو تکمل لینا جائز ہو[7]، تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x\right)$$

---

[7] ایسا جائز ہے، مثلاً، استمراری مرتکز صورت میں (مسئلہ 18.13)۔

دائیں ہاتھ پہلا رکن $2\pi a_0$ کے برابر ہے۔بائیں ہاتھ باقی تمام ارکان صفر کے برابر ہیں، جیسا کہ تکمل لے کر ثابت کیا جا سکتا ہے۔یوں پہلا کلیہ درج ذیل ملتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{12.4}$$

ہم اب a_1 ، a_2 ، $\cdots$ اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔ہم مساوات 12.3 کو $\cos mx$ سے ضرب دیتے ہوئے، جہاں m کوئی مقررہ مثبت عدد صحیح ہے، دونوں اطراف کا $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\Big[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\Big]\cos mx\,\mathrm{d}x \tag{12.5}$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے دائیں ہاتھ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\cos mx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\cos mx\,\mathrm{d}x\Big]$$

پہلا تکمل صفر کے برابر ہے۔ضمیمہ-ب میں دیا گیا مساوات ب.11 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\cos mx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,\mathrm{d}x\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\cos mx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n+m)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n-m)x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

تکمل لینے سے ثابت ہوتا ہے کہ بالائی دائیں جزو کے علاوہ تمام تکمل صفر کے برابر ہیں۔بالائی دایاں جزو $n = m$ کی صورت میں π کے برابر ہے۔چونکہ مساوات 12.5 میں اس جزو کو a_n ضرب کرتا ہے (جس کو $n = m$ کی بنا a_m لکھا جا سکتا ہے) لہٰذا مساوات 12.5 کا دایاں ہاتھ $a_m\pi$ کے برابر ہو گا۔یوں دوسرا کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{12.6}$$

ہم آخر میں b_1 ، b_2 ، $\cdots$ حاصل کرتے ہیں۔مساوات 12.3 کو $\sin mx$ سے ضرب دیتے ہوئے، جہاں m کوئی مثبت مقررہ عدد صحیح ہے، $-\pi$ تا π تکمل لیتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\Big[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\Big]\sin mx\,\mathrm{d}x \tag{12.7}$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے دایاں ہاتھ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \;\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \,\sin mx \;\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \,\sin mx \;\mathrm{d}x \right]$$

پہلا تکمل صفر کے برابر ہے۔دوسرے تکمل کی طرز کی تکمل پر ہم غور کر چکے ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ تمام $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے اس کی قیمت صفر ہے۔آخری تکمل کو ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \,\sin mx \;\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m) \;\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m) \;\mathrm{d}x$$

آخری جزو صفر کے برابر ہے۔دائیں ہاتھ پہلا جزو $n \neq m$ کی صورت میں صفر جبکہ $n = m$ کی صورت میں π کے برابر ہے۔ چونکہ مساوات 12.7 میں اس جزو کو b_n ضرب کرتا ہے (جس کو $n = m$ کی بنا b_m لکھا جا سکتا ہے) لہٰذا مساوات 12.7 کا دایاں ہاتھ $b_m\pi$ کے برابر ہو گا۔یوں آخری کلیہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \;\mathrm{d}x, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{12.8}$$

اب m کی جگہ n لکھتے ہوئے ان کلیات کو، جنہیں **یولر کلیات**[8] کہتے، ایک جگہ اکٹھا کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\text{(الف)} \qquad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \;\mathrm{d}x \\
&\text{(ب)} \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \;\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \cdots \\
&\text{(پ)} \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \;\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \cdots
\end{aligned} \tag{12.9}$$

چونکہ متکمل دوری ہیں لہٰذا مساوات 12.9 میں وقفہ تکمل کو 2π کے برابر کسی بھی وقفہ، مثلاً $0 \leq x \leq 2\pi$، سے بدلا جا سکتا ہے۔

دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.9 کی مدد سے عددی سر a_n اور b_n حاصل کر کے ہم درج ذیل تکونیاتی تسلسل لکھتے ہیں۔

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots \tag{12.10}$$

---

[8] Euler formulas

اس تسلسل کو $f(x)$ کی **فوریئر تسلسل**[9] کہتے ہیں جبکہ مساوات 12.9 سے حاصل عددی سر a_n ، b_n کو $f(x)$ کے **فوریئر عددی سر**[10] کہتے ہیں۔

قطعی تکمل کی تعریف سے واضح ہے کہ اگر $f(x)$ استمراری یا ٹکڑوں میں استمراری (جہاں وقفہ تکمل پر $f(x)$ میں محدود تعداد کے چھلانگ پائے جاتے ہوں) ہو تب مساوات 12.9 میں دیے گئے تکملات موجود ہوں گے لہٰذا ہم $f(x)$ کے فوریئر عددی سروں کو مساوات 12.9 کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں۔اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا اس طرح حاصل کیا گیا فوریئر تسلسل مرکوز ہو گا اور آیا تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا؟ ان سوالات پر اسی حصے میں آگے جا کر غور کیا جائے گا۔

آئیں مساوات 12.9 کی استعمال کو ایک سادہ مثال کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 12.1: چکور موج

چکور موج کے فوریئر عددی سر کو مساوات 12.9 سے حاصل کریں۔چکور موج کو شکل 12.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔چکور موج کی تحلیلی روپ درج ذیل ہے۔

$$f(x)=\begin{cases}-k & -\pi<x<0\\ k & 0<x<\pi\end{cases}\qquad \text{جہاں}\qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

اس طرز کے تفاعل میکانی نظام میں بطور بیرونی قوت یا برقی ادوار میں بطور داخلی دباو پائے جا سکتے ہیں، وغیرہ۔

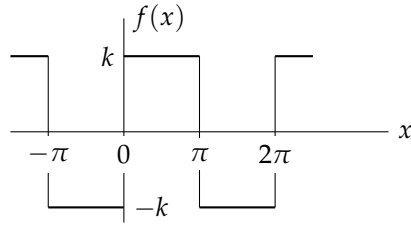
حل:مساوات 12.9-الف سے $a_0=0$ ملتا ہے۔یہ نتیجہ بغیر تکمل کے یوں حاصل کیا جا سکتا ہے کہ چکور موج کا رقبہ $-\pi$ تا π صفر ہے۔مساوات 12.9-ب سے

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}k\cos nx\,\mathrm{d}x\Big]\\&=\frac{1}{\pi}\left[-k\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}+k\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right]=0\end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں تمام $n=1,2,\cdots$ کے لئے $-\pi$ ، 0 اور π پر $\sin nx=0$ پر کیا گیا ہے۔اسی طرح مساوات 12.9-پ سے

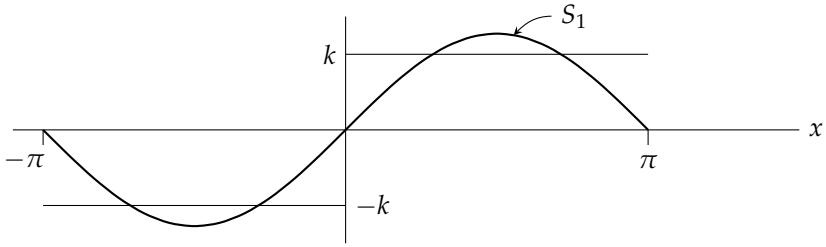
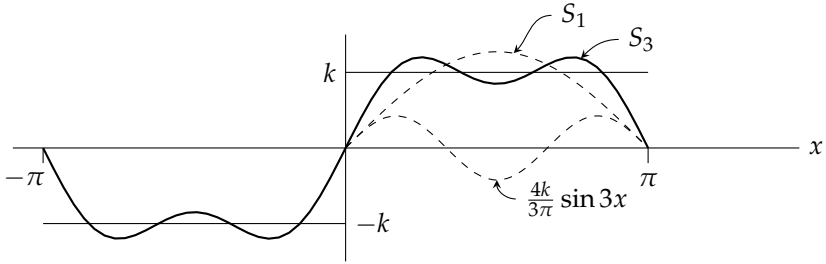
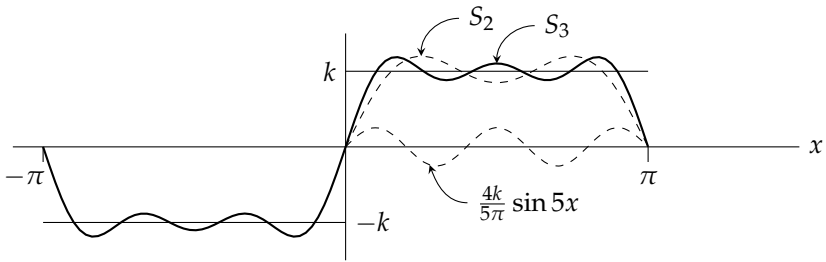
$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}k\sin nx\,\mathrm{d}x\Big]\\&=\frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}-k\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right]\end{aligned}$$

---

[9] Fourier series
[10] Fourier coefficients

(الف) دیا گیا دوری چکور تفاعل $f(x)$

(ب)

(پ)

(ت)

شکل 12.3: فوریئر تسلسل کی زیادہ ارکان لینے سے اصل تفاعل پر بہتر بیٹھتی شکل حاصل ہوتی ہے (مثال 12.1)

ملتا ہے۔چونکہ $\cos 0 = 1$ اور $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ہوتا ہے لہٰذا اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$b_n = \frac{k}{n\pi}[\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

اب $\cos\pi = -1$ ، $\cos 2\pi = 1$ ، $\cos 3\pi = -1$ ، وغیرہ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & n \text{ طاق} \\ 1 & n \text{ جفت} \end{cases} \implies 1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2 & n \text{ طاق} \\ 0 & n \text{ جفت} \end{cases}$$

یوں b_n درج ذیل ہوں گے۔

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \cdots$$

چونکہ $a_n = 0$ ہیں لہٰذا دی گئی چکور تفاعل کی فوریئر تسلسل

$$\frac{4k}{\pi}\Big(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\Big) \tag{12.11}$$

ہو گی جس کے جزوی مجموعے درج ذیل ہیں۔

$$S_1 = \frac{4k}{\pi}\sin x, \quad S_2 = \frac{4k}{\pi}\Big(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\Big), \cdots$$

شکل 12.3 میں جزوی مجموعہ میں ارکان کی تعداد بتدریج بڑھاتے ہوئے تسلسل کا ترسیم کھینچا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ تسلسل کے زیادہ ارکان استعمال کرنے سے ترسیم کی شکل اصل تفاعل (چکور موج) کی زیادہ قریب ہوتی ہے۔ چکور موج $-\pi$ ، 0 ، π ، وغیرہ پر غیر استمراری ہے یعنی یہاں تفاعل میں چھلانگ پائی جاتی ہے۔یوں ہم نہیں کہہ سکتے کہ آیا $x = 0$ پر چکور تفاعل کی قیمت $-k$ ہے یا k ہے یا کہ ان دونوں قیمتوں کے مابین ہے۔اس کے برعکس فوریئر تسلسل کے تمام جزوی مجموعے ان نقطوں پر صفر کے برابر ہیں جو $-k$ اور k کی اوسط قیمت ہے۔

مزید فرض کریں کہ اس تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہے۔شکل 12.3-الف سے ظاہر ہے کہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر چکور تفاعل کی قیمت k کے برابر ہے۔یوں $x = \frac{\pi}{2}$ پر کرتے ہوئے

$$f(\frac{\pi}{2}) = k\frac{4k}{\pi}\Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \cdots\Big)$$

یعنی

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots=\frac{\pi}{4} \tag{12.12}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہ مشہور نتیجہ لیبنٹز نے 1673 کے لگ بھگ جیومیٹریائی اصولوں سے حاصل کیا۔اس سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستقل ارکان کی کئی تسلسل کی قیمت کو مختلف نقطوں پر فوریئر تسلسل کی قیمت سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

تسلسل کے زیادہ سے زیادہ اجزاء کا مجموعہ لینے سے اصل تفاعل کے زیادہ قریبی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔یوں چند ابتدائی اجزاء کا مجموعہ لے کر اور باقی اجزاء کو حذف کرنے سے نتائج میں خلل پیدا ہو گا جس کو **حذفی خلل**[11] کہتے ہیں۔ □

ایسے تفاعل جنہیں فوریئر تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن ہو کی تعداد غیر یقینی طور پر زیادہ ہے۔انجینئری میں استعمال ہونے والی تقریباً ہر ممکن تفاعل کو فوریئر تسلسل کی صورت میں ظاہر کرنے کے لئے درکار (کافی) شرائط درج ذیل مسئلہ 12.1 میں بیان کیے گئے ہیں۔اس مسئلہ میں چند تصورات کی ضرورت ہے جن پر پہلے بات کرتے ہیں۔

نقطہ x_0 پر تفاعل $f(x)$ کی **بائیں ہاتھ حد**[12] سے مراد $f(x)$ کی وہ حد ہے جو x_0 تک بائیں ہاتھ سے پہنچتے ہوئے حاصل ہو گی۔یوں بائیں ہاتھ حد جس کو $f(x_0-1)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے درج ذیل ہو گی

$$f(x_0-0)=\lim_{h\to 0} f(x_0-h)$$

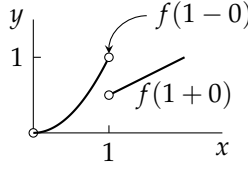
جہاں h مثبت قیمت ہے۔اسی طرح x_0 پر $f(x)$ کی **دائیں ہاتھ حد**[13] سے مراد $f(x)$ کی وہ حد ہے جو دائیں ہاتھ سے آ کر x_0 تک پہنچتے ہوئے حاصل ہو گی۔یوں دائیں ہاتھ حد جس کو $f(x_0+0)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$f(x_0+0)=\lim_{h\to 0} f(x_0+h)$$

ہو گی جہاں h مثبت قیمت ہے۔شکل 12.4 میں غیر استمراری تفاعل

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ \frac{x}{2} & x>1 \end{cases}$$

---

[11] truncation error
[12] left hand limit
[13] right hand limit

شکل 12.4: بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد، بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق

دکھایا گیا ہے۔نقطہ $x_0 = 1$ پر اس تفاعل کی بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد درج ذیل ہیں

$$f(1-0) = 1, \quad f(1+0) = \frac{1}{2}$$

جن میں فرق $(1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2})$ کو **چھلانگ**[14] کہتے ہیں۔

نقطہ x_0 پر **بائیں ہاتھ تفرق**[15] سے مراد

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h}$$

اور **دائیں ہاتھ تفرق**[16] سے مراد

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}$$

ہے جہاں h مثبت قیمت ہے۔ظاہر ہے کہ اگر نقطہ x_0 پر تفاعل $f(x)$ استمراری ہو تب $f(x_0 - 0)$ اور $f(x_0 + 0)$ دونوں $f(x_0)$ ہی کے برابر ہوں گے۔

مسئلہ 12.1: (تفاعل کا فوریئر تسلسل کی روپ میں اظہار)
اگر دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہو، وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ میں ٹکڑوں میں استمراری[17] ہو اور اس وقفے کے ہر نقطے پر تفاعل کا دایاں ہاتھ تفرق اور بایاں ہاتھ تفرق موجود ہو تب تفاعل کی فوریئر تسلسل، مساوات 12.10، جس کی عددی سر مساوات 12.9 سے حاصل کیے گئے ہوں، مرتکز ہو گی۔تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو گا ماسوائے نقطہ x_0 پر جہاں تفاعل غیر استمراری ہو۔نقطہ x_0 پر تسلسل کی قیمت، نقطہ x_0 پر $f(x)$ کی بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کی اوسط ہو گی۔

---

[14] jump
[15] left hand differential
[16] right hand differential
[17] ٹکڑوں میں استمراری کی تعریف حصہ 6.1 میں دی گئی ہے۔

رائے زنی: اگر تفاعل $f(x)$ کی فوریئر تسلسل مرتکز ہو اور اس تسلسل کا مجموعہ $f(x)$ کے برابر ہو (جیسا مسئلہ 12.1 میں بیان کیا گیا ہے) تب اس تسلسل کو $f(x)$ کی فوریئر تسلسل کہتے ہیں جس کو ریاضی میں درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

اور ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کو یہ فوریئر تسلسل ظاہر کرتی ہے۔اب چونکہ کسی بھی مرتکز تسلسل میں قوسین لگانے سے ایک نئی مرتکز تسلسل ملتی ہے جس کا مجموعہ اصل تسلسل کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے (مسئلہ 17.19) لہٰذا ہم درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ثبوت: استمراری تفاعل $f(x)$ جس کا استمراری یک رتبی اور دو رتبی تفرق پایا جاتا ہو کی مرکوزیت (مسئلہ 12.1) کا ثبوت۔
مساوات 12.9-ب کا تکمل بالحصص لیتے ہوئے

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \left. \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, \mathrm{d}x$$

ملتا ہے۔دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر کے برابر ہے۔دوبارہ تکمل بالحصص لینے سے

$$a_n = \left. \frac{f'(x) \cos nx}{n^2 \pi} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, \mathrm{d}x$$

ملتا ہے۔چونکہ $f'(x)$ دوری اور استمراری ہے لہٰذا دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر ہو گا۔وقفہ تکمل میں $f''(x)$ استمراری ہے لہٰذا

$$\left| f''(x) \right| < M$$

ہو گا جہاں M ایک موزوں مستقل ہے۔مزید $|\cos nx| < 1$ ہے۔یوں

$$|a_n| = \frac{1}{n^2 \pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \right| < \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \, \mathrm{d}x = \frac{2M}{n^2}$$

ہو گا۔اسی طرح تمام n کے لئے $|b_n| < \frac{2M}{n^2}$ ہو گا۔اس طرح فوریئر تسلسل کی ہر رکن کی زیادہ سے زیادہ قیمت درج ذیل تسلسل کی مطابقتی رکن کی قیمت کے برابر ہو سکتی ہے جو مرتکز تسلسل ہے۔

$$|a_0| + 2M\Big(1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\Big)$$

یوں فوریئر تسلسل بھی مرتکز ہو گی۔

ٹکڑوں میں استمراری تفاعل $f(x)$ کی صورت میں فوریئر تسلسل کی مرکوزیت اور مسئلہ 12.1 کے آخری جملہ کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

□

سوالات

سوال 12.26 تا سوال 12.42 میں دیے گئے دوری تفاعل $f(x)$ جس کا دوری عرصہ 2π ہے کا فوریئر تسلسل دریافت کریں۔پہلے تین جزوی مجموعوں[18] کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.26: تفاعل کو شکل 12.5-الف میں دیا گیا ہے۔

جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \cdots)$

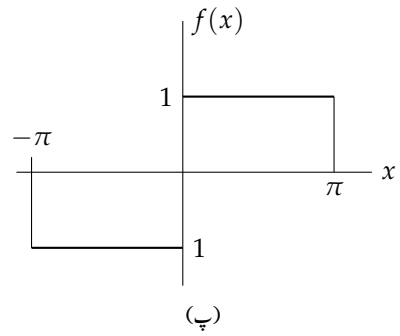
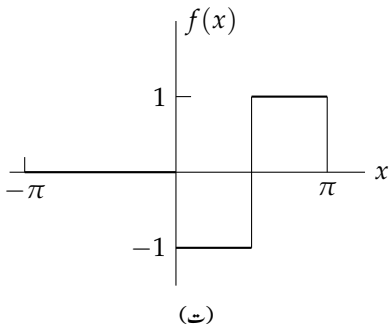
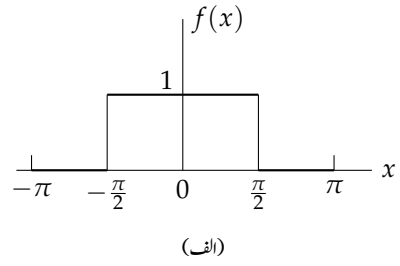
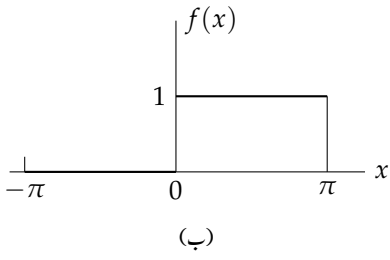
سوال 12.27: تفاعل کو شکل 12.5-ب میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x \cdots)$

سوال 12.28: تفاعل کو شکل 12.5-پ میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots)$

سوال 12.29: تفاعل کو شکل 12.5-ت میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{2}{\pi}(-\cos x - \sin 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\cos 5x \cdots)$

---

[18] یعنی $a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ جہاں $N = 1, 2, 3$ ہے۔

(الف) (ب) (پ) (ت)

شکل 12.5: تفاعل برائے سوال 12.26 تا سوال 12.29

سوال 12.30:

$$f(x)=\begin{cases}1 & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ -1 & \frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{4}{\pi}(\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-+\cdots)$

سوال 12.31:

$$f(x)=\begin{cases}1 & -\frac{\pi}{2}<x<0\\ 0 & 0<x<\frac{3}{2}\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}(\cos x-\sin x-\sin 2x-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x\cdots)$

سوال 12.32:

$$f(x)=x,\quad -\pi<x<\pi$$

جواب: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\frac{2}{1}\sin x-\frac{2}{2}\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\frac{2}{4}\sin 4x+\frac{2}{5}\sin 5x\cdots$

سوال 12.33:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<\frac{\pi}{2}\\ 2 & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(-\cos x+\sin x-\sin 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\cdots)$

سوال 12.34:

$$f(x)=x^2,\quad -\pi<x<\pi$$

جواب: $\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx=\frac{\pi^2}{3}-4\cos x+\cos 2x-\frac{4}{9}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos 4x\cdots$

سوال 12.35:

$$f(x)=|x|,\quad -\pi<x<\pi$$

جواب: $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x\cdots)$

سوال 12.36:

$$f(x)=\begin{cases}\pi & -\pi<x<0\\ \pi-x & 0<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{3\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cos x-\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{2}{9\pi}\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x\cdots$

سوال 12.37:

$$f(x)=\begin{cases}-\pi-x & -\pi<x<0\\ \pi-x & 0<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $2\sin x+\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{2}{5}\sin 5x\cdots$

سوال 12.38:

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 2 & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi}(-\cos x+3\sin x-\sin 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+\sin 3x\cdots)$

سوال 12.39: $f(x)=x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$

جواب: $\frac{\pi}{16}+\frac{1}{\pi}[(\frac{\pi}{2}-1)\cos x+\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\cdots]$

سوال 12.40: $f(x)=\sin x,\quad -\pi<x<\pi$

جواب: $\sin x$

سوال 12.41: نصف لہر سمت کار

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \sin x & 0<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{1}{15}\cos 4x+\frac{1}{35}\cos 6x+\cdots)$

سوال 12.42: مکمل لہر سمت کار $f(x)=|\sin x|,\quad -\pi<x<\pi$

جواب: $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{1}{15}\cos 4x+\frac{1}{35}\cos 6x\cdots)$

سوال 12.43: مسئلہ 12.1 کے آخری جملہ کی سوال 12.26 کے لئے تصدیق کریں۔

سوال 12.44: سوال 12.26 کی حاصل تسلسل سے سوال 12.27 کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

سوال 12.45: اگر تفاعل $f(x)$ کی فوریئر عددی سر a_n اور b_n ہوں تب ثابت کریں کہ تفاعل $kf(x)$ جہاں k مستقل ہے کے عددی سر ka_n اور kb_n ہوں گے۔

سوال 12.46: ثابت کریں کہ اگر تفاعل $f(x)$ کے عددی سر a_n ، b_n اور تفاعل $g(x)$ کے عددی سر a_n^* ، b_n^* ہوں تب تفاعل $f(x)+g(x)$ کے عددی سر $a_n+a_n^*$ ، $b_n+b_n^*$ ہوں گے۔

سوال 12.47: سوال 12.33 میں دیے گئے تفاعل کی فوریئر تسلسل سوال 12.46 کو استعمال کرتے ہوئے شکل 12.5 کی نتائج سے حاصل کریں۔

12.3 اختیاری دوری عرصہ والے تفاعل

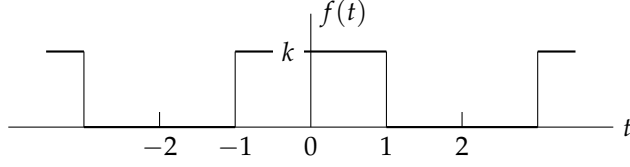
عملی استعمال میں پائے جانے والے دوری تفاعل کا دوری عرصہ شاذ و نادر 2π ہوتا ہے۔ 2π دوری عرصہ کے تفاعل کے لئے حاصل کی گئی کلیات کی x ناپ تبدیل کرتے ہوئے کسی بھی دوری عرصہ T کے تفاعل کی کلیات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔فرض کریں کہ تفاعل $f(t)$ کا دوری عرصہ T ہے۔ہم نیا متغیر x متعارف کرتے ہیں جس کا دوری عرصہ 2π ہے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\text{(الف)}\quad t=\frac{T}{2\pi}x \qquad \text{(ب)}\quad x=\frac{2\pi}{T}t \tag{12.13}$$

لہٰذا $x=\mp\pi$ کے مطابقتی قیمتیں $t=\mp\frac{T}{2}$ ہوں گی۔اس طرح x کے تفاعل f کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔یوں اگر f کی فوریئر تسلسل موجود ہو، اس کی صورت درج ذیل ہو گی

$$f(t)=f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)=a_0\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{12.14}$$

جہاں یولر عددی سر مساوات 12.9 سے حاصل ہوں گے یعنی:

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\mathrm{d}x,\\
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\sin nx\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

شکل 12.6: مثال 12.2

ہم ان کلیات کو استعمال کر سکتے ہیں لیکن متغیر کو t میں تبدیل کرنے سے آسانی پیدا ہوتی ہے۔یوں

$$x = \frac{2\pi}{T}t, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{T}\,\mathrm{d}t$$

استعمال کرتے ہوئے اور x محور پر $-\pi$ تا π تکمل کو t محور پر $-\frac{T}{2}$ تا $\frac{T}{2}$ تکمل لکھتے ہوئے یولر مساوات درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\text{(الف)} \quad a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{(ب)} \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t \tag{12.15}$$

$$\text{(پ)} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t$$

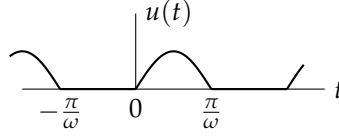
مزید مساوات 12.14 میں دی گئی فوریئر تسلسل میں x متغیر کی جگہ t متغیر پر کرنے سے

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n\sin\frac{2n\pi}{T}t\right) \tag{12.16}$$

فوریئر تسلسل حاصل ہوتی ہے۔چونکہ تفاعل $f(t)$ دوری ہے لہٰذا مساوات 12.15 میں تکمل کو $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ کی بجائے T کے برابر کسی بھی وقفہ مثلاً $0 \le t \le T$ پر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 12.2: درج ذیل چکور تفاعل (شکل 12.6)، جس کا دوری عرصہ $T = 4$ ہے، کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -2 < t < -1 \\ k & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

$u(t)$, t, $-\frac{\pi}{\omega}$, 0, $\frac{\pi}{\omega}$

شکل 12.7: نصف لہر سمت کار (مثال 12.3)

حل: مساوات 12.15 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} k\,\mathrm{d}t = \frac{k}{2}\\
a_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\cos\frac{2n\pi}{4}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi}{2}t\,\mathrm{d}t = \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\\
b_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\sin\frac{2n\pi}{4}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\sin\frac{n\pi}{2}t\,\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
$$

یوں جفت n کے لئے $a_n = 0$ جبکہ $n = 1, 5, 9, \cdots$ کے لئے $a_n = \frac{2k}{n\pi}$ اور $n = 3, 7, 11, \cdots$ کے لئے $a_n = -\frac{2k}{n\pi}$ ہو گا جن سے درج ذیل فوریئر تسلسل ملتی ہے۔

$$
f(t) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\Big(\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}t + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}t - + \cdots\Big)
$$

□

مثال 12.3: سائن نما برقی دباو $v = E\sin\omega t$ کو نصف لہر سمت کار سے گزارا جاتا ہے۔ نصف لہر سمت کار کی خارجی برقی دباو $u(t)$ (شکل 12.7) درج ذیل ہے۔

$$
u(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < 0\\ E\sin\omega t & 0 < t < \frac{T}{2}\end{cases}
$$

حل: یہاں $T = \frac{2\pi}{\omega}$ کے برابر ہے۔ یوں مساوات 12.15-الف سے

$$
a_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{E}{\pi}
$$

ملتا ہے جبکہ مساوات 12.15-ب میں ضمیمہ ب کی مساوات ب.11 استعمال کرتے ہوئے

$$
a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t\,\cos n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\omega E}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t]\,\mathrm{d}t
$$

سے $n=1$ کے لئے صفر جبکہ $n=2,3,\cdots$ کے لئے

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{\omega E}{2\pi}\Big[-\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega}-\frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega}\Big]_0^{\frac{\pi}{\omega}}\\&=\frac{E}{2\pi}\Big(\frac{-\cos(1+n)\pi+1}{1+n}+\frac{-\cos(1-n)\pi+1}{1-n}\Big)\end{aligned}$$

ملتی ہے جو طاق n کے لئے صفر اور جفت n کے لئے

$$a_n=\frac{E}{2\pi}\Big(\frac{2}{1+n}+\frac{2}{1-n}\Big)=-\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi}\qquad(n=2,4,\cdots)$$

دیتی ہے۔اسی طرح مساوات 12.15-پ سے $b_1=\frac{E}{2}$ جبکہ $n=2,3,\cdots$ کے لئے $b_n=0$ ملتے ہیں۔اس طرح فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گی۔

$$u(t)=\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\sin\omega t-\frac{2E}{\pi}\Big(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t+\frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t+\cdots\Big)$$

□

سوالات

سوال 12.48: اس بات کی تصدیق کریں کہ مساوات 12.16 میں تمام ارکان کا دوری عرصہ T ہے۔

سوال 12.49: اس بات کی تصدیق کریں کہ مساوات 12.15 میں T کے برابر کسی بھی وقفے پر تکمل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

سوال 12.50: مثال 12.3 کی چکور تفاعل کی تسلسل کو سوال 12.26 کی تسلسل سے سیدھ و سیدھ بذریعہ تبدیلی متغیر حاصل کریں۔

سوال 12.51: نصف لہر سمت کار کو $v=E\cos t$ داخلی دباو مہیا کی جاتی ہے۔خارجی دباو کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos t+\frac{2}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2t-\frac{1}{15}\cos 4t+\frac{1}{35}\cos 6t-+\cdots)$

سوال 12.52 تا سوال 12.62 میں تفاعل $f(t)$ کا دوری عرصہ T ہے۔اس کی فوریئر تسلسل دریافت کریں۔تفاعل $f(t)$ اور اس کی تسلسل کے اولین تین جزوی مجموعوں کے خط کھینچیں۔آپ دیکھیں گے کہ تسلسل کی زیادہ ارکان استعمال کرنے سے اصل تفاعل سے زیادہ قریبی مشابہت رکھنے والا خط حاصل ہوتا ہے۔

سوال 12.52: $f(t)=-1 \quad (-1<t<0), \quad f(t)=1 \quad (0<t<1), \quad T=2$
جواب: $\frac{4}{\pi}(\sin \pi t+\frac{1}{3}\sin 3\pi t+\frac{1}{5}\sin 5\pi t+\cdots)$

سوال 12.53: $f(t)=1 \quad (-1<t<2), \quad f(t)=0 \quad (2<t<3), \quad T=4$
جواب: $\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi}(\cos\frac{\pi t}{2}+\sin\frac{\pi t}{2}-\sin \pi t-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{2}\cdots)$

سوال 12.54: $f(t)=1 \quad (-1<t<1), \quad T=4$
جواب: $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\cos\frac{\pi t}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{2}\cdots)$

سوال 12.55: $f(t)=t \quad (-1<t<1), \quad T=2$
جواب: $\frac{1}{\pi}(2\sin \pi t-\sin 2\pi t+\frac{2}{3}\sin 3\pi t-\frac{1}{2}\sin 4\pi t\cdots)$

سوال 12.56: $f(t)=t^2 \quad (-1<t<1), \quad T=2$
جواب: $\frac{1}{3}+\frac{1}{\pi^2}(-4\cos \pi t+\cos 2\pi t-\frac{1}{9}\cos 3\pi t+\frac{1}{4}\cos 4\pi t\cdots)$

سوال 12.57: $f(t)=-t \quad (-1<t<0), \quad f(t)=t \quad (0<t<1) \quad T=2$
جواب: $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}(\cos \pi t+\frac{1}{9}\cos 3\pi t+\frac{1}{25}\cos 5\pi t\cdots)$

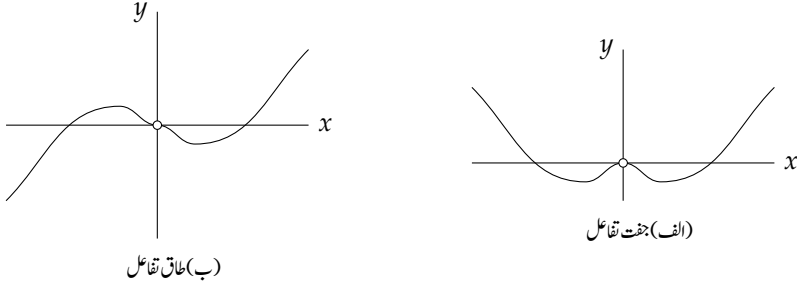
سوال 12.58: مکمل لہر سمت کار $f(t)=\sin \pi t \quad (0<t<1), \quad T=1$
جواب: $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2\pi t+\frac{1}{15}\cos 4\pi t+\frac{1}{35}\cos 6\pi t\cdots)$

سوال 12.59: $f(t)=-1 \quad (-1<t<0), \quad f(t)=t \quad (0<t<1) \quad T=2$
جواب: $-\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\cos \pi t+\frac{3}{\pi}\sin \pi t=\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t-\frac{2}{9\pi^2}\cos 3\pi t\cdots$

سوال 12.60: $f(t)=1 \quad (0<t<1), \quad f(t)=2 \quad (1<t<2) \quad T=3$
جواب: $1-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\cos\frac{2\pi t}{3}+\frac{3}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{3}\cdots$

سوال 12.61: $f(t)=-t \quad (-1<t<0), \quad f(t)=2t \quad (0<t<1) \quad T=2$
جواب: $\frac{3}{4}-\frac{6}{\pi^2}\cos \pi t+\frac{1}{\pi}\sin \pi t-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t-\frac{2}{3\pi^2}\cos 3\pi t\cdots$

سوال 12.62: $f(t)=\cos(\pi t) \quad (-1<t<1), \quad T=2$
جواب: $\cos \pi t$

سوال 12.63: مکمل لہر سمت کار کی فوریئر تسلسل سوال 12.58 میں حاصل کی گئی۔ سوال 12.42 میں حاصل کی گئی تسلسل میں متغیر تبدیل کرتے ہوئے یہی جواب دوبارہ حاصل کریں۔

شکل 12.8: جفت اور طاق تفاعل

12.4 جفت اور طاق تفاعل

جفت تفاعل کی صورت میں $b_n = 0$ جبکہ طاق تفاعل کی صورت میں $a_n = 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں یہ جاننے سے کہ آیا تفاعل جفت یا طاق ہے، عددی سر دریافت کرنے کا کام نسبتاً کم ہو گا۔

تمام x کے لئے درج ذیل خاصیت والے تفاعل $y = g(x)$ کو جفت[19] تفاعل کہتے ہیں۔

$$g(-x) = g(x) \tag{12.17}$$

ایسا تفاعل y محور کی دونوں اطراف تشاکلی (شکل 12.8-الف) ہو گا۔اس کے برعکس تفاعل $y = h(x)$ جس کی خاصیت درج ذیل ہو **طاق**[20] تفاعل کہلاتا ہے (شکل 12.8-ب)۔

$$h(-x) = -h(x) \tag{12.18}$$

جفت تفاعل $g(x)$ کی صورت میں y محور کی دائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ، محور کی بائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ کے برابر ہے (شکل 12.8-الف) لہٰذا $g(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{T}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} g(x), \mathrm{d}x \qquad (g \text{ جفت}) \tag{12.19}$$

---

[19] even
[20] odd

طاق تفاعل $h(x)$ کی صورت میں y محور کی دائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ، محور کی بائیں ہاتھ ترسیم کے نیچے رقبہ ضرب منفی اکائی کے برابر ہے (شکل 12.8-ب) لہٰذا $h(x)$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x == \int_{-\frac{T}{2}}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{T}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (h \text{ طاق}) \tag{12.20}$$

جفت تفاعل $g(x)$ اور طاق تفاعل $h(x)$ کی حاصل ضرب $q = gh$ کے لئے

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)[-h(x)] = -g(x)h(x) = -q(x)$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $q = gh$ طاق تفاعل ہو گا۔یوں اگر $f(t)$ جفت تفاعل ہو تب مساوات 12.15-پ میں متکمل $f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}$ طاق ہو گا لہٰذا $b_n = 0$ ہو گا۔اسی طرح اگر $f(t)$ طاق ہو تب مساوات 12.15-ب میں $f\cos\frac{2n\pi t}{T}$ طاق ہو گا لہٰذا $a_n = 0$ ہو گا۔ان نتائج سے درج ذیل مسئلہ اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 12.2: جفت اور طاق تفاعل کی فوریئر تسلسل

دوری عرصہ T کی جفت تفاعل $f(t)$ کی فوریئر تسلسل، **فوریئر کوسائن تسلسل**[21]

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t \qquad (f \text{ جفت}) \tag{12.21}$$

ہو گی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}t\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.22}$$

دوری عرصہ T کی طاق تفاعل $f(t)$ کی فوریئر تسلسل، **فوریئر سائن تسلسل**[22]

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi}{T}t \qquad (f \text{ طاق}) \tag{12.23}$$

ہو گی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}t\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.24}$$

---

[21] Fourier cosine series
[22] Fourier sine series

اس مسئلہ کے تحت دوری عرصہ 2π کی جفت تفاعل $f(x)$ کی فوریئر تسلسل درج ذیل فوریئر کوسائن تسلسل

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots \qquad (\text{جفت } f) \tag{12.25}$$

ہو گی جس کے فوریئر عددی سر

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.26}$$

ہوں گے۔اسی طرح دوری عرصہ 2π والی تفاعل $f(x)$ کی فوریئر سائن تسلسل

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots \qquad (\text{طاق } f) \tag{12.27}$$

پائی جائے گی جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{12.28}$$

مثال 12.2 میں دی گئی چکور تفاعل جفت ہے لہٰذا اس کی فوریئر کوسائن تسلسل پائی گئی۔

مزید آسانی درج ذیل مسئلہ سے حاصل ہوتی ہے۔

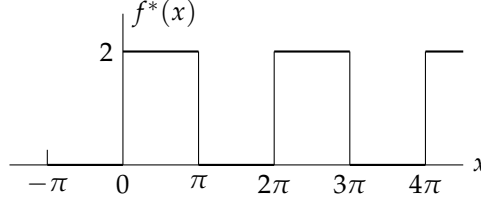
مسئلہ 12.3: (تفاعل کا مجموعہ) مجموعہ تفاعل $f_1 + f_2$ کی فوریئر عددی سر، تفاعل f_1 اور تفاعل f_2 کی مطابقتی فوریئر عددی سر کا مجموعہ ہو گا۔

کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = g(x) + h(x) \tag{12.29}$$

جہاں

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ h(x) &= \tfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{aligned} \tag{12.30}$$

$f^*(x)$ 2 $-\pi$ 0 π 2π 3π 4π x

شکل 12.9: مستطیل دھڑکن (مثال 12.4)

ہیں۔درج ذیل سے ثابت ہوتا ہے کہ $g(x)$ جفت اور $h(x)$ طاق ہیں (مساوات 12.17 اور مساوات 12.18)۔

$$g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = g(x)$$
$$h(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -h(x)$$

یوں کسی بھی تفاعل $f(x)$ کو جفت تفاعل $g(h)$ اور طاق تفاعل $h(x)$ کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے جنہیں مساوات 12.30 سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 12.4: مستطیل دھڑکن

مستطیل دھڑکن[23] $f^*(x)$ کو شکل 12.9 میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سوال 12.28 میں دکھائی گئی تفاعل $f(x)$ کے ساتھ 1 جمع کرنے سے موجودہ تفاعل $f^*(x)$ حاصل ہو گی۔یوں سوال 12.28 میں حاصل کیے گئے فوریئر تسلسل سے $f^*(x)$ کی فوریئر تسلسل سیدھ و سیدھ لکھتے ہیں۔

$$1 + \tfrac{4}{\pi}(\sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + \cdots)$$

□

مثال 12.5: دندان موج

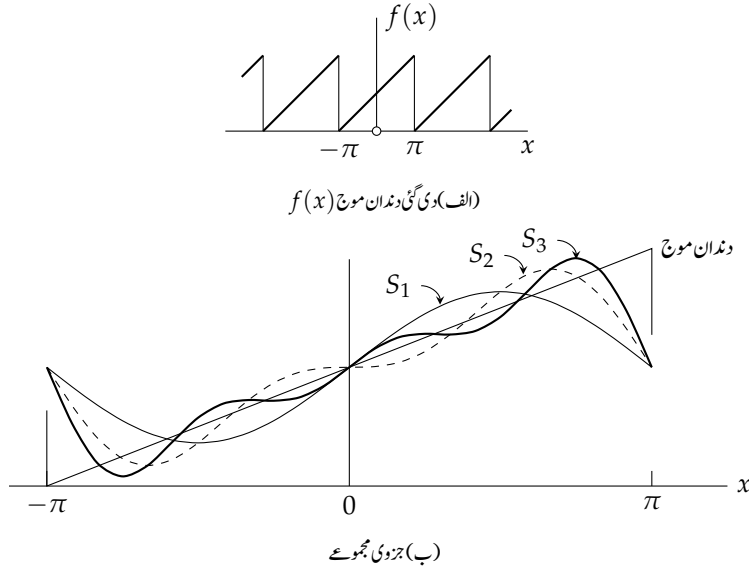
دندان موج[24]

$$f(x) = x + \pi, \quad (-\pi < x < \pi); \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

کو شکل 12.10-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس کی فوریئر تسلسل دریافت کریں۔ حل:دندان موج کی تفاعل کو

[23] pulse
[24] saw tooth wave

(الف) دی گئی دندان موج $f(x)$

(ب) جزوی مجموعے

شکل 12.10: دندان موج اور اس کا فوریئر تسلسل (مثال 12.5)

$$f = f_1 + f_2; \quad f_1 = x, \quad f_2 = \pi$$

لکھا جا سکتا ہے۔ f_2 کی فوریئر عددی سر صفر کے برابر ہیں ماسوائے a_0 کے جو π کے برابر ہے۔یوں مسئلہ 12.3 کے تحت دندان موج کے عددی سر a_n ، b_n تفاعل f_1 کے عددی سر ہوں گے جبکہ اس کا $a_0 = \pi$ ہو گا (f_1 طاق ہے لہٰذا اس کا اپنا $a_0 = 0$ ہے)۔یوں

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)\sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx \, \mathrm{d}x$$

کا تکمل بالحصص لینے سے

$$b_n = \frac{2}{\pi}\Big[\, \frac{-x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx \, \mathrm{d}x\Big] = -\frac{2}{n}\cos n\pi$$

ملتا ہے جس سے $b_1 = 2$ ، $b_2 = -1$ ، $b_3 = \frac{2}{3}$ ، $b_4 = -\frac{1}{2}$ ، $\cdots$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا دندان موج کی فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گی (شکل 12.10-ب)۔

$$f(x) = \pi + 2\Big(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - + \cdots\Big)$$

□

سوالات

سوال 12.64: کیا درج ذیل تفاعل جفت، طاق یا ان میں سے دونوں نہیں (نہ طاق اور نہ ہی جفت) ہیں؟

$$e^x,\ e^{x^2},\ \sin nx,\ x\sin nx,\ \frac{\cos x}{x},\ \ln x,\ \sin x^2,\ \sin^2 x$$

جوابات: بائیں سے 4 ، 6 طاق، 3 ، 9 دونوں نہیں اور باقی تمام جفت ہیں۔

سوال 12.65 تا سوال 12.72 میں دوری تفاعل $f(x)$ کا دوری عرصہ 2π ہے۔ کیا تفاعل جفت، طاق یا دونوں نہیں ہیں۔

سوال 12.65: $f(x) = |x|, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: جفت

سوال 12.66: $f(x) = x, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: طاق

سوال 12.67: $f(x) = x^2, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: جفت

سوال 12.68: $f(x) = x^3, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: طاق

سوال 12.69: $f(x) = e^x, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: نہ طاق اور نہ ہی جفت

سوال 12.70: $f(x) = e^{|x|}, \quad (-\pi < x < \pi)$
جواب: جفت

سوال 12.71:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

جواب: طاق

سوال 12.72: $f(x)=1, \quad (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$ جواب: جفت

سوال 12.73: ایسا تفاعل دریافت کریں جو جفت بھی ہو اور طاق بھی۔
جواب: $f(x)=0$

سوال 12.74: مساوات 12.19 اور مساوات 12.20 ثابت کریں۔

سوال 12.75: مسئلہ 12.3 کو ثابت کریں۔

سوال 12.76 تا سوال 12.79 میں دیے گئے تفاعل کو ایک عدد جفت تفاعل اور ایک عدد طاق تفاعل کا مجموعہ لکھیں۔

سوال 12.76: $\frac{1}{1-x}$
جواب: $\frac{1}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^2}$

سوال 12.77: $\frac{1}{1-x^2}$
جواب: $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{2x}{(1-x^2)^2}$

سوال 12.78: e^x
جواب: $\cosh x+\sinh x$

سوال 12.79: $\cos x$
جواب: جفت تفاعل یا طاق تفاعل جوں کا توں لکھا جائے گا۔ $\cos x$

سوال 12.80: ثابت کریں کہ دو عدد جفت تفاعل کا مجموعہ جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.81: ثابت کریں کہ دو عدد جفت تفاعل کا حاصل ضرب جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.82: ثابت کریں کہ دو عدد طاق تفاعل کا مجموعہ طاق تفاعل ہو گا۔

سوال 12.83: ثابت کریں کہ دو عدد طاق تفاعل کا حاصل ضرب جفت تفاعل ہو گا۔

سوال 12.84: ثابت کریں کہ جفت $f(x)$ کی صورت میں $|f(x)|+f^2(x)$ جفت ہو گا۔

سوال 12.85: ثابت کریں کہ طاق $f(x)$ کی صورت میں $|f(x)| + f^2(x)$ اور $f^3(x)$ جفت ہوں گے۔

سوال 12.86 تا سوال 12.91 میں دیے گئے تفاعل کا دوری عرصہ 2π ہے۔ان تفاعل کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

سوال 12.86:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

جواب: $\frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x \cdots)$

سوال 12.87:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ \pi - x & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

جواب: $-\frac{4}{\pi}\cos x + 2\sin x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{4}{25}\cos 5x + \frac{2}{5}\sin 5x \cdots$

سوال 12.88:

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < 0 \\ -x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $-\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x \cdots)$

سوال 12.89:

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x \cdots)$

سوال 12.90: $f(x) = \frac{x^2}{4}, \quad (-\pi < x < \pi)$

جواب: $\frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 4x - + \cdots$

سوال 12.91:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & -\pi<x<0 \\ x & 0<x<\pi \end{cases}$$

جواب: $\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}(\pi+1)\cos x+\frac{1}{\pi}(-\pi^2+\pi+4)\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x\cdots$

سوال 12.92 تا سوال 12.95 میں دی گئی تعلق کو ثابت کریں (مساوات 12.12 دیکھیں)۔

سوال 12.92: (سوال 12.86 یا سوال 12.90 استعمال کریں) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots=\frac{\pi}{4}$

سوال 12.93: (سوال 12.90 استعمال کریں) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

سوال 12.94: (سوال 12.90 استعمال کریں) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+-\cdots=\frac{\pi^2}{12}$

سوال 12.95: (سوال 12.93 اور سوال 12.94 استعمال کریں) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$

12.5 نصف سعت اتساع

کئی انجینئری اور طبیعیاتی مسائل میں ایسے تفاعل $f(t)$ کی فوریئر تسلسل درکار ہو گی جو کسی محدود وقفہ $0\le t\le l$ پر معین ہو۔ ہم وقفہ $0\le t\le l$ کو تکمل کا وقفہ $0\le t\le \frac{T}{2}$ لیتے ہوئے مسئلہ 12.2 استعمال کرتے ہیں۔ یوں $l=\frac{T}{2}$ یعنی $T=2l$ چنا گیا ہے۔ مساوات 12.22 استعمال کرتے ہوئے فوریئر کوسائن تسلسل حاصل ہوتی ہے جو $T=2l$ عددی عرصہ کی جفت تفاعل $f_1(t)$ کو ظاہر کرتی ہے۔ وقفہ $0\le t\le l$ پر $f_1(t)=f(t)$ ہو گا۔ اسی لئے $f_1(t)$ کو $f(t)$ کی جفت دوری توسیع[25] کہتے ہیں۔ شکل 12.11-ب میں جفت دوری توسیع دکھائی گئی ہے۔ مساوات 12.21 اور مساوات 12.22 میں $T=2l$ لیتے ہوئے

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}t \qquad (0\le t\le l) \tag{12.31}$$

[25] even periodic extension

جفت فوریئر تسلسل حاصل ہو گی جس کی عددی سر

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(t)\,\mathrm{d}t,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,\mathrm{d}t,\quad n=1,2,\cdots \tag{12.32}$$

ہوں گے۔

ہم مسئلہ 12.2 کی مساوات 12.22 کی جگہ، پہلی کی طرح $T=2l$ لیتے ہوئے، مساوات 12.24 استعمال کر سکتے ہیں۔ایسا کرنے سے فوریئر سائن تسلسل حاصل ہو گی جو دوری عرصہ $T=2l$ کی دوری تفاعل $f_2(t)$ کو ظاہر کرے گی۔وقفہ $0\le t\le l$ پر $f_2(t)=f(t)$ ہو گا۔ $f_2(t)$ کو $f(t)$ کی **طاق دوری توسیع**[26] کہتے ہیں۔شکل 12.11-پ میں طاق دوری توسیع دکھائی گئی ہے۔مساوات 12.23 اور مساوات 12.24 میں $T=2l$ لیتے ہوئے

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}t\qquad (0\le t\le l) \tag{12.33}$$

طاق فوریئر تسلسل حاصل ہو گی جس کی عددی سر

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin\frac{n\pi}{l}t\,\mathrm{d}t,\quad n=1,2,\cdots \tag{12.34}$$

ہوں گے۔مساوات 12.32 اور مساوات 12.34 میں دی گئی عددی سر استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.31 اور مساوات 12.33 کو دی گئی تفاعل $f(t)$ کی **نصف سعت اتساع**[27] کہتے ہیں۔

مثال 12.6: تکونی دھڑکن

درج ذیل تکونی دھڑکن کی نصف سعت اتساع کریں (شکل 12.12)۔

$$f(t)=\begin{cases}\frac{2k}{l}t & 0<t<\frac{l}{2}\\ \frac{2k}{l}(l-t) & \frac{l}{2}<t<l\end{cases}$$

حل:مساوات 12.32 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{l}\Big[\frac{2k}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}t\,\mathrm{d}t+\frac{2k}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-t)\,\mathrm{d}t\Big]=\frac{k}{2}\\ a_n&=\frac{2}{l}\Big[\frac{2k}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}t\cos\frac{n\pi}{l}t\,\mathrm{d}t+\frac{2k}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,\mathrm{d}t\Big]\end{aligned}$$

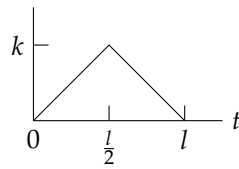
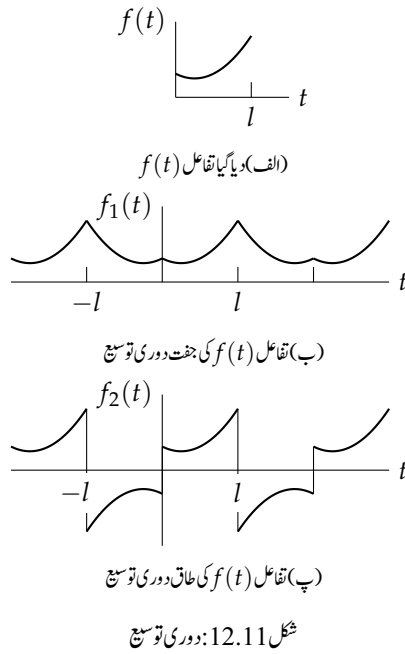
---

[26] odd periodic extension
[27] half range expansion

$f(t)$ (الف) دیا گیا تفاعل

(ب) تفاعل $f(t)$ کی جفت دوری توسیع

(پ) تفاعل $f(t)$ کی طاق دوری توسیع

شکل 12.11: دوری توسیع

شکل 12.12: تکونی دھڑکن (مثال 12.6)

تکمل بالحصص لیتے سے

$$\int_0^{\frac{l}{2}} t\cos\frac{n\pi}{l}t\,\mathrm{d}t = \frac{lt}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}t\Big|_0^{\frac{l}{2}} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{n\pi}{l}t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{l^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}(\cos\frac{n\pi}{2} - 1)$$

ملتا ہے۔اسی طرح تکمل بالحصص سے

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,\mathrm{d}t = -\frac{l^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{l^2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2})$$

ملتا ہے۔ان نتائج سے

$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2}(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1)$$

یعنی

$$a_2 = -\frac{16k}{2^2\pi^2}, \quad a_6 = -\frac{16k}{6^2\pi^2}, \quad a_{10} = -\frac{16k}{10^2\pi^2}, \cdots$$
$$a_n = 0, \quad n \neq 2, 6, 10, 14, \cdots$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں تکونی دھڑکن $f(t)$ کی پہلی نصف سعت اتساع درج ذیل ہو گی جو $f(t)$ کی دوری جفت توسیع ہے (شکل 12.13-الف)۔

$$f(t) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2}\Big(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{l}t + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi}{l}t + \cdots\Big)$$

اسی طرح مساوات 12.34 سے

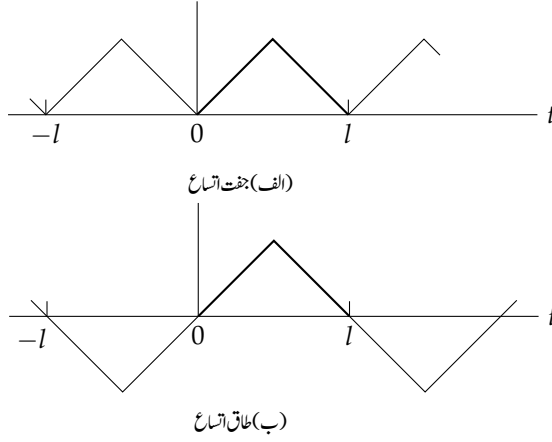
$$b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \tag{12.35}$$

حاصل ہو گا جس سے $f(t)$ کی دوسری نصف سعت اتساع درج ذیل حاصل ہو گی جو $f(t)$ کی دوری طاق توسیع ہے (شکل 12.13-ب)۔

$$f(t) = \frac{8k}{\pi^2}\Big(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{l}t - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}t + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{l}t - + \cdots\Big)$$

□

(الف) جفت اتساع

(ب) طاق اتساع

شکل 12.13: تفاعل $f(t)$ کی دوری اتساع (مثال 12.6)

سوالات

سوال 12.96 تا سوال 12.103 میں دیے گئے تفاعل $f(t)$ کی فوریئر سائن تسلسل حاصل کریں اور مطابقتی دوری طاق تفاعل کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.96: $f(t)=t, \quad (0<t<\pi)$
جواب: $2\sin t-\sin 2t+\frac{2}{3}\sin 3t-\frac{1}{2}\sin 4t\cdots$

سوال 12.97: $f(t)=k, \quad (0<t<l)$
جواب: $\frac{4k}{\pi}(\sin\frac{\pi t}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{l}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi t}{l}\cdots)$

سوال 12.98: $f(t)=1-t, \quad (0<t<1)$
جواب: $\frac{1}{\pi}(2\sin\pi t+\sin 2\pi t+\frac{2}{3}\sin 3\pi t\cdots)$

سوال 12.99: $f(t)=\cos t, \quad (0<t<\frac{\pi}{2})$
جواب: $\frac{8}{\pi}(\frac{1}{3}\sin 2t+\frac{2}{15}\sin 4t+\frac{3}{35}\sin 6t\cdots)$

سوال 12.100:

$$f(t)=\begin{cases} t & 0<t<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2}<t<\pi\end{cases}$$

جواب: $(1+\frac{2}{\pi})\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + (\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi})\sin 3t \cdots$

سوال 12.101:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}[(1+\frac{2}{\pi})\sin\frac{\pi t}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi t + (\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi})\sin\frac{3\pi}{2}t \cdots]$

سوال 12.102:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}[3\sin\frac{\pi t}{2} - \sin\pi t + \sin\frac{3\pi t}{2} \cdots]$

سوال 12.103:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

جواب: $(\frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi^2})\sin\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{\pi}\sin\pi t + (\frac{4}{3\pi} + \frac{4}{9\pi^2})\sin\frac{3\pi t}{2} \cdots$

سوال 12.104 تا سوال 12.109 میں دیے گئے تفاعل $f(t)$ کی فوریئر کوسائن تسلسل دریافت کریں اور مطابقتی دوری جفت تفاعل کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 12.104: $f(t) = k, \quad (0 < t < l)$
جواب: $f(t) = k$

سوال 12.105: $f(t) = t, \quad (0 < t < l)$
جواب: $\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}(\cos\frac{\pi t}{l} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi t}{l} + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi t}{l} \cdots)$

سوال 12.106: $f(t) = t^2, \quad (0 < t < l)$
جواب: $\frac{l^2}{3} - \frac{l^2}{\pi^2}(4\cos\frac{\pi t}{l} - \cos\frac{2\pi t}{l} + \frac{4}{9}\cos\frac{3\pi t}{l} \cdots)$

سوال 12.107: $f(t) = \sin t, \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$
جواب: $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2t + \frac{1}{15}\cos 4t + \frac{1}{35}\cos 6t \cdots)$

سوال 12.108: $f(t)=\cos t, \quad (0<t<\frac{\pi}{2})$
جواب: $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}(\frac{1}{3}\cos 2t-\frac{1}{15}\cos 4t+\frac{1}{35}\cos 6t-+\cdots)$

سوال 12.109: $f(t)=e^t, \quad (0<t<1)$
جواب: $e-1-\frac{2}{\pi^2+1}(e+1)\cos\pi t+\frac{2}{4\pi^2+1}(e-1)\cos 2\pi t\cdots$

سوال 12.110: (فوریئر تسلسل کی مخلوط صورت، مخلوط فوریئر عددی سر)
کلیہ یولر $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں

$$\cos nx=\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx}), \quad \sin nx=\frac{1}{2i}(e^{inx}-e^{-inx})$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے فوریئر تسلسل

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_b\sin nx)$$

کو

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_ne^{inx}+k_ne^{-inx}) \tag{12.36}$$

لکھیں جہاں $c_0=a_0$ ، $c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$ ، $k_n=\frac{a_n+ib_n}{2}$ ، $n=1,2,\cdots$ ہے۔ مساوات 12.9 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x, \quad k_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}\,\mathrm{d}x, \quad n=1,2,\cdots$$

علامت k_n کی جگہ علامت c_{-n} لکھتے ہوئے مساوات 12.36 کو درج ذیل صورت میں لکھیں۔

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}, \quad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x, \quad n=0,\mp1,\mp2,\cdots \tag{12.37}$$

اس کو **مخلوط فوریئر تسلسل**[28] کہتے ہیں جہاں c_n کو $f(x)$ کی **مخلوط فوریئر عددی سر**[29] کہتے ہیں۔

سوال 12.111: ثابت کریں کہ جفت تفاعل کی مخلوط فوریئر عددی سر حقیقی ہوں گے جبکہ طاق تفاعل کی فوریئر عددی سر خالص خیالی ہوں گے۔

---
[28] complex Fourier series
[29] complex Fourier coefficients

سوال 12.112 تا سوال 12.115 میں دوری عرصہ 2π کی دی گئی تفاعل $f(x)$ کی مخلوط فوریئر تسلسل دریافت کریں۔ مخلوط فوریئر تسلسل سے حقیقی فوریئر تسلسل حاصل کرتے ہوئے گزشتہ حاصل کردہ تسلسل کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 12.112: (سوال 12.65) $f(x) = |x| \quad (-\pi < x < \pi)$

جواب: $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{-2e^{inx}}{\pi n^2}$

سوال 12.113: (سوال 12.66) $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$

جواب: $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{i(-1)^n e^{inx}}{n}$

سوال 12.114: (سوال 12.67) $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$

جواب: $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n e^{inx}}{n^2}$

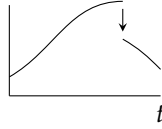
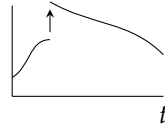
سوال 12.115: (سوال 12.69) $f(x) = e^x \quad (-\pi < x < \pi)$

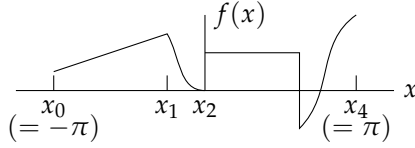
جواب: $\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx}$

12.6 فوریئر عددی سر کا بغیر تکمل حصول

آپ نے دیکھا کہ بعض اوقات پیچیدہ تکملات حل کرنے کے بعد نسبتاً سادہ فوریئر عددی سر a_n اور b_n حاصل ہوتے ہیں۔اس سے سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا عددی سر حاصل کرنے کا کوئی آسان طریقہ بھی ہے؟ جس کا جواب ہے، "جی ہاں"۔ ہم یہاں ثابت کرتے ہیں کہ دوری کثیر رکنی تفاعل کی فوریئر عددی سر تفاعل کی اور تفاعل کی تفرقات کی چھلانگ سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔ یوں بغیر کوئی تکمل حل کرتے ہوئے a_n اور b_n حاصل کیے جائیں گے (ماسوائے a_0 ، جس کو اب بھی تکمل کے ذریعہ حاصل کیا جائے گا)۔

نقطہ x_0 پر تفاعل $g(x)$ کی چھلانگ[30] j سے مراد x_0 پر $g(x)$ کی دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد میں فرق ہے (حصہ 12.2) یعنی:

$$j = g(x_0 + 0) - g(x_0 - 0) \tag{12.38}$$

(الف) مثبت چھلانگ (ب) منفی چھلانگ

شکل 12.14: تفاعل کی چھلانگ

شکل 12.15: کثیر رکنی روپ کی مثال (مساوات 12.39) جہاں $m=4$ ہے

یوں اوپر کو چھلانگ مثبت چھلانگ ہو گی جبکہ نیچے کو چھلانگ منفی چھلانگ ہو گی (شکل 12.14)۔

فرض کریں کہ دوری تفاعل $f(x)$ جس کا عددی عرصہ 2π ہے کو وقفہ $-\pi<x<\pi$ میں کثیر رکنی $p-1$ ، $\cdots$ ، p_m سے ظاہر کیا جا سکتا ہے (مثلاً شکل 12.15)۔

$$f(x)=\begin{cases} p_1(x) & x_0<x<x_1, \quad (x_0=-\pi)\\ p_2(x) & x_1<x<x_2\\ \vdots & \\ p_3(x) & x_{m-1}<x<x_m \quad (x_m=\pi)\end{cases} \tag{12.39}$$

یوں x_0 ، $\cdots$ ، x_m پر تفاعل f کی چھلانگ اور اس کی تفرق f' ، f'' ، $\cdots$ کی چھلانگ ہو سکتی ہیں جنہیں ہم درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} j_s &= x_s \text{ پر } f \text{ کی چھلانگ}\\ j_s' &= x_s \text{ پر } f' \text{ کی چھلانگ}\\ j_s'' &= x_s \text{ پر } f'' \text{ کی چھلانگ} \qquad (s=1,2,\cdots,m)\\ &\vdots\\ j_s^n &= x_s \text{ پر } f^{(n)} \text{ کی چھلانگ}\end{aligned} \tag{12.40}$$

---

jump[30]

جدول 12.1: مثال 12.7 کی چھلانگیں

	$x_1 = 0$ پر چھلانگ	$x_2 = \pi$ پر چھلانگ
f	$j_1 = 0$	$j_2 = -\pi^2$
f'	$j_1' = 0$	$j_2' = -2\pi$
f''	$j_1'' = 2$	$j_2'' = -2$

ظاہر ہے کہ اگر x_s پر f استمراری ہو تب x_s پر $j_s = 0$ ہو گا۔ایسا ہی f' ، f'' ، ... کے لئے بھی کہا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 12.40 میں کئی j_s ، j_s' ، ... صفر قیمتیں ہو سکتی ہیں۔

مثال 12.7: تفاعل کی چھلانگ اور اس کی تفرق کی چھلانگیں
تفاعل $f(x)$

$$f = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

اور اس کی تفرقات f' ، f'' ، ...

$$f' = \begin{cases} 0 \\ 2x \end{cases} \qquad f'' = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \qquad f''' = 0$$

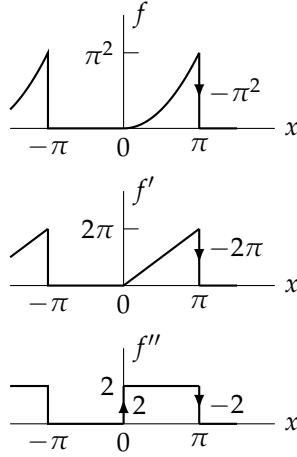
کی ترسیم شکل 12.16 میں کھینچی گئی ہیں اور ان کی چھلانگیں جدول 12.1 میں دی گئی ہیں۔

یاد رہے کہ وقفہ کی ابتدا $x = -\pi$ پر چھلانگیں شمار نہیں کیے جاتے ہیں۔انہیں دوری وقفہ کی اختتام $x = \pi$ پر شمار کیا جاتا ہے۔ایک ہی وقفہ پر انہیں دو مرتبہ نہیں گیا جائے گا۔ □

مساوات 12.39 میں دی گئی تفاعل f کی فوریئر عددی سر a_1 ، a_2 ، ... حاصل کرنے کی خاطر ہم یولر مساوات 12.9-ب استعمال کرتے ہیں۔

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f \cos nx \, \mathrm{d}x \tag{12.41}$$

چونکہ f کو مساوات 12.39 ظاہر کرتی ہے لہٰذا ہمیں m عدد تکمل کا مجموعہ

$$\pi a_n = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \cdots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} = \sum_{s=1}^{m} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f \cos nx \, \mathrm{d}x \tag{12.42}$$

شکل 12.16: تفاعل اور تفاعل کی تفرقات کی چھلانگیں (مثال 12.7)

لکھنا ہو گا جہاں $x_0 = -\pi$ اور $x_m = \pi$ ہیں۔ تکمل بالحصص لیتے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{x_{s-1}}^{x_s} f \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{f}{n} \sin nx \Big|_{x_{s-1}}^{x_s} - \frac{1}{n} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, \mathrm{d}x \tag{12.43}$$

اب بائیں ہاتھ پہلی جزو میں نقطہ x_s پر تفاعل $f(x)$ غیر استمراری ہو سکتا ہے۔ایسا ہونے کی صورت میں x_s پر تفاعل کی بائیں ہاتھ حد $f(x_s - 0)$ لینی ہو گی۔اسی طرح x_{s-1} پر غیر استمراری $f(x)$ کی صورت میں تفاعل کی دائیں ہاتھ حد $f(x_{s-1} + 0)$ لینی ہو گی۔یوں مساوات 12.43 کا دائیں ہاتھ پہلا جزو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{n}[f(x_s - 0) \sin nx_s - f(x_{s-1} + 0) \sin nx_{s-1}]$$

اب مساوات 12.43 کو مساوات 12.42 میں پر کرتے ہوئے اور چھوٹی علامتیں $S_0 = \sin nx_0$ ، $S_1 = \sin nx_1$ ، ... استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \pi a_n = \frac{1}{n}[&f(x_1 - 0)S_1 - f(x_0 + 0)S_0 + f(x_2 - 0)S_2 - f(x_1 + 0)S_1 \\ &+ \cdots + f(x_m - 0)S_m - f(x_{m-1} + 0)S_{m-1}] \\ &- \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{m} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f' \sin nx \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{12.44}$$

ملتا ہے۔ قوسین میں بند یکساں S کے ارکان اکٹھا کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
(12.45)\quad & -f(x_0+0)S_0+[f(x_1-0)-f(x_1+0)]S_1 \\
& \quad +[f(x_2-0)-f(x_2+0)]S_2+\cdots+f(x_m-0)S_m
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 12.45 میں ہر چکور قوسین میں بند قیمت f کی چھلانگ ضرب -1 کے برابر ہے۔مزید چونکہ f دوری ہے لہٰذا $S_0=S_m$ اور $f(x_0)=f(x_m)$ ہوں گے لہٰذا مساوات 12.45 کے پہلے اور آخری رکن کو ملا کر $[f(x_m-0)-f(x_m+0)]S_m$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 12.45 درج ذیل ہو گا

$$
-j_1S_1-j_2S_2-\cdots-j_mS_m
$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.44 کو

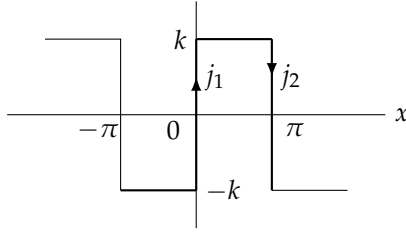
$$
\pi a_n=-\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j_s\sin nx_s-\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m}\int_{x_{s-1}}^{x_s} f'\sin nx\,\mathrm{d}x \tag{12.46}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔یہی ترکیب دائیں ہاتھ کی تکمل پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\sum_{s=1}^{m}\int_{x_{s-1}}^{x_s} f'\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j'_s\cos nx_s+\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m}\int_{x_{s-1}}^{x_s} f''\cos nx\,\mathrm{d}x \tag{12.47}
$$

ایسا بار بار کرتے ہوئے ہمیں تکمل کے اندر f کا بتدریج زیادہ رتبے کا تفرق حاصل ہو گا۔اب چونکہ f کو کثیر رکنی ظاہر کرتی ہیں اور درجہ r کثیر رکنی کا $r+1$ رتبی تفرق صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا آخر کار کوئی تکمل باقی نہ رہے گا۔ تکمل پر محدود مرتبہ یہ عمل کرنے سے ایسا ہو گا۔مساوات 12.47 اور اس عمل کے دہرانے سے حاصل نتائج کو مساوات 12.46 میں پر کرتے ہوئے درکار کلیہ

$$
\begin{aligned}
(12.48)\quad a_n=\frac{1}{n\pi}\Big[&-\sum_{s=1}^{m} j_s\sin nx_s-\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j'_s\cos nx_s] \\
&+\frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{m} j''_s\sin nx_s+\frac{1}{n^3}\sum_{s=1}^{m} j'''_s\cos nx_s--++\cdots\Big]
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $n=1,2,\cdots$ ہے (اور a_0 کو پہلی کی طرح تکمل کے ذریعہ حاصل کیا جائے گا)۔ بالکل

شکل 12.17: چکور موج کی چھلانگیں (مثال 12.8)

اسی طرح یولر مساوات 12.9-پ استعمال کرتے ہوئے b_n کا کلیہ

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\Big[\sum_{s=1}^{m} j_s \cos nx_s - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m} j'_s \sin nx_s] - \frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{m} j''_s \cos nx_s + \frac{1}{n^3}\sum_{s=1}^{m} j'''_s \sin nx_s + - - + + \cdots\Big] \tag{12.49}$$

حاصل ہو گا۔

غلطیوں سے بچنے کی خاطر $f(x)$ اور اس کی تفرقات کی ترسیم کھینچ کر چھلانگوں کو (مثال 12.7 کی طرح) جدول میں لکھنا سود مند ثابت ہوتا ہے۔

مثال 12.8: دوری چکور موج
دوری چکور موج $f(x)$ کی فوریئر عددی سر دریافت کریں (شکل 12.17)۔

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$$

حل: چونکہ $f' = 0$ ہے لہٰذا صرف f کی چھلانگیں پائی جاتی ہیں۔ یہ چھلانگیں جدول 12.2 میں دی گئی ہیں۔ f طاق ہے لہٰذا مساوات 12.49 سے فوریئر عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi}[j_1 \cos nx_1 + j_2 \cos nx_2] = \frac{1}{n\pi}[2k \cos 0 - 2k \cos n\pi] \\ &= \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4k}{n\pi} & n \text{ طاق} \\ 0 & n \text{ جفت} \end{cases} \qquad \text{(مثال 12.1 دیکھیں)} \end{aligned}$$

جدول 12.2: چکور موج کی چھلانگیں (مثال 12.8)

	$x_1 = 0$ پر چھلانگ	$x_2 = \pi$ پر چھلانگ
f	$j_1 = 2k$	$j_2 = -2k$

□

مثال 12.9: مثال 12.7 میں دی گئی تفاعل کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

حل: تکمل سے a_0 حاصل کرتے ہیں۔

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$$

مساوات 12.48 سے

$$a_n = \frac{1}{n\pi}[\pi^2 \sin n\pi + \frac{2\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}(2\sin 0 - 2\sin n\pi)] = \frac{2}{n^2}\cos n\pi$$

یعنی $a_1 = -\frac{2}{1^2}$ ، $a_2 = \frac{2}{2^2}$ ، $a_3 = -\frac{2}{3^2}$ ، $\cdots$ ملتے ہیں۔ مساوات 12.49 سے

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi}[-\pi^2 \cos n\pi + \frac{2\pi}{n}\sin n\pi - \frac{1}{n^2}(2\cos 0 - 2\cos n\pi)] \\ &= -\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$

یعنی

$$b_1 = \pi - \frac{4}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad b_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3^2\pi}, \quad b_4 = -\frac{\pi}{4}, \cdots$$

ملتے ہیں۔ یوں فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گی۔

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2\cos x + (\pi - \frac{4}{\pi})\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \cdots$$

□

سوالات

سوال 12.116: مثال 12.9 کو عمومی طریقہ سے حل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ عمومی طریقہ بہت لمبا ہو گا۔

سوال 12.117: یولر مساوات 12.9-پ استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.49 حاصل کریں۔

سوال 12.118: ثابت کریں کہ T دوری عرصہ کی تفاعل کے لئے مساوات 12.48 اور مساوات 12.49 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\Big[-\sum_{s=1}^{m} j_s \sin K_n t_s - \frac{1}{K_n}\sum_{s=1}^{m} j'_s \cos K_n t_s \qquad (K_n = \frac{2n\pi}{T}) + \frac{1}{K_n^2}\sum_{s=1}^{m} j''_s \sin K_n t_s + \frac{1}{K_n^3}\sum_{s=1}^{m} j'''_s \cos K_n t_s - - + + \cdots\Big] \tag{12.50}$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\Big[\sum_{s=1}^{m} j_s \cos K_n t_s - \frac{1}{K_n}\sum_{s=1}^{m} j'_s \sin K_n t_s - \frac{1}{K_n^2}\sum_{s=1}^{m} j''_s \cos K_n t_s + \frac{1}{K_n^3}\sum_{s=1}^{m} j'''_s \sin K_n t_s + - - + + \cdots\Big] \tag{12.51}$$

سوال 12.119 تا سوال 12.122 میں فوریئر تسلسل کو مساوات 12.48 تا مساوات 12.51 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 12.119: سوال 12.26 تا سوال 12.29

سوال 12.120: سوال 12.32 تا سوال 12.35

سوال 12.121: سوال 12.54 تا سوال 12.57

سوال 12.122: سوال 12.59 تا سوال 12.61

سوال 12.123 تا سوال 12.126 کی فوریئر سائن تسلسل کو مساوات 12.48 تا مساوات 12.51 کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 12.123: $f(x)=x^2+2x+1 \quad (0<x<\pi)$
جواب: $(2\pi-\frac{4}{\pi}+4)\sin x-(2+\pi)\sin 2x+(\frac{2}{3}+\frac{28}{27\pi}+\frac{4}{3})\sin 3x\cdots$

سوال 12.124: $f(x)=x^3 \quad (0<x<1)$
جواب: $\frac{2}{\pi^3}(\pi^2-6)\sin \pi x-\frac{(4\pi^2-6)}{4\pi^3}\sin 2\pi x+\frac{2(9\pi^2-6)}{27\pi^3}\sin 3\pi x\cdots$

سوال 12.125: $f(x)=x(1-x) \quad (0<x<1)$
جواب: $\frac{8}{\pi^3}(\sin \pi t+\frac{1}{3^3}\sin 3\pi t+\frac{1}{5^3}\sin 5\pi t+\cdots)$

سوال 12.126: $f(x)=x(x^2-1) \quad (0<x<1)$
جواب: $\frac{1}{\pi^3}(-12\sin \pi t+\frac{3}{2}\sin 2\pi t-\frac{4}{9}\sin 3\pi t+\frac{3}{16}\sin 4\pi t\cdots)$

سوال 12.127: تفاعل $f(x)=x^3, \quad (0<x<l)$ کی فوریئر کوسائن تسلسل کو مساوات 12.50 کی مدد سے حاصل کریں۔
جواب: $\frac{l^3}{4}+l^3(\frac{24}{\pi^4}-\frac{6}{\pi^2})\cos\frac{\pi t}{l}+\frac{3l^3}{2\pi^2}\cos\frac{2\pi t}{l}\cdots$

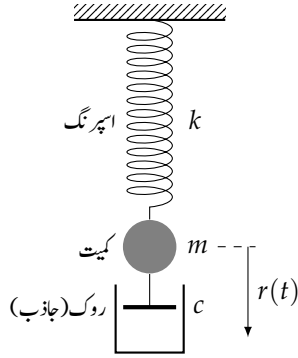
12.7 جبری ارتعاش

تفرقی مساوات میں فوریئر تسلسل اہم ثابت ہوتے ہیں۔آئیں ایک اہم عملی مسئلہ پر غور کریں جس کی سادہ تفرقی مساوات پائی جاتی ہے۔ (جزوی تفرقی مساوات والے مسائل پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔)

ہم حصہ 2.8 سے جانتے ہیں کہ اسپرنگ کے ساتھ جڑی ہوئی کمیت m (شکل 12.18) کی جبری ارتعاش کی سادہ تفرقی مساوات

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=r(t) \tag{12.52}$$

ہے جہاں c تقصیری مستقل اور k مقیاس لچک ہے۔بیرونی قوت سائن یا کوسائن تفاعل ہونے اور غیر صفر تقصیری مستقل کی صورت میں برقرار حالت ہارمونی ارتعاش پیدا ہو گی جس کی تعدد بیرونی قوت کی تعدد ہو گی۔

ایسی قوت $r(t)$ جو نہ خالص سائن تفاعل ہو اور نہ ہی خالص کوسائن تفاعل ہو بلکہ کسی اور شکل کی دوری تفاعل ہونے کی صورت میں ہم دیکھیں گے کہ برقرار حالت حل کئی ہارمونی ارتعاش کا مجموعہ ہو گا جس میں $r(t)$ کی

شکل 12.18: اسپرنگ اور کمیت کے نظام کی جبری ارتعاش۔

تعدد اور اس کی مضرب تعدد پائی جائیں گی۔اگر ان تمام تعدد میں سے کوئی تعدد، نظام کی قدرتی تعدد کے قریب ہو تب عین ممکن ہے کہ، بیرونی قوت کی رد عمل میں، نظام کی حرکت میں اسی تعدد کا حصہ غالب ہو گا۔ہارمونی ارتعاش اور گمک کے بارے میں نہ جانتے ہوئے یہ عمل حیرت انگیز ثابت ہو گا۔آئیں ایک مثال سے اس حقیقت کو سمجھیں۔

مثال 12.10: غیر سائن نما جبری قوت سے پیدا ارتعاش

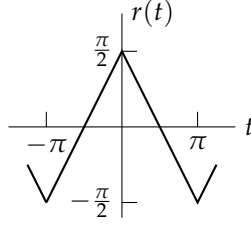
مساوات 12.52 میں $m = 1\,\mathrm{kg}$ ، $k = 25\,\mathrm{kg\,s^{-2}}$ ، $c = 0.02\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ لینے سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں $r(t)$ کی اکائی $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ ہو گی۔

$$\ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = r(t) \tag{12.53}$$

اب فرض کریں کہ جبری قوت $r(t)$ درج ذیل ہے جس کو شکل 12.19 میں دکھایا گیا ہے۔برقرار حالت حل دریافت کریں۔

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & 0 < t < \pi \end{cases} \qquad r(t + 2\pi) = r(t)$$

حل:ہم $r(t)$ کو فوریئر کوسائن تسلسل

$$r(t) = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt = \frac{4}{\pi}\Big(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\Big) \tag{12.54}$$

شکل 12.19: تکونی قوت (مثال 12.10)

سے ظاہر کرتے ہیں۔اب ہم درج ذیل تفرقی مساوات پر غور کرتے ہیں جس کا دایاں ہاتھ فوریئر تسلسل (مساوات 12.54) کا ایک رکن ہے۔

$$\ddot{y} + 0.02\dot{y} + 25y = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt \qquad (n = 1, 23, \cdots) \tag{12.55}$$

ہم حصہ 2.8 سے جانتے ہیں کہ درج بالا تفرقی مساوات کا برقرار حالت حل درج ذیل صورت کا ہو گا۔

$$y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt \tag{12.56}$$

مساوات 12.56 کو مساوات 12.55 میں پر کرتے ہوئے

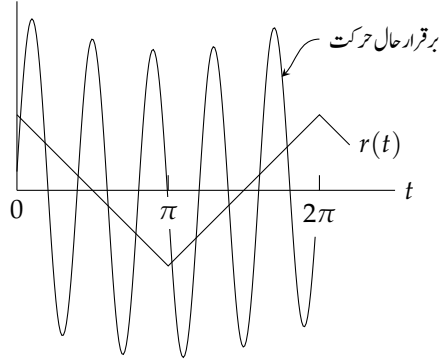
$$A_n = \frac{4(25 - n^2)}{n^2\pi D}, \quad B_n = \frac{0.08}{n\pi D}, \qquad D = (25 - n^2)^2 + (0.02n)^2 \tag{12.57}$$

ملتا ہے۔چونکہ تفرقی مساوات 12.53 خطی ہے لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ اس کا برقرار حالت حل

$$y = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots \tag{12.58}$$

ہو گا جہاں مساوات 12.56 y_n دیتی ہے۔درحقیقت آپ حاصل مساوات 12.58 کو مساوات 12.55 میں پر کرتے ہوئے ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ تفرقی مساوات کا درست حل ہے۔

مساوات 12.57 سے مساوات 12.56 کا حیطہ

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{A}{n^2\pi\sqrt{D}}$$

شکل 12.20: داخلی قوت اور برقرار حالت رد عمل (مثال 12.10)

حاصل ہوتا ہے جس کی چند اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 0.0530\\
C_3 &= 0.0088\\
C_5 &= 0.5100\\
C_7 &= 0.0011\\
C_9 &= 0.0003
\end{aligned}
$$

$n = 5$ پر D کی قیمت نہایت کم ملتی ہے جس سے C_5 کی قیمت اتنی زیادہ حاصل ہوتی ہے کہ مساوات 12.58 میں y_5 غالب جزو ہے۔ یوں برقرار حالت حرکت تقریباً ہارمونی ہو گا جس کی تعدد جبری قوت کی تعدد کی پانچ گنا ہے (شکل 12.20)۔ □

سوالات

سوال 12.128 تا سوال 12.135 میں تفرقی مساوات $\ddot{y} + \omega^2 2 = r(t)$ کی عمومی حل دریافت کریں۔

سوال 12.128: $r(t) = \sin t, \quad \omega = 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.5, 2.0, 10$

جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + A(\omega) \sin t, \quad A(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 1}$

$A(0.5) = -1.33, A(0.7) = -0.2, A(0.9) = -5.3, A(1.1) = 4.8, A(1.5) = 0.8,$
$A(2) = 0.33, A(10) = 0.01$

سوال 12.129: $r(t) = \cos \alpha t + \cos \beta t, \quad (\omega^2 \neq \alpha^2, \beta^2)$

جواب: $C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{(\omega^2 - \alpha^2) \cos \beta t + (\omega^2 - \beta^2) \cos \alpha t}{\omega^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\omega^2 + \alpha^2 \beta^2}$

سوال 12.130: $r(t) = \sin t + \sin 3t, \quad w = 0.9, 2.9$
جواب:

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \tfrac{\sin t}{\omega^2 - 1^2} + \tfrac{\sin 3t}{\omega^2 - 3^2}$$
$$y_{(\omega=0.9)} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - 5.26 \sin t - 0.122 \sin 3t$$
$$y_{(\omega=2.9)} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + 0.135 \sin t - 0.164 \sin 3t$$

سوال 12.131: $r(t) = \sum_{s=1}^{N} a_n \cos nt, \quad |\omega| \neq 1, 2, \cdots, N$
جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\omega^2 - n^2} \cos nt$

سوال 12.132: $r(t) = \sum_{s=1}^{N} b_n \sin nt, \quad |\omega| \neq 1, 2, \cdots, N$
جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{\omega^2 - n^2} \sin nt$

سوال 12.133:

$$r(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases} \qquad r(t + 2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 1, 3, 5, \cdots$$

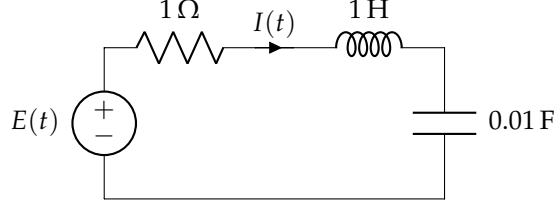
جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{4 \sin t}{1\pi(\omega^2 - 1^2)} + \frac{4 \sin 3t}{3\pi(\omega^2 - 3^2)} + \frac{4 \sin 5t}{5\pi(\omega^2 - 5^2)} \cdots$

سوال 12.134: $r(t) = t, \quad (-\pi < t < \pi), r(t + 2\pi) = r(t), |\omega| \neq 1, 2, 3, \cdots$
جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n(\omega^2 - n^2)} \sin nt$

سوال 12.135: $r(t) = t^2, \quad (-\pi < t < \pi), r(t + 2\pi) = r(t), |\omega| \neq 0, 1, 2, \cdots$
جواب: $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + C_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2(\omega^2 - n^2)} \cos nx$

سوال 12.136 تا سوال 12.140 میں $\ddot{y} + c\dot{y} + y = r(t)$ جہاں $c > 0$ ہے کی برقرار حالت حل دریافت کریں۔

سوال 12.136: $r(t) = \cos t$
جواب: $y = \frac{\sin t}{c}$

$1\,\Omega$ $I(t)$ $1\,\text{H}$ $E(t)$ $0.01\,\text{F}$

سوال 12.137: $r(t) = \sin 3t$

جواب: $y = -\frac{8}{9c^2+8^2}\sin 3t - \frac{3}{9c^2+8^2}\cos 3t$

سوال 12.138: $r(t) = \cos nt$

جواب: $y = \frac{nc\sin nt - (n^2-1)\cos nt}{(n^2-1)^2+n^2c^2}$

سوال 12.139: $r(t) = \sin nt$

جواب: $y = \frac{-nc\cos nt - (n^2-1)\sin nt}{(n^2-1)^2+n^2c^2}$

سوال 12.140:

$$r(t) = \begin{cases} \pi + t & -\pi < t < 0 \\ \pi - t & 0 < t < \pi \end{cases} \qquad r(t+2\pi) = r(t)$$

جواب: $y = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi[(n^2-1)^2+n^2c^2]}[nc\sin nt - (n^2-1)\cos nt]$

سوال 12.141: سلسلہ وار RLC دور کو $E(t)$ داخلی دباو مہیا کی جاتی ہے۔اس دور میں برقی رو $I(t)$ دریافت کریں۔

$$E(t) = \begin{cases} -10 & -\pi < t < 0 \\ 10 & 0 < t < \pi \end{cases} \qquad E(t+2\pi) = E(t)$$

جواب: $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{\pi[n^4-199n^2+10^4]}[n\sin nt - (n^2-10^2)\cos nt]$

12.8 تقریب بذریعہ تکونی کثیر رکنی۔مکعب خلل

فرض کریں کہ 2π دوری عرصہ کی تفاعل $f(x)$ کو فوریئر تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہے۔اس تسلسل کی پہلی N ارکان کا جزوی مجموعہ، $f(x)$ کی تقریب ہو گی۔

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{12.59}$$

تکونی کثیر رکنی کی عددی سر یوں منتخب کی جا سکتے ہیں کہ یہ تفاعل پر ٹھیک بیٹھے۔یہاں سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا $f(x)$ کو تکونی کثیر رکنی

$$F(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \tag{12.60}$$

سے ظاہر کرنے کی "بہترین" تقریب مساوات 12.59 دیتی ہے جہاں دونوں تقریب میں N یکساں ہے۔بہترین تقریب میں کم سے کم "خلل" پایا جاتا ہے۔

ظاہر ہے کہ ہمیں پہلے فیصلہ کرنا ہو گا کہ، تقریب میں خلل، سے ہمارا کیا مراد ہے۔ ہم خلل کی ایسی تعریف منتخب کرتے ہیں جو پورے وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر f اور F کی ایک سا ہونے کی ناپ ہو۔شکل 12.21 میں f کو F سے ظاہر کیا گیا ہے جو بہتر تقریب ہے لیکن نقطہ x_0 پر $|f-F|$ کی قیمت بہت زیادہ ہے۔یوں ظاہر ہے کہ $|f-F|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کو خلل کہنا موزوں نہ ہو گا۔ہم خلل کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں

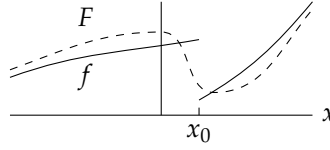
$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (f-F)^2 \, \mathrm{d}x \tag{12.61}$$

جس وقفہ $-\pi \le x \le \pi$ پر تفاعل F کی، تفاعل f کے لحاظ سے، **کل مکعب خلل**[31] کہلاتا ہے۔چونکہ مکعب کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا $E \ge 0$ ہو گا۔

ہم مقررہ N کے لئے مساوات 12.60 کے ایسے عددی سر دریافت کرنا چاہتے ہیں کہ حاصل E کمترین ہو۔ہم مساوات 12.61 کو درج ذیل صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 \, \mathrm{d}x - 2\int_{-\pi}^{\pi} fF \, \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} F^2 \, \mathrm{d}x \tag{12.62}$$

---

[31] total square error

شکل 12.21: تقریب کی خلل

درج بالا کی آخری تکمل میں مساوات 12.60 پر کرتے ہوئے حاصل تکملات کو حصہ 12.2 کی طرح حل کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2 \,\mathrm{d}x = \pi(2\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_N^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_N^2)$$

مساوات 12.60 کو مساوات 12.62 کی دائیں ہاتھ دوسری تکمل میں پر کرنے سے یولر کلیات (مساوات 12.9) کے تکمل حاصل ہوتے ہیں جن سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{-\pi}^{\pi} fF \,\mathrm{d}x = \pi(2\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_N a_N + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_N b_N)$$

یوں مساوات 12.62 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 \,\mathrm{d}x - 2\pi\Big[2\alpha_0 a_0 + \sum_{n=1}^{N}(\alpha_n a_n + \beta_n b_n)\Big] + \pi\Big[2\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)\Big] \tag{12.63}$$

مساوات 12.60 میں $\alpha_n = a_n$ اور $\beta_n = b_n$ لینے سے مساوات 12.63 سے حاصل کل مکعب خلل درج ذیل ملتا ہے۔

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 \,\mathrm{d}x - \pi\Big[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\Big] \tag{12.64}$$

مساوات 12.64 کو مساوات 12.63 سے منفی کرتے ہوئے

$$E - E^* = \pi\Big\{2(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{n=1}^{N}[(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2]\Big\}$$

ملتا ہے۔چونکہ بائیں ہاتھ تمام قیمتیں مکعب ہیں جو کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتے ہیں لہٰذا

$$E - E^* \geq 0 \quad \implies \quad E \geq E^*$$

ہو گا اور $E = E^*$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $\alpha_0 = a_0$ ، $\cdots$ ، $\beta_N = b_N$ ہوں۔اس سے درج ذیل مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 12.4: (کمترین مکعب خلل)
وقفہ $-\pi \leq x \leq \pi$ پر تفاعل f کے لحاظ سے F [مساوات 12.60، مقررہ N] کی کل مکعب خلل صرف اور صرف اس صورت کم سے کم ہو گی جب مساوات 12.60 میں F کے عددی سر، f کی مطابقتی فوریئر عددی سر ہوں۔ کل مکعب خلل کی کم سے کم قیمت مساوات 12.64 دے گی۔

ہم مساوات 12.64 سے دیکھتے ہیں کہ N بڑھانے سے E^* بڑھتا نہیں بلکہ گھٹ سکتا ہے۔یوں زیادہ N لینے سے f کی فوریئر تسلسل سے حاصل جزوی مجموعہ کا کل مکعب خلل کم ہو گا اور بہتر تقریب حاصل ہو گی۔

چونکہ $E^* \geq 0$ ہے اور مساوات 12.64 ہر N کے لئے درست ہے لہٰذا مساوات 12.64 سے

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x \tag{12.65}$$

لکھا جا سکتا ہے جو **بیسل غیر مساوات**[32] کہلاتی[33] ہے۔مساوات 12.65 کسی بھی تفاعل f ، جس کے لئے درج بالا تکمل معین ہو، کی فوریئر عددی سر کے لئے درست ہو گا۔

سوالات

سوال 12.142: تفاعل $f(x+\pi) = f(x)$ ، $(-\pi < x < \pi)$ ، $f(x) = x$ کے لئے ایسا $F(x)$ (مساوات 12.60) دریافت کریں کہ کل مکعب خلل (مساوات 12.61) کمترین ہو۔
جواب: $F(x) = \frac{2}{1}\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - + \cdots + \frac{2(-1)^{N+1}}{N}\sin Nx$

[32] Bessel inequality
[33] یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ایسا تفاعل f کے لئے مساوات 12.65 میں برابری کی علامت لکھنا بھی درست ہو گا۔ مساوات 12.65 میں برابری کی علامت استعمال کرنے سے **پارسیوال مماثل** حاصل ہو گی۔

سوال 12.143: $N = 1, 2, 3, 4$ کے لئے سوال 12.142 میں کمتر مکعب خلل دریافت کریں۔ایسا N دریافت کریں کہ $E^* \leq 0.42$ ہو۔
جواب: $E(1) = 8.104,\ E(2) = 4.96,\ E(3) = 3.57,\ E(4) = 2.78, \quad N = 30$

سوال 12.144: ثابت کریں کہ N کو بتدریج بڑھانے سے کل کمتر مکعب خلل (مساوات 12.64) بتدریج گھٹتی ہے۔

سوال 12.145: تفاعل $f(x + \pi) = f(x)$, $(-\pi < x < \pi)$, $f(x) = x^2$, کے لئے ایسا $F(x)$ (مساوات 12.60) دریافت کریں کہ کل مکعب خلل کمترین ہو۔کمتر مکعب خلل کو $N = 1, 2, 3, 4$ کے لئے حاصل کریں۔
جواب:

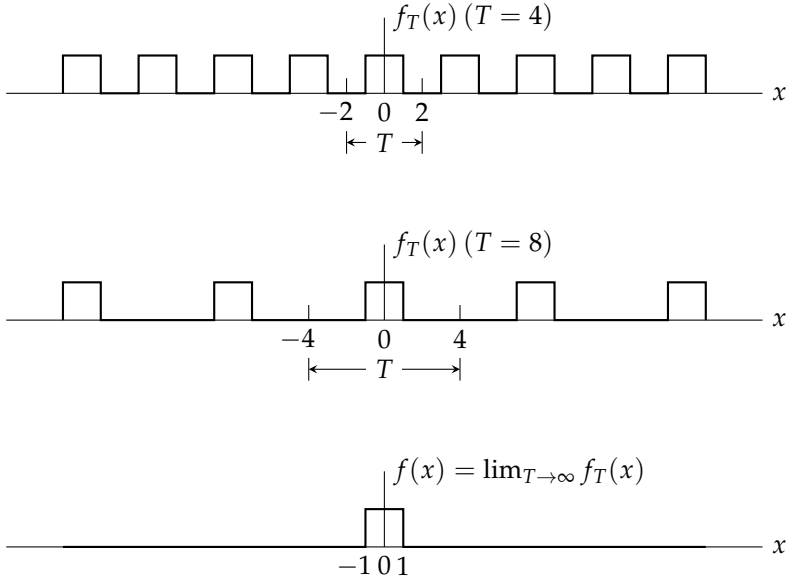
$$F = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{1}{1^2}\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - + \cdots + \frac{(-1)^{N+1}}{N^2}\cos Nx\right]$$
$$E^* = \frac{2\pi^5}{5} - \pi\left(\frac{2\pi^4}{9} + 16 + 1 + \frac{16}{81} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$$

12.9 فوریئر تکمل

دوری تفاعل پر مبنی مسئلوں کو نمٹنے کے لئے فوریئر تسلسل بہترین اوزار ہے۔ہم چاہیں گے کہ اس کو عمومی شکل دیں تا کہ یہ غیر دوری تفاعل کے لئے بھی کارآمد ہو۔

ہم ابتدا دو سادہ دوری تفاعل f_T سے کرتے ہیں۔ہم $T \to \infty$ کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ کیا ہوتا ہے۔اس کے بعد ہم دوری عرصہ T کی کسی بھی دوری تفاعل f_T پر غور کرتے ہوئے $T \to \infty$ کریں گے۔ان کو جواز بناتے ہوئے ہم مسئلہ فوریئر تکمل پیش کریں گے۔

مثال 12.11: درج ذیل تفاعل پر غور کریں جس کا دوری عرصہ $T > 2$ ہے (شکل 12.22)۔

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < x < -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \quad 1 < x < \frac{T}{2} \end{cases}$$

شکل 12.22: برائے مثال 12.11

دوری عرصہ $T \to \infty$ کرنے سے درج ذیل تفاعل $f(x)$

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} f_T(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{بصورت دیگر} \end{cases}$$

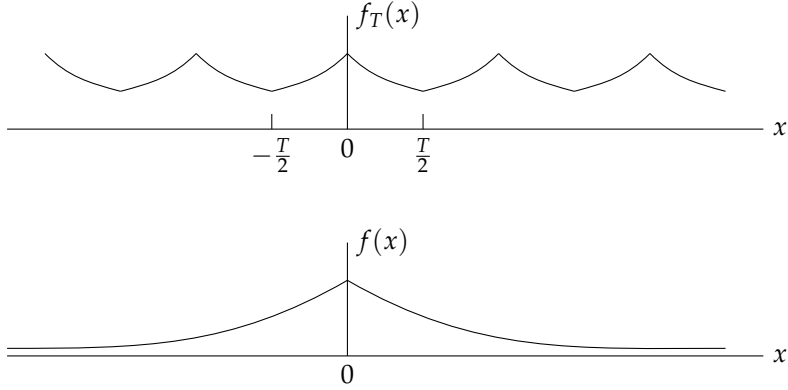
حاصل ہوتا ہے جو غیر دوری ہے۔ □

مثال 12.12: درج ذیل تفاعل کا دوری عرصہ T ہے (شکل 12.23)۔

$$f_T(x) = e^{-|x|} \quad \left(-\frac{T}{2} < x < \frac{T}{2}\right), \quad f_T(x+T) = f_T(x)$$

$T \to \infty$ کرنے سے تفاعل $f(x)$ حاصل ہوتا ہے جو غیر دوری ہے۔

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} f_T(x) = e^{-|x|}$$

□

شکل 12.23: برائے مثال 12.12

ہم اب فوریئر تسلسل سے قابل ظاہر کسی بھی تفاعل $f_T(x)$ جس کا دوری عرصہ T ہو لیتے ہیں۔ مختصر علامت

$$w_n = \frac{2n\pi}{T}$$

استعمال کرتے ہوئے $f_T(x)$ کی فوریئر تسلسل کو

$$f_T(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x)$$

لکھتے ہیں۔ ہم دیکھنا چاہتے ہیں کہ $T \to \infty$ کرنے سے کیا ہو گا۔

ہم یولر مساوات 12.9 میں دیے گئے a_n اور b_n استعمال کرتے ہیں اور تکمل کی متغیر کو v لکھتے ہیں۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$f_T(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v)\,\mathrm{d}v + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\cos w_n x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v)\cos w_n v\,\mathrm{d}v + \sin w_n x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v)\sin w_n v\,\mathrm{d}v\Big]$$

اب

$$w_{n+1} - w_n = \frac{2(n+1)\pi}{T} - \frac{2n\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}$$

ہے جس کو ہم

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{2\pi}{T}$$

لکھتے ہیں۔یوں $\frac{2}{T} = \frac{\Delta w}{\pi}$ ہو گا لہٰذا یہ فوریئر تسلسل درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$f_T(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v)\,\mathrm{d}v + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\cos(w_n x)\,\Delta x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v)\cos w_n v\ \mathrm{d}v + \sin(w_n x)\,\Delta w \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(v)\sin w_n v\ \mathrm{d}v\Big] \tag{12.66}$$

یہ صورت کسی بھی مقررہ T کے لئے درست ہے جہاں T اختیاری وسیع لیکن محدود ہے۔

ہم اب $T \to \infty$ کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ حاصل غیر دوری تفاعل

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} f_T(x)$$

x محور پر **مطلق قابل تکمل**[34] ہے یعنی درج ذیل تکمل معین ہے۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|\ \mathrm{d}x \tag{12.67}$$

اس طرح $\frac{1}{T} \to 0$ ہو گا لہٰذا مساوات 12.66 کی دائیں ہاتھ پہلا جزو صفر کے قریب تر ہو گا۔اس کے علاوہ $\Delta w = \frac{2\pi}{T} \to 0$ ہو گا لہٰذا بظاہر یوں معلوم ہوتا ہے کہ لامتناہی تسلسل مساوات 12.66 وقفہ 0 تا ∞ پر تکمل کی صورت اختیار کرے گی جو $f(x)$ کو ظاہر کرتی ہے، یعنی:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\ \mathrm{d}v + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv\ \mathrm{d}v\Big]\mathrm{d}w \tag{12.68}$$

درج ذیل مختصر علامت متعارف کرتے ہوئے

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\ \mathrm{d}v, \quad B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv\ \mathrm{d}v \tag{12.69}$$

---

[34] absolutely integrable

مساوات 12.68 کو

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] \, \mathrm{d}w \tag{12.70}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو $f(x)$ کا **فوریئر تکمل**[35] کہتے ہیں۔

یہاں یہ بتلانا ضروری ہے کہ مساوات 12.66 سے مساوات 12.68 لکھنے کے لئے جو جواز پیش کیا گیا وہ نا کافی ہے۔در حقیقت فوریئر تسلسل میں $\Delta w \to 0$ لینا تکمل کی تعریف نہیں ہے لہٰذا ایسا کرنے سے مساوات 12.66 ہر گز حاصل نہیں ہو گا۔البتہ اس پورے عمل سے گزرنے کے بعد فوریئر تکمل بظاہر معقول معلوم ہوتا ہے۔فوریئر تکمل کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔ مساوات 12.70 درست ہونے کے لئے کافی شرط درج ذیل مسئلہ پیش کرتی ہے۔

مسئلہ 12.5: (فوریئر تکمل)
اگر $f(x)$ تمام محدود قطعات پر ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہو اور اس کا ہر نقطے پر دائیں ہاتھ تفرق اور بائیں ہاتھ تفرق (حصہ 12.2) پائے جاتے ہوں اور مساوات 12.67 میں دیا گیا تکمل معین ہو تب $f(x)$ کو فوریئر تکمل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔جس نقطے پر $f(x)$ غیر استمراری ہو وہاں فوریئر تکمل کی قیمت اس نقطے پر دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد (حصہ 6.1) کی اوسط کے برابر ہو گی۔

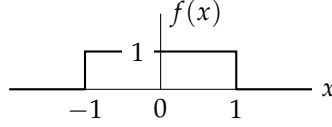
مثال 12.13: واحد دھڑکن، سائن تکمل
درج ذیل تفاعل کی فوریئر تکمل حاصل کریں (شکل 12.24)۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| < 1 \end{cases}$$

حل: مساوات 12.69 سے

$$A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, \mathrm{d}v = \int_{-1}^{1} \cos wv \, \mathrm{d}v = \left. \frac{\sin wv}{w} \right|_{-1}^{1} = \frac{2 \sin w}{w}$$
$$B(w) = \int_{-1}^{1} \sin wv \, \mathrm{d}v = 0$$

---

[35] Fourier integral

شکل 12.24: واحد دھڑکن (مثال 12.13)

ملتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.70 سے درکار فوریئر تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx\,\sin w}{w}\,\mathrm{d}w \tag{12.71}$$

نقطہ $x=1$ پر $f(x)$ کی دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد کا اوسط $\frac{1}{2}=\frac{(1+0)}{2}$ ہے۔یوں مساوات 12.71 اور مسئلہ 12.5 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx\,\sin w}{w}\,\mathrm{d}w=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 0\le |x|<1\\ \frac{\pi}{4} & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases} \tag{12.72}$$

اس تکمل کو ڈرشلے غیر استمراری جزو[36] کہتے[37] ہیں۔آئیں $x=0$ کی صورت پر غور کرتے ہیں جو خاص طور پر زیادہ اہم ہے۔مساوات 12.72 میں $x=0$ پر کرنے سے

$$\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\,\mathrm{d}w=\frac{\pi}{2} \tag{12.73}$$

ملتا ہے جو درج ذیل تکمل جس کو سائن تکمل[38] کہتے ہیں

$$\mathrm{Si}(z)=\int_0^z \frac{\sin w}{w}\,\mathrm{d}w \tag{12.74}$$

کی $z\to\infty$ پر حد ہے جہاں z حقیقی ہے۔تفاعل $\mathrm{Si}(z)$ کو شکل 12.25 میں دکھایا گیا ہے۔

فوریئر تسلسل کی صورت میں جزوی مجموعوں کی ترسیم اس دوری تفاعل کی تقریب ہوتی ہے جس کو یہ تسلسل ظاہر کرتی ہے۔ فوریئر تکمل (مساوات 12.71) کی صورت میں تکمل کی بالائی حد ∞ کی جگہ عدد a لیتے ہوئے

---

[36] Dirichlet's discontinuous factor
[37] جرمن ریاضی دان یوہان پیٹر گستاف لیژون ڈرشلے [1805-1859]
[38] sine integral

تفاعل کی تقریب حاصل کی جاتی ہیں۔یوں درج ذیل تکمل

$$\int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} \, \mathrm{d}w \tag{12.75}$$

مساوات 12.71 اور تفاعل $f(x)$ کی تقریب ہے۔مساوات 12.75 کی تکمل میں غیر استمراری نقطہ کے قریب ارتعاش پایا جاتا ہے جس کو شکل 12.26 میں دکھایا گیا ہے۔

آپ نے شکل 12.3 میں دکھا کہ فوریئر تسلسل کی زیادہ ارکان لینے سے اصل تفاعل $f(x)$ پر زیادہ بہتر بیٹھتی منحنی حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح جیسا شکل 12.26 میں دکھایا گیا ہے، مساوات 12.75 کی تکمل کی بالائی حد a کی قیمت زیادہ لینے سے اصل تفاعل $f(x)$ کی زیادہ یکساں شکل حاصل ہوتی ہے۔یہاں تکمل (مساوات 12.75) کو اعدادی طریقہ سے حاصل کیا گیا ہے۔

اگرچہ ہم توقع کرتے ہیں کہ a کی قیمت لامتناہی کرنے سے یہ ارتعاش ختم ہو گی، حقیقت میں ایسا نہیں ہوتا ہے بلکہ a کی قیمت بڑھانے سے ارتعاش نقطہ $x = \mp 1$ کے مزید قریب ہوتی ہیں۔ اس غیر متوقع کردار جو فوریئر تسلسل میں بھی پایا جاتا ہے کو مظہر گبس[39] کہتے ہیں۔ مظہر گبس[40] کو سمجھنے کی خاطر ضمیمہ ب میں مساوات ب.11 استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.75 کو

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} \, \mathrm{d}w = \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\sin(w+wx)}{w} \, \mathrm{d}w + \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\sin(w-wx)}{w} \, \mathrm{d}w$$

لکھتے ہیں۔ دائیں ہاتھ پہلی تکمل میں $w + wx = t$ لیتے ہیں۔یوں $\frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{\mathrm{d}t}{t}$ اور $0 \le w \le a$ کا مطابقتی وقفہ $0 \le t \le (x+1)a$ ہو گا۔آخری تکمل میں $w - wx = t$ لیتے ہیں۔یوں $\frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{\mathrm{d}t}{t}$ اور $0 \le w \le a$ کا مطابقتی وقفہ $0 \le t \le (x-1)a$ ہو گا۔چونکہ $\sin(-t) = -\sin t$ ہوتا ہے لہٰذا

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} \, \mathrm{d}w = \frac{1}{\pi}\int_0^{(x+1)a} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\int_0^{(x-1)a} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$$

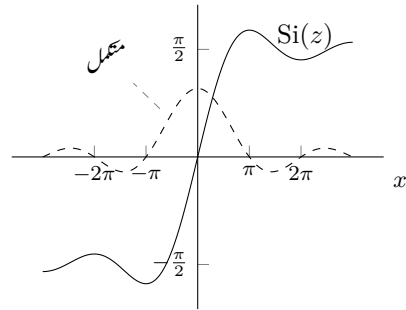
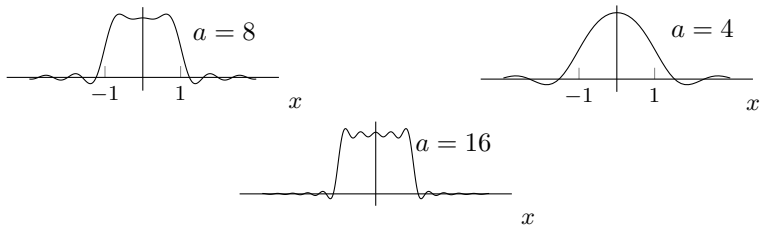
لکھا جائے گا۔یوں مساوات 12.74 کی مدد سے

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Si} a[x+1] - \frac{1}{\pi}\operatorname{Si}(a[x-1])$$

حاصل ہو گا لہٰذا شکل 12.26 میں ارتعاش شکل 12.25 کی وجہ سے پائی جاتی ہیں۔حد a بڑھانا، محور کی ناپ تبدیل کرنے کی مترادف ہے جس سے ارتعاش محور غیر استمراری نقطہ کے زیادہ قریب منتقل ہوتی ہیں۔ □

---

[39] Gibbs phenomenon

[40] جرمن ریاضی دان جوشیا ولرڈ گبس [1839-1903]

شکل 12.25: سائن تکمل

شکل 12.26: مساوات 12.75 کی تکمل میں $a = 4$، 8 اور 16 لیا گیا ہے

جفت اور طاق تفاعل کی فوریئر تکمل

یہ جاننا سود مند ثابت ہوتا ہے کہ ایسا جفت یا طاق تفاعل جس کو فوریئر تکمل سے ظاہر کرنا ممکن ہو کا فوریئر تکمل عمومی تفاعل کی فوریئر تکمل سے نسبتاً آسان ہو گا۔ یہ حقیقت گزشتہ کلیات سے اخذ ہوتا ہے۔

جفت تفاعل $f(x)$ کی صورت میں مساوات 12.69 کے تحت $B(w) = 0$ اور

$$A(w) = 2\int_0^\infty f(v)\cos wv \, \mathrm{d}v \tag{12.76}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 12.70 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرے گی۔

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(w)\cos wx \, \mathrm{d}w \qquad (\text{جفت } f) \tag{12.77}$$

اسی طرح طاق تفاعل $f(x)$ کی صورت میں مساوات 12.69 کے تحت $A(w) = 0$ اور

$$B(w) = 2\int_0^\infty f(v)\sin wv \, \mathrm{d}v \tag{12.78}$$

ہو گا لہٰذا مساوات 12.70 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرے گی۔

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(w)\sin wx \, \mathrm{d}w \qquad (\text{طاق } f) \tag{12.79}$$

یہ تسہیل جفت اور طاق تفاعل کی فوریئر تسلسل کی تسہیل کی طرح ہے۔

تخمینہ تکمل

فوریئر تکمل کی مدد سے کئی تکمل کی قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔ ہم اس ترکیب کو درج ذیل مثال سے سمجھاتے ہیں۔

مثال 12.14: لاپلاس تکمل

درج ذیل تفاعل کی فوریئر تکمل وقفہ $x > 0$ پر حاصل کریں۔ (شکل 12.23 دیکھیں جہاں $k = 1$ ہے۔)

$$f(x) = e^{-kx}, \quad f(-x) = f(x)$$

حل: چونکہ f جفت ہے لہٰذا مساوات 12.76 سے

$$A(w) = 2\int_0^\infty e^{-kv}\cos wv \, \mathrm{d}v$$

حاصل ہو گا۔ تکمل بالحصص لیتے ہیں۔

$$\int e^{-kv}\cos wv \,\mathrm{d}v = -\frac{k}{k^2+w^2}e^{-kv}\Big(-\frac{w}{k}\sin wv + \cos wv\Big)$$

جب $v=0$ ہو تب دایاں ہاتھ $-\frac{k}{k^2+w^2}$ کے برابر ہو گا جبکہ $v\to\infty$ پر e^{-kv} جزو کی بنا یہ صفر کے قریب تر ہو گا۔ یوں

$$A(w) = \frac{2k}{k^2+w^2}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو مساوات 12.77 میں پر کرتے ہوئے دیے تفاعل کی فوریئر تکمل لکھتے ہیں۔

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}\,\mathrm{d}w \qquad (x>0,\, k>0)$$

اس سے

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}\,\mathrm{d}w = \frac{\pi}{2k}e^{-kx} \qquad (x>0,\, k>0) \tag{12.80}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 12.79 استعمال کرتے ہوئے وقفہ $x>0$ پر طاق تفاعل

$$f(x) = e^{-kx}, \quad f(-x) = -f(x), \qquad (k>0)$$

کی فوریئر تکمل سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_0^\infty \frac{w\sin wx}{k^2+w^2}\,\mathrm{d}w = \frac{\pi}{2}e^{-kx} \qquad (x>0, k>0) \tag{12.81}$$

مساوات 12.80 اور مساوات 12.81 لاپلاس تکملات[41] کہلاتے ہیں۔ □

سوالات

سوال 12.146 تا سوال 12.152 میں دیے تعلق کو فوریئر تکمل کی مدد سے ثابت کریں۔

[41] Laplace integrals

سوال 12.146:

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx + w \sin wx}{1+w^2} \, \mathrm{d}w = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \pi e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

سوال 12.147:

$$\int_0^\infty \frac{w^3 \sin wx}{w^4+4} \, \mathrm{d}w = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x \qquad (x > 0)$$

سوال 12.148:

$$\int_0^\infty \frac{\sin w\pi \sin wx}{1-w^2} \, \mathrm{d}w = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & 0 \le x \le \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

سوال 12.149:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos w\pi}{w} \sin wx \, \mathrm{d}w = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

سوال 12.150:

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{1+w^2} \, \mathrm{d}w = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad (x > 0)$$

سوال 12.151:

$$\int_0^\infty \frac{\sin w \cos wx}{w} \, \mathrm{d}w = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \le x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

سوال 12.152:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \frac{w\pi}{2} \cos wx}{1-w^2} \, \mathrm{d}w = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

سوال 12.153 تا سوال 12.158 میں $f(x)$ کو مساوات 12.77 کی روپ میں لکھیں۔

سوال 12.153:

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\cos wx \, \mathrm{d}w$

سوال 12.154:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [\frac{\sin w}{w}-\frac{2\sin w}{w^3}+\frac{2\cos w}{w^2}]\cos wx \, \mathrm{d}w$

سوال 12.155:

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 2 & 1<x<2\\ 0 & x>3\end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [\frac{\sin w}{w}-\frac{2\sin 2w}{w}+\frac{2\sin 3w}{w}]\cos wx \, \mathrm{d}w$

سوال 12.156:

$$f(x)=\begin{cases}1-x & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos w}{w^2}\cos wx \, \mathrm{d}w$

سوال 12.157:

$$f(x)=\begin{cases}1-x & 0<x<2\\ 0 & x>1\end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos 2w-w\sin 2w}{w^2}\cos wx \, \mathrm{d}w$

سوال 12.158:

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x) & 0<x<\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$$

جواب: $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1+\cos w\pi}{1-w^2}\cos wx\,\mathrm{d}w$

سوال 12.159 تا سوال 12.160 میں دیے گئے تعلق کو ثابت کریں جہاں $f(x)$ کی روپ مساوات 12.77 ہے۔

سوال 12.159: $f(ax)=\frac{1}{\pi a}\int_0^\infty A(\frac{w}{a})\cos wx\,\mathrm{d}w,\quad (a>0)$
جواب: مساوات 12.76 سے $A(\frac{w}{a})=2\int_0^\infty f(v)\cos\frac{wv}{a}\,\mathrm{d}v$ لکھا جاتا ہے جبکہ $f(ax)$ کے لئے $A^*=2\int_0^\infty f(at)\cos wt\,\mathrm{d}t$ ہو گا جس میں $\tau=at$ لیتے ہوئے $A^*=2\int_0^\infty f(\tau)\cos\frac{w\tau}{a}\frac{1}{a}\,\mathrm{d}\tau$ ملتا ہے جن سے $A^*=\frac{1}{a}A(\frac{w}{a})$ حاصل ہوتا ہے۔یوں ثابت ہوا کہ $f(ax)=\frac{1}{\pi a}\int_0^\infty A(\frac{w}{a})\cos wx\,\mathrm{d}w$

سوال 12.160: $x^2f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty A^*(w)\cos wx\,\mathrm{d}w,\quad A^*=-\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}w^2}$
جواب: مساوات 12.76 کا دو رتبی تفرق لے کر $\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}w^2}=-2\int_0^\infty f^*(v)\cos wv\,\mathrm{d}v,\quad f^*(v)=$ $v^2f(v)$ سے ثبوت حاصل ہو گا۔

سوال 12.161: درج بالا کلیہ (سوال 12.160) استعمال کرتے ہوئے سوال 12.153 کے نتیجہ سے سوال 12.154 حل کریں۔

سوال 12.162: ثابت کریں $xf(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty B^*(w)\sin wx\,\mathrm{d}w$ جہاں $B^*=-\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}w}$ ہے اور A کو مساوات 12.76 ظاہر کرتی ہے۔

سوال 12.163: تفاعل $(0<x<a)\quad f(x)=1$ کے لئے سوال 12.162 کے کلیہ کی تصدیق کریں۔

سوال 12.164: تصدیق کریں کہ $(0<x<\infty)\quad f(x)=1$ کو فوریئر تکمل سے ظاہر نہیں کیا جا سکتا ہے۔

سوال 12.165: (فوریئر تکمل کی مخلوط صورت، فوریئر بدل)
ضمیمہ ب کی مساوات ب.6 استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.70 کو

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Big[\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wx-wv)\,\mathrm{d}v\Big]\mathrm{d}w \tag{12.82}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ثابت کریں کہ مساوات 12.82 میں $-\infty$ تا ∞ تکمل متغیرہ w کا جفت تفاعل ہے لہٰذا مساوات 12.82 کو

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wx - wv) \, \mathrm{d}v \right] \mathrm{d}w \tag{12.83}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح $\sin(wx - wv)$ متغیرہ w کا طاق تفاعل ہے لہٰذا درج ذیل ثابت کرتے ہوئے

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(wx - wv) \, \mathrm{d}v \right] \mathrm{d}w = 0 \tag{12.84}$$

مساوات 12.83 اور مساوات 12.84 کا مجموعہ لے کر فوریئر تکمل کی مخلوط صورت

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iw(x-v)} \, \mathrm{d}v \right] \mathrm{d}w \tag{12.85}$$

حاصل کریں۔مساوات 12.85 سے

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(w) e^{iwx} \, \mathrm{d}w \tag{12.86}$$

حاصل کریں جہاں

$$C(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-iwv} \, \mathrm{d}v \tag{12.87}$$

ہے۔مساوات 12.86 تفاعل $C(w)$ کا الٹ فوریئر بدل[42] دیتی ہے جبکہ مساوات 12.87 تفاعل $f(x)$ کا فوریئر بدل[43] دیتی ہے۔

---

[42] inverse Fourier transform
[43] Fourier transform

باب 13

جزوی تفرقی مساوات

مختلف طبعی اور جیومیٹریائی مسائل جہاں دو یا دو سے زیادہ متغیرات پر مبنی تفاعل پایا جاتے ہوں، جزوی تفرقی مساوات کو جنم دیتے ہیں۔یہ متغیرات وقت اور خلا کے محدد ہو سکتے ہیں۔اس باب میں انجینئری نقطہ نظر سے اہم مسائل پر غور کیا جائے گا۔ان مساوات کو طبعی نظام کی نمونہ کے طور پر حاصل کرنے کے بعد ابتدائی قیمت اور سرحدی قیمت مسائل حل کرنے کی تراکیب پر غور کیا جائے گا، یعنی ان مساوات کو دی گئی طبعی شرائط کے مطابق حل کیا جائے گا۔

ہم دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کو لاپلاس بدل کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔

13.1 بنیادی تصورات

دو یا دو سے زیادہ غیر تابع متغیرات کی نا معلوم تفاعل اور اس کی ایک یا ایک سے زیادہ تفرقات پر مبنی مساوات کو **جزوی تفرقی مساوات**[1] کہتے ہیں۔ بلند تر تفرق کا رتبہ مساوت کا رتبہ[2] کہلاتا ہے۔

سادہ تفرقی مساوات کی طرح اگر جزوی تفرقی مساوات میں تابع متغیر (نا معلوم تفاعل) اور اس کے تفرق کی طاقت اکائی ہو تب یہ تفرقی مساوات **خطی**[3] کہلائے گی۔اگر مساوات کا ہر رکن، تابع متغیرہ یا تابع متغیرہ کی تفرقات میں سے کوئی ایک تفرق ہو تب اس کو **ہم جنسی**[4] کہیں گے ورنہ یہ **غیر ہم جنسی**[5] کہلائے گی۔

---

[1] partial differential equation
[2] order
[3] linear
[4] homogeneous
[5] non homogeneous

مثال 13.1: اہم خطی دو رتبی جزوی تفرقی مساوات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.1}$$
یک بعدی مساوات موج

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.2}$$
یک بعدی مساوات حرارت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{13.3}$$
دو بعدی لاپلاس مساوات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{13.4}$$
دو بعدی پوئسن مساوات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{13.5}$$
تین بعدی لاپلاس مساوات

یہاں c مستقل ہے، t وقت کو ظاہر کرتی ہے جبکہ x ، y ، z کارتیسی محدد ہیں۔ مساوات 13.4 میں اگر $f(x, y) \neq 0$ ہو تب یہ غیر ہم جنسی ہو گی۔ باقی تمام مساوات ہم جنسی ہیں۔ □

فضا میں غیر تابع متغیرہ کی کسی خطہ R میں جزوی تفرقی مساوات کے **حل** سے مراد ایسا تفاعل ہے جو خود اور جس کے وہ تمام تفرقات جو اس مساوات میں پائے جاتے ہوں کسی ایسے خطے میں موجود ہوں جس کا R حصہ ہو اور یہ تمام مل کر پورے خطہ R میں اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔(عموماً R کی سرحد پر اس تفاعل کا استمراری ہونا اور درکار تفرقات کا خطہ کے اندرون معین ہونے کے ساتھ ساتھ خطہ کے اندرون مساوات کو مطمئن کرنا درکار ہو گا۔)

عموماً جزوی تفرقی مساوات کے تمام حل کی تعداد بہت زیادہ ہو گی۔ مثلاً جیسا آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ تفاعل

$$u = x^2 - y^2, \quad u = e^x \cos y, \quad u = \ln(x^2 + y^2) \tag{13.6}$$

جو ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں مساوات 13.3 کے حل ہیں۔ ہم بعد میں دیکھیں گے کہ جزوی تفرقی مساوات کا یکتا حل حاصل کرنے کی خاطر مزید معلومات درکار ہو گی جو طبعی حالت سے حاصل ہو گی۔ مثال کے طور پر کبھی کبھار سرحد کے کسی حصے پر درکار حل کی قیمت معلوم ہو گی (**سرحدی شرائط**[6]) جب کہ بعض اوقات ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر حل کی قیمت معلوم ہو گی (**ابتدائی شرائط**[7])۔

---

[6] boundary conditions
[7] initial conditions

ہم جانتے ہیں کہ اگر سادہ تفرقی مساوات خطی اور ہم جنسی ہو تب اس کی معلوم حل سے مزید حل بذریعہ خطی میل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ جزوی تفرقی مساوات کے لئے بھی ایسا کرنا ممکن ہے جیسا درج ذیل مسئلہ کہتا ہے۔

مسئلہ 13.1: بنیادی مسئلہ
اگر کسی خطہ R میں خطی ہم جنسی جزوی تفرقی مساوات کے دو حل u_1 اور u_2 ہوں تب

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

جہاں c_1 اور c_2 کوئی مستقل ہیں، بھی اس خطے میں اس مساوات کا حل ہو گا۔

اس مسئلے کا ثبوت نہایت آسان اور مسئلہ 2.1 کی ثبوت سے ملتا جلتا ہے لہٰذا یہ آپ پر چھوڑا جاتا ہے۔

سوالات

سوال 13.1: مسئلہ 13.1 کو دو اور تین متغیرات کی دو رتبی جزوی تفرقی مساوات کے لئے ثابت کریں۔

سوال 13.2: تصدیق کریں کہ مساوات 13.6 میں دیے گئے تمام تفاعل مساوات 13.3 کے حل ہیں۔
جواب: $u = x^2 + y^2$ لیتے ہیں۔ یوں $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$ ہو گا۔انہیں مساوت 13.3 میں پر کرتے ہوئے $0 = 0$ ملتا ہے۔یوں u تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.3 تا سوال 13.8 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل لاپلاس مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.3: $u = 2xy$

سوال 13.4: $u = e^x \sin y$

سوال 13.5: $u = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

سوال 13.6: $u = x^3 - 3xy^2$

سوال 13.7: $u = \sin x \sinh y$

سوال 13.8: $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

سوال 13.9 تا سوال 13.11 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل حراری مساوات 13.2 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.9: $u = e^{-2t} \cos x$

سوال 13.10: $u = e^{-t} \sin 3x$

سوال 13.11: $u = e^{-4t} \cos \omega x$

سوال 13.12 تا سوال 13.14 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا تفاعل موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.12: $u = x^2 + 4t^2$

سوال 13.13: $u = x^3 + 3xt^2$

سوال 13.14: $u = \sin \omega ct \sin \omega x$

سوال 13.15: تصدیق کریں کہ $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ تین بعدی لاپلاس مساوات 13.5 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.16: تصدیق کریں کہ $u(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$ دو بعدی لاپلاس مساوات 13.3 کا حل ہے۔دی گئی سرحدی شرائط کے تحت دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر $u = 0$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ پر $u = 5$ ہے۔ مستقل a اور b کی ایسی قیمتیں دریافت کریں کہ u ان سرحدی شرائط کو مطمئن کرے۔حاصل u کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 13.17: تصدیق کریں کہ $u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct)$ موج کی مساوات 13.1 کو مطمئن کرتا ہے۔یہاں u اور v دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل ہیں۔

اگر جزوی تفرقی مساوات میں صرف ایک متغیر کے ساتھ تفرقات پائے جاتے ہوں تب اس کو سادہ تفرقی مساوات تصور کر کے حل کیا جا سکتا ہے جہاں باقی متغیرات کو مستقل تصور کیا جاتا ہے۔سوال 13.18 تا سوال 13.21 کو حل کریں جہاں u کے متغیرات x اور y ہیں۔

سوال 13.18: $u_{xx} - u = 0$
جواب: $u = c_1(y)e^{x} + c_2(y)e^{-x}$

سوال 13.19: $u_y + yu = 0$
جواب: $u = c(x)e^{-\frac{y^2}{2}}$

سوال 13.20: $u_{yy} + 9u = 0$
جواب: $u = c_1(y)\cos 3x + c_2(y)\sin 3x$

سوال 13.21: $u_x + 2xyu = 0$
جواب: $u = c(y)e^{-x^2 y}$

سوال 13.22 تا سوال 13.25 میں $u_x = p$ لیتے ہوئے حل تلاش کریں۔

سوال 13.22: $u_{xy} = 0$
جواب: $u = v(x) + w(y)$

سوال 13.23: $u_{xy} = u_x$

سوال 13.24: $u_{xy} + u_x = 0$
جواب: $u = v(x)e^{-y} + w(y)$

سوال 13.25: $u_{xy} + u_x + x + y + 1 = 0$

سوال 13.26 تا سوال 13.29 میں دیے گئے تفرقی مساوات کی نظام کے حل تلاش کریں۔

سوال 13.26: $u_{xx} = 0, \quad u_{yy} = 0$
جواب: $u = axy + bx + cy + k$

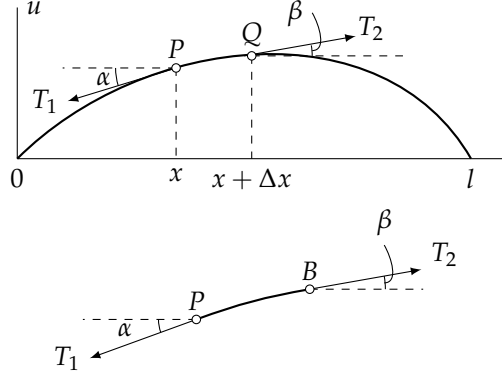
سوال 13.27: $u_x = 0, \quad u_y = 0$

سوال 13.28: $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0$
جواب: $u = cx + g(y)$

سوال 13.29: $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0, \quad u_{yy} = 0$

سوال 13.30: تصدیق کریں کہ اگر سطح $z = z(x,y)$ پر منحنی $z = c$ محور x کے متوازی سیدھے خطوط ہوں، جہاں c مستقل ہے، تب z تفرقی مساوات $z_x = 0$ کا حل ہو گا۔ایسی ایک مثال بھی پیش کریں۔

سوال 13.31: تصدیق کریں کہ $yz_x - xz_y = 0$ کا حل $z = z(x,y)$ سطح گردش ہے۔اس کی مثال پیش کریں۔ (اشارہ: $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ لے کر تفرقی مساوات کو $z_\theta = 0$ میں تبدیل کریں۔)

u β Q T_2 P α T_1 0 x $x+\Delta x$ l
β T_2 B P α T_1

شکل 13.1: ارتعاش پذیر تار

13.2 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر تار۔ یک بعدی مساوات موج

ایک لچک دار تار کو لمبائی l تک کھینچ کر سروں سے باندھا جاتا ہے۔ساکن تار کو x محور پر تصور کریں۔اس تار کو کسی نقطہ یا نقاط سے کھینچ کر لمحہ $t=0$ پر چھوڑا دیا جاتا ہے تا کہ یہ ارتعاش کر سکے۔ہم تار کی ارتعاش معلوم کرنا چاہتے ہیں یعنی لمحہ $t>0$ پر ساکن حالت سے تار کی نقطہ x کا انحراف $u(x,t)$ جاننا چاہتے ہیں (شکل 13.1)۔ کسی بھی نظام کا ریاضی نمونہ اخذ کرتے وقت کئی ترسیلی مفروضے فرض کیے جاتے ہیں تا کہ حاصل مساوات ضرورت سے زیادہ پیچیدہ نہ ہوں۔ہم سادہ تفرقی مساوات کی طرح جزوی تفرقی مساوات حاصل کرتے ہوئے بھی ایسا کریں گے۔

موجودہ مسئلے میں ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

(الف) تار کی کمیت فی اکائی لمبائی یکساں ہے (ہم جنسی تار)۔ تار مکمل طور پر لچکدار ہے اور مڑنے کے خلاف مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے۔

(ب) تار کو اتنا تان کر باندھا گیا ہے کہ اس میں تناو، ثقلی قوت سے بہت زیادہ ہو۔یوں ثقلی قوت کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

(پ) تار سیدھی کھڑی سطح میں حرکت کرتا ہے۔تار پر کوئی بھی نقطہ اپنے ساکن مقام سے بہت کم انحراف کرتا ہے لہٰذا ہر نقطے پر تار کی انحراف اور ڈھلوان کی مطلق قیمتیں قلیل ہوں گی۔

ہم توقع کر سکتے ہیں کہ یوں حاصل جزوی تفرقی مساوات کا حل $u(x,t)$ ، "غیر کامل" ہم جنسی تار جس میں ثقلی میدان سے بہت زیادہ تناؤ ہو کا صحیح نقش پیش کرے گا۔

مسئلے کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم تار کے ایک چھوٹے ٹکڑے پر غور کرتے ہیں جس میں تناؤ T پایا جاتا ہے (شکل 13.1)۔ چونکہ مڑنے کے خلاف تار مزاحمت فراہم نہیں کرتا ہے لہٰذا ہر نقطے پر تار میں تناؤ اس نقطے پر تار کا مماسی ہو گا۔ فرض کریں کہ تار کے ٹکڑے کی سروں P اور Q پر تناؤ T_1 اور T_2 ہے۔ چونکہ تار افقی حرکت نہیں کرتا ہے لہٰذا اس ٹکڑے پر تناؤ کا کل افقی جزو صفر کے برابر ہو گا۔ یوں شکل 13.1 کو دیکھ کر

$$T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = 0$$

یا

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = \text{مستقل} \tag{13.7}$$

لکھا جا سکتا ہے یعنی ہر ایسے ٹکڑے پر بائیں اور دائیں رخ یکساں (مستقل T) تناؤ ہو گا۔ انتصابی رخ میں T_1 اور T_2 کے اجزاء $-T_1 \sin\alpha$ اور $T_2 \sin\beta$ ہیں جہاں اوپر رخ تناؤ کو مثبت تصور کیا گیا ہے۔ نیوٹن کی دوسری قانون کے تحت ان دو قوتوں کا مجموعہ تار کے ٹکڑے کی کمیت $\rho\Delta x$ ضرب اسراع $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہو گا جہاں اسراع، x اور $x+\Delta x$ کے مابین کسی نقطے کی اسراع ہو گی۔ تار کی کمیت فی اکائی لمبائی ρ ہے جبکہ تار کے ٹکڑے کی لمبائی Δx ہے۔ یوں

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{13.8}$$

ہو گا۔ اس کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_2 \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{13.9}$$

آپ تسلی کر لیں کہ چونکہ مساوات 13.7 میں $T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T$ ہے لہٰذا مساوات 13.8 کو مساوات 13.7 سے تقسیم کرتے ہوئے کہیں $T_2 \cos\beta$ ، کہیں $T_1 \cos\alpha$ اور کہیں T سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

اب $\tan\beta$ اور $\tan\alpha$ تار کی x اور $x+\Delta x$ پر مماس ہے یعنی

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \quad \text{اور} \quad \tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

جہاں جزوی تفرق اس لئے استعمال کیے گئے ہیں کہ u متغیرہ t کا بھی تابع ہے۔یوں مساوات 13.9 کو Δx سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{\Delta x}\Big[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x}\Big]=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں Δx کو صفر کے قریب تر کرتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad c^2=\frac{T}{\rho} \tag{13.10}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو یک بعدی مساوات موج[8] کہتے ہیں۔ مساوات 13.10 ہمارے مسئلے کی درکار جزوی تفرقی مساوات ہے جو ہم جنسی اور دو رتبی ہے۔مساوات میں مستقل $\frac{T}{\rho}$ کو c کی بجائے c^2 سے ظاہر کیا گیا ہے تا کہ واضح رہے کہ یہ مثبت مستقل ہے۔اس مساوات کا حل اگلے حصے میں حاصل کیا جائے گا۔

13.3 علیحدگی متغیرات (ترکیب ضرب)

گزشتہ حصے میں ہم نے دیکھا کہ لچک دار تار کی ارتعاش کو جزوی تفرقی مساوات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{مساوات موج} \tag{13.11}$$

بیان کرتی ہے جہاں $u(x,t)$ تار کی انحراف ہے۔تار کی حرکت جاننے کی خاطر اس مساوات کا حل درکار ہو گا بلکہ ہمیں مساوات 13.11 کا ایسا حل $u(x,t)$ درکار ہے جو نظام پر لاگو شرائط کو بھی مطمئن کرے۔چونکہ تار کے دونوں سر غیر تغیر پذیر ہیں لہٰذا تمام t کے لئے $x=0$ اور $x=l$ پر سرحدی شرائط

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 \tag{13.12}$$

لاگو ہیں۔تار کی حرکت ابتدائی انحراف (لمحہ $t=0$ پر انحراف) اور ابتدائی رفتار (لمحہ $t=0$ پر رفتار) پر منحصر ہو گی۔ابتدائی انحراف کو $f(x)$ اور ابتدائی رفتار کو $g(x)$ سے ظاہر کرتے ہوئے ابتدائی شرائط[9]

$$u(x,0)=f(x) \tag{13.13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x) \tag{13.14}$$

---

[8] one dimensional wave equation
[9] initial conditions

لکھی جائیں گی۔ ہمیں اب مساوات 13.12 کا ایسا حل چاہیے جو سرحدی شرائط مساوات اور ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرے۔ ہم درج ذیل اقدام کے ذریعہ ایسا حل تلاش کریں گے۔

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے ہم جزوی تفرقی مساوات سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کریں گے۔
دوسرا قدم۔ ہم ان سادہ تفرقی مساوات کے ایسے حل تلاش کریں گے جو دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔
تیسرا قدم۔ حاصل حل سے ایسے حل حاصل کیے جائیں گے جو ابتدائی شرائط کو بھی مطمئن کرتے ہوں۔

ان اقدام کی تفصیل درج ذیل ہے۔

پہلا قدم۔ ترکیب ضرب مساوات 13.11 کے حل دو عدد تفاعل کا حاصل ضرب

$$u(x,t)=F(x)G(t) \tag{13.15}$$

کی روپ میں دیتا ہے جہاں ہر ایک تفاعل صرف ایک متغیرہ x یا t کا تابع ہے۔ ہم جلد دیکھیں گے کہ انجینئری حساب میں اس ترکیب کے کئی استعمال پائے جاتے ہیں۔ مساوات 13.15 کے تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F\ddot{G} \quad \text{اور} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F''G$$

ملتا ہے جہاں ($'$) سے مراد x کے ساتھ تفرق اور $(\cdot)$ سے مراد t کے ساتھ تفرق ہے۔ انہیں مساوات 13.11 میں پر کر کے

$$F\ddot{G}=c^2F''G$$

دونوں اطراف کو c^2FG سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}$$

ملتا ہے جس کا دایاں ہاتھ صرف متغیرہ x پر منحصر ہے جبکہ اس کا بایاں ہاتھ صرف متغیرہ t پر منحصر ہے۔ اب t تبدیل کرنے سے صرف بایاں ہاتھ تبدیل ہونے کا امکان ہے لیکن اس مساوات کے تحت دونوں اطراف برابر ہیں اور دایاں ہاتھ t تبدیل کرنے سے ہر گز تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ t تبدیل کرنے سے بایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ اسی طرح x تبدیل کرنے سے صرف دایاں ہاتھ کا تبدیل ہونا ممکن ہے لیکن

دونوں اطراف برابر ہیں اور x کی تبدیلی سے بایاں ہاتھ ہر گز تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا x تبدیل کرنے سے دایاں ہاتھ بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔یوں اس مساوات کے دونوں اطراف غیر تغیر پذیر ہیں لہٰذا انہیں مستقل k کے برابر لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = k$$

جس سے درج ذیل دو عدد مساوات علیحدہ علیحدہ لکھنا ممکن ہے جہاں k نا معلوم مستقل ہے۔

$$F'' - kF = 0 \tag{13.16}$$

$$\ddot{G} - c^2kG = 0 \tag{13.17}$$

دوسرا قدم۔ ہم مساوات 13.16 اور مساوات 13.17 کے حل F اور G حاصل کرتے ہوئے ایسا $u = FG$ دریافت کرتے ہیں جو تمام t کے لئے سرحدی شرائط مساوات 13.12 کو مطمئن کرتا ہو یعنی:

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(l,t) = F(l)G(t) = 0$$

اب اگر درج بالا میں $G \equiv 0$ ہو تب $u \equiv 0$ ہو گا جس میں ہم کوئی دلچسپی نہیں رکھتے ہیں لہٰذا $G \neq 0$ ہو گا۔یوں درج بالا سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(\text{الف}) \quad F(0) = 0, \qquad (\text{ب}) \quad F(l) = 0 \tag{13.18}$$

اگر مساوات 13.16 میں $k = 0$ ہو تب اس مساوات کا عمومی حل $F = ax + b$ ہو گا جو مساوات 13.18 کی استعمال سے $a = 0$ ، $b - 0$ یعنی $F \equiv 0$ یا $u \equiv$ دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔مثبت $k = \mu^2$ کے لئے مساوات 13.16 کا عمومی حل

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

ہے جو مساوات 13.18 کی استعمال سے $A = 0$ ، $B = 0$ یعنی $F \equiv 0$ یا $u \equiv= 0$ دیتا ہے جو غیر دلچسپ حل ہے۔یوں ہمارے پاس منفی $k = -p^2$ لینا رہ جاتا ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.16 کو دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$F'' + p^2F = 0$$

اس کا عمومی حل

$$F(x) = A\cos px + B\sin px$$

ہے جو مساوات 13.18-الف کی مدد سے

$$F(0) = A = 0$$

لہٰذا $F = B \sin px$ ہو گا جو مساوات 13.18-ب کے ساتھ مل کر

$$F(l) = B \sin pl = 0$$

دیتی ہے۔اب اگر $B = 0$ ہو تب $F \equiv 0$ یعنی $u \equiv 0$ ہو گا جو غیر دلچسپ حل ہے لہٰذا $B \neq 0$ ہے۔اس طرح $\sin pl = 0$ ہو گا۔ہم جانتے ہیں کہ $\sin n\pi = 0$ ہوتا ہے لہٰذا یوں درج ذیل ملتا ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔

$$pl = n\pi \quad \implies \quad p = \frac{n\pi}{l} \tag{13.19}$$

ہم $B = 1$ منتخب کرتے ہوئے لامحدود تعداد کے حل $F(x) = F_n(x)$ یعنی

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13.20}$$

حاصل کرتے ہیں جو مساوات 13.18 میں دیے گئے سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔چونکہ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ہوتا ہے لہٰذا منفی عدد صحیح $n = -1, -2, \ldots$ لینے سے یہی حل منفی علامت کے ساتھ دوبارہ ملتے ہیں۔

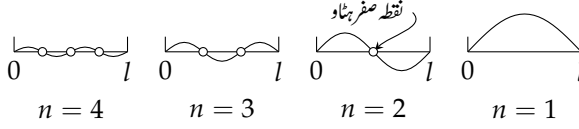
اب مساوات 13.19 کے تحت k کی قیمت صرف $k = -p^2 = -(\frac{n\pi}{l})^2$ ممکن ہے۔ k کی ان قیمتوں کے ساتھ مساوات 13.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

جس کا عمومی حل

$$G_n(t) = B_b \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t$$

ہے۔یوں تفاعل $u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t)$

$$u_n(x,t) = (B_b \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{13.21}$$

شکل 13.2: تار کے قائمہ انداز اور نقطہ صفر ہٹاو۔

مساوات 13.17 کے ایسے حل ہیں جو مساوات 13.18 میں دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتے ہیں۔ان تفاعل کو ارتعاش پذیر تار کے **آئیگن تفاعل**[10] یا **امتیازی تفاعل**[11] کہتے ہیں جبکہ $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ کی قیمتوں کو ارتعاش پذیر تار کے **آئیگن اقدار**[12] یا **امتیازی اقدار**[13] کہتے ہیں۔ مزید $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ کا سلسلہ **طیف**[14] کہلاتا ہے۔

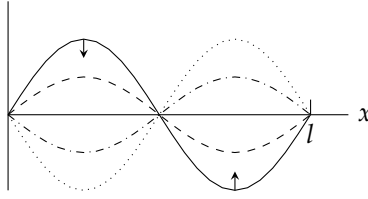
ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایک u_n ایک مخصوص ہارمونی ارتعاش کو ظاہر کرتی ہے جس کی تعدد $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2l}$ چکر فی اکائی وقت ہے۔ اس حرکت کو تار کی n ویں **قائمہ انداز**[15] کہتے ہیں۔ پہلا قائمہ انداز جس کا $n = 1$ ہو گا **بنیادی انداز**[16] کہلاتا ہے جبکہ باقی کو n ویں **ہارمونی انداز**[17] کہتے ہیں۔چونکہ مساوات 13.21 میں

$$\sin\frac{n\pi x}{l} = 0 \quad \implies \quad x = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}l$$

ہے لہٰذا n ویں قائمہ انداز کے $n-1$ **نقطہ صفر ہٹاو**[18] پائے جائیں گے۔ ان نقطوں پر تار ساکن رہتی ہے (شکل 13.2)۔

شکل 13.3 میں دوسرا قائمہ انداز مختلف لمحات t پر دکھایا گیا ہے۔کسی بھی لمحہ پر تار کی شکل سائن تفاعل کی ہو گی۔جب تار کا بایاں آدھا حصہ نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے اس وقت تار کا دایاں آدھا حصہ اوپر کو حرکت کرے گا۔اسی طرح جب بایاں حصہ اوپر کو حرکت کرتا ہے اس وقت دایاں حصہ نیچے کو حرکت کرتا ہے۔تار کا درمیانہ نقطہ حرکت نہیں کرتا ہے لہٰذا یہ نقطہ صفر ہٹاو ہے۔باقی انداز بھی اسی طرح کی خاصیت رکھتے ہیں۔

تیسرا قدم۔ ظاہر ہے کہ ایک عدد حل $u_n(x,t)$ عموماً ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن نہیں کر سکتا ہے۔اب چونکہ مساوات 13.11 خطی اور ہم جنسی ہے لہٰذا بنیادی مسئلہ 13.1 کے تحت

eigenfunctions[10]
characteristic functions[11]
eigenvalues[12]
characteristic values[13]
spectrum[14]
normal mode[15]
fundamental mode[16]
harmonics[17]
node[18]

شکل 13.3: مختلف t پر دوسرا قائمہ انداز

مساوات 13.11 کی محدود تعداد کے حلوں u_n کا مجموعہ بھی مساوات 13.11 کا حل ہو گا۔ اس طرح ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم لا متناہی تسلسل

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{13.22}$$

پر غور کرتے ہیں۔ مساوات 13.22 اور ابتدائی شرط مساوات 13.13 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x) \tag{13.23}$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.13 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر B_n اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ $u(x,0)$ تفاعل $f(x)$ کی فوریئر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \qquad n=1,2,\cdots \tag{13.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات 13.22 کا t کے ساتھ تفرق لے کر اور ابتدائی شرط مساوات 13.14 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}&=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-B_n\lambda_n\sin\lambda_n t+B_n^*\lambda_n\cos\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_{t=0}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\lambda_n\sin\frac{n\pi x}{l}=g(x)\end{aligned}$$

یوں اگر مساوات 13.22 نے مساوات 13.14 کو مطمئن کرنا ہو تب تب عددی سر B_n^* اس طرح منتخب کرنے ہوں گے کہ $t=0$ پر $\frac{\partial u}{\partial t}$ تفاعل $g(x)$ کی فوریئر سائن تسلسل ہو۔ یوں مساوات 12.34 سے

$$B_n^*\lambda_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

اور چونکہ $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ ہے لہٰذا

$$B_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 13.24 اور مساوات 13.25 میں حاصل کیے گئے عددی سر کو مساوات 13.22 میں پر کرنے سے حاصل تسلسل $u(x,t)$ ، مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرے گا بشرطیکہ حاصل $u(x,t)$ مرتکز ہو اور اس کی x اور t کے ساتھ جزو در جزو دو رتبی تفرق لینے سے حاصل تسلسل مرتکز ہو اور ان کے مجموعے بالترتیب $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہوں جو استمراری ہیں۔

اب تک مساوات 13.22 محض ریاضی حل کے طور پر سامنے آیا ہے۔آئیں اس کی اصل حقیقت کو قائم کریں۔ہم اپنی آسانی کی خاطر ابتدائی رفتار $g(x)$ صفر لیتے ہیں۔یوں $B_n^* = 0$ ہوں گے لہٰذا مساوات 13.22 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\lambda_n t \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l} \tag{13.26}$$

ہم ضمیمہ ب کا کلیہ ب.11 استعمال کرتے ہوئے

$$\cos\frac{cn\pi}{l}t\,\sin\frac{n\pi}{l}x = \frac{1}{2}\Big[\sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\Big\} + \sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\Big\}\Big]$$

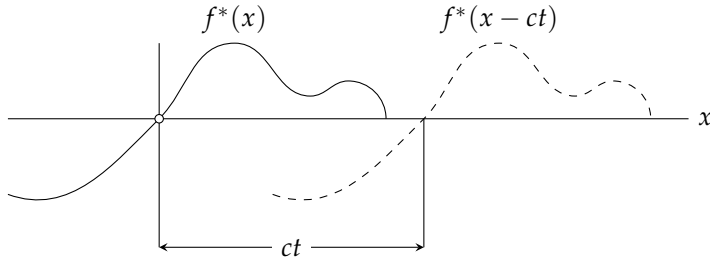
لکھ سکتے ہیں جس کو مساوات 13.26 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x-ct)\Big\} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\Big\{\frac{n\pi}{l}(x+ct)\Big\}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 13.23 میں x کی جگہ $x-ct$ اور $x+ct$ پر کرنے سے یہی دو تسلسل حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f^*(x-ct) + f^*(x+ct)] \tag{13.27}$$

جہاں f کی طاق دوری توسیع جس کا دوری عرصہ $2l$ ہو تفاعل f^* ہے (شکل 13.4)۔چونکہ وقفہ $0 \le x \le l$ پر ابتدائی انحراف $f(x)$ استمراری ہے جبکہ $x = 0$ اور $x = l$ پر انحراف صفر ہے لہٰذا

شکل 13.4: $f(x)$ کی طاق توسیع

شکل 13.5: مساوات 13.27 کی معنی

مساوات 13.27 سے ظاہر ہے کہ $u(x,t)$ دونوں متغیرات x اور t کی تمام قیمتوں پر استمراری ہو گا۔مساوات 13.27 کا تفرق لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات 13.11 کا حل ہے بشرطیکہ وقفہ $0 < x < l$ پر $f(x)$ دو مرتبہ قابل تفرق ہو اور $x = 0$ اور $x = l$ پر اس کے یک طرفہ دو رتبی تفرق پائے جاتے ہوں جن کی قیمت صفر کے برابر ہو۔اس طرح یہ حقیقت قائم ہوتی ہے کہ ان شرائط پر پورا اترتا ہوا تسلسل $u(x,t)$ مساوات 13.11 کا ایسا حل ہو گا جو مساوات 13.12، مساوات 13.13 اور مساوات 13.14 کی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

اگر $f'(x)$ اور $f''(x)$ محض ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہوں، یا اگر وقفہ کے سروں پر یک طرفہ تفرقات غیر صفر ہوں تب ہر ایک t کے لئے محدود تعداد کی x قیمتوں پر مساوات 13.11 کے u کی دو رتبی تفرقات غیر معین ہوں گے۔ان نقطوں کے علاوہ باقی تمام نقطوں پر u مساوات موج کو مطمئن کرے گی لہٰذا ہم $u(x,t)$ کو وسیع معنوں میں مسئلے کا حل تصور کر سکتے ہیں۔مثال کے طور پر تکونی ابتدائی انحراف کی صورت میں حاصل حل اس نوعیت کا ہو گا۔

آئیں مساوات 13.27 کی طبعی معنی سمجھتے ہیں۔جیسا شکل 13.5 میں دکھایا گیا ہے، $f^*(x)$ کی ترسیم کو ct اکائیاں دائیں منتقل کرنے سے $f^*(x-ct)$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔اس کا مطلب ہے کہ $f^*(x-ct)$, $(c>0)$ ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے t کے ساتھ دائیں جانب کو حرکت کرتی ہے۔اسی طرح

$f^*(x+ct),\ (c>0)$ ایسی موج کو ظاہر کرتا ہے جو بڑھتے t کے ساتھ بائیں جانب کو حرکت کرتی ہے اور $u(x,t)$ ان دونوں کا مجموعہ ہے۔

مثال 13.2: تکونی ابتدائی انحراف کی صورت میں تار کی ارتعاش
مساوات موج 13.11 کا حل تکونی ابتدائی انحراف

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2k}{l}x & 0<x<\frac{l}{2}\\ \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2}<x<l\end{cases}$$

اور ابتدائی رفتار صفر $g(x)=0$ کی صورت میں حاصل کریں۔
حل: چونکہ $g(x)\equiv 0$ ہے لہٰذا مساوات 13.26 میں $B_n^*=0$ ہو گا جبکہ B_n کو صفحہ 904 پر مساوات 12.35 دے گی۔یوں مساوات 13.26 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$u(x,t)=\frac{8k}{\pi^2}\Big[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{l}x\cos\frac{\pi c}{l}t-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}x\cos\frac{3\pi c}{l}t+-\cdots\Big]$$

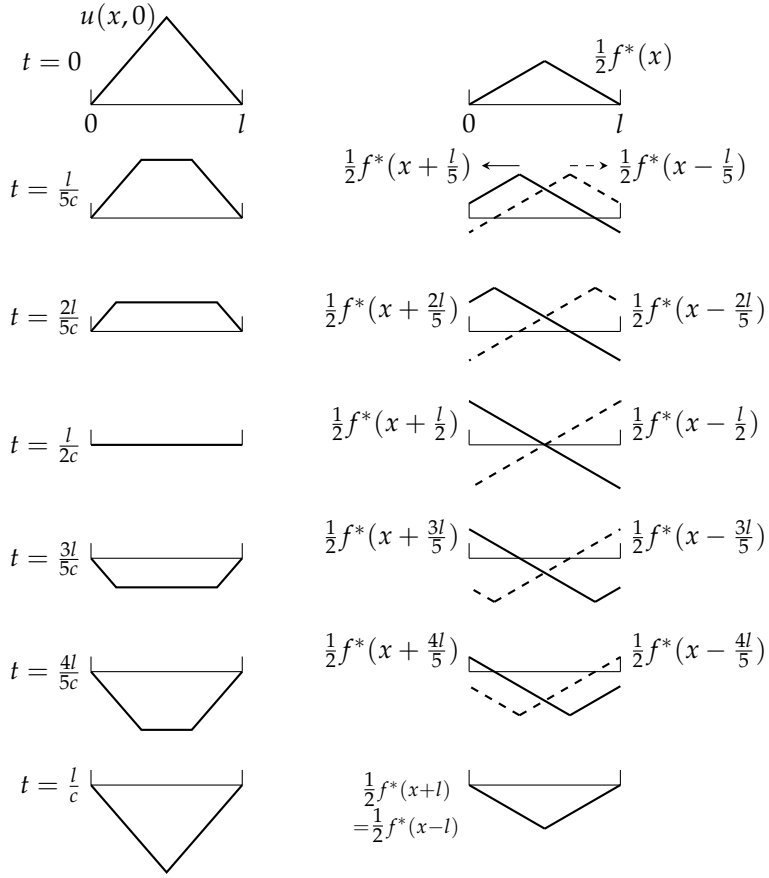
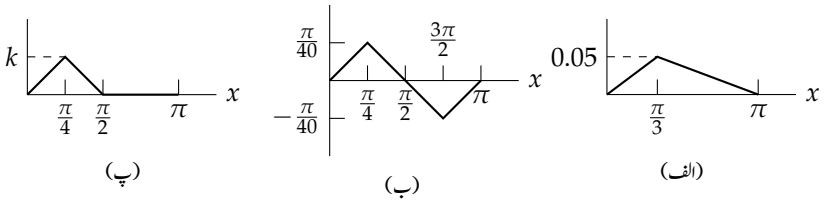
اس حل کی ترسیم کھینچنے کی خاطر ہم $u(x,0)=f(x)$ سے شروع کرتے ہوئے مساوات 13.27 کی مدد لیتے ہیں۔یوں شکل 13.6 حاصل ہوتی ہے۔ □

سوالات

سوال 13.32 تا سوال 13.40 میں تار کی لمبائی $l=\pi$ اور $c^2=\frac{T}{\rho}=1$ ہے۔تار کے سرے ٹھوس نقطوں کے ساتھ باندھے گئے ہیں۔ابتدائی رفتار صفر جبکہ ابتدائی انحراف $f(x)$ سوال میں دی گئی ہے۔ارتعاش پذیر تار کا انحراف $u(x,t)$ دریافت کریں۔

سوال 13.32: $0.02\sin x$
جواب: $u=0.02\cos t\sin x$

سوال 13.33: $k\sin 2x$
جواب: $u=k\cos 2t\sin 2x$

سوال 13.34: $k(\sin x-\sin 2x)$
جواب: $u=k(\cos t\sin x-\cos 2t\sin 2x)$

شکل 13.6: مثال 13.2 کا مختلف لمحات پر دائیں کو اور بائیں کو حرکت کرتے اجزاء اور ان کا مجموعہ حل $u(x,t)$

شکل 13.7: اشکال برائے سوالات 13.35، 13.36 اور 13.37

سوال 13.35: شکل 13.7-الف
جواب: $\frac{9\sqrt{3}k}{2\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos t\sin x+\frac{1}{2^2}\cos 2t\sin 2x-\frac{1}{4^2}\cos 4t\sin 4x\cdots\right)$

سوال 13.36: شکل 13.7-ب
جواب: $\frac{4}{5\pi}\left(\frac{1}{2^2}\cos 2t\sin 2x-\frac{1}{6^2}\cos 6t\sin 6x+\frac{1}{10^2}\cos 10t\sin 10x\cdots\right)$

سوال 13.37: شکل 13.7-پ
جواب: $\frac{4k}{\pi^2}[2(\sqrt{2}-1)\cos t\sin x+\cos 2t\sin 2x-2(\sqrt{2}-\frac{1}{9})\cos 3t\sin 3x\cdots]$

سوال 13.38: $kx(x-\pi)$
جواب: $\frac{8k}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos t\sin x-\frac{1}{3^2}\cos 3t\sin 3x-\frac{1}{5^2}\cos 5t\sin 5x\cdots\right)$

سوال 13.39:

$$f(x)=\begin{cases}kx^2 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ k(x-\pi)^2 & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $4k[(1-\frac{2}{\pi})\cos t\sin x-\frac{1}{9}(1+\frac{2}{3\pi})\cos 3t\sin 3x\cdots]$

سوال 13.40:

$$f(x)=\begin{cases}kx^2 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ -k(x-\pi)^2 & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

جواب: $k(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi})\cos 2t\sin 2x+\frac{k\pi}{4}\cos 4t\sin 4x+k(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{27\pi})\cos 6t\sin 6x\cdots$

سوال 13.41 تا سوال 13.43 میں $c^2=1$ ہے، تار کی لمبائی $l=\pi$ ہے اور تار کے سرے ٹھوس نقطوں سے بندھے ہیں۔ابتدائی رفتار $g(x)$ اور ابتدائی انحراف $f(x)$ ہیں۔ارتعاش پذیر تار کی انحراف $u(x,t)$ دریافت کریں۔

سوال 13.41: $f=0,\quad g=kx\quad (0\le x\le \frac{\pi}{2});\quad g(x)=k(\pi-x)\quad (\frac{\pi}{2}\le x\le \pi)$
جواب: $\frac{4k}{\pi}\left(\frac{1}{1^3}\sin t\sin x-\frac{1}{3^3}\sin 3t\sin 3x+\frac{1}{5^3}\sin 5t\sin 5x\cdots\right)$

سوال 13.42: $f=0,\quad g=k\sin 3x$
جواب: $\frac{k}{3}\sin 3t\sin 3x$

سوال 13.43: $f = k \sin 2x, \quad g = -k \sin 2x$
جواب: $-\frac{k}{2} \sin 2t \sin 2x$

سوال 13.44: تناو T چار گنا کرنے سے بنیادی انداز کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: چونکہ $c^2 = \frac{T}{\rho}$ ہے لہٰذا T چار گنا کرنے سے c دگنا ہو گا جس سے بنیادی انداز کی تعدد دگنی ہو گی۔

سوال 13.45: تار کی لمبائی چار گنا کرنے سے بنیادی انداز کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: بنیادی انداز کی تعدد چار گنا کم ہو گی۔

سوال 13.46 تا سوال 13.53 میں دیے گئے جزوی تفرقی مساوات کو علیحدگی متغیرات کے طریقہ سے حل کریں۔

سوال 13.46: $u_x + u_y = 0$
جواب: $u = ce^{k(x+y)}$

سوال 13.47: $u_x - u_y = 0$
جواب: $u = ce^{k(x-y)}$

سوال 13.48: $xu_x - yu_y = 0$
جواب: $u = kxy$

سوال 13.49: $u_x - yu_y = 0$
جواب: $u = cy^k e^{kx}$

سوال 13.50: $yu_x - xu_y = 0$
جواب: $u = ce^{k(x^2+y^2)}$

سوال 13.51: $u_x + u_y = 2(x+y)u$
جواب: $u = ce^{x^2+y^2+k(x-y)}$

سوال 13.52: $u_{xx} + u_{yy} = 0$
جواب: $u = (A \cos kx + B \sin kx)(Ce^{ky} + De^{-ky})$

سوال 13.53: $u_{xy} - u = 0$
جواب: $u = ce^{x+y}$

سوال 13.54 تا سوال 13.58 لچکدار تار کی جبری ارتعاش پر مبنی ہیں۔

سوال 13.54: لچک دار تار کی جبری ارتعاش کا الجبرائی نمونہ درج ذیل جزوی تفرقی مساوات ہے جہاں اکائی لمبائی پر بیرونی قوت $P(x, t)$ تار کے عمودی عمل کرتا ہے۔

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{P}{\rho} \tag{13.28}$$

دیے گئے مسئلے سے اس جزوی تفرقی مساوات کو حاصل کریں۔

سوال 13.55: سائن نما بیرونی قوت $P = A\rho \sin \omega t$ کی صورت میں درج ذیل ثابت کریں

$$\frac{P}{\rho} = A \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

جہاں $k_n(t) = \frac{2A}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \sin \omega t$ ہے۔یوں جفت n کی صورت میں $k_n = 0$ اور طاق n کی صورت میں $k_n = \frac{4A}{n\pi} \sin \omega t$ ہو گا۔مزید ثابت کریں کہ مساوات 13.11 میں

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = 0, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

سوال 13.56: ثابت کریں کہ سوال 13.55 کے $\frac{P}{\rho}$ اور u کو مساوات 13.28 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2A}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \sin \omega t, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

ثابت کریں کہ $\lambda_n^2 \neq \omega^2$ کی صورت میں اس کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t + \frac{2A(1 - \cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

سوال 13.57: ایسے B_n اور B_n^* دریافت کریں کہ u ابتدائی شرائط $u(x,0) = f(x)$ اور $u_t(x,0) = 0$ کو مطمئن کرے (سوال 13.56)۔

سوال 13.58: ثابت کریں کہ گمک $\lambda_n = \omega$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$G_n(t) = B_n \cos \omega t + B_n^* \sin \omega t - \frac{A}{n\pi\omega}(1 - \cos n\pi) t \cos \omega t$$

13.4 مساوات موج کادالومبیغ حل

گزشتہ حصہ میں مساوات موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.29}$$

کا حل مساوات 13.27 حاصل کیا گیا۔یہی حل نہایت آسانی سے مساوات 13.29 کا موزوں بدل لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں نئے غیر تابع متغیرات[19]

$$v = x + ct, \quad z = x - ct \tag{13.30}$$

متعارف کرتے ہوئے u کو متغیرات v اور z کا تفاعل لکھتے ہیں۔اس طرح مساوات 13.29 میں تفرقات اب v اور z کے لحاظ سے زنجیری ترکیب (حصہ 10.7) کی مدد سے لکھے جائیں گے۔جزوی تفرق کو زیر نوشت سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 13.30 سے $v_x = 1$ اور $z_x = 1$ لکھے جائیں گے۔ہم اپنی آسانی کے لئے v اور z متغیرات کے تفاعل کو بھی u سے ظاہر کرتے ہیں۔اس طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z$$

دائیں ہاتھ پر زنجیری ترکیب لاگو کرتے ہوئے اور $v_x = 1$ اور $z_x = 1$ پر کرتے ہوئے

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

ملتا ہے۔مساوات 13.29 کی دوسری تفرق کو بھی اسی طرح لکھتے ہیں۔

$$u_{tt} = c^2(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz})$$

[19] یہاں بتلاتا چلوں کہ جزوی تفرقی مساوات کا عمومی نظریہ اس طرح کے تبادل حاصل کرنے کی قدم باقدم ترکیب پیش کرتی ہے۔

ان نتائج کو مساوات 13.29 میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0 \tag{13.31}$$

آپ نے دیکھا کہ نئے متغیرات متعارف کرنے سے حاصل مساوات 13.31 نہایت آسانی سے دو مرتبہ تکمل لینے سے حل ہو سکتی ہے۔ایک مرتبہ z کے ساتھ تکمل لینے سے

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

حاصل ہو گا جہاں نا معلوم تفاعل $h(v)$ متغیرہ v کے تابع ہو سکتا ہے۔اس کا تکمل v کے ساتھ لیتے ہیں

$$u = \int h(v) \, \mathrm{d}v + \psi(z)$$

جہاں $\psi(z)$ متغیرہ z کا نا معلوم تفاعل ہے۔درج بالا میں تکمل کا حاصل از خود v کا تفاعل ہو گا جس کو نا معلوم تفاعل $\phi(v)$ لکھتے ہوئے مساوات 13.31 کی مدد سے

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \tag{13.32}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کو موج کی مساوات 13.29 کا دالومبیغ حل[20] کہتے[21] ہیں۔

تفاعل ϕ اور ψ کو ابتدائی معلومات سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔آئیں صفر ابتدائی رفتار اور ابتدائی انحراف $u(x,0) = f(x)$ کے لئے ان تفاعل کو حاصل کریں۔

مساوات 13.32 کا تفرق لیتے ہیں

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\phi'(x+ct) - c\psi'(x-ct) \tag{13.33}$$

جہاں $(')$ سے مراد قوسین میں بند پوری دلیل $x+ct$ اور $x-ct$ کے لحاظ سے بالترتیب تفرق ہے۔مساوات 13.32، مساوات 13.33 اور ابتدائی معلومات سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \phi(x) + \psi(x) = f(x) \\ u_t(x,0) &= c\phi'(x) - c\psi'(x) = 0 \end{aligned}$$

[20] d'Alembert solution

[21] فرانسیسی ریاضی دان ژاں باٹیسٹ لی غوں دالومبیغ [1717-1783]

آخری مساوات یعنی $\phi' = \psi'$ سے $\psi = \phi + k$ حاصل ہوتا ہے جس کو پہلی مساوات کے ساتھ ملا کر $2\phi + k = f$ یا $\phi = \frac{f-k}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ ان حاصل کردہ ϕ اور ψ کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.32 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] \tag{13.34}$$

جو عین مساوات 13.27 ہے۔آپ یہاں تصدیق کر سکتے ہیں کہ مساوات 13.27 پر لاگو ابتدائی سرحدی شرائط مساوات 13.12 کی بنا f طاق ہو گا اور اس کا دوری عرصہ $2l$ ہو گا۔

اگر $g(x)$ مماثلی صفر نہ ہو تب مساوات 13.34 کی بجائے درج ذیل نتیجہ حاصل ہو گا۔

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s \tag{13.35}$$

ہمارے اس نتیجہ کے تحت دو عدد ابتدائی شرائط اور سرحدی شرائط مل کر مساوات موج کا حل یکتا طور پر تعین کرتی ہیں۔

سوالات

سوال 13.59: مساوات 13.30 دیکھ کر x اور t کو v اور z کی صورت میں لکھتے ہوئے مساوات 13.31 سے مساوات 13.29 حاصل کریں۔

سوال 13.60 تا سوال 13.65 میں مساوات 13.34 استعمال کرتے ہوئے شکل 13.6 کی طرح مختلف لمحات پر تار کی انحراف $u(x,t)$ کی ترسیم کھینچیں۔تار کی لمبائی اکائی (1) ہے اور اس کے دونوں سرے ہل نہیں سکتے ہیں۔ابتدائی رفتار صفر ہے جبکہ ابتدائی انحراف $f(x)$ ہے۔ k کی کوئی بھی چھوٹی قیمت مثلاً $k = 0.01$ لیں۔

سوال 13.60: $f(x) = k\sin 2\pi x$

سوال 13.61: $f(x) = kx(1-x)$

سوال 13.62: $f(x) = k(x - x^3)$

سوال 13.63: $f(x) = k(x^2 - x^4)$

سوال 13.64: $f(x) = k(x^3 - x^5)$

سوال 13.65: $f(x) = k\sin^2 \pi x$

سوال 13.66 تا سوال 13.70 میں دیے گئے تبادل استعمال کرتے ہوئے جزوی تفرقی مساوات حل کریں۔

سوال 13.66: $xu_{xy} = yu_{yy} + u_y \quad (v = x,\, z = xy)$

سوال 13.67: $u_{xy} - u_{yy} = 0 \quad (v = x,\, z = x + y)$
جواب: $u = f_1(x) + f_2(x + y)$

سوال 13.68: $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x,\, z = x - y)$

سوال 13.69: $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x,\, z = x + y)$
جواب: $u = xf_1(x + y) + f_2(x + y)$

سوال 13.70: $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0 \quad (v = x + y,\, z = 2x - y)$

سوال 13.71: **خطی جزوی تفرقی مساوات کی اقسام**
درج ذیل طرز کی مساوات

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{13.36}$$

کو $AC - B^2 > 0$ کی صورت میں **بیضوی**[22]، $AC - B^2 = 0$ کی صورت میں **قطع مکافی**[23] اور $AC - B^2 < 0$ کی صورت میں **قطع زائد**[24] کہتے ہیں۔ یہاں A، B اور C از خود x اور y کے تفاعل ہو سکتے ہیں۔ مساوات 13.36 سطح xy کی مختلف حصوں میں مختلف قسم کا ہو سکتا ہے۔ تصدیق کریں کہ

لاپلاسی مساوات $u_{xx} + u_{yy} = 0$ بیضوی ہے
حراری مساوات $u_t = c^2u_{xx}$ قطع مکافی ہے
جبکہ مساوات موج $u_{tt} = c^2u_{xx}$ قطع زائد ہے۔

اس کے برعکس $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ بالائی نصف سطح پر بیضوی، x محور پر قطع مکافی اور نچلی نصف سطح پر قطع زائد ہے۔

---

[22] elliptic
[23] parabolic
[24] hyperbolic

سوال 13.72: اگر مساوات 13.36 کی قسم قطع زائد ہو تب $v = \phi(x, y)$ اور $z = \psi(x, y)$ استعمال کرتے ہوئے اس کو $u_{vz} = R^*(v, z, u, u_v, u_z)$ صورت میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں $\phi = c_1$ اور $\psi = c_2$ (c_1 اور c_2 مستقل ہیں) مساوات $Ay'^2 - 2By' + C = 0$ کے حل $y = y(x)$ ہیں۔ تصدیق کریں کہ مساوات 13.29 کی صورت میں درج ذیل تبادل حاصل ہوں گے۔

$$\phi = x + ct, \quad \psi = x - ct$$

جواب: مساوات موج کو $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ لکھ کر $A = 1$ ، $B = 0$ اور $C = -c^2$ ملتے ہیں۔ چونکہ ہمارے متغیرات t اور x ہیں لہٰذا مساوات 13.36 کو $1u_{tt} + 0 - c^2 u_{xx} = 0$ لکھ سکتے ہیں۔ یوں ہمیں $A(\frac{dx}{dt})^2 - 2B(\frac{dx}{dt})^2 - c^2 = 0$ یعنی $(\frac{dx}{dt})^2 - c^2 = 0$ یا $\frac{dx}{dt} = \mp c$ کے حل درکار ہیں جو $x = \mp ct + k$ یعنی $x \mp ct = k$ ہیں۔ یوں $\phi = x + ct$ اور $\psi = x - ct$ ملتے ہیں۔

سوال 13.73: اگر مساوات 13.36 کی قسم قطع مکافی ہو تب $v = x$ اور $z = \psi(x, y)$ استعمال کرتے ہوئے اس کو $u_{vv} = R^*(v, z, u, u_v, u_z)$ صورت میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں ψ حاصل کرنے کی ترکیب سوال 13.72 میں دی گئی ہے۔ اس حقیقت کو سوال 13.68 کی تفرقی مساوات کے لئے ثابت کریں۔
جواب: $y'^2 - 2y' + 1 = (y' - 1)^2 = 0$ سے $y = x + c$ یا $\psi(x, y) = x - y$ ملتا ہے۔ $v = x$ اور $z = x - y$ ہیں۔

سوال 13.74 تا سوال 13.78 شہتیر کی لرزش میں مبنی ہیں۔

سوال 13.74: افقی شہتیر (شکل 13.8-الف) کی انتصابی لرزش درج ذیل جزوی تفرقی مساوات دیتی ہے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \qquad c^2 = \frac{EI}{\rho A} \tag{13.37}$$

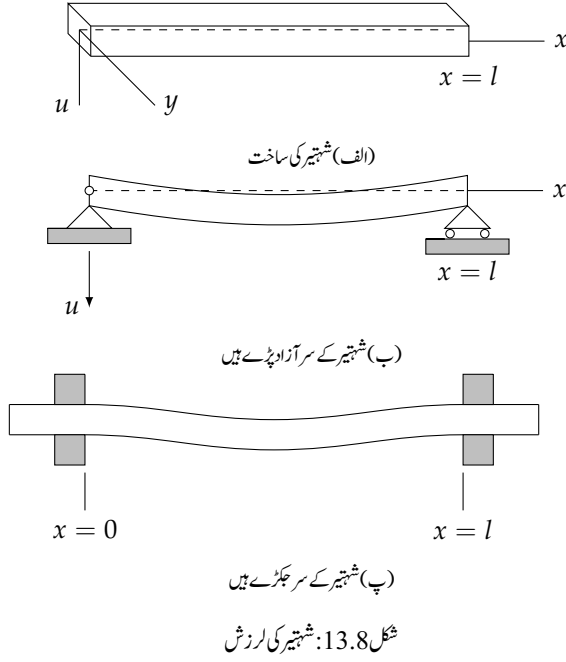
جہاں E ینگ مقیاس لچک، محور y کے لحاظ سے I جمودی معیار اثر، ρ کثافت اور A رقبہ عمودی تراش ہیں۔ مساوات 13.37 میں $u = F(x)G(t)$ پر کرتے ہوئے علیحدگی متغیرات سے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}
&\frac{F^{(4)}}{F} = -\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \beta^4 = \text{مستقل},\\
&F(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x,\\
&G(t) = a \cos c\beta^2 t + b \sin c\beta^2 t
\end{aligned}$$

(الف) شہتیر کی ساخت

(ب) شہتیر کے سر آزاد پڑے ہیں

(پ) شہتیر کے سر جکڑے ہیں

شکل 13.8: شہتیر کی لرزش

سوال 13.75: ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے مساوات 13.37 کے وہ حل $u_n = F_n(x)G_n(t)$ دریافت کریں جو درج ذیل ابتدائی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں (شکل 13.8-ب)۔

$$\text{شہتیر کے دونوں سر دیوار پر آزاد رکھے گئے ہیں} \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$$
$$\text{یوں سروں پر صفر معیار اثر لہٰذا صفر گولائی ہو گی} \quad u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(l,t) = 0$$

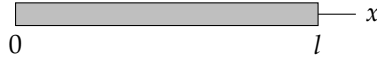
جواب:

$$F_n = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad G_n = a_n \cos\frac{cn^2\pi^2 t}{l^2}$$

سوال 13.76: مساوات 13.37 کا وہ حل جو سوال 13.75 کے شرائط کے ساتھ ساتھ ابتدائی انحراف $u(x,0) = f(x) = x(l-x)$ کو مطمئن کرتا ہو حاصل کریں۔

سوال 13.77: شہتیر کے دونوں سروں سے جکڑنے سے کیا ابتدائی شرائط پیدا ہوں گے (شکل 13.8-پ)؟

جواب: $u(0,t) = 0, \quad u(l,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0$

0 l x

شکل 13.9: لمبی سلاخ

سوال 13.78: تصدیق کریں کہ سوال 13.74 میں حاصل $F(x)$ سوال 13.77 میں دی گئی شرائط کو اس صورت مطمئن کرتا ہے جب βl درج ذیل مساوات کے جذر ہوں۔

$$\cosh \beta l \cos \beta l = 1 \tag{13.38}$$

مساوات 13.38 کے چند حل کا تخمینہ لگائیں۔

13.5 یک بعدی بہاو حرارت

ہم جنسی ماڈہ میں حرارت کی بہاو حراری مساوات (حصہ 11.9)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \qquad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$$

دیتی ہے جہاں $u(x, y, z, t)$ جسم کا درجہ حرارت، K جسم کی حراری موصلیت، σ جسم کی مخصوص حراری استعداد اور ρ جسم کے ماڈہ کی کثافت ہے۔ $\nabla^2 u$ درجہ حرارت u کا لاپلاسی ہے جو کارتیسی نظام کی محدد x ، y ، z کے لحاظ سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

آئیں ایک لمبی سلاخ یا تار جو x محور پر رکھی گئی ہو میں درجہ حرارت پر غور کرتے ہیں (شکل 13.9)۔ یہ سلاخ ہم جنسی ماڈہ سے بنی ہے اور اس کا رقبہ عمودی تراش یکساں ہے۔ اس سلاخ کے اطراف کو مکمل طور پر غیر موصل سے گھیر کر حاجز شدہ کیا گیا ہے لہٰذا سلاخ میں حرارت کی بہاو صرف لمبائی کے رخ ممکن ہے۔ اس طرح u صرف x اور t پر منحصر ہو گا لہٰذا حراری مساوات درج ذیل یک بعدی حراری مساوات[25] کی صورت اختیار کرے گی۔

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.39}$$

---

[25] one dimensional heat equation

ہم مساوات 13.39 کو کئی اہم سرحدی شرائط اور ابتدائی شرائط کے لئے حل کرتے ہیں۔ہم یک بعدی حراری مساوات کو مساوات موج کی طرح حل کرتے ہوئے دیکھیں گے کہ اس کا حل مکمل طور پر مساوات موج کے حل سے مختلف ہو گا۔اس کی وجہ یہ ہے کہ حراری مساوات میں $\frac{\partial u}{\partial t}$ جبکہ مساوات موج میں $\frac{\partial u}{\partial t^2}$ پایا جاتا ہے۔(یوں سوال 13.71 میں جزوی تفرقی مساوات کی درجہ بندی یقیناً نہایت اہمیت کے حامل ہے۔)

آئیں پہلے اس صورت کو دیکھیں جہاں سلاخ کے سر $x = 0$ اور $x = l$ صفر درجہ حرارت پر رکھے گئے ہوں۔اس طرح سرحدی شرائط تمام t کے لئے

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \qquad (\text{تمام } t) \tag{13.40}$$

ہوں گے جو ہو بہو مساوات 13.12 کی طرح ہیں۔فرض کریں کہ سلاخ میں ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔یوں ابتدائی شرط

$$u(x,0) = f(x) \tag{13.41}$$

ہو گی۔ہم مساوات 13.39 کا ایسا حل $u(x,t)$ دریافت کرتے ہیں جو مساوات 13.40 اور مساوات 13.41 کے شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

پہلا قدم۔ ہم علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.39 کا ایسا حل حاصل کرتے ہیں جو مساوات 13.40 کی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔یوں درج ذیل سے شروع کرتے ہیں۔

$$u(x,t) = F(x)G(t) \tag{13.42}$$

مساوات 13.42 اور اس کے تفرق کو مساوات 13.39 میں پر کرتے ہوئے

$$F\dot{G} = c^2F''G$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $(')$ سے مراد x کے ساتھ تفرق اور $(\dot{})$ سے مراد t کے ساتھ تفرق ہے۔اس مساوات کے دونوں اطراف کو c^2FG سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\dot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} \tag{13.43}$$

ملتا ہے جس کا بایاں ہاتھ صرف t اور دایاں ہاتھ صرف x پر منحصر ہے لہٰذا حصہ 13.3 کی طرح ہم اخذ کرتے ہیں کہ مساوات 13.43 کے دونوں اطراف کسی مستقل مثلاً k کے برابر ہوں گے۔آپ خود تسلی کر سکتے ہیں کہ

$k \geq 0$ سے حاصل حل $u = FG$ جو مساوات 13.40 کو مطمئن کرتا ہو $u \equiv 0$ ہے (جس میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے ہیں)۔اس طرح مساوات 13.43 کے دونوں اطراف کو منفی $k = -p^2$ کے برابر پر کرتے ہوئے

$$\frac{\dot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = -p^2$$

درج ذیل دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$F'' + p^2F = 0 \tag{13.44}$$

$$\dot{G} + c^2p^2G = 0 \tag{13.45}$$

دوسرا قدم۔ مساوات 13.44 کا عمومی حل

$$F(x) = A\cos px + B\sin px \tag{13.46}$$

ہے لہٰذا مساوات 13.40 کے تحت

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(l,t) = F(l)G(t) = 0$$

ہو گا۔اب $G(t) \equiv 0$ کی صورت میں $u \equiv 0$ حاصل ہو گا لہٰذا ہم $F(0) = 0$ اور $F(l) = 0$ چنتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں مساوات 13.46 سے $F(0) = A = 0$ اور

$$F(l) = B\sin pl = 0$$

ملتے ہیں جہاں $B = 0$ لینے سے $u \equiv 0$ حاصل ہو گا لہٰذا $B \neq 0$ اور

$$\sin px = 0 \quad \implies \quad p = \frac{n\pi}{l}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

ہوں گے۔اس طرح $B = 1$ منتخب کرتے ہوئے مساوات 13.43 کو مطمئن کرنے والا مساوات 13.44 کا درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

یہاں بھی حصہ 13.3 کی طرح $n = -1, -2, \cdots$ لینے کی ضرورت نہیں ہے۔

ہم اب مساوات 13.45 پر غور کرتے ہیں جو $p = \frac{n\pi}{l}$ کی صورت میں درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

اس کا عمومی حل

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

ہے جہاں B_n مستقل ہے۔اس طرح مساوات 13.40 کو مطمئن کرتا مساوات 13.39 کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13.47}$$

تیسرا قدم۔ ایسا حل جو مساوات 13.41 کو بھی مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل تسلسل پر غور کرتے ہیں

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \qquad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}\right) \tag{13.48}$$

جو مساوات 13.41 کے ساتھ مل کر

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} = f(x)$$

دیتی ہے۔یوں اگر مساوات 13.48 نے مساوات 13.41 کو مطمئن کرنا ہو تب B_n یوں منتخب کرنے ہوں گے کہ $u(x,0)$ تفاعل $f(x)$ کی طاق دوری توسیع کی تسلسل یعنی فوریئر سائن تسلسل ہو جس کے عددی سر درج ذیل ہوں گے (مساوات 12.34)۔

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{13.49}$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ وقفہ $0 \le x \le l$ پر تفاعل $f(x)$ ٹکڑوں میں استمراری (حصہ 6.1) ہے اور اس وقفہ کے تمام اندرونی نقطوں پر اس کے یک طرفہ تفرق (شکل 12.4) پائے جاتے ہیں۔ان شرائط کے ساتھ مساوات 13.48 میں دی گیا تسلسل، جس کے عددی سر مساوات 13.49 دیتی ہے، ہمارے مسئلے کا حل ہو گا۔اس کا ثبوت جو سوال 18.98 اور سوال 18.99 میں پیش کیا گیا ہے کے لئے تسلسل کی یکساں ارتکاز کے بارے میں تفصیلی معلومات ضروری ہے۔

حاصل حل میں قوت نمائی جزو کی بنا جیسے جیسے t لامتناہی کے قریب تر پہنچے مساوات 13.48 کے تمام ارکان ویسے ویسے صفر کے قریب تر پہنچتے ہیں۔تنزل کی شرح n پر منحصر ہو گی۔

مثال 13.3: ابتدائی درجہ حرارت

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\frac{l}{2} \\ l-x & \frac{l}{2}<x<l \end{cases}$$

اور $l=\pi$ کی صورت میں مساوات 13.49 سے

$$B_n=\frac{2}{l}\Big(\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\Big) \tag{13.50}$$

ملتا ہے جو طاق n کی صورت میں $B_n=0$ اور جفت n کی صورت میں

$$B_n=\frac{4}{n^2\pi} \qquad (n=1,5,9,\cdots)$$
$$B_n=-\frac{4}{n^2\pi} \qquad (n=3,7,11,\cdots)$$

دیتا ہے۔یوں حل درج ذیل ہو گا جس کو شکل 13.10 میں دکھایا گیا ہے۔اس کا شکل 13.7 کے ساتھ موازنہ کریں۔

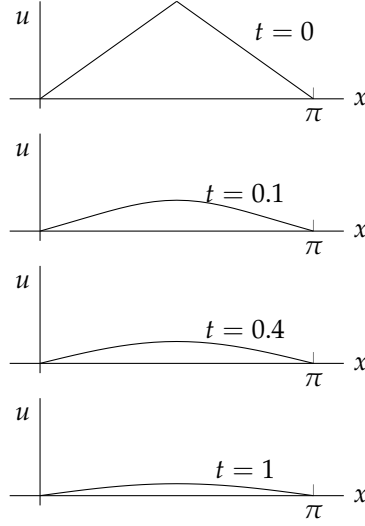
$$u(x,t)=\frac{4}{\pi}\Big[\sin xe^{-c^2t}-\frac{1}{9}\sin 3xe^{-9c^2t}+\cdots\Big]$$

□

سوالات

سوال 13.79: شکل 13.10 کا شکل 13.7 کے ساتھ موازنہ کریں۔دونوں میں کیا اہم فرق پایا جاتا ہے۔
جواب: شکل 13.10 غیر ارتعاشی ہے جبکہ مساوات موج کا حل ارتعاشی ہے

سوال 13.80: مساوات 13.47 میں کسی مخصوص n کے لئے K، σ اور ρ کا تنزل پر کیا اثر پایا جاتا ہے؟
جواب: K بڑھنے سے تنزل بڑھتی ہے جبکہ σ اور ρ کے بڑھنے سے تنزل گھٹتی ہے۔

سوال 13.81: u_1، u_2 اور u_3 کا ترسیم $B_n=1$، $c=1$ اور $l=\pi$ لیتے ہوئے $t=0$، $t=1$ اور $t=2$ کے لئے کھینچیں۔

شکل 13.10: مختلف لمحات پر مثال 13.3 کا حل

سوال 13.82: ایک سلاخ جس کے اطراف مکمل طور حاجز شدہ ہیں کے سر برقرار $u(0,t)=U_1$ اور $u(0,l)=U_2$ پر رکھے گئے ہیں۔ سلاخ کی لمبائی l ہے۔ بہت دیر بعد (یعنی $t\to\infty$ پر) سلاخ میں درجہ حرارت $u_I(x)$ دریافت کریں۔

جواب: $u_I=U_1+(U_2-U_1)\frac{x}{l}$ جہاں $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.83 تا سوال 13.88 میں لوہے کی سلاخ کا درجہ حرارت $u(x,t)$ دریافت کریں۔ سلاخ کی لمبائی $L=1\,\mathrm{m}$ ہے جبکہ لوہے کے مستقل $K=73\,\mathrm{W\,m^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$ ، $\sigma=444\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}$ اور $\rho=7860\,\mathrm{kg/m^3}$ ہیں۔ سلاخ کا رقبہ عمودی تراش $1\,\mathrm{cm^2}$ ہے جبکہ اس کے سر $0\,{}^\circ\mathrm{C}$ پر برقرار رکھے گئے ہیں۔ ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔ سلاخ کے اطراف حاجز شدہ ہیں۔

سوال 13.83:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\frac{L}{2} \\ L-x & \frac{L}{2}<x<L \end{cases}$$

جواب: $\lambda_1^2=\frac{73\pi^2}{3489840}$ $\qquad u=\frac{4}{\pi^2}(e^{-\lambda_1^2 t}\sin\pi x-\frac{1}{9}e^{-9\lambda_1^2 t}\sin 3\pi x+-\cdots)$

سوال 13.84: $f(x) = \sin \pi x$
جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $u = e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x$

سوال 13.85:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $u = (\frac{2}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^3})e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x + (\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{\pi^3})e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x \cdots$

سوال 13.86: $f(x) = x(L - x)$
جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $u = \frac{8}{\pi^3}(e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x + \frac{1}{9}e^{-9\lambda_1^2 t} \sin 3\pi x + \cdots)$

سوال 13.87: $f(x) = x(L - x^2)$
جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $u = \frac{12}{\pi^3}e^{-\lambda_1^2 t} \sin \pi x - \frac{3}{2\pi^3}e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x \cdots$

سوال 13.88: $f(x) = x \sin \pi x$
جواب: $\lambda_1^2 = \frac{73\pi^2}{3489840}$ $u = \frac{1}{2}e^{-\lambda_1^2 t \sin \pi x - \frac{16}{9\pi^2}e^{-4\lambda_1^2 t} \sin 2\pi x} \cdots$

سوال 13.89: ایک سلاخ جس کی لمبائی L ہے ہر طرف سے (بشمول دونوں سر) حاجز شدہ ہے۔ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔طبعی معلومات: سلاخ کے سر سے حراری توانائی کا اخراج سر پر $\frac{\partial u}{\partial x}$ کے راست تناسب ہو گا۔ تصدیق کریں کہ دی گئی معلومات درج ذیل کے مترادف ہے۔

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$$

علیحدگی متغیرات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حل حاصل کریں

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t}, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$$

جہاں A_0 اور A_n مساوات 12.32 سے درج ذیل ہیں۔

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \, dx, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

سوال 13.90: سوال 13.89 میں $t \to \infty$ پر $u \to A_0$ ملتا ہے۔کیا یہ آپ کے توقع کے مطابق ہے؟

سوال 13.91 تا سوال 13.95 کو سوال 13.89 میں دی گئی صورت حال کے لئے حل کریں جہاں $l=\pi$ اور $c=1$ ہیں۔

سوال 13.91: $f(x)=1$
جواب: $u(x,t)=1$

سوال 13.92: $f(x)=x$
جواب: $u=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(e^{-t}\cos x+\frac{1}{9}e^{-9t}\cos 3x+\frac{1}{25}e^{-25t}\cos 5x\cdots)$

سوال 13.93: $f(x)=x^2$
جواب: $u=\frac{\pi^2}{3}-4(e^{-t}\cos x-\frac{1}{4}e^{-4t}\cos 2x+\frac{1}{9}e^{-9t}\cos 3x\cdots)$

سوال 13.94:

$$f(x)=\begin{cases}x & 0<x<\frac{L}{2}\\ L-x & \frac{L}{2}<x<L\end{cases}$$

جواب: $u=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}(e^{-4t}\cos 2x+\frac{1}{9}e^{-36t}\cos 6x+\frac{1}{25}e^{-100t}\cos 10x\cdots)$

سوال 13.95:

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\frac{L}{2}\\ -1 & \frac{L}{2}<x<L\end{cases}$$

جواب: $u=\frac{4}{\pi}(e^{-t}\cos x-\frac{1}{3}e^{-9t}\cos 3x+\frac{1}{5}e^{-25t}\cos 5x\cdots)$

سوال 13.96: فرض کریں کہ سوال 13.82 میں ابتدائی درجہ حرارت $u(x,0)=f(x)$ ہے۔ثابت کریں کہ کسی بھی لمحے پر سلاخ میں درجہ حرارت $u(x,y)=u_I(x)+u_{II}(x,t)$ ہو گی جہاں u_I پہلی کی طرح ہے جبکہ u_{II} درج ذیل ہے

$$u_{II}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{c^2n^2\pi^2}{l^2}t}$$

جہاں B_n درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}B_n&=\frac{2}{l}\int_0^l[f(x)-u_I(x)]\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x+\frac{2}{n\pi}[(-1)^nU_2-U_1]\end{aligned}$$

13.6 لامتناہی لمبائی کی سلاخ میں بہاو حرارت

ہم اطراف سے حاجز شدہ ایسی سلاخ جو دونوں جانب لامتناہی تک لمبی ہو کی صورت میں حراری مساوات

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13.51}$$

پر غور کریں گے۔ایسی صورت میں ہمارے پاس کوئی سرحدی شرط نہیں ہے جبکہ ابتدائی معلومات درج ذیل ہے۔

$$u(x,0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{13.52}$$

اس مسئلے کو حل کرنے کی خاطر ہم مساوات 13.51 میں $u(x,t) = F(x)G(t)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں

$$F'' + p^2 F = 0 \tag{13.53}$$

$$\dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \tag{13.54}$$

جن کا موازنہ مساوات 13.44 اور مساوات 13.45 کے ساتھ کرتے ہوئے درج ذیل حل لکھے جا سکتے ہیں

$$F(x) = A\cos px + B\sin px \quad \text{اور} \quad G(t) = e^{-c^2p^2t}$$

جہاں A اور B اختیاری مستقل ہیں۔اس طرح مساوات 13.51 کا حل

$$u(x,t;p) = FG = (A\cos px + B\sin px)e^{-c^2p^2t} \tag{13.55}$$

ہو گا۔[گزشتہ حصے کی طرح یہاں بھی علیحدگی کا مستقل k منفی لینا ہو گا یعنی $k = -p^2$ چونکہ مثبت k کی صورت میں مساوات 13.55 میں مسلسل بڑھتی قوت نمائی تفاعل پیدا ہوتا ہے جس کا کوئی طبعی مطلب ممکن نہیں ہے۔]

مساوات 13.55 کی تفاعل میں p کی قیمتوں کو کسی مستقل عدد کا ضربی لے کر ان تفاعل کی تسلسل لکھی جا سکتی ہے لیکن ایسی تسلسل لمحہ $t = 0$ پر x کے لحاظ سے دوری ہو گی لیکن $f(x)$ غیر دوری ہے۔یوں فطری بات ہے کہ ہم فوریئر تسلسل کی بجائے فوریئر تکمل کی طرف رجحان کریں۔

چونکہ مساوات 13.55 میں A اور B اختیاری مستقل ہیں لہٰذا ہم انہیں p کے تفاعل $A = A(p)$ اور $B = B(p)$ تصور کر سکتے ہیں۔چونکہ حراری مساوات خطی اور ہم جنسی ہے لہٰذا

$$u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t;p)\,\mathrm{d}p = \int_0^\infty [A(p)\cos px + B(p)\sin px]e^{-c^2p^2t}\,\mathrm{d}p \tag{13.56}$$

مساوات 13.51 کا حل ہو گا بشرطیکہ یہ تکمل موجود ہو اور یہ دو مرتبہ x کے ساتھ اور ایک مرتبہ t کے ساتھ قابل تفرق ہو۔

مساوات 13.56 اور ابتدائی معلومات مساوات 13.52 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u(x,0)=\int_0^{\infty}[A(p)\cos px+B(p)\sin px]\,\mathrm{d}p=f(x) \tag{13.57}$$

مساوات 12.69 اور مساوات 12.70 استعمال کرتے ہوئے یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$A(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos pv\;\mathrm{d}v,\quad B(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin pv\;\mathrm{d}v \tag{13.58}$$

صفحہ 937 پر مساوات 12.82 کے تحت اس تکمل کو

$$u(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos(px-pv)\;\mathrm{d}v\Big]\,\mathrm{d}p$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 13.56 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos(px-pv)e^{-c^2p^2t}\;\mathrm{d}v\Big]\,\mathrm{d}p$$

یہ فرض کرتے ہوئے کہ اس دوہرا تکمل کی ترتیب بدلی جا سکتی ہے ہم اس کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\Big[\int_0^{\infty}e^{-c^2p^2t}\cos(px-pv)\;\mathrm{d}p\Big]\,\mathrm{d}v \tag{13.59}$$

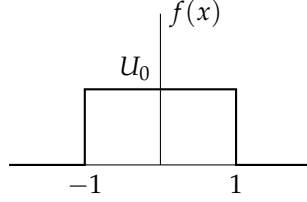
اندرونی تکمل کو درج ذیل کلیہ (جس کو سوال 19.94 میں اخذ کیا گیا ہے) کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔

$$\int_0^{\infty}e^{-s^2}\cos 2bs\;\mathrm{d}s=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2} \tag{13.60}$$

مساوات 13.60 میں نیا متغیرہ p متعارف کرتے ہوئے $s=cp\sqrt{t}$ لکھ کر اور

$$b=\frac{x-v}{2c\sqrt{t}}$$

لیتے ہوئے مساوات 13.60 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\int_0^{\infty}e^{-c^2p^2t}\cos(px-pv)\;\mathrm{d}p=\frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}}$$

شکل 13.11: ابتدائی درجہ حرارت (مثال 13.4)

جس کو مساوات 13.59 میں پر کرتے ہوئے

$$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}}\,\mathrm{d}v \tag{13.61}$$

ملتا ہے۔ آخر میں ہم تکمل کا متغیرہ $z=\frac{v-x}{2c\sqrt{t}}$ متعارف کرتے ہوئے

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2cz\sqrt{t})e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \tag{13.62}$$

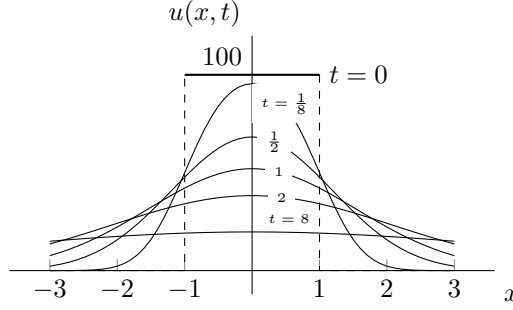
حاصل کرتے ہیں۔ تمام x کے لئے محدود $f(x)$ اور ہر محدود وقفہ پر قابل تکمل $f(x)$ کی صورت میں یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ مساوات 13.61 اور مساوات 13.62 دونوں مساوات 13.51 اور مساوات 13.52 کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا یہ موجودہ مسئلے کا حل ہیں۔

مثال 13.4: لامتناہی لمبائی کی سلاخ میں درجہ حرارت
لامتناہی لمبائی کی سلاخ میں ابتدائی درجہ حرارت درج ذیل ہے (شکل 13.4)۔

$$f(x)=\begin{cases} U_0=\text{مستقل} & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

مساوات 13.61 سے

$$u(x,t)=\frac{U_0}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}}\,\mathrm{d}v$$

لکھتے ہیں۔ تکمل کا نیا متغیرہ $z=\frac{v-x}{2c\sqrt{t}}$ استعمال کرتے ہوئے -1 تا 1 پر v کا تکمل $\frac{-1-x}{2c\sqrt{t}}$ تا $\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}$

شکل 13.12: حل $u(x,t)$ برائے مثال 13.4

پر z کے تکمل میں تبدیل ہو گا یعنی؛

$$u(x,t)=\frac{U_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{-1-x}{2c\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{2c\sqrt{t}}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \qquad (z>0) \tag{13.63}$$

اس تکمل کو بنیادی تفاعل کی صورت میں حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے البتہ اس کو **تفاعل خلل**[26] کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 13.12 میں $u(x,t)$ کو $U_0=100\,^{\circ}\mathrm{C}$ ، $c^2=1\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}$ کے لئے لمحات $t=\frac{1}{8},\frac{1}{2},1,2,8$ پر دکھایا گیا ہے۔ □

سوالات

سوال 13.97: نقطہ $x=0.5,1,1.5$ پر مثال 13.4 میں $U_0=100\,^{\circ}\mathrm{C}$ اور $c^2=1\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$ لے کر حاصل کردہ درجہ حرارت $u(x,t)$ کی ترسیم مختلف لمحات پر کھینچیں۔ کیا جوابات آپ کی سوچ کے مطابق ہیں؟

تفاعل خلل درج ذیل تکمل کو کہتے ہیں

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-w^2}\,\mathrm{d}w$$

---

[26] error function

جو انجینئری میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔اس سے واقفیت پیدا کرنے کی خاطر سوال 13.98 تا سوال 13.105 حل کریں۔

سوال 13.98: تصدیق کریں کہ تفاعل خلل طاق ہے۔

سوال 13.99: درج ذیل ثابت کریں۔

$\int_a^b e^{-w^2}\,\mathrm{d}w = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\operatorname{erf} b - \operatorname{erf} a), \quad \int_{-b}^{b} e^{-w^2}\,\mathrm{d}w = \sqrt{\pi}\operatorname{erf} b$

سوال 13.100: قلم و کاغذ سے متکمل e^{-w^2} کی قیمتوں کا جدول بناتے ہوئے اس کی ترسیم کھینچیں جو قوس جرس[27] کہلاتی ہے۔

سوال 13.101: قوس جرس (جس کو آپ نے سوال 13.100 میں حاصل کیا) کے نیچے رقبہ معلوم کرتے ہوئے $\operatorname{erf} x$ کا جدول $x = 0, 0.2, 0.4, \cdots, 1, 1.5, 2$ کے لئے حاصل کریں۔قوس جرس پر افقی اور انتصابی لکیریں کھینچ کر قوس کے نیچے مکعب گن کر رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

جوابات: نقطہ اعشاریہ کے بعد صرف دو اعداد لیتے ہوئے۔

$0.00, 0.22, 0.43, 0.60, 0.74, 0.84, 0.97, 1.00$

سوال 13.102: تفاعل خلل کی متکمل e^{-w^2} کی مکلارن تسلسل حاصل کریں۔اس تسلسل کا تکمل لے کر تفاعل خلل $\operatorname{erf} x$ کی مکلارن تسلسل دریافت کریں۔

جواب: $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216}\cdots)$

سوال 13.103: مساوات 13.63 سے درج ذیل صورت حاصل کریں۔

$$u(x,t) = \frac{U_0}{2}\Big[\operatorname{erf}\frac{1-x}{2c\sqrt{t}} + \operatorname{erf}\frac{1+x}{2c\sqrt{t}}\Big] \qquad (t > 0)$$

سوال 13.104: اگر $x > 0$ کی صورت میں $f(x) = 1$ اور $x < 0$ کی صورت میں $f(x) = 0$ ہو تب تصدیق کریں کہ مساوات 13.62 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2c\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \qquad (t > 0)$$

---

[27] bell curve

سوال 13.105: چونکہ $\operatorname{erf}\infty = 1$ ہے لہٰذا سوال 13.104 سے درج ذیل حاصل کریں۔

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\frac{x}{2c\sqrt{t}}$$

سوال 13.106: نصف لامتناہی لمبی سلاخ (0 تا ∞) کے $x = 0$ پر سر کو صفر درجہ پر رکھا گیا ہے جبکہ اس کی ابتدائی درجہ حرارت $f(x)$ ہے۔ثابت کریں کہ اس مسئلہ کا حل درج ذیل ہے جہاں $\tau = 2c\sqrt{t}$ ہے۔

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\int_{-\frac{x}{\tau}}^{\infty} f(x+\tau w)e^{-w^2}\,\mathrm{d}w - \int_{\frac{x}{\tau}}^{\infty} f(-x+\tau w)e^{-w^2}\,\mathrm{d}w\Big] \tag{13.64}$$

سوال 13.107: $f(v)$ کو طاق تصور کرتے ہوئے مساوات 13.61 سے مساوات 13.64 حاصل کریں۔

سوال 13.108: $f(x) = 1$ لیتے ہوئے ثابت کریں کہ سوال 13.106 میں درج ذیل حل حاصل ہو گا۔

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\tau}} e^{-w^2}\,\mathrm{d}w = \operatorname{erf}\frac{x}{2c\sqrt{t}} \qquad (t>0)$$

سوال 13.109: درج ذیل ابتدائی معلومات کی صورت میں مساوات 13.64 کیا صورت اختیار کرے گی۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 & a<x<b \qquad (a>0) \\ 0 & \text{باقی جگہوں پر} \end{cases}$$

جواب:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a-x}{\tau}}^{\frac{b-x}{\tau}} e^{-w^2}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{a+x}{\tau}}^{\frac{b+x}{\tau}} e^{-w^2}\,\mathrm{d}w$$

سوال 13.110: $x>0$ پر $f(x)=1$ اور $x<0$ پر $f(x)=-1$ لیتے ہوئے مساوات 13.61 یا مساوات 13.62 کی استعمال سے سوال 13.108 کا نتیجہ حاصل کریں۔

سوال 13.111: ثابت کریں کہ سوال 13.61 میں کوئی دو نقطے کا ایک ہی درجہ حرارت تک پہنچنے کے لئے درکار وقت ان نقطوں کا سرحد $x = 0$ سے فاصلہ کے مربع کے راست تناسب ہو گا۔

13.7 نمونہ کشی: ارتعاش پذیر جھلی۔ دو ابعادی مساوات موج

ارتعاش کی میدان میں ایک اور اہم مسئلے کے طور پر تنی ہوئی جھلی، مثلاً طبل پر چڑھا ہوا چمڑے کا پردہ، کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ موجودہ تجزیہ حصہ 13.2 میں ارتعاش تار کی مانند ہو گا۔

ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

(الف) اکائی رقبہ پر جھلی کی کمیت یکساں ہے (ہم جنسی جھلی)۔ جھلی مکمل لچکدار اور اتنی باریک ہے کہ مڑنے کے خلاف مزاحمت فراہم نہیں کرتی ہے۔
(ب) جھلی کو تان کر، اس کی پوری سرحد سے xy مستوی میں باندھا گیا ہے۔ جھلی میں ہر نقطہ پر اور ہر رخ فی اکائی لمبائی تناؤ T یکساں ہے جو ارتعاش کے دوران تبدیل نہیں ہوتی۔
(پ) حرکت کے دوران جھلی کی انحراف $u(x, y, t)$، جھلی کی جسامت کے لحاظ سے کم ہے اور تمام زاویہ میلان چھوٹے ہیں۔

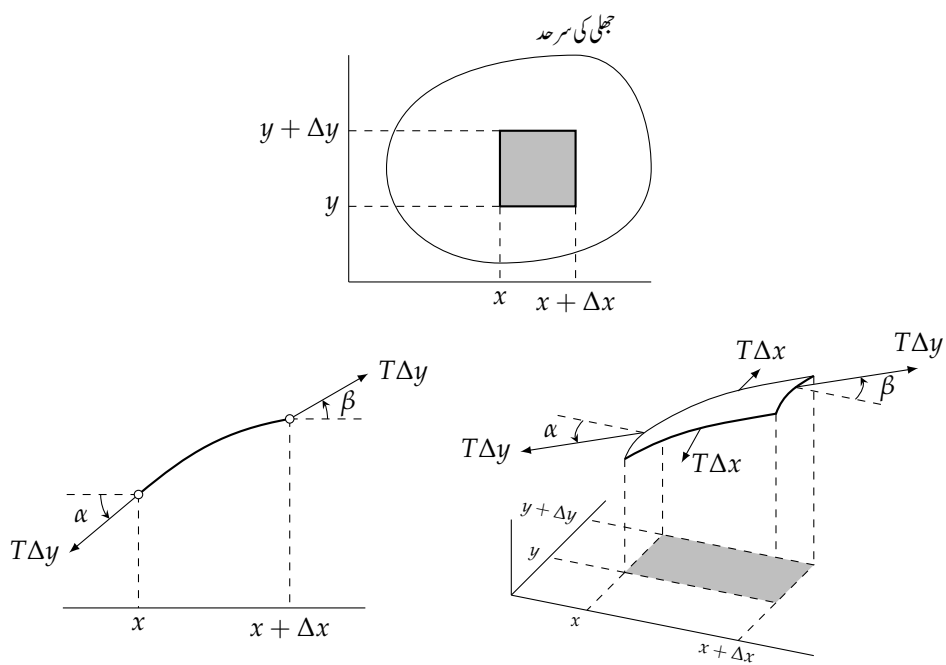
اگرچہ حقیقت میں ان مفروضوں پر مکمل طور پورا اترنا ممکن نہیں ہے، پتلی جھلی کی قلیل عرضی لرزش ان مفروضوں پر تقریباً پورا اترتی ہیں۔

جھلی کی حرکت کی جزوی تفرقی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم جھلی کے ایک چھوٹے ٹکڑے پر عمل کرنے والی قوتوں پر غور کرتے ہیں (شکل 13.13)۔ چونکہ جھلی کی انحراف اور زاویہ میلان چھوٹے ہیں لہٰذا اس ٹکڑے کے اطراف کی لمبائی تقریباً Δx اور Δy ہو گی۔ اکائی لمبائی پر قوت کو تناؤ T کہتے ہیں لہٰذا اس ٹکڑے کے اطراف پر قوت $T\Delta x$ اور $T\Delta y$ عمل کرے گی۔ چونکہ جھلی مکمل لچکدار ہے لہٰذا یہ قوتیں جھلی کی مماسی ہوں گی۔

ہم پہلے قوتوں کی افقی اجزاء پر غور کرتے ہیں۔ اطراف پر قوت کو زاویہ میلان کی کوسائن سے ضرب دینے سے ان کی افقی جزو حاصل ہو گی۔ چونکہ زاویہ میلان چھوٹے ہیں لہٰذا ان کی کوسائن تقریباً اکائی (1) کے برابر ہوں گے۔ یوں مخالف کناروں پر تقریباً برابر قوتیں پائی جائیں گی۔ یوں افقی رخ جھلی کی حرکت قابل نظر انداز ہو گی لہٰذا ہم جھلی کی حرکت کو عرضی حرکت تصور کرتے ہیں یعنی جھلی صرف اوپر نیچے حرکت کرتی ہے۔

اس ٹکڑے کی کناروں پر کھڑی رخ (yu سطح کی متوازی) قوتوں کے اجزاء[28]

$$T\Delta y \sin\beta \quad \text{اور} \quad -T\Delta y \sin\alpha$$

[28] دھیان رہے کہ کنارے پر چلتے ہوئے زاویہ میلان تبدیل ہو گا۔ α اور β زیر غور کنارے کے کسی موزوں نقطہ پر زاویہ میلان ہوں گے۔

ہوں گے جہاں منفی علامت نیچے رخ کو ظاہر کرتی ہے۔ چونکہ زاویہ میلان چھوٹے ہیں ہم ان کے $\sin$ کی جگہ ان کے $\tan$ استعمال[29] کر سکتے ہیں۔ یوں ان دو عدد قوتوں کا مجموعہ

$$\begin{aligned} T\Delta y(\sin\beta - \sin\alpha) &\approx T\Delta y(\tan\beta - \tan\alpha) \\ &= T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] \end{aligned} \tag{13.65}$$

ہو گا جہاں زیر نوشت میں x اور y جزوی تفرق کو ظاہر کرتی ہیں جبکہ y اور $y+\Delta y$ کے درمیان y_1 اور y_2 کوئی نقطے ہیں۔ اسی طرح ٹکڑے کے باقی دو کناروں پر قوتوں کے انتصابی اجزاء کا مجموعہ

$$T\Delta x[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)] \tag{13.66}$$

ہو گا جہاں x اور $x+\Delta x$ کے درمیان x_1 اور x_2 کوئی نقطے ہیں۔

نیوٹن کے دوسرے قانون کے تحت مساوات 13.65 اور مساوات 13.66 میں دی گئی قوتوں کا مجموعہ جھلی کے ٹکڑے کی کمیت $\rho\Delta A$ ضرب اسراع $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ کے برابر ہو گا۔ یہاں بلا انحراف فی اکائی رقبہ جھلی کی کمیت ρ ہے جبکہ بلا انحراف ٹکڑے کا رقبہ $\Delta A = \Delta x\Delta y$ ہے۔ یوں

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] + T\Delta x[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

ہو گا جہاں بائیں ہاتھ تفرق ٹکڑے کے کسی موزوں نقطہ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ پر حاصل کیا جائے گا۔ $\rho\Delta x\Delta y$ سے دونوں اطراف کو تقسیم کرتے ہیں۔

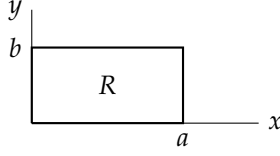
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\Big[\frac{u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y}\Big]$$

Δx اور Δy کو صفر کے قریب تر کرتے ہوئے درج ذیل جزوی تفرقی مساوات حاصل ہو گی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad c^2 = \frac{T}{\rho} \tag{13.67}$$

جس کو دو ابعادی مساوات موج[30] کہتے ہیں۔ قوسین میں بند u کا لاپلاسی $\nabla^2 u$ ہے (حصہ 10.8) لہٰذا مساوات 13.67 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 u \tag{13.68}$$

[29] چھوٹے زاویہ θ کا $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$ ہوتا ہے۔
[30] two dimensional wave equation

شکل 13.14: مستطیل جھلی

13.8 مستطیل جھلی

ارتعاش پذیر جھلی کے مسئلے کو حل کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل دو ابعادی مساوات موج کا حل $u(x,y,t)$ تلاش کرنا ہو گا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{13.69}$$

جو تمام $t\geq 0$ کے لئے پوری سرحد پر سرحدی شرط

$$u=0 \tag{13.70}$$

اور دو عدد ابتدائی شرائط

$$u(x,y,0)=f(x,y) \qquad \text{ابتدائی انحراف} \tag{13.71}$$

اور

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x,y) \qquad \text{ابتدائی رفتار} \tag{13.72}$$

کو مطمئن کرتا ہو۔یہ شرائط ارتعاش پذیر تار کے شرائط کی مانند ہیں۔آئیں شکل 13.14 میں دکھائی گئی مستطیل جھلی کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ہم پہلے مساوات 13.69 کا ایسا حل تلاش کرتے ہیں جو سرحدی شرط مساوات 13.70 کو مطمئن کرتا ہو۔یوں

$$u(x,y,t)=F(x,y)G(t) \tag{13.73}$$

کو مساوات 13.69 میں پر کرتے ہیں

$$F\ddot{G}=c^2(F_{xx}G+F_{yy}G)$$

جہاں $(')$ جزوی تفرق اور $(\dot{})$ وقت t کے ساتھ تفرق کو ظاہر کرتے ہیں۔دونوں اطراف کو c^2FG سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy})$$

ملتا ہے۔اب بایاں ہاتھ تفاعل t پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل t پر منحصر نہیں ہے لہٰذا دونوں اطراف کسی مستقل A کے برابر ہیں۔آپ حصہ 13.3 کی طرح بڑھتے ہوئے تسلی کر سکتے ہیں کہ A کے صرف منفی قیمتیں استعمال کرنے سے ایسا غیر صفر حل حاصل ہو گا جو مساوات 13.70 کی شرط کو مطمئن کرتا ہو۔اس منفی مستقل کو $-\nu^2$ سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}) = -\nu^2$$

حاصل ہوتا ہے جس کو دو علیحدہ علیحدہ سادہ تفرقی مساوات

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \qquad (\lambda = c\nu) \tag{13.74}$$

$$F_{xx} + F_{yy} + \nu^2 F = 0 \tag{13.75}$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

ہم مساوات 13.75 کا حل تلاش کرتے ہیں جو جھلی کی سرحد پر صفر کے برابر ہو گا۔ہم علیحدگی متغیرات کی ترکیب دوبارہ لاگو کرتے ہوئے

$$F(x,y) = H(x)Q(y) \tag{13.76}$$

لیتے ہیں جو کو مساوات 13.75 میں پر کرنے سے

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}x^2}Q = -\left(H\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}y^2} + \nu^2 HQ\right)$$

حاصل ہوتا ہے جس کے دونوں اطراف کو HQ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}y^2} + \nu^2 Q\right)$$

ملتا ہے جہاں بائیں ہاتھ تفاعل صرف x پر منحصر ہے جبکہ دایاں ہاتھ تفاعل صرف y پر منحصر ہے۔یوں دونوں ہاتھ کسی مستقل کے برابر ہوں گے۔یہاں بھی صرف منفی قیمت کا مستقل مثلاً $-k^2$ غیر صفر حل دیتے ہیں۔یوں

$$\frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}y^2} + \nu^2 Q\right) = -k^2$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + k^2 H = 0 \tag{13.77}$$

$$\frac{d^2 Q}{dy^2} + p^2 Q = 0 \qquad (p^2 = \nu^2 - k^2) \tag{13.78}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

دوسرا قدم۔ مساوات 13.77 اور مساوات 13.78 کے حل عمومی

$$H(x) = A\cos kx + B\sin kx \quad \text{اور} \quad Q(y) = C\cos py + D\sin py$$

ہیں جہاں A ، B ، C اور D مستقل ہیں۔یوں مساوات 13.73 اور مساوات 13.70 سے ظاہر ہے کہ جھلی کی سرحد پر $F = HQ$ صفر ہو گا۔جیسا آپ شکل 13.14 سے دیکھ سکتے ہیں، جھلی کی سرحد $x = 0$ ، $x = a$ ، $y = 0$ اور $y = b$ ہے۔یوں درج ذیل شرائط لکھے جا سکتے ہیں۔

$$H(0) = 0, \quad H(a) = 0, \quad Q(0) = 0, \quad Q(b) = 0$$

اس طرح $H(0) = A = 0$ ہو گا جبکہ

$$H(a) = B\sin ka = 0$$

میں $B = 0$ لینے سے (غیر دلچسپ حل) $H \equiv 0$ یعنی $F \equiv 0$ ملتا ہے لہٰذا ہم $B \neq 0$ فرض کرتے ہیں۔یوں $\sin ka = 0$ ہو گا جس سے $ka = m\pi$ یعنی

$$k = \frac{m\pi}{a} \qquad (\text{عدد صحیح } m) \tag{13.79}$$

حاصل ہوتا ہے۔ بالکل اسی طرح $C = 0$ جبکہ $D \neq 0$ سے $p = \frac{n\pi}{b}$ حاصل ہوتا ہے جہاں n عدد صحیح ہے۔یوں درج ذیل حل ملتے ہیں۔

$$H_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a} \quad \text{اور} \quad Q_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad {\scriptstyle m=1,2,\cdots \atop n=1,2,\cdots}$$

(ارتعاش پذیر تار کی طرح یہاں بھی $m, n = -1, -2, \cdots$ لینے کی ضرورت نہیں ہے چونکہ ایسا کرنے سے یہی حل ضرب -1 دوبارہ حاصل ہوتے ہیں۔) یوں $B = 1$ اور $D = 1$ چنتے ہوئے مساوات 13.75 کے حل درج ذیل ہوں گے

$$F_{mn}(x,y) = H_m(x)Q_n(y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad {\scriptstyle m=1,2,\cdots \atop n=1,2,\cdots} \tag{13.80}$$

جو جھلی کی سرحد پر صفر کے برابر ہیں۔

چونکہ مساوات 13.78 میں $p^2 = \nu^2 - k^2$ ہے اور مساوات 13.74 میں $\lambda = c\nu$ ہے لہٰذا

$$\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2}$$

ہو گا۔یوں $k = \frac{m\pi}{a}$ اور $p = \frac{n\pi}{b}$ کا مطابقتی λ مساوات 13.74 میں

$$\lambda = \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \qquad \begin{smallmatrix} m=1,2,\cdots \\ n=1,2,\cdots \end{smallmatrix} \tag{13.81}$$

ہو گا اور مساوات 13.74 کا مطابقتی عمومی حل درج ذیل ہو گا۔

$$G_{mn}(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t$$

یوں مساوات 13.74 کے غیر صفر حل $u_{mn}(x,y,t) = F_{mn}(x,y)G_{mn}(t)$ درج ذیل ہوں گے

$$u_{mn}(x,y,t) = (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{13.82}$$

جن میں λ_{mn} مساوات 13.81 دے گی۔ تفاعل u_{mn} کو ارتعاش پذیر جھلی کے **آئگن تفاعل**[31] یا **امتیازی تفاعل**[32] کہتے ہیں جبکہ λ_{mn} کو ارتعاش پذیر جھلی کے **آئگن اقدار**[33] یا **امتیازی اقدار**[34] کہتے ہیں۔تفاعل u_{mn} کی تعدد $\frac{\lambda_{mn}}{2\pi}$ ہو گی۔

a اور b کی مختلف قیمتیں ایک ہی امتیازی قدر دیتے ہوئے کئی مختلف تفاعل F_{mn} دے سکتی ہیں۔اس کا مطلب ہے کہ جھلی میں ایک ہی تعدد کے کئی مختلف انداز کے ارتعاش ممکن ہیں جن کی **صفر ہٹاو لکیریں**[35] مختلف ہوں گی۔ ارتعاش پذیر جھلی پر وہ لکیریں جو حرکت نہیں کرتی ہیں صفر ہٹاو لکیریں کہلاتی ہیں۔آئیں اس کی وضاحت ایک مثال کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 13.5: مکعب جھلی

ایک مکعب جھلی کا $a = 1$ ، $b = 1$ ہے۔مساوات 13.81 سے

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{m^2 + n^2} \tag{13.83}$$

---

[31] eigenfunctions
[32] characteristic functions
[33] eigenvalues
[34] characteristic values
[35] nodal lines

لہٰذا

$$\lambda_{mn} = \lambda nm$$

ہو گا لیکن $m \neq n$ کے لئے مطابقتی تفاعل

$$F_{mn} = \sin m\pi x \, \sin n\pi y \quad \text{اور} \quad F_{nm} = \sin n\pi x \, \sin m\pi y$$

ہیں جو ایک جیسے نہیں ہیں۔ مثلاً $\lambda_{12} = \lambda_{21} = c\pi\sqrt{5}$ کے مطابقتی تفاعل

$$F_{12} = \sin \pi x \, \sin 2\pi y \quad \text{اور} \quad F_{21} = \sin 2\pi x \, \sin \pi y$$

ہوں گے۔ یوں مطابقتی حل

$$u_{12} = (B_{12} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{12}^{*} \sin c\pi\sqrt{5}t)F_{12}$$
$$u_{21} = (B_{21} \cos c\pi\sqrt{5}t + B_{21}^{*} \sin c\pi\sqrt{5}t)F_{21}$$

کی صفر ہٹاو لکیریں بالترتیب $y = \frac{1}{2}$ اور $x = \frac{1}{2}$ ہوں گی (شکل 13.15-الف)۔ اگر $B_{12} = 1$ اور $B_{12}^{*} = B_{21}^{*} = 0$ ہوں تب

$$u_{12} + u_{21} = \cos c\pi\sqrt{5}t \, (F_{12} + B_{21}F_{21}) \tag{13.84}$$

ہو گا جو ایک اور انداز ارتعاش ہے جس کی امتیازی قدر $c\pi\sqrt{5}$ ہے۔ اس تفاعل کی صفر ہٹاو لکیریں درج ذیل مساوات کے حل ہوں گی۔

$$F_{12} + B_{21}F_{21} = \sin \pi x \, \sin 2\pi y + B_{21} \sin 2\pi x \, \sin \pi y = 0$$

اب $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استعمال کرتے ہوئے درج بالا کو

$$\sin \pi x \sin \pi y (\cos \pi y + B_{21} \cos \pi x) = 0 \tag{13.85}$$

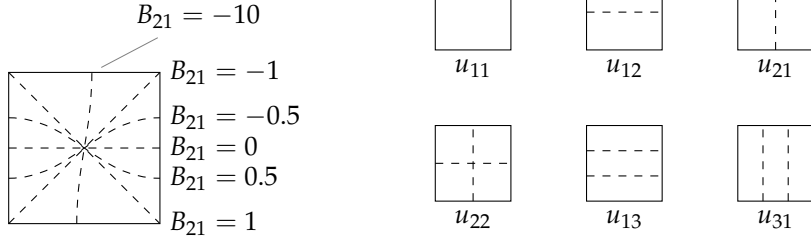
لکھا جا سکتا ہے جس کا حل B_{21} پر منحصر ہو گا (شکل 13.15-ب)۔

مساوات 13.83 سے ہم دیکھتے ہیں کہ λ_{mn} کے دو مزید مطابقتی تفاعل ممکن ہیں۔ مثلاً چار تفاعل F_{18} ، F_{81} ، F_{47} اور F_{74} کی $\lambda_{18} = \lambda_{81} = \lambda_{47} = \lambda_{74} = c\pi\sqrt{65}$ ہے چونکہ؛

$$1^1 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65$$

$B_{21} = -10$
$B_{21} = -1$
$B_{21} = -0.5$
$B_{21} = 0$
$B_{21} = 0.5$
$B_{21} = 1$

(ب)ایک ہی B_{21} کے لئے مساوات 13.84 میں دیے گئے حل

u_{11} u_{12} u_{21}
u_{22} u_{13} u_{31}

(الف)مکعب جھلی کے حل $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{13}, u_{31}$ کی صفر ہٹاو لکیریں۔

شکل 13.15: صفر ہٹاو لکیریں (مثال 13.5)

ایسا اس لئے ممکن ہے کہ 65 کو دو اعداد صحیح کے مربع کا مجموعہ مختلف طریقوں سے لکھنا ممکن ہے۔گاوس کے ایک مسئلہ کے تحت ایسا ہر اس صورت ہو گا جہاں دو اعداد کے مربع کا مجموعہ کے اجزاء مفرد میں کم از کم دو مختلف $4n+1$ صورت کے ہوں، جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔یہاں دو اعداد کے مربع کے مجموعہ 65 کو

$$65 = 5 \cdot 13 = (4+1)(12+1)$$

لکھنا ممکن ہے۔ □

تیسرا قدم۔ ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.71 اور مساوات 13.72 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم حصہ 13.3 کی طرح بڑھتے ہیں۔ہم دوہرا تسلسل[36]

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x,y,t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \tag{13.86}$$

کو لیتے ہیں جو مساوات 13.71 کے ساتھ درج ذیل دوہرا فوریئر تسلسل[37] دیتی ہے۔

$$u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = f(x,y) \tag{13.87}$$

[36]ہم حل کی یکتائی اور ارتکاز پر غور نہیں کریں گے۔
[37]double Fourier series

مستطیل R (شکل 13.14) میں f ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ استمراری ہونے کی صورت میں $f(x,y)$ کو اس دوہرا فوریئر تسلسل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا۔اس دوہرا فوریئر تسلسل کے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔ہم درج ذیل لے کر

$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{13.88}$$

مساوات 13.87 کو

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \tag{13.89}$$

لکھ سکتے ہیں جو مقررہ y کی صورت میں $f(x,y)$ کی فوریئر سائن تسلسل ہے جس کا متغیرہ x ہو گا جس کے عددی سر صفحہ 902 پر مساوات 12.34 کے تحت

$$K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \, \mathrm{d}x \tag{13.90}$$

ہوں گے۔مزید مساوات 13.88 تفاعل $K_m(y)$ کی فوریئر سائن تسلسل ہے لہٰذا اس کے عددی سر صفحہ 902 پر مساوات 12.34 کے تحت

$$B_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \sin \frac{n\pi y}{b} \, \mathrm{d}y \tag{13.91}$$

ہوں گے۔مساوات 13.91 اور مساوات 13.90 کو ملا کر درج ذیل **عمومی یولر کلیہ**[38] حاصل ہوتا ہے

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad \substack{m=1,2,\cdots \\ n=1,2,\cdots} \tag{13.92}$$

جو دوہرا تسلسل (مساوات 13.87) میں تفاعل $f(x,y)$ کے عددی سر B_{mn} دیتی ہے۔

یوں مساوات 13.86 میں B_{mn} تفاعل $f(x,y)$ سے حاصل ہوتے ہیں۔ B^*_{mn} حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات 13.86 کا t کے ساتھ جزوی تفرق لے کر ابتدائی شرط مساوات 13.72 استعمال کرتے ہوئے

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B^*_{mn} \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = g(x,y)$$

---

[38] generalized Euler formula

حاصل کرتے ہیں۔ مستطیل R (شکل 13.14) میں g ، $\frac{\partial g}{\partial x}$ ، $\frac{\partial g}{\partial y}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ استمراری ہونے کی صورت میں $g(x,y)$ کو اس دوہرا فوریئر تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں پہلی کی طرح بڑھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$B^*_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x,y) \sin\frac{m\pi x}{a}\, \sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \substack{m=1,2,\cdots \\ n=1,2,\cdots} \tag{13.93}$$

یوں مساوات 13.92 اور مساوات 13.93 سے حاصل B_{mn} اور B^*_{mn} مساوات 13.86 میں پر کرتے ہوئے حاصل حل ابتدائی شرائط کو مطمئن کرے گا۔

سوالات

سوال 13.112: جھلی میں تناو بڑھانے سے مساوات 13.82 میں دی گئی حل کی تعدد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: چونکہ c بڑھتا ہے لہٰذا تعدد بھی بڑھے گی۔

سوال 13.113: مساوات 13.82 کی صفر ہٹاو لکیریں $a = b = 1$ لے کر $m = 1,2,3,4$ اور $n = 1,2,3,4$ کے لئے کھینچیں۔

سوال 13.114: مساوات 13.82 کی صفر ہٹاو لکیریں $a = 2$ اور $b = 1$ لے کر $m = 1,2,3,4$ اور $n = 1,2,3,4$ کے لئے کھینچیں۔

سوال 13.115: اکائی لمبائی کے اطراف والی مکعب جھلی کے مزید ایسے امتیازی اقدار حاصل کریں جن کے مطابقتی امتیازی تفاعل کی تعدد چار عدد ہو۔

سوال 13.116: مستطیل جھلی جس کے اطراف $a = 2$ اور $b = 1$ ہیں کے ایسے امتیازی اقدار حاصل کریں جن کے مطابقتی امتیازی تفاعل کی تعدد دو یا دو سے زیادہ ہو۔
جواب: $c\pi\sqrt{260}, \quad (F_{4,16}, F_{16,14}), \cdots$

سوال 13.117: تصدیق کریں کہ یکساں c والی تمام ممکنہ مستطیل جھلی جن کا رقبہ A ہو میں مکعب جھلی کی u_{11} (مساوات 13.82) کی تعدد کم تر ہو گی۔

سوال 13.118: مقررہ m ، n اور A کے لئے سوال 13.117 کی طرح کم تر تعدد کی شرط اخذ کریں۔

جواب: مساوات 13.81 میں $a=\frac{A}{b}$ پر کرتے ہوئے حاصل λ کا a کے ساتھ تفرق، صفر کے برابر کرتے ہوئے

$$\lambda^2=c^2\pi^2\Big(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2a^2}{A^2}\Big), \implies 2\lambda\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a}=c^2\pi^2\Big(-\frac{2m^2}{a^3}+\frac{2n^2a}{A^2}\Big)=0$$

کمتر λ کی شرط $\frac{m}{a}=\frac{n}{b}$ حاصل کرتے ہیں۔

سوال 13.119 تا سوال 13.123 میں تفاعل $(0<x<a, 0<y<b)$ $f(x,y)$ کا مساوات 13.87 کی طرز کا دوہرا فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

سوال 13.119: $f=1$
جواب: $B_{mn}=\frac{16}{mn\pi^2}, \quad m,n=1,3,5,\cdots$

سوال 13.120: $f=x+y$
جواب: $B_{mn}=\frac{4}{mn\pi^2}[a(-1)^{m+n}-a(-1)^m+b(-1)^{m+n}-b(-1)^n]$

سوال 13.121: $f=xy$
جواب: $B_{mn}=\frac{4ab(-1)^{m+n}}{mn\pi^2}$

سوال 13.122: $f=xy(a-x)(b-y)$
جواب: $B_{mn}=\frac{64a^2b^2}{m^3n^3\pi^6}, \quad m,n=1,3,5,\cdots$

سوال 13.123: $f=xy(a^2-x^2)(b^2-y^2)$
جواب: $B_{mn}=\frac{144a^3b^3(-1)^{m+n}}{m^3n^3\pi^6}$

سوال 13.124: ثابت کریں کہ فی اکائی رقبہ بیرونی قوت $P(x,y,t)$ کی صورت میں xy مستوی میں جھلی کی ارتعاش درج ذیل مساوات دیتی ہے جہاں فی اکائی رقبہ جھلی کی کمیت ρ ہے۔ بیرونی قوت جھلی کی عمودی عمل کرتی ہے۔

$$u_{tt}=c^2\nabla^2u+\frac{P}{\rho}$$

سوال 13.125 تا سوال 13.128 میں ابتدائی رفتار صفر جبکہ ابتدائی انحراف $f(x,y)$ ہے۔ جھلی کی انحراف $u(x,y,t)$ دریافت کریں جہاں $c=1$ اور $a=b=1$ ہیں۔

سوال 13.125: $f=0.1xy(1-x)(1-y)$
جواب:

$$u(x,y,t)=\frac{6.4}{\pi^6}\sum_{\substack{m=1\\ m\ \text{طاق}}}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\ n\ \text{طاق}}}^{\infty}\tfrac{1}{m^3n^3}\cos(\pi t\sqrt{m^2+n^2})\,\sin m\pi x\,\sin n\pi y$$

سوال 13.126: $f=kx(1-x^2)(1-y^2)$
جواب:

$$\frac{24k}{\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(-1)^m}{m^3n^3}[2(-1)^n-(n^2\pi^2+1)]\cos(\pi t\sqrt{m^2+n^2})\,\sin m\pi x\,\sin n\pi y$$

سوال 13.127: $f=k\sin\pi x\,\sin 2\pi y$
جواب: $u(x,y,t)=k\cos\pi\sqrt{5}t\,\sin\pi x\,\sin 2\pi y$

سوال 13.128: $f=k\sin^2\pi x\,\sin^2\pi y$
جواب: $B_{2n}=B_{m2}=0, B_{11}=\frac{64k}{9\pi^2}, B_{13}=-\frac{64k}{45\pi^2}, B_{31}=-\frac{64k}{45\pi^2}, B_{33}=\frac{64k}{225\pi^2}\cdots$

سوال 13.129: باریک مکعب چادر کے اطراف صفر درجہ حرارت پر رکھے گئے ہیں جبکہ اس کی دونوں سطحیں حاجز شدہ ہیں۔چادر کی ایک طرف کی لمبائی π ہے۔ ابتدائی درجہ حرارت $u(x,y,0)=f(x,y)$ ہے۔دو ابعادی حراری مساوات $u_t=c^2\nabla^2u$ پر علیحدگی متغیرات کی ترکیب لاگو کرتے ہوئے درج ذیل حل حاصل کریں

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin mx\,\sin ny\,e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

جہاں B_{mn} درج ذیل ہے۔

$$B_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}f(x,y)\,\sin mx\,\sin ny\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 13.130: $f(x,y)=xy(\pi-x)(\pi-y)$ کی صورت میں سوال 13.129 میں دیے گئے چادر کا حل تلاش کریں۔
جواب:

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64}{m^3n^3\pi^2}\sin mx\,\sin ny\,e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

13.9 قطبی محدد میں لاپلاسی

سرحدی شرائط کی جزوی تفرقی مساوات کا حل تلاش کرتے ہوئے عموماً ایسا محدد استعمال کیا جاتا ہے جس کے لحاظ سے سرحد کی روپ سادہ ہو۔اگلے حصے میں دائری جھلی پر غور کیا جائے گا جس کو حل کرنے کے لئے **قطبی محدد**[39] سود مند ثابت ہو گا جس کے متغیرات r اور θ کی تعریف درج ذیل ہیں۔

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

قطبی محدد میں جھلی کی دائری سرحد کی مساوات $r=$ مستقل ہو گی۔

r اور θ استعمال کرتے ہوئے مساوات موج کی لاپلاسی

$$\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$$

کا اظہار ان محدد میں کرنا ہو گا لہٰذا آپ سے التماس ہے کہ درج ذیل کو غور سے پڑھیں۔

ہم حصہ 13.4 کی طرح زنجیری ترکیب استعمال کریں گے۔اپنی آسانی کی خاطر ہم جزوی تفرق کو زیر نوشت میں x، y یا t لکھ کر ظاہر کریں گے جبکہ متغیرات r,θ,t کے تفاعل $u(x,y,t)$ کو اسی حرف u سے ظاہر کریں گے۔

صفحہ 733 پر مساوات 10.69 کا زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے

$$u_x=u_rr_x+u_\theta\theta_x$$

---

[39] polar coordinates

ملتا ہے۔ایک بار دوبارہ x کے ساتھ تفرق لے کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= (u_r r_x)_x + (u_\theta \theta_x)_x \\
&= (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx}
\end{aligned} \tag{13.94}
$$

زنجیری قاعدہ دوبارہ استعمال کرتے ہوئے

$$(u_r)_x = u_{rr} r_x + u_{r\theta}\theta_x \quad \text{اور} \quad (u_\theta)_x = u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta}\theta_x$$

لکھا جا سکتا ہے۔جزوی تفرق r_x اور θ_x حاصل کرنے کی خاطر ہمیں

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{اور} \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

کا تفرق لینا ہو گا جس سے

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}, \quad \theta_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2}$$

حاصل ہو گا۔ان کا x تفرق لینے سے

$$r_{xx} = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \theta_{xx} = -y\left(-\frac{2}{r^3}\right) r_x = \frac{2xy}{r^4}$$

ملتا ہے۔ان تمام کو مساوات 13.94 میں پر کرتے ہیں۔یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرق کو استمراری تصور کرتے ہوئے $u_{r\theta} = u_{\theta r}$ لکھ کر یوں درج ذیل سادہ صورت حاصل ہو گی۔

$$u_{xx} = \frac{x^2}{r^2}u_{rr} - 2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4}u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3}u_r + 2\frac{xy}{r^4}u_\theta \tag{13.95}$$

بالکل اسی طرح درج ذیل بھی حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$u_{yy} = \frac{y^2}{r^2}u_{rr} + 2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4}u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3}u_r - 2\frac{xy}{r^4}u_\theta \tag{13.96}$$

مساوات 13.95 اور مساوات 13.96 کا مجموعہ لے کر قطبی محدد میں لاپلاسی حاصل کرتے ہیں۔

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{13.97}$$

سوالات

سوال 13.131: مساوات 13.97 کو درج ذیل صورت میں لکھ کر دکھائیں۔

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

سوال 13.132: اگر مساوات 13.97 میں لاپلاسی θ سے آزاد ہو تب $\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{u_r}{r}$ لکھی جائے گی۔ u کو θ سے آزاد فرض کرتے ہوئے کارتیسی محدد میں لاپلاسی سے سیدھا یہ نتیجہ حاصل کریں۔

سوال 13.133: مساوات 13.97 کو واپس کارتیسی محدد میں لے جائیں۔

سوال 13.134: اگر x ، y کارتیسی محدد ہوں تب دکھائیں کہ $x^* = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ اور $y^* = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ بھی کارتیسی محدد ہیں۔ لاپلاسی کو کارتیسی محدد x^* ، y^* میں حاصل کریں۔
جواب: $\nabla^2 u = u_{x^*x^*} + u_{y^*y^*}$

سوال 13.135: لاپلاسی $\nabla^2 u$ کو نئی محدد $x^* = ax + b$ ، $y^* = cy + d$ میں لکھیں جہاں x ، y کارتیسی محدد ہیں جبکہ a ، b ، c اور d مستقل ہیں۔
جواب: $\nabla^2 u = a^2 u_{x^*x^*} + c^2 u_{y^*y^*}$

سوال 13.136: **نلکی محدد[40] میں لاپلاسی**
نلکی محدد ρ ، ϕ ، z کی تعریف درج ذیل ہے (شکل 13.20-الف)

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z$$

جہاں x ، y ، z کارتیسی محدد ہیں۔ لاپلاسی کو نلکی محدد میں لکھیں۔
جواب:

$$\nabla^2 u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi} + u_{zz} \tag{13.98}$$

سوال 13.137: کروی محدد r ، θ ، ϕ کی تعریف درج ذیل ہے (شکل 13.20-ب)۔

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\sin\theta$$

[40] cylindrical coordinates

اگر تفاعل $u(x,y,z)$ صرف محدد $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ کا تابع ہو تب درج ذیل حاصل کریں۔

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$$

جواب: $r^2 = x^2+y^2+z^2$ سے آگے بڑھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
r_x &= \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r}\\
u_x &= u_r r_x = \frac{x}{r} r_x, \quad u_y = \frac{y}{r} u_r, \quad u_z = \frac{z}{r} u_r\\
u_{xx} &= \frac{1}{r}u_r - \frac{x}{r^2} r_x u_r + \frac{x}{r} u_{rr} r_x = \left(\frac{x}{r}\right)^2 u_{rr} + \frac{u_r}{r}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\\
u_{yy} &= \left(\frac{y}{r}\right)^2 u_{rr} + \frac{u_r}{r}\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right), \quad u_{zz} = \left(\frac{z}{r}\right)^2 u_{rr} + \frac{u_r}{r}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)\\
u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} &= u_{rr} + \frac{2}{r}u_r
\end{aligned}$$

سوال 13.138: کروی محدد[41] میں لاپلاسی

کروی محدد r ، θ ، ϕ کی تعریف سوال 13.137 میں دی گئی ہے۔لاپلاسی کو کروی محدد میں لکھیں۔
جواب:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cot\theta}{r^2}u_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\phi\phi} \tag{13.99}$$

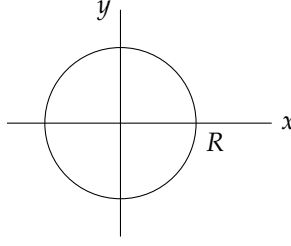
سوال 13.139: مساوات 13.99 میں دی گئی لاپلاسی کو درج ذیل صورت میں لکھیں۔

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right)\right] \tag{13.100}$$

سوال 13.140: ٹھوس کرہ $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ کی سطح کو صفر درجہ حرارت پر رکھا گیا ہے جبکہ کرہ میں درجہ حرارت $f(r)$ ہے جہاں $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ہے۔ثابت کریں کہ کرہ میں درجہ حرارت درج ذیل مساوات کا وہ حل ہو گا

$$u_t = c^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right)$$

---

[41] spherical coordinates

شکل 13.16: دائری جھلی

جو $u(R,t)=0,\ u(r,0)=f(r)$ شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

سوال 13.141: ثابت کریں کہ $v=ru$ لینے سے سوال 13.140 کا مسئلہ $v_t=c^2v_{rr},\quad v(R,t)=0,\quad v(r,0)=rf(r)$ اختیار کرتا ہے۔اس کے ساتھ $v(0,t)=0$ شامل کریں چونکہ $r=0$ پر u کا محدود ہونا لازم ہے۔اس مسئلے کو علیحدگی متغیرات سے حل کریں۔

13.10 دائری جھلی۔مساوات بیسل

ہم اب رداس R کی دائری جھلی کی ارتعاش پر غور کرتے ہیں (شکل 13.16)۔ قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے $x=r\cos\theta$ اور $y=r\sin\theta$ لکھے جائیں گے جبکہ مساوات 13.67 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے (مساوات 13.97)۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\Big)$$

اس حصہ میں ہم رداسی تشاکلی حل $u(r,t)$ حاصل کرتے ہیں جو θ پر منحصر نہیں ہوں گے۔ایسی صورت میں مساوات موج درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\Big) \tag{13.101}$$

چونکہ جھلی کو سرحد $r=R$ سے باندھا گیا ہے لہٰذا سرحدی شرط درج ذیل ہو گا۔

$$u(R,t)=0 \tag{13.102}$$

θ سے آزاد حل اس صورت پائے جائیں گے جب ابتدائی حالت بھی θ سے آزاد ہو۔یوں ابتدائی معلومات درج ذیل ہوں گے۔

$$u(r,0) = f(r) \quad \text{ابتدائی انحراف} \tag{13.103}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r) \quad \text{ابتدائی رفتار} \tag{13.104}$$

پہلا قدم۔ علیحدگی متغیرات کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ہم پہلے مساوات 13.101 کے وہ حل تلاش کرتے ہیں جو سرحدی شرط مساوات 13.102 کو مطمئن کرتے ہوں۔یوں

$$u(r,t) = W(r)G(t) \tag{13.105}$$

کے تفرقات کو مساوات 13.101 میں پر کرتے ہوئے حاصل مساوات کے دونوں اطراف کو c^2WG سے تقسیم کر کے

$$\frac{\ddot{G}}{c^G} = \frac{1}{W}\Big(W'' + \frac{1}{r}W\Big)$$

حاصل کرتے ہیں جہاں $(\cdot)$ وقت t کے ساتھ تفرق جبکہ $(')$ جزوی تفرق کو ظاہر کرتے ہیں۔درج بالا کے دونوں اطراف کسی مستقل کے برابر ہوں گے۔سرحدی شرط مطمئن کرتے ہوئے غیر صفر حل کے لئے ضروری ہے کہ یہ مستقل منفی ہو مثلاً $-k^2$ لہٰذا درج بالا کو

$$\frac{\ddot{G}}{c^G} = \frac{1}{W}\Big(W'' + \frac{1}{r}W\Big) = -k^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس سے دو عدد سادہ تفرقی مساوات

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0, \qquad \lambda = ck \tag{13.106}$$

$$W'' + \frac{1}{r}W' + k^2W = 0 \tag{13.107}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

دوسرا قدم۔ ہم پہلے مساوات 13.107 پر غور کرتے ہیں جس میں نیا متغیرہ $s = kr$ متعارف کرتے ہوئے $\frac{1}{r} = \frac{k}{s}$ لکھ کر

$$W' = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}s}k \qquad W'' = \frac{\mathrm{d}^2\,W}{\mathrm{d}s^2}k^2$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں مساوات 13.107 میں پر کر کے مشترکہ مستقل k^2 کر رد کرتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}s^2}+\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}s}+W=0 \tag{13.108}$$

حاصل ہوتا ہے جو حصہ 5.4 کا مساوات 5.76 ہے جس میں $\nu=0$ ہے۔ اس کو **مساوات بیسل**[42] کہتے ہیں جس کا عمومی حل (حصہ 5.5) درج ذیل ہے۔

$$W=C_1J_0(s)+C_2Y_0(s)$$

J_0 اور Y_0 بالترتیب صفر رتبہ کے بیسل تفاعل کی پہلی قسم اور دوسری قسم کہلاتے ہیں۔ چونکہ جھلی کی انحراف ہر صورت محدود ہو گی جبکہ $s\to 0$ کرنے سے $Y_0\to\infty$ ہوتا ہے لہٰذا ہمیں $C_2=0$ منتخب کرنا ہو گا۔ ظاہر ہے کہ غیر صفر حل حاصل کرنے کی خاطر ضروری ہے کہ $C_1\neq 0$ ہو۔ ہم $C_1=1$ چنتے ہیں جس سے درج ذیل حل حاصل ہوتا ہے۔

$$W(r)=J_0(s)=J_0(kr) \tag{13.109}$$

جھلی کی سرحد $r=R$ پر $u(R,t)=W(R)G(t)=0$ ہو گا جس میں $G(t)\equiv 0$ منتخب کرنے سے $u\equiv 0$ حاصل ہو گا لہٰذا

$$W(R)=J_0(kR)=0$$

ہو گا۔ بیسل تفاعل J_0 کے لا محدود تعداد کے حقیقی صفر پائے جاتے ہیں۔ ہم $J_0(s)$ کے مثبت صفروں کو $s=\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 13.17)۔ ہم یہاں بتلاتے چلیں کہ J_0 کی چند صفروں کی (چار ہندسوں تک درست) اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$\alpha_1=2.4048,\quad \alpha_2=5.5201,\quad \alpha_3=8.6537,\quad \alpha_4=11.7915,\quad \alpha_5=14.9309$$

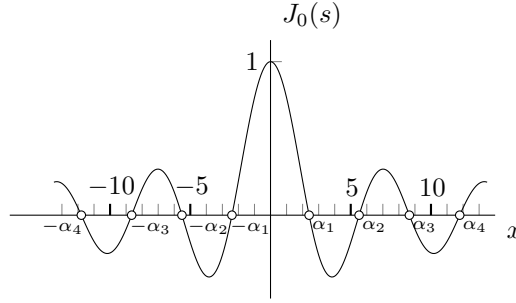
ہم دیکھتے ہیں کہ بیسل تفاعل کے صفروں کے درمیان یکساں فاصلہ نہیں پایا جاتا ہے۔ مساوات 13.109 سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

$$kR=\alpha_m \implies k=k_m=\frac{\alpha_m}{R},\quad m=1,2,\cdots \tag{13.110}$$

یوں تفاعل

$$W_m(r)=J_0(k_mr)=J_0\Big(\frac{\alpha_m}{R}r\Big) \qquad m=1,2,\cdots \tag{13.111}$$

---

[42] Bessel's equation

شکل 13.17: بیسل تفاعل $J_0(s)$

مساوات 13.107 کا وہ حل ہو گا جو جھلی کی سرحد پر صفر ہے۔

یوں $\lambda = \lambda_m = ck_m$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.106 کا مطابقتی حل

$$G_m(t) = a_m \cos \lambda_m t + c_2 \sin \lambda_m t$$

ہو گا۔اس طرح مساوات 13.101 کے ایسے حل جو سرحدی شرط مساوات 13.102 کو مطمئن کرتے ہوں درج ذیل ہوں گے جہاں $m = 1, 2, \cdots$ ہے۔

$$u_m(r,t) = W_m(r) G_m(t) = (a_m \cos \lambda_m t + c_2 \sin \lambda_m t) J_0(k_m r) \tag{13.112}$$

$u_m(r,t)$ اس مسئلے کے امتیازی تفاعل ہیں جبکہ λ_m مسئلے کے امتیازی اقدار ہیں۔

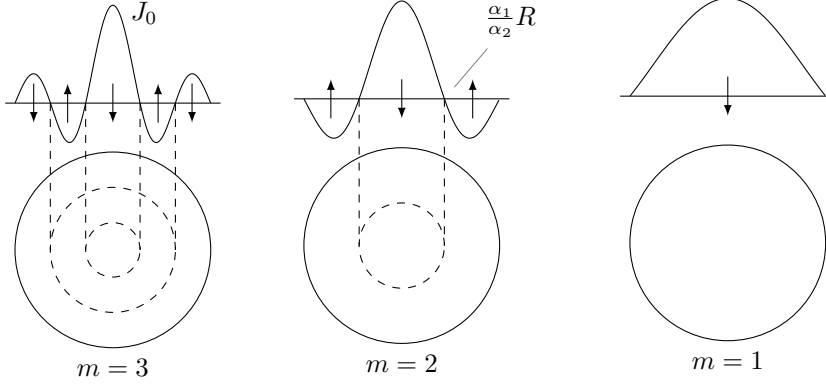
ارتعاش کی u_m حصہ کو m ویں عمودی انداز[43] کہتے ہیں جس کی تعدد $\frac{\lambda_m}{2\pi}$ چکر فی اکائی وقت ہو گی۔ x محور پر سائن تفاعل کے صفروں کے درمیان یکساں فاصلہ پایا جاتا ہے جبکہ J_0 کے صفروں کے درمیان یکساں فاصلہ نہیں پایا جاتا ہے۔یہی وجہ ہے کہ ستار کی ترنگ اور طبلہ کی تھاپ مختلف ہیں۔شکل میں دکھائے گئے جھلی کی عمودی انداز شکل 13.17 سے باآسانی حاصل کیے جا سکتے ہیں (شکل 13.18)۔عمودی انداز $m = 1$ میں پوری جھلی بیک وقت اوپر (یا نیچے) حرکت کرتی ہے۔ $m = 2$ کے لئے تفاعل

$$W_2(r) = J_0\left(\frac{\alpha_2}{R} r\right)$$

ان نقطوں پر صفر ہو گا جہاں $\frac{\alpha_2 r}{R} = \alpha_1$ یعنی $r = \frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}$ ہو۔یوں $r = \frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}$ صفر ہٹاو لکیر ہو گی جس کو شکل 13.18 میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔اب جن لمحات پر جھلی کا وسطی خطہ اوپر حرکت کرتا ہے ان لمحات

[43] m^{th} normal mode

J_0 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}R$

$m=3$ $m=2$ $m=1$

شکل 13.18: زاویہ سے آزاد دائری جھلی کی عمودی انداز

پر جھلی کا بیرونی خطہ $r > \frac{\alpha_1 R}{\alpha_2}$ نیچے کو حرکت کرے گا اور اسی طرح جب وسطی خطہ نیچے کو حرکت کرتا ہے تب بیرونی خطہ اوپر کو حرکت کرتا ہے۔ حل $u_m(r,t)$ کے $m-1$ عدد صفر ہٹاو لکیریں ہوں گی (شکل 13.18) جو ہم مرکز دائرے ہوں گے۔

تیسرا قدم۔ ایسا حل جو ابتدائی شرائط مساوات 13.103 اور مساوات 13.104 کو مطمئن کرتا ہو حاصل کرنے کی خاطر ہم ارتعاش پذیر تار کے حل کی طرح آگے بڑھتے ہیں یعنی ہم درج ذیل تسلسل پر غور کرتے ہیں۔[44]

$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}W(r)G_m(t)=\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos\lambda_m t+b_m\sin\lambda_m t)J_o\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) \tag{13.113}$$

اس میں $t=0$ پر کرتے ہوئے اور مساوات 13.103 استعمال کرتے ہوئے

$$u(r,0)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)=f(r) \tag{13.114}$$

ملتا ہے۔ یوں اگر مساوات 13.113 نے 13.103 کو مطمئن کرنا ہو تب a_m، تفاعل $f(r)$ کی بیسل تسلسل کے عددی سر ہوں گے۔ یہ تسلسل $J_0(\frac{\alpha_m}{R}r)$ کی صورت میں ہو گی۔ یوں صفحہ 377 پر مساوات 5.154 کے تحت

$$a_m=\frac{2}{R^2J_1^2(\alpha_m)}\int_0^R rf(r)J_0(\frac{\alpha_m}{R}r)\,\mathrm{d}r \qquad m=1,2, \tag{13.115}$$

[44] ہم یکتائی اور ارتکاز کے مسئلے پر یہاں غور نہیں کریں گے۔

ہوں گے۔ وقفہ $0 \le r \le R$ پر $f(r)$ کا قابل تفرق ہونا مساوات 13.114 کی صورت میں $f(r)$ کی تسلسل لکھنے کے لئے کافی شرط ہے۔مساوات 13.113 میں عددی سر b_m کو مساوات 13.104 سے اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$b_m = \frac{2}{c\alpha_m R J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0\Big(\frac{\alpha_m}{R} r\Big) \, \mathrm{d}r, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{13.116}$$

a_m اور b_m کی اعدادی قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہم J_0 اور J_1 کی قیمتوں کے جدول استعمال کرتے ہوئے تکمل کا تخمینہ لگائیں گے۔

سوالات

سوال 13.142: $R = 1$ لیتے ہوئے u_2 اور u_3 کی صفر ہٹاو دائروں کی رداس تلاش کریں (مساوات 13.112)۔

جواب: $u_2 : r = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} R = 0.43565, \quad u_3 : r = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} R = 0.27789, \quad r = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} R = 0.63788$

سوال 13.143: $R = 1$ لیتے ہوئے u_4 کی صفر ہٹاو دائروں کی رداس تلاش کریں۔

جواب: $0.20394, \quad 0.46814, \quad 0.73389$

سوال 13.144: شکل 13.18 کی طرح اشکال u_4 اور u_5 کے لئے کھینچیں۔

سوال 13.145: جھلی میں تناو بڑھانے سے مختلف عمودی انداز (مساوات 13.112) کی تعدد پر کیا اثر پڑتا ہے؟

جواب: تناو بڑھنے سے c بڑھتا ہے لہٰذا تعدد بڑھے گی۔

سوال 13.146: مساوات 13.116 حاصل کریں۔

سوال 13.147: کیا مقررہ c اور R کی صورت میں دو یا دو سے زیادہ تفاعل u_m (مساوات 13.112) جن کے صفر ہٹاو لکیریں مختلف ہوں کا ایک ہی امتیازی قدر ہو سکتا ہے؟

سوال 13.148: قطبی محدد کے (r اور θ پر منحصر) ارتعاش

مساوات موج

$$u_{tt} = c^2\Big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\Big) \tag{13.117}$$

میں $u=F(r,\theta)G(t)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\ddot{G}+\lambda^2 G=0, \qquad \lambda=ck \tag{13.118}$$

$$F_{rr}+\frac{1}{r}F_r+\frac{1}{r^2}F_{\theta\theta}+k^2F=0 \tag{13.119}$$

سوال 13.149: مساوات 13.119 میں $F=W(r)Q(\theta)$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$Q''+n^2Q=0 \tag{13.120}$$

$$r^2W''+rW'+(k^2r^2-n^2)W=0 \tag{13.121}$$

سوال 13.150: وضاحت کریں کہ $Q(\theta)$ دوری ہو گا جس کا دوری عرصہ 2π ہو گا لہٰذا مساوات 13.120 اور مساوات 13.121 میں $n=0,1,2,\cdots$ ہوں گے۔یوں درج ذیل حل حاصل کریں۔

$$Q_n=\cos n\theta, \quad Q_n^*=\sin n\theta \tag{13.122}$$

$$W_n=J_n(kr), \quad n=0,1,\cdots \tag{13.123}$$

سوال 13.151: واضح کریں کہ سرحدی شرط

$$u(R,\theta,t)=0 \tag{13.124}$$

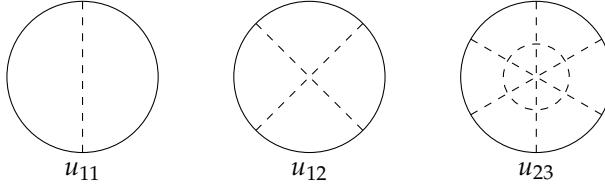
سے $k=k_{mn}=\frac{\alpha_{mn}}{R}$ حاصل ہوتا ہے جہاں $s=\alpha_{mn}$ تفاعل $J_n(s)$ کا مثبت m واں جذر ہے۔

سوال 13.152: واضح کریں کہ مساوات 13.117 کے وہ حل جو مساوات 13.124 کو مطمئن کرتے ہوں درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}u_{mn}&=(A_{mn}\cos ck_{mn}t+B_{mn}\sin ck_{mn}t)J_n(k_{mn}r)\cos n\theta\\ u_{mn}^*&=(A_{mn}^*\cos ck_{mn}t+B_{mn}^*\sin ck_{mn}t)J_n(k_{mn}r)\sin n\theta\end{aligned} \tag{13.125}$$

سوال 13.153: واضح کریں کہ $u_{m0}^*\equiv 0$ اور u_{m0} عین مساوات 13.112 کے تحت ہیں۔

سوال 13.154: واضح کریں کہ u_{mn} کی $m+n-1$ صفر ہٹاو لکیریں ہوں گی۔

u_{11} u_{12} u_{23}

شکل 13.19: چند صفر ہٹاو لکیریں (سوال 13.157)

سوال 13.155 تا سوال 13.157 میں دیے گئے حل کی صفر ہٹاو لکیروں کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 13.155: $u_{3n}, \quad n = 1, 2, 3$

سوال 13.156: $u_{4n}, \quad n = 1, 2, 3$

سوال 13.157: $u^*_{mn}, \quad m, n = 1, 2, 3$
جواب: صفر ہٹاو لکیریں شکل 13.19 میں دکھائی گئی ہیں۔

سوال 13.158: ابتدائی معلومات $u_t(r, \theta, 0)$ کی صورت میں مساوات 13.125 سے $B_{mn} = 0$ اور $B^*_{mn} = 0$ حاصل کریں۔

سوال 13.159 تا سوال 13.161 میں $R = 1$ ، $c = 1$ اور ابتدائی رفتار صفر لیتے ہوئے، ابتدائی انحراف $f(r)$ کی صورت میں دائری جھلی کی انحراف $u(r, t)$ حاصل کریں۔ (اشارہ سوال 5.139 تا سوال 5.144 پر ایک مرتبہ دوبارہ نظر ڈالیں۔)

سوال 13.159: $f = 0.1 J_0(\alpha_2 r)$

سوال 13.160: $f = k(1 - r^2)$
جواب: $u = 4k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_2(\alpha_m)}{\alpha_m^2 J_1^2(\alpha_m)} \cos \alpha_m t \, J_0(\alpha_m r)$

سوال 13.161: $f = k(1 - r^4)$

13.11 مساوات لاپلاس۔ نظریہ مخفی قوہ

طبیعیات کی اہم ترین مساوات میں سے ایک درج ذیل مساوات لاپلاس ہے

$$\nabla^2 u = 0 \tag{13.126}$$

جہاں u کا لاپلاسی $\nabla^2 u$ ہے۔کارتیسی محدد x ، y ، z میں

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{13.127}$$

ہو گا۔مساوات لاپلاس کے نظریہ کو **نظریہ مخفی قوہ**[45] کہتے ہیں۔مساوات 13.126 کے ایسے حل جن کے دو رتبی تفرقات استمراری ہوں **ہارمونی تفاعل**[46] کہلاتے ہیں۔

دو ابعادی صورت جہاں u صرف دو عدد متغیرات کے تابع ہو کا مخلوط تجزیہ زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہٰذا اس پر حصہ 14.5 اور باب 20 میں غور کیا جائے گا۔

انجینئری حساب میں مساوات لاپلاس کی اہمیت واضح کرنے کی خاطر چند مثالوں کا ذکر کرتے ہیں۔

مساوات لاپلاس ثقلی میدان کے مسائل میں سامنے آتی ہے۔ مثلاً صفحہ 743 پر مثال 10.22 میں ہم نے دیکھا کہ اگر ایک ذرہ A جس کی کمیت M ہو نقطہ (ξ, η, ζ) پر مستقل موجود ہو اور دوسرا ذرہ B جس کی کمیت m ہو نقطہ (x, y, z) پر موجود ہو تب A ذرہ B کو اپنی جانب کھینچے گا۔یہ ثقلی قوت درج ذیل غیر سمتی تفاعل $u(x, y, z)$ کی ڈھلوان ہے۔

$$u(x, y, z) = \frac{GMm}{r}$$
$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \quad (>0)$$

تفاعل $u(x, y)$ کو ثقلی میدان کی **مخفی قوہ** کہتے ہیں اور یہ لاپلاس کی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

نقطہ کمیت کی مخفی قوہ اور قوت کی تصور کو مسلسل کمیت کے لئے بیان کرتے ہیں۔اگر خطہ R میں کمیتی کثافت $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ پائی جاتی ہو تب نقطہ (x, y, z) جہاں کمیت موجود نہ ہو پر مخفی قوہ u درج ذیل ہو گی۔

$$u(x, y, z) = k \iiint_R \frac{\rho}{r} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\zeta \qquad (k > 0) \tag{13.128}$$

---

[45] potential theory
[46] harmonic functions

چونکہ $\frac{1}{r} (r > 0)$ مساوات 13.126 کا حل ہے لہٰذا $\nabla^2(\frac{1}{r}) = 0$ ہو گا اور کثافت ρ متغیرات x، y، z پر منحصر نہیں ہے لہٰذا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\nabla^2 u = k \iiint_R \rho \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

یوں مساوات 13.128 میں دی گئی ثقلی مخفی قوہ مساوات لاپلاس کو ہر اس نقطہ پر مطمئن کرتی ہے جہاں پر کمیت موجود نہ ہو۔

برقی سکون کی میدان میں برقی بار کے مابین قوت کشش یا قوت دفع قانون کولمب دیتی ہے جس کی ریاضی شکل عین نیوٹن کے قانون ثقل کی طرح ہے۔یوں ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ جس نقطہ پر برقی بار موجود نہ ہو اس نقطہ پر برقی مخفی قوہ کو ایسے تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو برقی بار سے پاک نقطہ پر لاپلاس کی مساوات کو مطمئن کرتا ہو۔

ہم بعد کے باب میں دیکھیں گے کہ غیر داب پذیر سیال کی بہاو پر غور کے دوران بھی لاپلاس مساوات سامنے آتی ہے۔

مزید حرارت کے مسائل میں حراری مساوات

$$u_t = c^2 \nabla^2 u$$

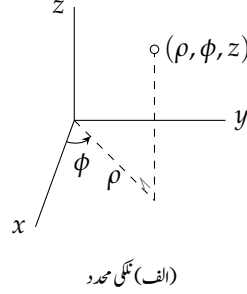
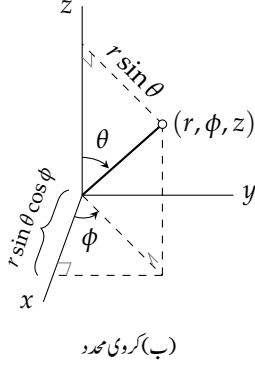
بنیادی اہمیت رکھتی ہے۔اگر درجہ حرارت وقت t کے تابع نہ ہو (برقرار حالت) تب یہ لاپلاس مساوات کی صورت اختیار کرتی ہے۔

عموماً مسائل، جن میں لاپلاس مساوات حاصل ہو گی، میں سرحدی قیمت مسئلہ[47] حل کرنا ہو گا جہاں مساوات 13.126 کا ایسا حل درکار ہو گا جو کسی سرحد پر دیا گیا شرط مطمئن کرتا ہو۔یوں خلا میں ایسے محدد متعارف کرنا ضروری ہو گا جن میں اس سرحد کو بیان کرنا آسان ہو۔اس طرح مساوات 13.127 کے لاپلاسی کا تبادلہ ان محدد میں کرنا ہو گا۔ہم حصہ 13.9 میں دو متغیرات کے تفاعل کی لاپلاسی کا تبادلہ کر چکے ہیں۔ایک محدد سے دوسرے محدد میں لاپلاسی کا تبادلہ اسی طرح کیا جائے گا۔

نلکی محدد میں لاپلاسی صفحہ 994 پر مساوات 13.98 دیتی ہے۔نلکی محدد (شکل 13.20-الف) کی تعریف

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z \tag{13.129}$$

[47] boundary value problem

(الف) نلکی محدد

(ب) کروی محدد

شکل 13.20: نلکی اور کروی محدد کی تعریف

اور اس میں لاپلاسی کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{13.130}$$

صفحہ 995 پر مساوات 13.99 کروی محدد میں لاپلاسی دیتی ہے۔ کروی محدد (شکل 13.20-ب) کی تعریف

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\sin\theta \tag{13.131}$$

اور اس میں لاپلاسی کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cot\theta}{r^2}u_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\phi\phi} \tag{13.132}$$

جس کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\Big] \tag{13.133}$$

سوالات

سوال 13.162: محدد $x^* = ax$ ، $y^* = by$ ، $z^* = cz$ میں لاپلاسی حاصل کریں جہاں x ، y ، z کارتیسی محدد ہیں۔
جواب: $a^2 u_{x^*x^*} + b^2 u_{y^*y^*} + c^2 u_{z^*z^*}$

سوال 13.163: مساوات 13.127 سے شروع کرتے ہوئے صفحہ 754 پر مساوات 10.107 اور مساوات 10.108 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\nabla^2 u = u_{x^*x^*} + u_{y^*y^*} + u_{z^*z^*}$$

تصدیق کریں کہ سوال 13.164 تا سوال 13.168 میں تفاعل $u = f(x, y)$ مساوات لاپلاس کو مطمئن کرتا ہے۔چند ہم قوہ خطوط $u = c$ جہاں c مستقل ہے کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 13.164: $x^2 - y^2$

سوال 13.165: $x^3 - 3xy^2$

سوال 13.166: $\frac{x}{x^2+y^2}$

سوال 13.167: $\frac{y}{x^2+y^2}$

سوال 13.168: $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

سوال 13.169: کارتیسی نظام محدد استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.131 میں کروی محدد کی تعریف بیان کی گئی ہے۔ان مساوات کو استعمال کرتے ہوئے کارتیسی نظام کی تعریف کروی محددی نظام میں کریں۔
جواب: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

سوال 13.170: مساوات 13.130 سے واپس کارتیسی محدد میں لاپلاسی حاصل کریں۔

سوال 13.171: تصدیق کریں کہ $u = \frac{c}{r}$ کروی محدد میں لاپلاسی کو مطمئن کرتا ہے جہاں c مستقل ہے۔

سوال 13.172: لاپلاس مساوات $\nabla^2 u = 0$ کا ایسا حل تلاش کریں جو صرف $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ کا تابع ہو۔
جواب: اگر u صرف r کا تابع ہو تب مساوات 13.133 کی صورت $\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)\right] = 0$ یعنی $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$ ہو گی جہاں جزوی تفرق کی جگہ تفرق لکھا گیا ہے۔اس کا تکمل $r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = c$ ہو گا جس کو $\mathrm{d}u = \frac{c}{r^2}\,\mathrm{d}r$ لکھ کر تکمل لینے سے درکار حل $u = k - \frac{c}{r}$ حاصل ہو گا جہاں c اور k مستقل ہیں۔

سوال 13.173: دو ہم مرکز کرہ کے رداس $r_1 = 15\,\mathrm{cm}$ اور $r_2 = 1\,\mathrm{cm}$ ہیں جبکہ ان پر برقی دباو بالترتیب $U_1 = 1000\,\mathrm{V}$ اور $U_2 = 100\,\mathrm{V}$ ہے۔ہم مرکز کرہ کے درمیان خطہ میں ساکن برقی دباو u سوال 13.172 میں حاصل کی گئی۔موجودہ معلومات کو استعمال کرتے ہوئے c اور k دریافت کریں اور حاصل u کی ترسیم کھینچیں۔
جواب: $u = \frac{7450}{7} - \frac{135}{14r}$

سوال 13.174: دو ابعادی لاپلاس مساوات جو صرف $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ کے تابع ہو کا حل تلاش کریں۔
جواب: اگر u صرف ρ کا تابع ہو تب مساوات 13.130 کی صورت $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho} = 0$ ہو گی جہاں جزوی تفرق کی جگہ تفرق لکھا گیا ہے۔اس میں $v = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}$ پر کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} + \frac{v}{\rho} = 0$ یعنی $\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$ حاصل ہوتا ہے جس کا تکمل $v\rho = c$ یعنی $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{c}{\rho}$ دیتا ہے۔درکار جواب تکمل لینے سے $u = k + c \ln \rho$ حاصل ہوتا ہے جہاں c اور k مستقل ہیں۔

سوال 13.175: دو ہم محور نلکیوں کا رداس $\rho_1 = 5\,\mathrm{cm}$ اور $\rho_2 = 20\,\mathrm{cm}$ ہے جبکہ ان پر برقی دباو بالترتیب $U_1 = 10\,\mathrm{V}$ اور $U_2 = 60\,\mathrm{V}$ ہے۔ سوال 13.174 میں حاصل حل استعمال کرتے ہوئے نلکیوں کے درمیان خطہ میں برقی دباو کی مساوات حاصل کریں۔ حاصل u کی ترسیم کھینچیں۔موجودہ ترسیم کا سوال 13.173 میں حاصل کردہ ترسیم کے ساتھ موازنہ کریں۔
جواب: $u = 118.048 + 36.067 \ln \rho$

سوال 13.176: اگر کروی محدد میں $u(r, \theta, \phi)$ مساوات لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ کو مطمئن کرتا ہو تب ثابت کریں کہ $v(r, \theta, \phi) = r^{-1} u(r^{-1}, \theta, \phi)$ مساوات $\nabla^2 v = 0$ کو مطمئن کرے گا۔

سوال 13.177: مساوات موج $u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$ میں $u = U(x, y, z)e^{-i\omega t}$ پر کرتے ہوئے درج ذیل مساوات ہلم ہولٹز[48] حاصل[49] کریں جہاں $i = \sqrt{-1}$ ہے۔

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

سوال 13.178 تا سوال 13.178 میں برقرار حال (وقت کا غیر تابع) درجہ حرارت u تلاش کریں۔

[48] Helmholtz equation
[49] جرمن ماہر طبیعیات ہرمن لڈوگ فرڈینانڈ ون ہلم ہولٹز [1821-1894]

سوال 13.178: دو متوازی چادر $x = x_0$ اور $x = x_1$ کے درمیان جنہیں بالترتیب u_0 اور u_1 درجہ حرارت پر برقرار رکھا گیا ہے۔
جواب: $u = \frac{(u_1-u_0)x}{x_1-x_0} + \frac{u_0x_1-u_1x_0}{x_1-x_0}$

سوال 13.179: دو ہم محور نلکیوں $\rho = \rho_1$ اور $\rho = \rho_2$ کے درمیان جنہیں بالترتیب u_0 اور u_1 درجہ حرارت پر برقرار رکھا گیا ہے۔
جواب: $u = \frac{u_1-u_0}{\ln \frac{r_1}{r_0}} \ln r + \frac{u_0 \ln r_1 - u_1 \ln r_0}{\ln \frac{r_1}{r_0}}$

سوال 13.180: دو ہم مرکز کرہ $r = r_1$ اور $r = r_2$ کے درمیان جنہیں بالترتیب u_0 اور u_1 درجہ حرارت پر برقرار رکھا گیا ہے۔
جواب: $u = u_0 - \frac{r_1r_0(u_1-u_0)}{(r_1-r_0)r}$

13.12 کروی محدد میں مساوات لاپلاس۔مساوات لیژانڈر

آئیں ایک ایسے مسئلے پر غور کرتے ہیں جس میں، کروی محدد میں لکھی گئی، مساوات لاپلاس استعمال ہو گی۔فرض کریں کہ کروی محدد کی مرکز پر موجود رداس R کی کرہ S کی سطح کو برقی دباو

$$u(R, \theta, \phi) = f(\theta) \tag{13.134}$$

پر برقرار رکھا جاتا ہے جہاں r ، θ ، ϕ کروی محدد ہیں جبکہ $f(\theta)$ دیا گیا تفاعل ہے۔کروی محدد کی تعریف گزشتہ حصے میں کی گئی ہے۔ ہم باقی پوری فضا، جہاں کوئی برقی بار نہیں پایا جاتا، میں برقی دباو u جاننا چاہتے ہیں۔چونکہ S کی سطح پر برقی دباو ϕ سے آزاد ہے لہٰذا باقی فضا میں بھی برقی دباو ϕ سے آزاد ہو گا۔یوں $\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$ ہو گا لہٰذا مساوات لاپلاس درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\Big) = 0 \tag{13.135}$$

جہاں مساوات 13.133 کا سہارا لیا گیا ہے۔اب لامتناہی فاصلہ پر برقی دباو صفر ہو گا یعنی:

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta) = 0 \tag{13.136}$$

ہم علیحدگی متغیرات کی ترکیب سے مساوات 13.134 کا ایسا حل تلاش کرتے ہیں جو سرحدی شرائط مساوات 13.134 اور مساوات 13.136 کو مطمئن کرتا ہو۔یوں مساوات 13.135 میں

$$u(r,\theta)=G(r)H(\theta) \tag{13.137}$$

اور اس کے تفرق پر کر کے GH سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}\Big)=-\frac{1}{H\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\Big)$$

اب تک آپ جان چکے ہوں گے کہ ایسی صورت میں مساوات کے دونوں اطراف کسی ایک مستقل مثلاً k کے برابر ہوں گے۔یوں درج ذیل دو عدد سادہ تفرقی مساوات حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\Big)+kH=0 \tag{13.138}$$

$$\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^2\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}\Big)=k \tag{13.139}$$

جہاں دوسری مساوات کو

$$r^2G''+2rG'-kG=0$$

لکھا جا سکتا ہے جو مساوات کوشی ہے۔ہم حصہ 2.5 سے جانتے ہیں کہ مساوات کوشی کے حل کا روپ $G=r^{\alpha}$ ہو گا۔اگر ہم k کی جگہ مستقل کو $n(n+1)$ لکھیں تب ان حل کی صورت نہایت سادہ حاصل ہو گی۔ایسا کرنے سے

$$r^2G''+2rG'-n(n+1)G=0 \tag{13.140}$$

لکھا جائے گا جہاں n اختیاری مستقل ہے۔اس میں $G=r^{\alpha}$ پر کرنے سے

$$[\alpha(\alpha-1)+2\alpha-n(n+1)]r^{\alpha}=0$$

ملتا ہے۔قوسین میں بند حصے کے صفر $\alpha=n$ اور $\alpha=-n-1$ ہیں۔یوں مساوات 13.140 کے حل

$$G_n(r)=r^n \quad \text{اور} \quad G_n^*(r)=\frac{1}{r^{n+1}} \tag{13.141}$$

ہوں گے۔

مساوات 13.138 میں $k=n(n+1)$ متعارف کر کے ہم

$$\cos\theta=w$$

لیتے ہیں۔ یوں $\sin\theta^2 = 1 - w^2$ اور

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}$$

ہوں گے لہٰذا مساوات 13.138

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[(1-w^2)\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}w}\right] + n(n+1)H = 0 \tag{13.142}$$

یعنی

$$(1-w^2)\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}w^2} - 2w\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}w} + n(n+1)H = 0 \tag{13.143}$$

صورت اختیار کرے گی جو مساوات لیژانڈر ہے (حصہ 5.2)۔ مساوات لیژانڈر کے حل

$$H = P_n(w) = P_n(\cos\theta)$$

ہیں جہاں اختیاری مستقل کی قیمتیں $n = 0, 1, 2, \cdots$ عدد صحیح[50] ہیں۔ اس طرح ہمیں لاپلاس مساوات 13.135 کے حل $u = GH$ کے دو عدد تسلسل

$$u_n(r,\theta) = A_n r^n P_n(\cos\theta), \quad u_n^*(r,\theta) = \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \tag{13.144}$$

حاصل ہوتے ہیں جہاں $n = 0, 1, \cdots$ جبکہ A_n اور B_n مستقل ہیں۔

اندرون کرہ مساوات 13.134 کو مطمئن کرنے والا مساوات 13.135 کا حل حاصل کرنے کی خاطر ہم تسلسل[51]

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \tag{13.145}$$

پر غور کرتے ہیں۔ [ہم $u^*(r,\theta)$ کو اس لئے حل کے لئے تصور نہیں کرتے ہیں کہ کرہ کی مرکز $r = 0$ پر u^* کی قیمت لامتناہی ہو گی جس کا نا ممکن ہے۔] اگر مساوات 13.145 نے مساوات 13.134 کو مطمئن کرنا ہو تب

$$u(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\theta) = f(\theta) \tag{13.146}$$

---

[50] اب تک k اختیاری مستقل تھا لہٰذا n بھی اختیاری مستقل تھا۔ یہاں n کو عدد صحیح ہونے کا پابند اس لئے بنایا گیا ہے تاکہ وقفہ $-1 \le w \le 1$ یعنی $0 \le \theta \le \pi$ پر مساوات 13.143 کے حل اور حل کے یک رتبی تفرق استمراری ہوں (جس کا ثبوت یہاں پیش نہیں کیا جائے گا)۔

[51] یہاں مرکوزیت پر غور نہیں کیا جائے گا۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر وقفہ $0 \le \theta \le \pi$ پر $f(\theta)$ اور $f'(\theta)$ ٹکڑوں میں استمراری ہوں تب مساوات 13.148 میں دیے گئے عددی سر استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.145 کی تسلسل کا r اور θ کے ساتھ رکن بار کن دو رتبی تفرق حاصل کیا جا سکتا ہے اور ایسا کرنے سے حاصل کردہ تسلسل مرتکز ہوں گی جو بالترتیب $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ اور $\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$ کو ظاہر کریں گی۔ یوں مساوات 13.148 میں دیے گئے عددی سر استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.145 کی تسلسل، کرہ کی اندر ہمارے مسئلے کا حل ہو گا۔

ہو گا یعنی مساوات 13.146 تفاعل $f(\theta)$ کی فوریئر لیژانڈر تسلسل ہو گی جس کے ارکان لیژانڈر کثیر رکنی ہوں گے۔یوں مساوات 5.129، مساوات 5.131 اور مساوات 5.147 سے

$$A_n R^n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} \tilde{f}(w) P_n(w) \, \mathrm{d}w \tag{13.147}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں متغیر $w = \cos\theta$ کے تابع تفاعل $f(\theta)$ کو $\tilde{f}(w)$ لکھا گیا ہے۔اب چونکہ $\mathrm{d}w = -\sin\theta \, \mathrm{d}\theta$ ہے اور تکمل کے حدود -1 اور 1 کے مطابقتی حدود بالترتیب π اور 0 ہیں لہٰذا درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{13.148}$$

یوں مساوات 13.148 کے عددی سر استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.145 کی تسلسل اندرون کرہ ہمارے مسئلے کا حل ہو گا۔

بیرون کرہ حل حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل $u(r,\theta)$ کو استعمال نہیں کر سکتے ہیں چونکہ یہ مساوات 13.136 کو مطمئن نہیں کر سکتا ہے البتہ ہم تفاعل $u^*(r,\theta)$ پر غور کر سکتے ہیں جو مساوات 13.136 کو مطمئن کر سکتا ہے۔پہلے کی طرح بڑھتے ہوئے

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \qquad (r \geq R) \tag{13.149}$$

حل حاصل ہو گا جس کے عدد سر درج ذیل ہیں۔

$$B_n = \frac{2n+1}{2} R^{n+1} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \tag{13.150}$$

سوالات

سوال 13.181: تصدیق کریں کہ مساوات 13.144 میں دیے گئے تفاعل $u_n(r,\theta)$ اور $u_n^*(r,\theta)$ جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہے مساوات 13.135 کے حل ہیں۔

سوال 13.182: وہ سطحیں دریافت کریں جن پر تفاعل u_1 ، u_2 ، u_3 صفر ہیں۔

سوال 13.183: تفاعل $P_n(\cos\theta)$ کا ترسیم $n = 0, 1, 2$ کے لئے کھینچیں (حصہ 5.2)۔

سوال 13.184: تفاعل $P_3(\cos\theta)$ اور $P_4(\cos\theta)$ کے ترسیم کھینچیں۔

سوال 13.185 تا سوال 13.191 میں مساوات 13.148 یا کی مدد سے A_n حاصل کرتے ہوئے کرہ کے اندر حل $u(r,\theta)$ دریافت کریں۔ کرہ کا رداس اکائی $R=1$ ہے جبکہ کرہ کے اندر کوئی برقی بار نہیں پایا جاتا ہے۔ کرہ کی سطح پر برقی دباو $f(\theta)$ ہے جہاں r ، θ ، ϕ کروی محدد (شکل 13.20-ب) ہیں۔ صفحہ 309 پر مساوات 5.30 چند P_n دیتی ہے جن کی ضرورت آپ کو ہو گی۔

سوال 13.185: $f(\theta)=1$
جواب: $u=1$

سوال 13.186: $f(\theta)=\cos\theta$
جواب: $u=rP_1(\cos\theta)=r\cos\theta$

سوال 13.187: $f(\theta)=\cos^2\theta$
جواب: $u=\frac{2}{3}r^2P_2(\cos\theta)+\frac{1}{3}=r^2(\cos^2\theta-\frac{1}{3})+\frac{1}{3}$

سوال 13.188: $f(\theta)=\cos^3\theta$
جواب: $u=\frac{3}{5}rP_1(\cos\theta)+\frac{2}{5}r^3P_3(\cos\theta)$

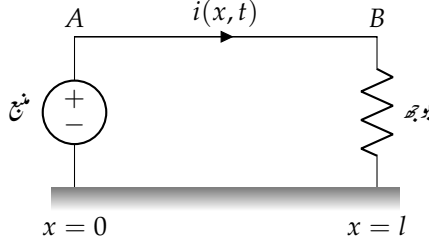
سوال 13.189: $f(\theta)=\cos 2\theta$
جواب: $u=-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+\frac{4}{3}r^2P_2(\cos\theta)$

سوال 13.190: $f(\theta)=\cos 3\theta$
جواب: $u=-\frac{3}{5}rP_1(\cos\theta)+\frac{8}{5}r^3P_3(\cos\theta)$

سوال 13.191: $f(\theta)=10\cos^3\theta-3\cos^2\theta-5\cos\theta-1$
جواب: $u=-2P_0(\cos\theta)+rP_1(\cos\theta)-2r^2P_2(\cos\theta)+4r^3P_3(\cos\theta)$

سوال 13.192: سوال 13.185 میں دکھائیں کہ کرہ کے باہر برقی دباو ویسا ہی ہو ہے جیسے کرہ کی مرکز پر نقطہ بار کا برقی دباو ہو گا۔

سوال 13.193: سوال 13.185 تا سوال 13.191 میں کرہ کے باہر برقی دباو حاصل کریں۔
جواب: $\frac{1}{r},\quad \frac{1}{r^2}P_1(\cos\theta),\quad \frac{2}{3r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{3r},\cdots$

سوال 13.194: سوال 13.186 میں ہم قوہ سطحوں اور xz مستوی کے تقاطع کی ترسیم کھینچیں۔

شکل 13.21: ترسیلی تار

سوال 13.195: سوال 13.187 میں حاصل کردہ حل کو مساوات 13.135 میں پر کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ یہ مساوات 13.135 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.196: مساوات ترسیلی تار ایک ناقص حاجز شدہ لمبی برقی تار یا ٹیلیفون کی تار جس کو شکل 13.21 میں دکھایا گیا ہے۔ناقص حجز کی بدولت تار کی پوری لمبائی پر برقی رساو پائی جاتی ہے۔اس نظام میں برقی رو $i(x,t)$ کا منبع نقطہ $x=0$ پر جبکہ برقی بوجھ نقطہ $x=l$ پر ہے۔برقی بوجھ کو مزاحمت سے ظاہر کیا گیا ہے۔منبع سے مزاحمت تک برقی رو بالائی تار کے ذریعہ پہنچ کر واپس منبع تک زمین کے ذریعہ پہنچتی ہے۔فرض کریں کہ فی اکائی لمبائی تار سے زمین تک مزاحمت[52]، امالہ[53]، برق گیر[54] اور ایصالیت[55] بالترتیب R ، L ، C اور G ہیں۔درج ذیل مساوات حاصل کریں

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=Ri+L\frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{(ترسیلی تار کی پہلی مساوات)} \tag{13.151}$$

جہاں تار پر برقی دباو $u(x,t)$ ہے۔(اشارہ: تار کا چھوٹا ٹکڑا x تا $x+\Delta x$ لیں۔کرخوف کے قانون برائے برقی دباو کے تحت اس ٹکڑے میں برقی دباو کی گھٹاو اس حصے کی مزاحمتی گھٹاو اور امالی گھٹاو کا مجموعہ ہو گا۔)

سوال 13.197: سوال 13.196 کی ترسیلی تار کے لئے درج ذیل مساوات حاصل کریں۔(اشارہ: تار کا چھوٹا ٹکڑا x تا $x+\Delta x$ لیں۔کرخوف کے قانون برائے برقی رو کے تحت x اور $x+\Delta x$ پر برقی رو میں فرق، تار سے زمین تک ایصالی رساو اور برق گیری رساو کا مجموعہ ہو گا۔)

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=Gu+C\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{(ترسیلی تار کی دوسری مساوات)} \tag{13.152}$$

[52] resistance
[53] inductance
[54] capacitance
[55] conductance

سوال 13.198: ترسیلی تار کی پہلی اور دوسری مساوات سے i حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + GL)u_t + RGu \tag{13.153}$$

سوال 13.199: مساوات ٹیلی گراف
آب دوز تار کا G قابل نظر انداز ہوتا ہے جبکہ استعمال ہونے والی تعدد نہایت کم ہوتی ہے۔ایسی صورت میں درج ذیل سادہ مساوات حاصل کریں۔

$$u_{xx} = RCu_t, \quad i_{xx} = RCi_t \tag{13.154}$$

سوال 13.200: بلند تعددی مساوات تار
بلند تعدد $i(x,t)$ کی صورت میں مساوات 13.153 کی سادہ صورت اور ساتھ ہی برقی رو کی مماثل سادہ مساوات حاصل کریں۔
جوابات:

$$u_{xx} = LCu_{tt}, \quad i_{xx} = LCi_{tt} \tag{13.155}$$

13.13 لاپلاس تبادل برائے جزوی تفرقی مساوات

لاپلاس تبادل (باب 6) کو جزوی تفرقی مساوات کے حل کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔اس حصہ میں دو مثالوں کی مدد سے اس ترکیب کی بنیادی تصور کو سمجھایا جائے گا۔ (زیادہ پیچیدہ مسائل مخلوط تجزیہ کی تراکیب سے قابل حل ہوں گے۔ بعض اوقات فوریئر تبادل (حصہ 12.9) زیادہ سود مند ثابت ہوتا ہے۔)

ہم باب 12 سے جانتے ہیں کہ سادہ تفرقی مساوات کا لاپلاس تبادل الجبرائی مساوات ہوتی ہے۔ہم دیکھیں گے کہ دو متغیرات کی جزوی تفرقی مساوات کا لاپلاس بدل سادہ تفرقی مساوات ہو گی۔ایسا اس لئے ہو گا کہ ہم لاپلاس بدل کسی ایک غیر تابع متغیرہ، عموماً t ، کے لحاظ سے لیں گے لہٰذا دوسرا غیر تابع متغیرہ جوں کا توں رہتے ہوئے سادہ تفرقی مساوات دے گا۔اگر دیے گئے جزوی مساوات کے عددی سر t پر منحصر نہ ہوں تب مسئلہ زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

مثال 13.6: یک رتبی مساوات
درج ذیل مسئلہ کو حل کریں۔

$$\frac{\partial w}{\partial x}+x\frac{\partial w}{\partial t}=0,\quad w(x,0)=0,\quad w(0,t)=t \qquad (t\geq 0) \tag{13.156}$$

ہم u کو اکائی سیڑھی تفاعل (حصہ 6.3) کے لئے استعمال کریں گے لہٰذا یہاں w استعمال کیا گیا ہے۔
حل: ہم مساوات 13.156 کا لاپلاس بدل t کے لحاظ سے حاصل کرتے ہیں۔یوں مساوات 6.5 کی مدد سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\mathcal{L}(\frac{\partial w}{\partial x})+x[s\mathcal{L}(w)-w(x,0)]=0 \tag{13.157}$$

یہاں $w(x,0)=0$ ہے۔ہم پہلے رکن میں فرض کرتے ہیں کہ تکمل اور تفرق کی ترتیب بدلی جا سکتی ہے۔یوں پہلا رکن

$$\mathcal{L}(\frac{\partial w}{\partial x})=\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{\partial w}{\partial x}\,\mathrm{d}t=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\infty}e^{-st}w(x,t)\,\mathrm{d}t=\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}[w(x,t)]; \tag{13.158}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $W(x,s)=\mathcal{L}[w(x,t)]$ لکھتے ہوئے مساوات 13.157 سے

$$\frac{\partial W}{\partial x}+xsW=0$$

حاصل ہوتا ہے جو سادہ ترقی مساوات ہے۔اس سادہ تفرقی مساوات کا غیر تابع متغیرہ x ہے چونکہ مساوات میں s کے لحاظ سے کوئی تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کا عمومی حل (حصہ 1.5) درج ذیل ہے۔

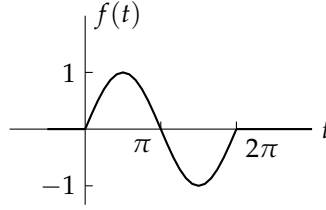
$$W(x,s)=c(s)e^{-\frac{sx^2}{2}}$$

چونکہ $\mathcal{L}(t)=\frac{1}{s^2}$ کے برابر ہے لہٰذا سرحدی شرط $w(0,t)=t$ سے $W(0,s)=\frac{1}{s^2}$ کی شرط حاصل ہو گی۔یوں

$$W(0,s)=c(s)=\frac{1}{s^2}$$

اور

$$W(x,s)=\frac{1}{s^2}e^{-\frac{sx^2}{2}}$$

$f(t)$, 1, -1, π, 2π, t

شکل 13.22: تار کے بائیں سر کی حرکت (مثال 13.7)

ہوں گے۔ اب $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) = t$ ہے لہٰذا منتقلی کا دوسرا مسئلہ (مسئلہ 6.7) میں $a = \frac{x^2}{2}$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$w(x,t) = \left(t - \frac{x^2}{2}\right)u_{\frac{x^2}{2}}(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{x^2}{2} \\ t - \frac{x^2}{2} & t > \frac{x^2}{2} \end{cases} \tag{13.159}$$

آپ پر چھوڑا جاتا ہے کہ مساوات 13.159 کو مساوات 13.156 میں پر کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ یہ مسئلے کا درست حل ہے۔ □

مثال 13.7: نصف لامتناہی تار

لچکدار تار کی انحراف $w(x,t)$ درج ذیل صورتوں میں دریافت کریں۔ ہم u کو اکائی سیڑھی تفاعل (حصہ 6.3) کے لئے استعمال کریں گے لہٰذا یہاں w استعمال کیا گیا ہے۔

(الف) ابتدائی طور پر نصف لامتناہی تار x محور پر $x = 0$ تا $x = \infty$ ساکن ہے۔

(ب) وقت $t > 0$ کے دوران تار کے بائیں سر کو درج ذیل طرح ہلایا جاتا ہے (شکل 13.22)۔

$$w(0,t) = f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t \le 2\pi \\ 0 & \text{باقی اوقات} \end{cases}$$

(پ) مزید تمام اوقات درج ذیل ہے۔

$$\lim_{x\to\infty} w(x,t) = 0 \qquad t \ge 0$$

ظاہر ہے کہ حقیقت میں لامتناہی تار نہیں پائی جاتی ہے لیکن یہ (قابل نظر انداز وزن کی) زیادہ لمبی تار جس کا دایاں

سر x محور پر کسی دو نقطہ سے بندھا ہو کی نمونہ کشی کرتی ہے۔
حل: ہمیں مساوات موج (حصہ 13.2)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad c^2 = \frac{T}{\rho} \tag{13.160}$$

زیر سرحدی شرائط

$$w(0,t) = f(t), \quad \lim_{x\to\infty} = 0 \qquad (t \geq 0) \tag{13.161}$$

اور ابتدائی شرائط

$$w(x,0) = 0 \tag{13.162}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{13.163}$$

حل کرنی ہے۔ہم t کے لحاظ سے لاپلاس بدل لیتے ہیں۔یوں مساوات 6.6 کی مدد سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\mathcal{L}(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) = s^2\mathcal{L}(w) - sw(x,0) - \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = c^2\mathcal{L}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$$

مساوات 13.162 اور مساوات 13.163 کی بنا دو اجزاء حذف ہوں گے۔دائیں ہاتھ ہم فرض کرتے ہیں کہ تکمل اور تفرق کی ترتیب بدلی جا سکتی ہے۔یوں

$$\mathcal{L}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-st}w(x,t)\,\mathrm{d}t = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}[w(x,t)]$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں $W(x,s) = \mathcal{L}[w(x,t)]$ لکھتے ہوئے

$$s^2 W = c^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

یعنی

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2}W = 0$$

ملتا ہے۔چونکہ اس مساوات میں صرف x کے ساتھ تفرق پایا جاتا ہے لہٰذا اس کو سادہ تفرقی مساوات تصور کیا جاتا ہے جس کا نا معلوم تفاعل $W(x,s)$ کے جو متغیرہ x کے تابع ہے۔اس کا عمومی حل

$$W(x,s) = A(s)e^{\frac{sx}{c}} + B(s)e^{-\frac{sx}{c}} \tag{13.164}$$

ہے۔ مساوات 13.161 سے $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ لکھتے ہوئے

$$W(0,s)=\mathcal{L}[w(0,t)]=\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$$

ملتا ہے۔ اب فرض کریں کہ تکمل اور تفرق کی ترتیب دبلی جا سکتی ہے۔ یوں

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} W(x,s) &= \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}w(x,t)\,\mathrm{d}t\\ &=\int_0^\infty e^{-st}\lim_{x\to\infty} w(x,t)\,\mathrm{d}t=0\end{aligned}\tag{13.165}$$

ہو گا۔ اب $c>0$ ہے جبکہ مساوات 13.164 میں s کی کسی بھی مثبت قیمت کے لئے $x\to\infty$ کرنے سے $e^{\frac{sx}{c}}\to\infty$ ہو گا لہٰذا مساوات 13.165 کے تحت مساوات 13.164 میں $A(s)=0$ ہو گا۔ چونکہ کسی معین α سے زیادہ کسی بھی s کے لئے لاپلاس بدل موجود (حصہ 6.2) ہو گا لہٰذا ہم $s>0$ فرض کر سکتے ہیں اور یوں

$$W(0,s)=B(s)=F(s)$$

ہو گا۔ اس طرح مساوات 13.164 سے درج ذیل ملتا ہے۔

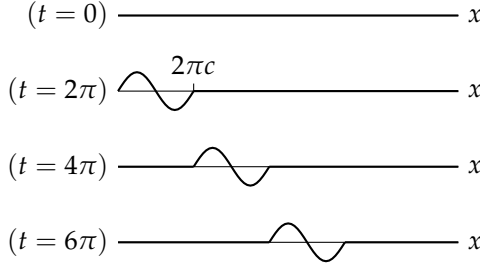
$$W(x,s)=F(s)e^{-\frac{sx}{c}}$$

منتقلی کا دوسرا مسئلہ 6.7 میں $a=\frac{x}{c}$ لیتے ہوئے الٹ لاپلاس بدل (شکل 13.23)

$$w(x,t)=f\left(t-\frac{x}{c}\right)u_{\frac{x}{c}}(t)\tag{13.166}$$

یعنی

$$w(x,t)=\begin{cases}\sin\left(t-\frac{x}{c}\right) & \frac{x}{c}<t<\frac{x}{c}+2\pi \quad \text{یا} \quad ct>x>(t-2\pi)c\\ 0 & \text{باقی اوقات}\end{cases}\tag{13.167}$$

حاصل کرتے ہیں جو رفتار c سے بائیں رخ حرکت کرتی واحد ایک موج ہے۔ یوں اگر موج بائیں سر سے لمحہ $t=0$ پر روانہ ہو تب نقطہ x، لمحہ $t=\frac{x}{c}$ تک ساکن رہتا ہے۔ وقت $t=\frac{x}{c}$ موج کو رفتار c پر چلتے ہوئے فاصلہ x طے کرنے کے لئے درکار وقت ہے۔ یہ تار یا رسی پر موج کی چال کی ہمارے مشاہدے کے عین مطابق ہے۔ آپ مساوات 13.166 کو مساوات 13.160 میں پر کرتے ہوئے تصدیق کر سکتے ہیں کہ یہی درست جواب ہے جو سرحدی اور ابتدائی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔ □

شکل 13.23: تار پر موج کی حرکت (مثال 13.7)

سوالات

سوال 13.201: $c=1$ اور تکونی f کی صورت میں شکل 13.23 کی طرح موج کی حرکت دکھائیں۔

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\frac{1}{2} \\ (l-x) & \frac{1}{2}<x<1 \end{cases} \tag{13.168}$$

سوال 13.202: تار کی تناو اور کمیت کا مثال 13.7 میں موج کی رفتار پر کیا اثر ہو گا؟

سوال 13.203: مثال 13.7 میں حاصل کردہ حل کو مساوات موج میں پر کرتے ہوئے اس کی درستگی کی تصدیق کریں۔اگر ہم لمحہ $t=0$ پر تار کی بائیں سر پر نا ختم ہونے والی سائن موج دیں تب نتائج کیا ہوں گے؟

لاپلاس بدل استعمال کرتے ہوئے سوال 13.204 تا سوال 13.206 حل کریں۔حاصل حل کو واپس دی گئی جزوی تفرقی مساوات میں پر کرتے ہوئے حل کی درستگی کی تصدیق کریں۔

سوال 13.204: $\frac{\partial u}{\partial x}+2x\frac{\partial u}{\partial t}=2x, \quad u(x,0)=1, \quad u(0,t)=1$

سوال 13.205:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=xt, \quad \begin{matrix} u(x,0)=0, & x\geq 0 \\ u(0,t)=0, & t\geq 0 \end{matrix}$$

جواب:

$$\begin{aligned}
&U(x,s)=\tfrac{c(s)}{x^s}+\tfrac{x}{s^2(s+1)}, \quad U(0,s)=0, \quad c(s)=0,\\
&u(x,t)=x(t-1+e^{-t})
\end{aligned}$$

سوال 13.206: سوال 13.205 کو کسی دوسرے طریقہ سے حل کریں۔

نصف لامتناہی، اطراف سے حاجز شدہ سلاخ x محور پر $0=x$ تا $x=\infty$ پڑی ہے۔ سلاخ میں ابتدائی درجہ حرارت صفر ہے۔ مزید تمام معین $t\geq 0$ کے لئے $x\to\infty$ پر $w(x,t)\to 0$ جبکہ $w(0,t)=f(t)$ ہے۔ سلاخ میں درجہ حرارت $w(x,t)$ حاصل کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کریں۔

سوال 13.207: مسئلہ کا ریاضی نمونہ حاصل کریں۔ اس نمونے کا لاپلاس بدل لے کر درج ذیل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}
sW(x,s)&=c^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \qquad && W=\mathcal{L}(w)\\
W(x,s)&=F(s)e^{-\frac{\sqrt{s}x}{c}} && F=\mathcal{L}(f)
\end{aligned}$$

سوال 13.208: مسئلہ الجھاو کی اطلاق سوال 13.207 پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$w(x,t)=\frac{x}{2c\sqrt{\pi}}\int_0^t f(t-\tau)\tau^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4c^2\tau}}\,\mathrm{d}\tau$$

سوال 13.209: فرض کریں کہ $w(0,t)=f(t)=u_0(t)$ ہے (حصہ 6.3)۔ اس کے مطابقتی w ، W اور F کو بالترتیب w_0 ، W_0 اور F_0 سے ظاہر کریں۔ یوں دکھائیں کہ سوال 13.208 میں درج ذیل ہو گا

$$w_0(x,t)=\frac{x}{2c\sqrt{\pi}}\int_0^t \tau^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4c^2\tau}}\,\mathrm{d}\tau=1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)$$

جہاں تفاعل erf کی تعریف حصہ 13.6 کی سوالات میں دی گئی ہے۔

جواب: $\frac{x^2}{4c^2\tau}=z$ لے کر z کے ساتھ تکمل لیں اور $\operatorname{erf}(\infty)=1$ استعمال کریں۔

سوال 13.210: دکھائیں کہ سوال 13.209 میں درج ذیل ہو گا

$$W_0(x,s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{\sqrt{s}x}{x}}$$

جو مسئلہ الجھاو کی اطلاق سے درج ذیل دیتی ہے۔

$$w(x,t) = \int_0^t f(t-\tau) \frac{\partial w_0}{\partial \tau} \, \mathrm{d}\tau$$

یہ کسی بھی تفاعل f کا حل، تفاعل $f(t) = u_0(t)$ کے حل w_0 کی صورت میں دیتی ہے۔

باب14

مخلوط اعداد۔ مخلوط تحلیلی تفاعل

انجینئری کے کئی مسائل مخلوط تجزیہ سے با آسانی حل ہو پاتے ہیں۔ان مسئلوں کو دو بڑے گروہوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔پہلی گروہ میں سادہ مسائل شامل ہیں جنہیں حل کرنے کے لئے کالج میں سیکھی گئی مخلوط اعداد کی الجبرا کافی ہے۔ برقی ادوار اور میکانی ارتعاش کے کئی مسائل اس نوعیت کے ہیں۔ دوسری گروہ کے لئے مخلوط تحلیلی تفاعل کا نظریہ اور اس میں استعمال کیے جانے والے انتہائی طاقتور اور شائستہ تراکیب تفصیلاً جاننا ضروری ہے۔ نظریہ حرارت، حرکیات سیال اور برقی سکون کے مسائل اس نوعیت کے ہیں۔

اس باب کے علاوہ اگلے کئی ابواب میں مخلوط تحلیلی تفاعل کے نظریہ کی بیشتر حصوں اور ان تفاعل کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ ہم دیکھیں گے کہ انجینئری حساب میں ان تفاعل کی اہمیت درج ذیل تین وجوہات کی بنا ہے۔

(الف) تحلیلی تفاعل کے حقیقی اور خیالی اجزاء، دو متغیرات کی لاپلاس مساوات کا حل ہوتے ہیں۔ یوں دو ابعادی مخفی قوہ مسائل پر تحلیلی تفاعل کے لئے بنائے گئے تراکیب کی مدد سے غور کیا جا سکتا ہے۔

(ب) مختلف مسائل میں درپیش کئی پیچیدہ حقیقی اور مخلوط تکملات کو مخلوط تکمل کی تراکیب سے حاصل کرنا ممکن ہے۔

(پ) انجینئری حساب میں پائے جانے والے غیر بنیادی تفاعل کا بیشتر حصہ تحلیلی تفاعل پر مشتمل ہے۔مخلوط غیر تابع متغیرات کے لئے ان تفاعل کے مشاہدہ سے تفاعل کی خواص کی مفصل اور گہری سمجھ پیدا ہوتی ہے۔

موجودہ باب میں ہم مخلوط اعداد اور تحلیلی تفاعل اور ان ان کے عمومی خواص پر غور کریں گے۔باب کا دوسرا حصہ اہم ترین بنیادی مخلوط تفاعل کے لئے مختص ہے۔

14.1 مخلوط اعداد

تاریخی طور پر دیکھا گیا کہ کئی مساوات مثلاً

$$x^2 + 4 = 0, \quad x^2 + 2x + 5 = 0$$

کو کوئی بھی حقیقی عدد مطمئن نہیں کرتا ہے۔ مخلوط اعداد کا آغاز یہیں سے ہوا۔[1]

تعریف: حقیقی اعداد x اور y کی مرتب جوڑی (x, y) کو **مخلوط عدد**[2] z کہتے ہیں جو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$z = (x, y)$$

ہم x کو z کا **حقیقی حصہ**[3] اور y کو z کا **خیالی حصہ**[4] کہتے ہیں جنہیں ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$x = z_{\text{حقیقی}}, \quad y = z_{\text{خیالی}}$$

یوں حقیقی $(-7, 2) = -7$ اور خیالی $(-7, 2) = 2$ ہوں گے۔ مزید دو مخلوط اعداد $z_1 = (x_1, y_1)$ اور $z_2 = (x_2, y_2)$ کی برابری کی تعریف ہم یوں کرتے ہیں کہ یہ مخلوط اعداد صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں اور ان کے خیالی حصے آپس میں برابر ہوں۔

مخلوط اعداد $z_1 = (x_1, y_1)$ اور $z_2 = (x_2, y_2)$ کا **مجموعہ** درج ذیل قاعدہ دیتا ہے

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{14.1}$$

جبکہ ان کا حاصل ضرب درج ذیل قاعدہ دے گا۔

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{14.2}$$

ان اعمال ریاضی پر مزید بحث آگے کی جائے گی۔

---

[1] اس مقصد کے لئے مخلوط اعداد سب سے پہلے اطالوی ریاضی دان جرولاموکردانو[1501-1576] نے استعمال کیے جنہوں نے کعبی مساوات کے حل کا کلیہ دریافت کیا۔ مخلوط اعداد کی منظم اور عام استعمال کی بنیاد جرمنی کے ریاضی دان یوہان کارل فرڈرش گاوس نے ڈالی۔

[2] complex number

[3] real part

[4] imaginary part

روپ $z = x + iy$ میں خیالی اعداد کا اظہار

ایسا مخلوط عدد جس کا خیالی حصہ صفر کی روپ $(x, 0)$ ہو گی۔ اس طرز کے مخلوط اعداد کے لئے حقیقی اعداد کی طرح

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$
$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا $(x, 0)$ کو حقیقی عدد تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں حقیقی عددی نظام کی توسیعی حالت مخلوط عددی نظام ہے۔ مزید درج ذیل مخلوط عدد

$$i = (0, 1)$$

کو **خیالی اکائی**[5] کہتے ہیں۔ مساوات 14.2 کے تحت ہر حقیقی y کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$iy = (0, 1)(y, 0) = (0, y)$$

جبکہ مساوات 14.1 کے تحت

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

ہو گا۔ یوں $(x, 0)$ کے لئے x اور $(0, y) = iy$ استعمال کرتے ہوئے

$$z = x + iy$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مخلوط اعداد کو عموماً اسی روپ میں لکھا جاتا ہے۔ خیالی اکائی i کی ایک اہم خاصیت

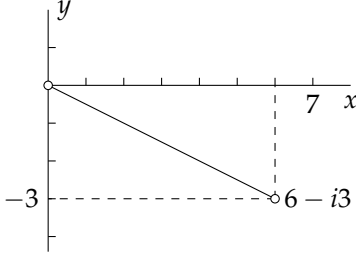
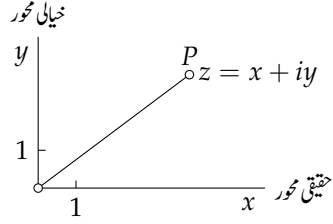
$$i^2 = -1 \tag{14.3}$$

کو مساوات 14.2 سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی: $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$

مخلوط سطح

مخلوط اعداد کو سطح پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرنا نہایت مفید ثابت ہوتا ہے۔ ہم دو عدد آپس میں عمودی محور چنتے ہیں۔ افقی x محور کو **حقیقی محور**[6] جبکہ انتصابی y محور کو **خیالی محور**[7] تصور کیا جاتا ہے۔ دونوں محوروں پر یکساں اکائی لمبائی استعمال کی جاتی ہے (شکل 14.1-الف)۔ اس کو کارتیسی محددی نظام کہتے ہیں۔ ہم اب مخلوط عدد $z = (x, y) = x + iy$ کو اس سطح پر بطور نقطہ P ظاہر کرتے ہیں جس کے محدد x اور y ہوں گے۔ ایسی xy سطح جس پر اس طرح مخلوط اعداد ظاہر کیے جاتے ہیں **مخلوط سطح**[8] یا **نقشہ اگن**[9] کہلاتی[10] ہے۔

---

[5] imaginary unit
[6] real axis
[7] imaginary axis
[8] complex plane
[9] Argand diagram
[10] فرانسیسی ریاضی دان ژاں غوبغ اگن [1768-1822]

شکل 14.1: مخلوط سطح اور مخلوط سطح پر مخلوط عدد کا اظہار

"مخلوط سطح میں مخلوط عدد z " کہنے کی بجائے ہم "مخلوط سطح میں نقطہ z " کہیں گے۔ اس سے کوئی غلط فہمی پیدا نہیں ہوتی ہے۔

ریاضی اعمال

ہم اب مخلوط عدد کی روپ $z = x + iy$ اور مخلوط سطح کو استعمال کرتے ہیں۔

جمع۔ مساوات 14.1 میں دیا گیا مجموعہ $z_1 + z_2$ اب

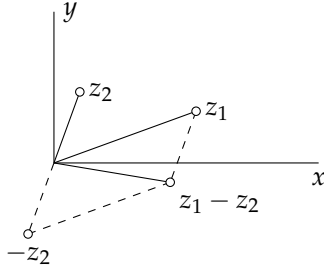
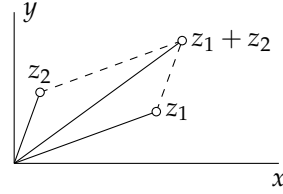
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{14.4}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مخلوط اعداد کی جمع، میکانیات میں قوتوں کا مجموعہ حاصل کرنے کے متوازی الاضلاع قاعدہ کے مطابق ہے (شکل 14.2-الف)۔

تفریق۔ یہ جمع کا الٹ عمل ہے۔ فرق $z_1 - z_2$ ایسے مخلوط عدد z کے برابر ہو گا کہ $z_1 = z + z_2$ ہو۔ یوں (شکل 14.2-ب) درج ذیل ہو گا۔

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{14.5}$$

ضرب۔ مساوات 14.2 میں دی گئی ضرب $z_1 z_2$ کو اب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{14.6}$$

(ب) مخلوط اعداد کی تفریق

(الف) مخلوط اعداد کی جمع

شکل 14.2: مخلوط اعداد کی جمع اور تفرق

چونکہ یہ نتیجہ حقیقی اعداد کی حساب کے قوانین اور مساوات 14.3 یعنی $i^2 = ii = -1$ کی استعمال سے حاصل ہوتا ہے لہٰذا اس کو یاد رکھنا آسان ہے۔

تقسیم۔ یہ ضرب کا الٹ عمل ہے۔یوں حاصل تقسیم $z = \frac{z_1}{z_2}$ ایسا مخلوط عدد $z = x + iy$ ہو گا جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$z_1 = zz_2 = (x + iy)(x_2 + iy_2) \qquad (z_2 \neq 0) \tag{14.7}$$

ہم $z_2 \neq 0$ کی صورت میں حاصل تقسیم $z = x + iy = \frac{z_1}{z_2}$ کی درج ذیل صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (z_2 \neq 0) \tag{14.8}$$

عملاً مساوات 14.8 کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{z_1}{z_2}$ کی شمار کنندہ اور نسب نما کو $x_2 - iy_2$ سے ضرب دے کر سادہ صورت حاصل کرتے ہیں یعنی:

$$z = \frac{x_1 + y_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{14.9}$$

مثال کے طور پر اگر $z_1 = 3 - i2$ اور $z_2 = -4 + i$ ہوں تب

$$\frac{3 - i2}{-4 + i} = \frac{(3 - i2)(-4 - i)}{(-4 + i)(-4 - i)} = \frac{-12 - i3 + i8 - 2}{16 + 1} = -\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}$$

ہو گا جس کی درستگی آپ درج ذیل طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

$$zz_2 = \left(-\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}\right)(-4+i) = \frac{56}{17} - i\frac{14}{17} - i\frac{20}{17} - \frac{5}{17} = 3 - i2$$

مساوات 14.8 کا ثبوت کچھ یوں ہے۔مساوات 14.6 سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 14.7 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$x_1 + iy_1 = (x_2x - y_2y) + i(y_2x + x_2y)$$

مخلوط اعداد کی برابری کی تعریف کی رو سے دونوں مخلوط اعداد کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں گے اور ان کے خیالی حصے آپس میں برابر ہوں گے یعنی:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2x - y_2y \\ y_1 &= y_2x + x_2y \end{aligned}$$

یہ دو دو خطی مساوات کا نظام ہے جس کے نا معلوم متغیرات x اور y ہیں۔یہ فرض کرتے ہوئے کہ x_2 اور y_2 بیک وقت صفر نہیں ہیں (جس کو مختصراً $z \neq 0$ لکھا جاتا ہے) ہمیں مساوات 14.8 میں دیا گیا یکتا حل حاصل ہوتا ہے۔

مثال 14.1: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم

فرض کریں کہ $z_1 = 3 - i2$ اور $z_2 = -4 + i$ ہیں۔تب

$$z_1 + z_2 = -1 - i, z_1 - z_2 = 7 - i3, z_1z_2 = -10 + i11$$

اور جیسے ہم حاصل کر سکے ہیں $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{14}{17} + i\frac{5}{17}$ ہو گا۔ □

ریاضی اعمال کے خواص

حقیقی اعداد کے قواعد سے مخلوط اعداد z_1 اور z_2 کے لئے درج ذیل قواعد حاصل ہوتے ہیں

$$\left.\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{(قانون تبادل)}$$

$$\left.\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3) \end{aligned}\right\} \quad \text{قانون تلازم} \tag{14.10}$$

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad \text{(قانون جزئیتی تقسیم)} \\ 0 + z &= z + 0 = z \\ z + (-z) &= (-z) + z = 0 \\ z \cdot 1 &= z \end{aligned}$$

جہاں $0 = (0,0)$ اور $-z = -x - iy$ ہیں۔

جوڑی دار مخلوط اعداد

فرض کریں کہ $z = x + iy$ کوئی مخلوط عدد ہے۔تب $x - iy$ کو z کا جوڑی دار مخلوط کہا جائے گا اور z کے جوڑی دار مخلوط کو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جائے گا۔یوں

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

ہوں گا۔مثلاً $z = 5 + i2$ کا جوڑی دار مخلوط $\bar{z} = 5 - i2$ ہے (شکل 14.3)۔مزید جمع اور تفریق سے

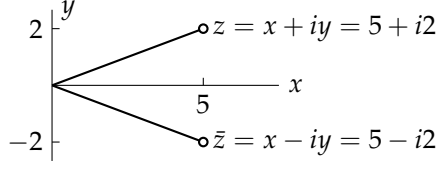
$$z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = i2y$$

حاصل ہوتے ہیں جو درج ذیل اہم کلیات کا سبب بنتے ہیں۔

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = z_{\text{حقیقی}}, \quad \frac{1}{i2}(z - \bar{z}) = z_{\text{خیالی}} \tag{14.11}$$

حقیقی عدد $z = x$ کا مخلوط جوڑی دار عدد $\bar{z} = z$ ہو گا جبکہ $z = 0 + iy = iy$ کا جوڑی دار مخلوط عدد $\bar{z} = -z$ ہو گا۔اس طرح کا عدد جس کا حقیقی حصہ صفر ہو خالص خیالی عدد[11] کہلاتا ہے جو خیالی محدد پر کسی نقطہ کو ظاہر کرتا ہے۔

---

[11] pure imaginary number

شکل 14.3: جوڑی دار مخلوط اعداد

اس کے علاوہ درج ذیل تعلق بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$
$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \tag{14.12}$$

سوالات

سوال 14.1: خیالی اکائی کے طاقت
درج ذیل ثابت کریں۔

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \cdots$$
$$\frac{1}{i} = -i, \quad \frac{1}{i^2} = -1, \quad \frac{1}{i^3} = i, \cdots \tag{14.13}$$

فرض کریں کہ $z_1 = 4 + i3$ اور $z_2 = 2 - i5$ ہیں۔ سوال 14.2 تا سوال 14.5 کو حل کرتے ہوئے $x + iy$ روپ میں لکھیں۔

سوال 14.2: $(z_1 - z_2)^2$
جواب: $-60 + i32$

سوال 14.3: $\frac{z_1}{z_2}$
جواب: $-\frac{7}{29} + i\frac{26}{29}$

سوال 14.4: $\frac{1}{z_1^2}$
جواب: $\frac{7}{625} - i\frac{24}{625}$

سوال 14.5: $\frac{2z_1}{3z_2}$
جواب: $-\frac{14}{87}+i\frac{52}{87}$

سوال 14.6 تا سوال 14.15 کو حل کریں جہاں $z=x+iy$ ہے۔

سوال 14.6: خیالی $\frac{1}{1+i}$
جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 14.7: حقیقی $\frac{1-i}{1+i}$
جواب: 0

سوال 14.8: خیالی z^2
جواب: $2xy$

سوال 14.9: حقیقی z^3
جواب: x^3-3xy^2

سوال 14.10: خیالی z^4
جواب: $4xy(x^2-y^2)$

سوال 14.11: حقیقی $\frac{(-1+i)^2}{-5+i4}$
جواب: $-\frac{8}{41}$

سوال 14.12: خیالی $\frac{3-i7}{-5+i2}$
جواب: 1

سوال 14.13: حقیقی $\frac{3-i7}{-5+i2}$
جواب: -1

سوال 14.14: خیالی $\frac{z}{\bar{z}}$
جواب: $\frac{2xy}{x^2+y^2}$

سوال 14.15: حقیقی $\frac{z}{\bar{z}}$
جواب: $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

سوال 14.16: قانون تبادل ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.17: قانون تلازم ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.18: قانون جزئیتی تقسیم ثابت کریں (مساوات 14.10)۔

سوال 14.19: اگر دو مخلوط اعداد کا حاصل ضرب صفر کے برابر ہو تب ثابت کریں کہ ان میں سے کم از کم ایک مخلوط عدد صفر ہو گا۔

سوال 14.20 تا سوال 14.27 میں ثبوت پیش درکار ہیں۔

سوال 14.20: کسی بھی عدد کے جوڑی دار مخلوط کا جوڑی دار مخلوط اس عدد کے برابر ہو گا۔

سوال 14.21: $\overline{iz} = -i\bar{z}$

سوال 14.22: z صرف اور صرف اس صورت حقیقی ہو گا جب $\bar{z} = z$ ہو۔

سوال 14.23: z صرف اور صرف اس صورت خالص خیالی ہو گا جب $\bar{z} = -z$ ہو۔

سوال 14.24: z صرف اور صرف اس صورت حقیقی یا خالص خیالی ہو گا جب $(\bar{z})^2 = z^2$ ہو۔

سوال 14.25: مساوات 14.12 ثابت کریں۔

سوال 14.26: $\text{حقیقی}\, z = \text{خیالی}\,(iz), \quad \text{خیالی}\, z = -\text{حقیقی}\,(iz)$

سوال 14.27: $\text{حقیقی}\, z = -\text{خیالی}\,(\overline{iz}), \quad \text{خیالی}\, z = -\text{حقیقی}\,(\overline{iz})$

14.2 مخلوط اعداد کی قطبی صورت۔ تکونی عدم مساوات

ہم مخلوط سطح میں درج ذیل قطبی محدد r ، θ متعارف کرتے ہیں۔

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{14.14}$$

یوں کسی بھی مخلوط عدد $z = x + iy \neq 0$ کو

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{14.15}$$

لکھا جا سکتا ہے جو مخلوط عدد کی **قطبی روپ**[12] یا تکونیاتی روپ[13] کہلاتی ہے۔ r کو مخلوط عدد z کی **مطلق قیمت**[14] یا معیار[15] کہتے ہیں جسے $|z|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا (شکل 14.4-الف)۔

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \quad (\geq 0) \tag{14.16}$$

مثبت x محور سے لکیر MN تک زاویہ کو z کی **دلیل**[16] کہتے ہیں جس کو $\underline{/z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ چلتے ہوئے زاویہ بڑھتا ہے۔ z کا زاویہ درج ذیل ہو گا۔

$$\underline{/z} = \theta = \sin^{-1}\frac{y}{r} = \cos^{-1}\frac{x}{r} = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{14.17}$$

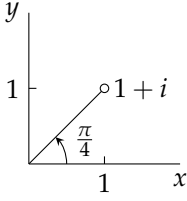
دھیان رہے کہ $z = 0$ کے لئے زاویہ θ غیر معین ہے۔اسی لئے اوپر شرط $z \neq 0$ لاگو کی گئی ہے۔

جیومیٹریائی طور پر مبدا M سے نقطہ z تک فاصلہ $|z|$ ہے (شکل 14.4-الف)۔یوں

$$|z_1| > |z_2|$$

کا مطلب ہے کہ مبدا سے z_1 کا فاصلہ، مبدا سے z_2 کے فاصلے سے زیادہ ہے اور $|z_1 - z_2|$ سے مراد z_1 اور z_2 کے درمیان فاصلہ ہے (شکل 14.4-ب)۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حقیقی محور سے ہٹ کر مخلوط اعداد کے لئے عدم مساوات $z_1 < z_2$ یا $z_1 \geq z_2$ کوئی معنی نہیں رکھتی ہیں۔

[12] polar form
[13] trigonometric form
[14] absolute value
[15] modulus
[16] argument

(الف) مخلوط سطح۔ مخلوط عدد کی قطبی روپ

(ب) دو نقطوں کے مابین فاصلہ

(پ) صدر زاویہ (مثال 14.2)

شکل 14.4: مخلوط سطح اور اس پر مخلوط نقطے۔

مخلوط عدد کے زاویہ θ کی وہ قیمت جو وقفہ

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

میں پائی جاتی ہو کو z کے زاویے کی صدر قیمت[17] کہتے ہیں جس کے ساتھ $\mp n\pi$ جمع کرنے سے z کے زاویے کی دیگر قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جہاں $n = 0, 1, 2, \cdots$ ہے۔

مثال 14.2: مخلوط اعداد کی قطبی روپ۔ صدر قیمت
فرض کریں کہ $z = 1 + i$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$z = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big), \quad |z| = \sqrt{2}, \quad \angle z = \frac{\pi}{4} \mp 2n\pi \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

z کے زاویہ کی صدر قیمت $\frac{\pi}{4}$ ہے (شکل 14.4-پ)۔ □

مثال 14.3: مخلوط اعداد کی قطبی روپ۔ صدر قیمت
فرض کریں کہ $z = -2 + i2\sqrt{3}$ ہے تب $z = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$ ہو گا۔ z کی مطلق قیمت $|z| = 4$ اور اس کا صدر زاویہ $\frac{2\pi}{3}$ ہو گا۔ □

مخلوط اعداد کی ضرب یا تقسیم میں مخلوط اعداد کی قطبی روپ نہایت مفید ثابت ہوتی ہے۔فرض کریں کہ

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{اور} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

[17] principal value

ہیں۔مساوات 14.6 کے تحت

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)_i(\sin\theta_1\cos\theta_2) + \cos\theta_1\sin\theta_2]$$

یعنی

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \tag{14.18}$$

ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتائج

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| \tag{14.19}$$

اور

$$\underline{/z_1z_2} = \underline{/z_1} + \underline{/z_2} \qquad (\mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots) \tag{14.20}$$

حاصل ہوتے ہیں۔اسی طرح تقسیم کی تعریف سے

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{14.21}$$

اور

$$\underline{/\tfrac{z_1}{z_2}} = \underline{/z_1} - \underline{/z_2} \qquad (\mp 2n\pi, \quad n = 0, 1, \cdots) \tag{14.22}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 14.4: کلیات ڈی موے ور
مساوات 14.19 اور مساوات 14.20 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{14.23}$$

جس سے کلیہ ڈی موے ور[18]

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{14.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔ □

---

[18] De Moivre formula

عدم مساوات

کسی بھی مخلوط عدد کے لئے درج ذیل تکونی عدم مساوات[19] (شکل 14.5) درست ہو گی

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{14.25}$$

جس کو ہم بار بار استعمال کریں گے۔نقطہ 0 ، z_1 اور z_2 شکل 14.5 میں تکون کے کونے ہیں جس کے اطراف کی لمبائی $|z_1|$ ، $|z_2|$ اور $|z_1 + z_2|$ ہے۔اب تکون کا کوئی ایک طرف باقی دو کی مجموعی لمبائی سے زیادہ نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا درج بالا عدم مساوات ثابت ہوتا ہے جس کا با ضابطہ ثبوت آپ پر چھوڑا جاتا ہے (سوال 14.48)۔

مساوات 14.25 سے ہم زیادہ تعداد کی مخلوط اعداد کے لئے عدم مساوات

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \tag{14.26}$$

اخذ کر سکتے ہیں، یعنی مجموعے کی مطلق قیمت تمام ارکان کی علیحدہ علیحدہ مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے۔

کسی بھی $z = x + iy$ کے لئے

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |y|$$

ہو گا جس سے درج ذیل اہم عدم مساوات

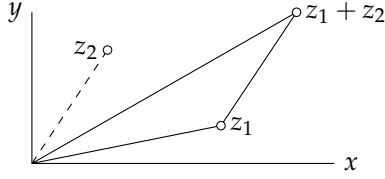
$$\left|z_{\text{حقیقی}}\right| \leq |z|, \quad \left|z_{\text{خیالی}}\right| \leq |z| \tag{14.27}$$

حاصل ہوتی ہیں۔

سوالات

سوال 14.28 تا سوال 14.34 کو حل کریں جہاں $z = x + iy$ ہے۔

سوال 14.28: $|1 - i|^2$
جواب: 2

[19] triangle inequality

شکل 14.5: تکونی عدم مساوات

سوال 14.29: $|-i7|$
جواب: 7

سوال 14.30: $|\cos\theta + i\sin\theta|$
جواب: 1

سوال 14.31: $\left|\frac{2+i5}{5-i2}\right|$
جواب: 1

سوال 14.32: $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|$
جواب: $\sqrt{\frac{(x+1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}}$

سوال 14.33: $\left|\frac{(-2+i3)^2}{(3+i2)^2}\right|$
جواب: 1

سوال 14.34: $\left|\frac{\bar{z}}{z}\right|$
جواب: 1

سوال 14.35 تا سوال 14.40 میں دلیل کی صدر قیمت دریافت کریں۔

سوال 14.35: -9
جواب: π

سوال 14.36: 9
جواب: 0

سوال 14.37: $i5$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 14.38: $5-i5$
جواب: $-\frac{\pi}{4}$

سوال 14.39: $-5-i5$
جواب: $-\frac{3\pi}{4}$

سوال 14.40: $-i3$
جواب: $-\frac{\pi}{2}$

سوال 14.41 تا سوال 14.44 میں دیے گئے مخلوط عدد کو قطبی روپ میں لکھیں۔

سوال 14.41: $2+i2$
جواب: $2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

سوال 14.42: -6
جواب: $6\cos\pi$

سوال 14.43: $-i8$
جواب: $8\sin(-\frac{\pi}{2})$

سوال 14.44: $\frac{1}{1+i\sqrt{3}}$
جواب: $\frac{1}{2}[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})]$

سوال 14.45: تکونی عدم مساوات کی تصدیق $z_1=-1-i2$ اور $z_2=3-i2$ کے لئے کریں۔
جواب: $|z_1|=\sqrt{5}\approx 2.236, \quad |z_2|=\sqrt{13}\approx 3.606, \quad |z_1-z_2|=2\sqrt{5}\approx 4.472$ ہیں
لہٰذا $4.472<2.236+3.606$ ہے۔

سوال 14.46: تکونی عدم مساوات کی تصدیق $z_1=1+i$ اور $z_2=i4$ کے لئے کریں۔

سوال 14.47: تکونی عدم مساوات میں برابر کی علامت کس صورت استعمال ہو گی۔
جواب: جب مبدا اور دیے گئے دو مخلوط اعداد تکون کی بجائے سیدھی لکیر بناتے ہوں۔

سوال 14.48: تکونی عدم مساوات کا ریاضی ثبوت پیش کریں۔

سوال 14.49: تکونی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ ثابت کریں۔

سوال 14.50: ثابت کریں کہ $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|$ ہو گا۔اعدادی مثال پیش کریں۔

سوال 14.51: ثابت کریں کہ $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ ہو گا۔

سوال 14.52: $z = (5 + i4)^2$ کے لئے مساوات 14.27 کی تصدیق کریں۔

سوال 14.53: i کے ساتھ ضرب
عمومی مخلوط عدد $z = x + iy$ کو مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔ z کو i سے ضرب دینے سے $z_1 = -y + ix$ حاصل ہوتا ہے۔اس کو بھی اسی مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔ z سے z_1 تک زاویہ کیا ہو گا؟ جواب: $\frac{\pi}{2}$

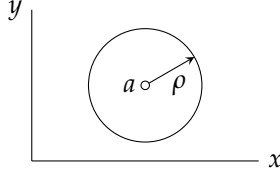
سوال 14.54: i کے ساتھ ضرب
ثابت کریں کہ کسی بھی مخلوط عدد کو i سے ضرب دینا مخلوط سطح پر اس نقطے کو گھڑی کی الٹ رخ $\frac{\pi}{2}$ زاویے سے گمانے کے مترادف ہے۔

سوال 14.55: قطبی روپ استعمال کرتے ہوئے دو مخلوط اعداد کے حاصل ضرب مثلاً $(1 + i)(1 + 2i)$ کا جیومیٹریائی طریقہ دریافت کریں۔

14.3 مخلوط سطح میں منحنیات اور خطے

مخلوط سطح میں منحنیات اور خطوں کی ضرورت ہمیں بار بار ہو گی۔اس لئے چند اہم منحنیات اور خطوں اور ان کی مساواتوں اور عدم مساواتوں پر غور کرتے ہیں۔

چونکہ دو اعداد z اور a کے درمیان فاصلہ $|z - a|$ ہے لہٰذا رداس ρ کا ایسا دائرہ C جس کا مرکز نقطہ a پر ہو (شکل 14.6) کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$|z - a| = \rho \tag{14.28}$$

شکل 14.6: مخلوط سطح میں دائرہ

نتیجتاً عدم مساوات

$$|z-a| < \rho \tag{14.29}$$

دائرہ C کے اندر کسی بھی نقطہ کے لئے درست ہے۔یوں مساوات 14.29 دائرے کی اندرون کو ظاہر کرتی ہے۔ایسے دائری قرص[20] کو کھلا قرص[21] کہتے ہیں جبکہ خطہ

$$|z-a| \le \rho \tag{14.30}$$

کو بند قرص[22] کہتے ہیں جس میں دائرے کی اندرون کے ساتھ دائرہ بھی شامل ہے۔کھلا قرص (مساوات 14.29) کو نقطہ a کی پڑوس[23] بھی کہتے ہیں۔ظاہر ہے کہ a کی ایسی لامحدود تعداد کے پڑوس پائے جاتے ہیں جن کا $\rho\,(>0)$ آپس میں مختلف ہو گا۔

اسی طرح عدم مساوات

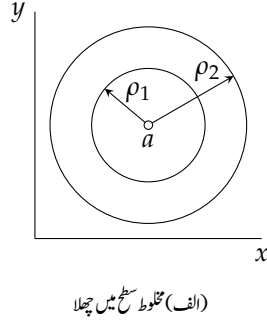
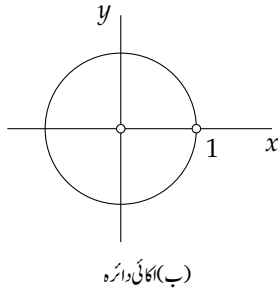
$$|z-a| > \rho \tag{14.31}$$

دائرے کی بیرون کو ظاہر کرتی ہے۔مزید رداس ρ_1 اور ρ_2 کے دو ہم مرکز دائروں (شکل 14.7-الف) کے درمیان خطے کو

$$\rho_1 < |z-a| < \rho_2 \tag{14.32}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں نقطہ a دائروں کا مرکز ہے۔ایسا خطہ کھلا چھلا[24] کہلاتا ہے۔

---

[20] circular disk
[21] open disk
[22] closed dsik
[23] neighbourhood
[24] open annulus

شکل 14.7: مخلوط سطح میں چھلا اور اکائی دائرہ

درج ذیل مساوات **اکائی دائرہ**[25] (شکل 14.7-ب) کو ظاہر کرتی ہے۔اکائی دائرے کا رداس اکائی اور مبدا اس کا مرکز ہو گا۔اکائی دائرہ مخلوط تجزیہ میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

مثال 14.5: **دائری قرص**

مخلوط سطح میں $|z-2+i4| \le 9$ کی خطہ کو ظاہر کرتی ہے۔

حل: یہ عدم مساوات ان تمام z کو ظاہر کرتی ہے جن کا نقطہ $2-i4$ سے فاصلہ، 9 سے زیادہ نہیں ہے۔یوں یہ اس بند قرص کو ظاہر کرتی ہے جس کا مرکز $2-i4$ ہے۔ □

مثال 14.6: **اکائی دائرہ اور اکائی قرص**

درج ذیل کن خطوں کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$|z| < 1 \quad \text{(الف)} \qquad |z| \le 1 \quad \text{(ب)} \qquad |z| > 1 \quad \text{(پ)}$$

حل: (الف) اکائی دائرے کی اندرون یعنی اکائی کھلا دائرہ۔

(ب) اکائی دائرے کی اندرون اور دائرہ یعنی اکائی بند دائرہ۔

(پ) اکائی دائرے کی بیرون۔ □

یہ ضروری ہے کہ طلبہ و طالبات مخلوط سطح پر منحنیات اور خطوں کی اظہار کو اچھی طرح سمجھیں۔اس لئے موجودہ حصے کی سوالات کو زیادہ غور سے حل کریں تا کہ آگے آپ کی مشکل کچھ آسان ہو سکے۔

---

[25] unit circle

ہم اب چند اصطلاحات کی تعریف بیان کرتے ہیں جو آگے استعمال کی جائیں گی۔

مخلوط سطح میں **نقطوں کے سلسلہ**[26] سے مراد محدود یا لامحدود تعداد کی نقطے ہیں۔ مثال کے طور پر دو درجی الجبرائی مساوات کے حل، کسی لکیر پر نقطوں کا سلسلہ، اور کسی دائرے کے اندر نقطوں کا سلسلہ۔

اگر سلسلہ S کے ہر نقطے کا ایسا پڑوس ہو جس کا ہر نقطہ بھی S کا حصہ ہو تب S **کھلا**[27] سلسلہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی دائرے یا مکعب کے اندرون تمام نقطے مل کر کھلا سلسلہ بناتے ہیں۔اسی طرح دایاں آدھی سطح $x > 0$ کے تمام نقطے کھلا سلسلہ ہیں۔ کسی دائرے کے اندر اور دائرے پر نقطے کھلا سلسلہ نہیں بناتے ہیں چونکہ دائرہ پر نقطوں کا ایسا کوئی پڑوس نہیں پایا جاتا ہے جس کے تمام نقطے اس سلسلے کا حصہ ہوں۔

مخلوط سطح میں ایسا سلسلہ جس کا متمم کھلا سلسلہ ہو، **بند سلسلہ**[28] ہو گا۔ مخلوط سطح میں سلسلہ S کا **متمم**[29]، مخلوط سطح میں ان تمام نقطوں کا سلسلہ ہو گا جو S کا حصہ نہ ہوں۔ مثال کے طور پر اکائی دائرے کے اندر اور اکائی دائرے پر نقطوں کا سلسلہ بند سلسلہ ہے۔

ایک سلسلہ جس کے تمام نقطے کافی بڑے رداس کی دائرے میں پائے جاتے ہوں **محدود**[30] سلسلہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر کسی مکعب کے اندر نقطے محدود سلسلہ ہیں جبکہ کسی لکیر پر نقطے محدود سلسلہ نہیں ہیں۔

ایک سلسلہ S جس کے ہر دو نقطوں کو محدود تعداد کے ایسے قطعات سے آپس میں ملایا جا سکتا ہو جن کا ہر نقطہ S کا حصہ ہو، **جڑا ہوا**[31] سلسلہ کہلاتا ہے۔ کھلا جڑا ہوا سلسلہ کو **دائرہ کار**[32] کہتے ہیں۔ یوں دائرے کی اندرون ایک دائرہ کار ہے۔

سلسلہ S کی **سرحدی نقطہ**[33] سے مراد ایسا نقطہ ہے جس کی پڑوس میں کچھ ایسے نقطے جو S کا حصہ ہوں اور کچھ ایسے نقطے جو S کا حصہ نہ ہوں دونوں شامل ہوں۔ مثلاً چھلا کی سرحدی نقاط میں چھلا کے دونوں اطراف کے دائروں کے نقطے شامل ہیں۔ ظاہر ہے کہ کھلا سلسلہ کا کوئی سرحدی نقطہ بھی کھلا سلسلہ کا حصہ نہیں ہو گا جبکہ بند سلسلہ کا ہر سرحدی نقطہ بند سلسلہ کا حصہ ہو گا۔

خطہ[34] سے مراد ایسا سلسلہ ہے جس میں دائرہ کار اور دائرہ کار کے چند یا تمام سرحدی نقطے شامل ہوں۔

---

[26] set of points
[27] open
[28] closed
[29] complement
[30] bounded
[31] connected
[32] domain
[33] boundary point
[34] region

سوالات

سوال 14.56 تا سوال 14.68 میں منحنی یا خطہ دریافت کرتے ہوئے انہیں ترسیم کر دکھائیں۔

سوال 14.56: $z \text{ خیالی} \geq -1$
جواب: $y \geq -1$

سوال 14.57: $z^2 \text{ خیالی} \leq 7$
جواب: $2xy \leq 7$

سوال 14.58: $z^2 \text{ حقیقی} \geq 1$
جواب: قطع زائد $x^2 - y^2 = 1$ کے بائیں بازو کی بائیں طرف اور اس کے دائیں بازو کی دائیں طرف کے خطے۔

سوال 14.59: $z \text{ دلیل} < \frac{\pi}{4}$
جواب: $y < 0$ کا پورا خطہ ماسوائے منفی y محور اور مبدا سے $\frac{\pi}{4}$ زاویہ پر لکیر کے نیچے خطہ۔

سوال 14.60: $\left| z \text{ دلیل} \right| < \frac{\pi}{4}$
جواب: $y = x$ اور $y = -x$ کے درمیان وہ پٹی جس کا مثبت x محور حصہ ہے۔

سوال 14.61: $-\pi < z \text{ حقیقی} < \pi$
جواب: $y = -\pi$ اور $y = \pi$ کے درمیان انتصابی پٹی۔

سوال 14.62: $\left| \frac{1}{z} \right| > 1$
جواب: کھلا اکائی دائرہ۔

سوال 14.63: $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 2$
جواب: $(x - \frac{5}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9}$

سوال 14.64: $\left| \frac{z+i}{z-i} \right| = 1$
جواب: $y = 0$

سوال 14.65: $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 1$
جواب: $x = 0$

سوال 14.66: $2 > \frac{z+1}{z-1}$ خیالی
جواب: ایسے اکائی دائرے کی بیرون جس کا مرکز نقطہ $(1, -1)$ پر ہو۔

سوال 14.67: $1 > \frac{1}{z}$ حقیقی
جواب: نقطہ $(\frac{1}{2}, 0)$ پر رداس $\frac{1}{2}$ کے دائرے کی اندرون۔

سوال 14.68: $1 \leq \frac{2z+1}{4z-4}$ خیالی
جواب: نقطہ $(1, -\frac{3}{8})$ پر رداس $\frac{3}{8}$ کے دائرے کی بیرون بشمول دائرہ۔

سوال 14.69: z_1 اور z_2 مخلوط سطح میں دو نقطے ہیں جبکہ α اور β حقیقی غیر منفی اعداد ہیں جہاں $\alpha + \beta = 1$ ہے۔ایسی صورت میں $\alpha z_1 + \beta z_2$ کی ترسیم کھینچیں۔
جواب: z_1 اور z_2 کو ملانے والا سیدھا قطع۔

سوال 14.70: قطع زائد $x^2 - y^2 = 1$ کو $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ لکھیں۔

سوال 14.71: مساوات $|z-1| + |z+1| = 2\sqrt{2}$ ترخیم کو ظاہر کرتی ہے۔اس حقیقت کی جیومیٹریائی دلیل دیں۔اس حقیقت کو الجبرا کی مدد سے حاصل کریں۔

14.4 مخلوط تفاعل۔حد۔تفرق۔تحلیلی تفاعل

مخلوط تجزیہ کی چند بنیادی تصورات، مثلاً مخلوط متغیرات کے تفاعل اور ایسے تفاعل کے حد اور تفرقات، کو اب پیش کرتے ہیں۔آپ دیکھیں گے کہ یہ تصورات احصاء کی تصورات کی طرح ہیں۔اس کے بعد ہم مخلوط تحلیلی تفاعل کی تعریف پیش کریں گے۔یہ تصورات مخلوط تجزیہ میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

ہم سب سے پہلے مخلوط متغیرہ کے تفاعل کی تعریف پیش کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ S مخلوط اعداد کا کوئی سلسلہ ہے۔ S پر معین تفاعل سے مراد وہ قاعدہ ہے جو S میں ہر z کا مطابقتی یکتا[35] مخلوط عدد w دیتا ہو۔تب ہم

$$w = f(z)$$

[35] یوں عام تفاعل کی طرح مخلوط تفاعل $f(z)$ بھی ہر z کا صرف اور صرف ایک مطابقتی قیمت دے گا۔

یا $w = g(z)$ ، وغیرہ، یا صرف $w(z)$ لکھتے ہیں۔ یہاں z **مخلوط متغیر**[36] کہلاتا ہے جس کی قیمت S کا کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ سلسلہ S کو $f(z)$ کی تعریف کا دائرہ کار[37] کہتے ہیں۔ ان مخلوط اعداد کا سلسلہ جو S میں z کی تبدیلی سے $w = f(z)$ اختیار کرتا ہو کو تفاعل $w = f(z)$ کی قیمتوں کا سعت کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ u اور v تفاعل w کے بالترتیب حقیقی اور خیالی جزو ہیں۔ اب چونکہ w متغیر $z = x + iy$ کے تابع ہے لہٰذا u اور v بھی x اور y کے تابع ہوں گے۔ یوں ہم

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

لکھ سکتے ہیں جس کے تحت مخلوط تفاعل $f(z)$ در حقیقت دو حقیقی تفاعل u اور v کے مترادف ہے جو از خود دو حقیقی متغیرات x اور y کے تابع ہیں۔

مثال 14.7: **مخلوط متغیر کا تفاعل**
فرض کریں کہ

$$w = f(z) = z^2 + 3z$$

ہے۔ تب

$$u(x, y) = f(z) \text{ حقیقی} = x^2 - y^2 + 3x \quad \text{اور} \quad v(x, y) = f(x) \text{ خیالی} = 2xy + 3y$$

ہوں گے۔ یوں نقطہ $z = x + iy = 1 + i3$ پر اس تفاعل کی قیمت

$$(1 + i3)^2 + 3(1 + i3) = -5 + i15$$

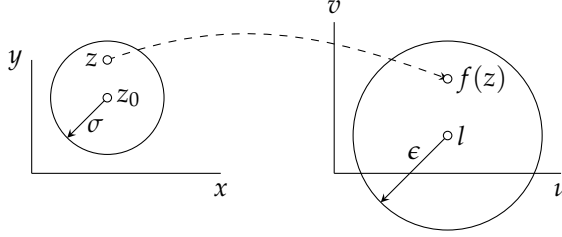
ہو گی لہٰذا ہم

$$f(1 + i3) = -5 + i15, \quad u(1, 3) = -5, \quad v(1, 3) = 15$$

لکھ سکتے ہیں۔ اسی طرح $f(1 + i) = 3 + i5$ ہو گا، وغیرہ۔ ظاہر ہے کہ یہ تفاعل تمام z کے لئے معین ہے۔ □

مثال 14.8: **مخلوط متغیر کا تفاعل**
تفاعل $f(z) = 3\bar{z} = 3x - i3y$ کا نقطہ $z = 2 + i4$ پر قیمت دریافت کریں۔
حل: چونکہ $x = 2$ اور $y = 4$ ہیں لہٰذا $f(2 + i4) = 6 - i12$ ہو گا۔ □

---

[36] complex variable
[37] اگرچہ S بعض اوقات حصہ 14.3 میں دائرہ کار کی تعریف (یعنی کھلا اور جڑا ہوا سلسلہ) پر پورا نہیں اترتا، اس کے باوجود یہ دائرہ کار کہلاتا ہے۔

شکل 14.8: حد

اگر تفاعل $f(z)$ نقطہ z_0 کی پڑوس میں معین ہو [جبکہ عین z_0 پر $f(z)$ غیر معین ہو سکتا ہے] اور ہم ایسا مثبت حقیقی عدد σ دریافت کر سکتے ہیں کہ ہر مثبت حقیقی عدد ϵ کے لئے، جہاں ϵ جتنا بھی چھوٹا (لیکن غیر صفر) کیوں نہ ہو، تمام $z \neq z_0$ کے لئے قرص $|z - z_0| < \sigma$ میں

$$\left|f(z) - l\right| < \epsilon \tag{14.33}$$

ہو، تب ہم کہتے ہیں کہ z کا نقطہ z_0 کے قریب تر ہونے سے $f(z)$ کا حد[38] l ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ z کو z_0 کے قریب کرتے ہوئے ہم $f(z)$ کی قیمت جتنی چاہیں l کے قریب کر سکتے ہیں (شکل 14.8)۔ اس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \tag{14.34}$$

یہاں دھیان رہے کہ حد کی اس تعریف کی رو سے مخلوط سطح میں z_0 تک کسی بھی سمت سے پہنچا جا سکتا ہے۔ حقیقی احصاء میں حد کی تعریف سے موجودہ حد کی تعریف زیادہ شرائط پر پورا اترتا ہے۔

اگر حد موجود ہو، تب یہ حد یکتا ہو گا (سوال 14.80)۔

نقطہ $z = z_0$ پر تفاعل $f(z)$ اس صورت استمراری[39] ہو گا اگر $f(z_0)$ معین ہو اور

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{14.35}$$

ہو۔ یاد رہے کہ تفاعل کی حد کی تعریف سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ تفاعل $f(z)$ نقطہ z_0 کے کسی پڑوس میں معین ہو گا۔

---

[38] limit
[39] continuous

تفاعل $f(z)$ اس صورت کسی دائرہ کار میں استمراری ہو گا جب اس دائرہ کار کے ہر نقطہ پر $f(z)$ استمراری ہو۔

تفاعل $f(z)$ نقطہ $z = z_0$ پر اس صورت **قابل تفرق** ہو گا جب حد

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{14.36}$$

موجود ہو۔تب اس حد کو نقطہ $z = z_0$ پر تفاعل $f(z)$ کا **تفرق**[40] کہتے ہیں۔

مساوات 14.36 میں $z_0 + \Delta z = z$ پر کرتے ہوئے $\Delta z = z - z_0$ ہو گا لہٰذا ہم درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{14.37}$$

یاد رہے کہ حد کی تعریف کی رو کے مطابق کم سے کم نقطہ z_0 کی پڑوس میں تفاعل $f(z)$ معین ہو گا۔ساتھ ہی ساتھ z_0 تک z کسی بھی سمت سے پہنچنے کی کوشش کر سکتا ہے۔یوں z_0 پر قابل تفرق ہونے کا مطلب ہے کہ z_0 تک جس رخ سے بھی پہنچنے کی کوشش کی جائے مساوات 14.37 میں دی گئی حاصل تقسیم کسی ایک ہی قیمت تک پہنچنے کی کوشش کرے گی۔یہ حقیقت بعد میں نہایت اہم ثابت ہو گا۔

حد کی تعریف کی رو سے مساوات 14.37 کہتی ہے کہ ایسا مخلوط تفاعل $f'(z)$ پایا جاتا ہے جس کے لئے، کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا $\sigma > 0$ دریافت کر سکتے ہیں کہ، $f'(z)$ درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

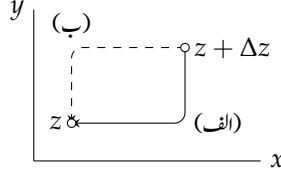
$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad \text{ہو تب} \quad |z - z_0| < \sigma \quad \text{جب} \tag{14.38}$$

اگر z_0 پر $f(z)$ قابل تفرق ہو تب z_0 پر $f(z)$ استمراری ہو گا (سوال 14.96)۔

مثال 14.9: **قابل تفرق۔تفرق**
تفاعل $f(z) = z^2$ تمام z کے لئے قابل تفرق ہے اور اس کا تفرق $f'(z) = 2z$ ہے جس کو یوں

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} 2z + \Delta z = 2z$$

---

[40] derivative

شکل 14.9: راہ (مثال 14.10)

حاصل کیا جا سکتا ہے۔ □

حقیقی تفرقات کے تمام اصول مثلاً مستقل کی تفرق، z^n کی تفرق جہاں n عددی صحیح ہے، قابل تفرق تفاعل کا مجموعہ، حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور تفاعل کے تفاعل کی تفرق کا زنجیری اصول مخلوط تفرقات کے لئے بھی درست ہیں۔

ان کے ثبوت تقریباً ہو بہو حقیقی تفاعل کے مطابقتی ثبوت کی طرح ہیں۔

مثال 14.10: $\bar{z}$ قابل تفرق نہیں ہے
آپ دیکھیں گے کہ کئی انتہائی سادہ تفاعل کا کسی بھی نقطے پر تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔ تفاعل $f(z) = \bar{z} = x - iy$ ایسا ہی ایک تفاعل ہے۔ یقیناً $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ لیتے ہوئے ہم اس تفاعل کی تفرق کو

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{[(x+\Delta x) - i(y+\Delta y)] - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \tag{14.39}$$

لکھ سکتے ہیں جو $\Delta y = 0$ کی صورت میں $+1$ جبکہ $\Delta x = 0$ کی صورت میں -1 دیتا ہے۔ یوں راہ-الف پر چلتے ہوئے مساوات 14.39 کی قیمت $+1$ تک پہنچتی ہے جبکہ راہ-ب پر چلتے ہوئے اس کی قیمت -1 تک پہنچتی ہے (شکل 14.9)۔ تعریف کی رو سے، $\Delta z \to 0$ کرتے ہوئے مساوات 14.39 کا کوئی حد موجود نہیں ہے۔ یہ مثال حیرت کن ہے جو اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ مخلوط تفاعل کی تفرق پیچیدہ عمل ہے۔
□

اب ہم اپنے اصل مضمون پر آتے ہیں یعنی:

تعریف: (تحلیلی پذیری)
دائرہ کار D میں تفاعل $f(z)$ اس صورت تحلیلی ہو گا جب پوری D میں ہر نقطے پر f معین اور قابل

تفرق ہو۔ تفاعل $f(z)$ دائرہ کار D میں نقطہ $z = z_0$ پر تحلیلی ہو گا اگر z_0 کی پڑوس (حصہ 14.3) میں $f(z)$ تحلیلی ہو۔

یوں z_0 پر $f(z)$ کی تحلیلی ہونے کا مطلب ہے کہ z_0 کے کسی پڑوس کے ہر نقطہ (بشمول z_0 چونکہ z_0 ازخود تمام پڑوس میں ایک نقطہ ہے) پر $f(z)$ قابل تفرق ہے۔ اس تصور کی وجہ یہ ہے کہ ایسا تفاعل، جو محض ایک نقطہ پر قابل تفرق ہو نا کہ نقطہ کی پڑوس میں، عملاً کسی استعمال کا نہیں ہے۔

D میں تحلیلی کی جدید اصطلاح D میں **کل شکلہ**[41] ہے۔

ہم کسی مخصوص دائرہ کار کا ذکر کیے بغیر بھی **تحلیلی تفاعل**[42] کی اصطلاح استعمال کریں گے جس سے مراد کسی دائرہ کار پر تحلیلی تفاعل ہو گا۔

مثال 14.11: کثیر رکنی
عدد صحیح طاقتی تفاعل 1 ، z ، z^2 ، $\cdots$ اور کثیر رکنی

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$$

جہاں c_0 ، $\cdots$ ، c_n مخلوط مستقل ہیں پوری مخلوط سطح میں تحلیلی ہیں۔ تفاعل $f(z) = \frac{1}{1-z}$ نقطہ $z = 1$ کے علاوہ پوری مخلوط سطح میں تحلیلی ہے۔ □

مخلوط تجزیہ مکمل طور پر تحلیلی تفاعل پر مبنی ہے۔ اگرچہ بہت سارے سادہ تفاعل غیر تحلیلی ہیں، ان کو چھوڑ کر باقی بہت سارے اقسام کے تفاعل تحلیلی ہیں جو حساب کی ایسی شاخ کو جنم دیتی ہے جو تجزیہ کے لحاظ سے انتہائی خوبصورت اور استعمال کی نقطہ نظر سے انتہائی مفید ہے۔

holomorphic[41]
analytic function[42]

سوالات

سوال 14.72 تا سوال 14.73 میں $f(1+i)$ ، $f(5i)$ اور $f(-2+i)$ دریافت کریں۔ $f(z)$ سوال میں دیا گیا ہے۔

سوال 14.72: $3z^2+2z$
جواب: $2+i8, \quad -73+i2, \quad 11-i10$

سوال 14.73: $\frac{1}{z^2}$
جواب: $-i\frac{3}{2}, \quad -\frac{3}{25}, \quad \frac{9}{25}+i\frac{12}{25}$

سوال 14.74 تا سوال 14.76 میں حقیقی اور خیالی اجزاء دریافت کریں۔

سوال 14.74: $f(z)=z^2-2z$
جواب: $\text{حقیقی} = x^2-y^2-2x, \quad \text{خیالی} = 2y(x-1)$

سوال 14.75: $f(z)=\frac{1}{1-z}$
جواب: $\text{حقیقی} = \frac{1-x}{y^2+(1-x)^2}, \quad \text{خیالی} = \frac{y}{y^2+(1-x)^2}$

سوال 14.76: $f(z)=1-z+z^2-z^3$
جواب: $\text{حقیقی} = 1-x+x^2-x^3-y^2+3xy^2, \quad \text{خیالی} = -y+2xy-3x^2y+y^3$

سوال 14.77 تا سوال 14.79 میں z خطہ R میں z سطح پر تبدیل ہوتا ہے۔ w سطح میں تفاعل $w=f(z)$ کا مطابقتی خطہ کیا ہو گا۔ دونوں خطوں کی ترسیم دکھائیں۔

سوال 14.77: $f(z)=3z, \quad \left|\text{دلیل}\, z\right| < \frac{\pi}{2}$
جواب: $\text{حقیقی}\, z > 0$

سوال 14.78: $f(z)=z^2, \quad z>4$
جواب: $w>16$

سوال 14.79: $f(z)=\frac{1}{z^2}, \quad \left|\text{دلیل}\, z\right| \le \frac{\pi}{4}$
جواب: $\text{حقیقی}\, w \ge 0$

سوال 14.80: ثابت کریں کہ اگر $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجود ہو تب یہ حد یکتا ہو گا۔

سوال 14.81: ثابت کریں کہ مساوات 14.34 درج ذیل دو عدد مساوات کی معادل ہے۔

$$\lim_{z\to z_0} f(z)_{\text{حقیقی}} = l_{\text{حقیقی}}, \quad \lim_{z\to z_0} f(z)_{\text{خیالی}} = l_{\text{خیالی}}$$

سوال 14.82: اگر $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$ اور $\lim_{z\to z_0} g(z) = p$ ہو تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)+g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z) = l + p$$
$$\lim_{z\to z_0}[f(z)g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z) \lim_{z\to z_0} g(z) = lp$$

کیا سوال 14.83 تا سوال 14.85 میں دیا گیا تفاعل مبدا پر استمراری ہے؟

سوال 14.83: $f(z) = z_{\text{حقیقی}}, z \neq 0,$ اور $f(0) = 0$
جواب: y محور پر چلتے ہوئے $z \to 0$ کرنے سے $f(z) \to 0[= f(0)]$ ملتا ہے جبکہ مثبت x محور پر چلتے ہوئے $z \to 0$ کرنے سے $f(z) \to 1[\neq f(0)]$ ملتا ہے لہٰذا تفاعل مبدا پر استمراری نہیں ہے۔

سوال 14.84: $f(z) = \frac{z_{\text{خیالی}}}{1+|z|}, z \neq 0$ اور $f(0) = 0$
جواب: $|f| = \frac{|y|}{1+\sqrt{x^2+y^2}} < |y| < |z|$ ہے لہٰذا $|z| \to 0$ پر $f(z) \to 0[= f(0)]$ ہو گا لہٰذا استمراری ہے۔

سوال 14.85: $f(z) = \frac{(z_{\text{حقیقی}})^2}{|z|}, z \neq 0$ اور $f(0) = 0$
جواب: $|f(z)| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < |x| < |z|$ ہے لہٰذا $z \to 0$ سے $f \to 0[= f(0)]$ ملتا ہے لہٰذا استمراری ہے۔

سوال 14.86: حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $f(z) = z^2$ استمراری ہے۔

سوال 14.87: ثابت کریں: $[af(z) + bg(z)]' = af'(z) + bg'(z)$

سوال 14.88: ثابت کریں: $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

سوال 14.89 تا سوال 14.91 میں تفاعل کی تفرق دریافت کریں۔

سوال 14.89: $(z^2+4)^2$
جواب: $4z(z^2+4)$

سوال 14.90: $\frac{1}{1-z}$
جواب: $\frac{1}{(1-z)^2}$

سوال 14.91: $\frac{(z+1)^2}{1+z^2}$
جواب: $\frac{2(z+1)}{1+z^2}-\frac{2z(z+1)^2}{(1+z^2)^2}$

سوال 14.92 تا سوال 14.95 میں نقطہ z_0 پر تفاعل کی تفرق دریافت کریں۔

سوال 14.92: $f(z)=z^2+z, \quad z_0=1+i$
جواب: $3+i2$

سوال 14.93: $f(z)=\frac{z-i}{z+i}, \quad z_0=1-i$
جواب: $\frac{8}{25}+i\frac{6}{25}$

سوال 14.94: $f(z)=(z^2+1)^2, \quad z_0=2+i3$
جواب: $-176+i48$

سوال 14.95: $f(z)=iz^3+2z^2-\frac{i}{z}, \quad z_0=-i$
جواب: $-i8$

سوال 14.96: اگر z_0 پر تفاعل $f(z)$ قابل تفرق ہو تب ثابت کریں کہ z_0 پر $f(z)$ استمراری ہو گا۔

سوال 14.97: ثابت کریں کہ $f(z)=x=$ حقیقی z کسی بھی z پر قابل تفرق نہیں ہے۔
جواب: مساوات 14.37 میں حاصل تقسیم $\frac{\Delta x}{\Delta z}$ ہے جو $\Delta x=0$ کی صورت میں 0 جبکہ $\Delta y=0$ کی صورت میں 1 ہو گا لہٰذا Δz پر اس کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 14.98: ثابت کریں کہ $f(z)=|z|^2$ صرف $z=0$ پر قابل تفرق ہے۔ اشارہ۔ درج ذیل تعلق استعمال کریں۔

$$|z+\Delta z|^2=(z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z})$$

14.5 کوشی ریمان مساوات۔لاپلاس مساوات

ہم درج ذیل مخلوط تفاعل کی تحلیلی ہونے کا بنیادی معیار دریافت کرتے ہیں۔

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{14.40}$$

ہم دکھائیں گے کہ اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو تب u اور v پورے D میں (نیچے دیے گئے) کوشی ریمان مساوات کو مطمئن کریں گے۔اسی طرح اگر u اور v استمراری ہوں اور ان کے یک رتبی جزوی تفرق پورے D میں کوشی ریمان مساوات 14.44 کو مطمئن کرتے ہوں تب D میں $f(z)$ تحلیلی ہو گا۔تفصیل درج ذیل ہے۔

فرض کریں کہ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ کسی اختیاری مقررہ نقطہ $z = x + iy$ پر قابل تفرق اور اس نقطہ کے کسی پڑوس میں معین اور استمراری ہے۔تب تفرق کی تعریف کی رو سے

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{14.41}$$

نقطہ z پر موجود ہو گا۔یہاں z کی پڑوس میں Δz کسی بھی راہ پر 0 تک پہنچنے کی کوشش کر سکتا ہے۔ہم $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ لیتے ہیں۔راہ-الف پر چلتے ہوئے ہم پہلے $\Delta y \to 0$ اور بعد میں $\Delta x \to 0$ کرتے ہیں (شکل 14.10)۔جب $\Delta y \to 0$ ہو جائے تب $\Delta z = \Delta x$ ہو گا لہٰذا مساوات 14.40 استعمال کرتے ہوئے

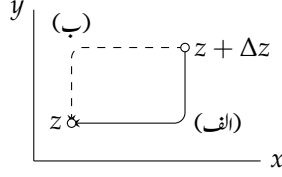
$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \end{aligned}$$

ہو گا۔چونکہ $f'(z)$ موجود ہے لہٰذا آخری دونوں حد بھی موجود ہوں گے۔یہ x کے لحاظ سے u اور v کے جزوی تفرق ہیں۔یوں $f'(z)$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \tag{14.42}$$

اسی طرح اگر ہم شکل 14.10 میں راہ-ب پر چلیں تب پہلے $\Delta x \to 0$ اور بعد میں $\Delta y \to 0$ ہو گا۔یوں $\Delta x \to 0$ کرنے کے بعد $\Delta z = i\Delta y$ ہو گا۔اس طرح

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}$$

y (ب) $z + \Delta z$ z (الف) x

شکل 14.10: راہ(مساوات 14.41)

یعنی

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{14.43}$$

ہو گا جہاں $\frac{1}{i} = -i$ لکھا گیا ہے۔چونکہ $f'(z)$ موجود ہے لہٰذا مساوات 14.42 اور مساوات 14.43 کے دائیں ہاتھ چار جزوی تفرق موجود ہوں گے۔

اب جیسے ہم نے فرض کیا، اگر $f'(z)$ موجود ہو، تب اس کو مساوات 14.42 یا مساوات 14.43 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں ان دونوں مساوات کے حقیقی اجزاء آپس میں برابر ہوں گے اور اسی طرح ان کے خیالی اجزاء بھی آپس میں برابر ہوں گے یعنی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{اور} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{14.44}$$

مساوات 14.44 میں دیے گئے بنیادی تعلق کو **کوشی ریمان تفرقی مساوات**[43] کہتے[44] ہیں۔

ہم ان نتائج کو ایک مسئلہ کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 14.1: **کوشی ریمان مساوات**
فرض کریں کہ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ نقطہ $z = x + iy$ پر قابل تفرق اور اس نقطہ کے کسی پڑوس میں معین اور استمراری ہے۔تب اس نقطہ پر u اور v کے یک رتبی جزوی تفرق موجود ہوں گے جو تفرق کوشی ریمان مساوات 14.44 کو مطمئن کریں گے۔

[43] Cauchy Rienmann differential equations

[44] جرمن ریاضی دان برنہارڈ ریمان [1826-1866] نے مخلوط تجزیہ کی جیومیٹریائی ترکیب پر کام کیا۔انہوں نے ریمان جیومیٹری پر بھی کام کیا جو آئن سٹائن کی نظریہ اضافت کی ریاضیاتی بنیاد بنی۔

نتیجتاً اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو تب یہ جزوی تفرق موجود ہوں گے اور مساوات 14.44 کو D کے تمام نقطوں پر مطمئن کریں گے۔

مثال 14.12: کوشی ریمان مساوات

تفاعل $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ تمام z کے لئے قابل تفرق ہے اور $f'(z) = 2z$ ہے۔ہمارے پاس $u = x^2 - y^2$ اور $v = 2xy$ ہے۔یوں

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

ہیں جو کوشی ریمان مساوات 14.44 کو تمام x اور y پر مطمئن کرتے ہیں۔ $\square$

کوشی ریمان بنیادی حیثیت رکھتے ہیں چونکہ کسی تفاعل کی تحلیلی ہونے کے لئے یہ نا صرف لازم بلکہ کافی ہیں۔ اس کو درج ذیل مسئلہ میں بہتر ور پر بیان کیا گیا ہے۔(اس مسئلہ میں پیش کیے گئے شرائط تحلیلی ہونے کے لئے کافی ضرور لیکن لازم نہیں ہیں۔اس سے کم امتناعی شرائط ممکن ہیں جنہیں اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔)

مسئلہ 14.2: کوشی ریمان مساوات

اگر حقیقی متغیرات x اور y کے حقیقی قیمت استمراری تفاعل $u(x,y)$ اور $v(x,y)$ کے یک رتبی جزوی تفرق موجود ہوں جو کسی دائرہ کار D میں کوشی ریمان مساوات کو مطمئن کرتے ہوں، تب مخلوط تفاعل $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دائرہ کار D میں تحلیلی ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ D میں $N:(x,y)$ کوئی مقررہ نقطہ ہے۔چونکہ D دائرہ کار ہے لہٰذا اس میں N کا پڑوس بھی شامل ہو گا۔اس پڑوس میں ہم نقطہ $Q:(x+\Delta x, y+\Delta y)$ یوں چنتے ہیں کہ سیدھا قطع NQ بھی D میں پایا جاتا ہو۔چونکہ ہم نے تفاعل کو استمراری تصور کیا ہے لہٰذا ہم مسئلہ 10.3 (صفحہ 734) استعمال کر سکتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) &= \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1} + \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_1} \\ v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) &= \Delta x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2} + \Delta y \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{M_2} \end{aligned} \tag{14.45}$$

حاصل ہو گا جہاں جزوی تفرق قطع NQ پر موزوں نقاط M_1 اور M_2 پر حاصل کیے جاتے ہیں۔

ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y, \quad \Delta f = f(z+\Delta z) - f(z)$$

یوں مساوات 14.45 سے

$$\Delta f = \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1} + \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_1} + i\Big[\Delta x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2} + \Delta y \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{M_2}\Big]$$

حاصل ہوتا ہے۔کوشی ریمان مساوات استعمال کرتے ہوئے ہم $\frac{\partial u}{\partial y}$ کی جگہ $-\frac{\partial v}{\partial x}$ لکھتے ہیں اور $\frac{\partial v}{\partial y}$ کی جگہ $\frac{\partial u}{\partial x}$ لکھ کر

$$\Delta f = \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1} + i\Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_2} + i\Big[\Delta x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2} + i\Delta y \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_1}\Big]$$

حاصل کرتے ہیں۔اس کو $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ کی استعمال سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\Delta f = \Delta z \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1} + i\Delta y \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1}\right\}\\ + i\left[\Delta z \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_1} + \Delta x \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_1}\right\}\right]\end{aligned}$$

ہم دونوں اطراف کو Δz سے تقسیم کر کے $\Delta z \to 0$ کرتے ہیں۔چونکہ دائیں ہاتھ جزوی تفرق استمراری ہیں لہٰذا یہ نقطہ (x,y) پر حاصل $\frac{\partial u}{\partial x}$ اور $\frac{\partial v}{\partial x}$ تک پہنچنے کی کوشش کریں گے۔مزید چونکہ $\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \leq 1$ اور $\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leq 1$ ہیں لہٰذا دائیں ہاتھ کا حد موجود ہو گا جو Δz کی صفر تک پہنچنے کی راہ پر منحصر نہیں ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات 14.42 کی دائیں ہاتھ کے برابر ہے۔اس کا مطلب ہوا کہ D میں $f(z)$ تحلیلی ہے لہٰذا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

یہ مسئلے عملی طور پر انتہائی اہم ہیں چونکہ انہیں استعمال کرتے ہوئے ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا دیا گیا مخلوط تفاعل تحلیلی ہے یا نہیں۔

مثال 14.13: کوشی ریمان مساوات
فرض کریں کہ $f(z) = z$ حقیقی $= x$ ہے۔یوں

$$u = x, \quad v = 0$$

ہو گا جو مساوات 14.44 کو مطمئن نہیں کرتے ہیں لہٰذا $f(z)$ غیر تحلیلی ہے۔اسی طرح خیالی $z = f(z)$ بھی غیر تحلیلی ہے۔دیگر سادہ غیر تحلیلی تفاعل کو سوالات میں شامل کیا گیا ہے۔ □

کوشی ریمان مساوات کی قطبی روپ حاصل کرنے کی خاطر ہم مخلوط عدد کی قطبی روپ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ استعمال کرتے ہیں۔یوں

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x = u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\sin\theta}{r}$$
$$v_y = v_r r_y + v_\theta \theta_y = v_r \sin\theta + v_\theta \frac{\cos\theta}{r}$$

ہو گا لہٰذا $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\sin\theta}{r} = v_r \sin\theta + v_\theta \frac{\cos\theta}{r} \tag{14.46}$$

اسی طرح $u_y = u_r r_y + u_\theta \theta_y$ اور $v_x = v_r r_x + v_\theta \theta_x$ سے $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ کی روپ

$$u_r \sin\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{r} = v_\theta \frac{\sin\theta}{r} - v_r \cos\theta \tag{14.47}$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 14.46 اور مساوات 14.47 سے $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ حذف کرتے ہوئے کوشی ریمان مساوات کی قطبی روپ

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{14.48}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 14.14: کوشی ریمان مساوات کی قطبی روپ
مان لیں کہ $f(z) = z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$ ہے۔یوں

$$u = r^3 \cos 3\theta, \quad v = r^3 \sin 3\theta$$

ہو گا لہٰذا

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2 \cos 3\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = 3r^2 \sin 3\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

ہوں گے۔اس طرح مساوات 14.48 کی مدد سے ثابت ہوا کہ $f(z) = z^3$ ماسوائے $z = 0$ کے تمام z پر تحلیلی ہے۔(ہم جانتے ہیں کہ z^3 نقطہ $z = 0$ پر بھی تحلیلی ہے۔) □

ہم اب مخلوط تجزیہ اور دو متغیرات کی لاپلاس مساوات کے مابین ایک عملاً اہم تعلق دریافت کرتے ہیں۔ہم بعد میں (حصہ 16.6 میں) ثابت کریں گے کہ تحلیلی تفاعل $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ کی تفرق بھی تحلیلی ہو گا۔اس اہم نتیجہ کے تحت $u(x,y)$ اور $v(x,y)$ کے ہر رتبہ کی استمراری جزوی تفرق موجود ہوں گے۔بالخصوص ان کی دو رتبی مدغم تفرق برابر ہوں گے:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

کوشی ریمان مساوات کا تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

ملتا ہے جن سے درج ذیل اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 14.3: مساوات لاپلاس
مخلوط تفاعل

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

جو دائرہ کار D میں تحلیلی ہے کا حقیقی جزو اور خیالی جزو D میں مساوات لاپلاس

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

کے حل ہیں اور ان کے استمراری دو رتبی جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔

جیسے ہم بعد کی باب 15 اور باب 20 میں دیکھیں گے، مخلوط تجزیہ کی انجینئری حساب میں اہمیت کی یہ ایک وجہ ہے۔

مساوات لاپلاس کا ایسا حل جس کے استمراری دو رتبی جزوی تفرق پائے جاتے ہوں **ہارمونی تفاعل**[45] (حصہ 13.11) کہلاتا ہے۔یوں تحلیلی تفاعل کا حقیقی جزو اور خیالی جزو ہارمونی تفاعل ہوں گے۔

اگر دو عدد ہارمونی تفاعل $u(x,y)$ اور $v(x,y)$ دائرہ کار D میں مساوات کوشی ریمان کو مطمئن کرتے ہوں یعنی اگر تفاعل $u(x,y)$ اور $v(x,y)$ دائرہ کار D میں تحلیلی تفاعل $f(z)$ کے حقیقی اور خیالی اجزاء ہوں، تب $v(x,y)$ کو $u(x,y)$ کا **جوڑی دار ہارمونی تفاعل**[46] کہتے ہیں۔

کسی بھی ہارمونی تفاعل کی جوڑی دار ہارمونی تفاعل کو مساوات کوشی ریمان سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس عمل کو درج ذیل مثال کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

مثال 14.15: **جوڑی دار ہارمونی تفاعل**

تفاعل $u = x^2 - y^2$ ہارمونی ہے۔اس طرح $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ اور $\frac{\partial u}{\partial y} == 2y$ ہیں لہٰذا u کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو گا۔

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

بائیں ہاتھ کی مساوات کا y کے ساتھ تکمل لینے سے

$$v = 2xy + h(x)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $h(x)$ صرف متغیرہ x کے تابع ہے۔اس کو دائیں ہاتھ کی مساوات میں پر کرتے ہوئے $h'(x) = 0$ یعنی $h = c = $ مستقل ملتا ہے۔یوں $x^2 - y^2$ کا عمومی جوڑی دار ہارمونی تفاعل $2xy + c$ ہے جہاں c مستقل ہے، اور عمومی تحلیلی تفاعل جس کا حقیقی جزو $x^2 - y^2$ ہو درج ذیل ہو گا۔

$$x^2 - y^2 + i(2xy + c) = z^2 + ic$$

□

---

[45] harmonic function
[46] conjugate harmonic function

سوالات

سوال 14.99 تا سوال 14.104 میں مساوات 14.42 یا مساوات 14.43 کی مدد سے تفاعل کی تفرق دریافت کریں۔

سوال 14.99: $f(z) = az + b$
جواب: a

سوال 14.100: $f(z) = z^2$
جواب: $2z$

سوال 14.101: $f(z) = \frac{1}{z}$
جواب: $-\frac{1}{z^2}$

سوال 14.102: $f(z) = \frac{1}{1-z}$
جواب: $\frac{1}{(1-z)^2}$

سوال 14.103: $f(z) = z + \frac{1}{z}$
جواب: $1 - \frac{1}{z^2}$

سوال 14.104: $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$
جواب: $\frac{1+z}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z}$

سوال 14.105: مساوات 14.42 یا مساوات 14.43 کی طرح درج ذیل بھی درست ہیں۔انہیں حاصل کریں۔

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{14.49}$$

سوال 14.106 تا سوال 14.108 میں تصدیق کریں کہ دیے گئے تفاعل کوشی ریمان مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 14.106: $u = x, \quad v = y$

سوال 14.107: $u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$

سوال 14.108: $u = x^3 - 3xy^2, \quad v = 3x^2y - y^3$

سوال 14.109 تا سوال 14.117 میں معلوم کریں کہ آیا دیا گیا تفاعل تحلیلی ہے؟

سوال 14.109: $f(z) = z^3 + z$
جواب: تحلیلی ہے

سوال 14.110: حقیقی z
جواب: چونکہ غیر قابل تفرق ہے لہٰذا غیر تحلیلی ہے۔

سوال 14.111: $f(z) = \bar{z}$
جواب: غیر تحلیلی ہے

سوال 14.112: $f(z) = |z|^2$
جواب: غیر تحلیلی ہے

سوال 14.113: $f(z) = \frac{1}{1-z}$
جواب: تحلیلی ہے ماسوائے نقطہ $z = 1$ پر

سوال 14.114: $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$
جواب: تحلیلی ہے

سوال 14.115: $f(z) = e^x \cos y$
جواب: غیر تحلیلی ہے

سوال 14.116: $f(z) = \frac{1}{z^2}$
جواب: تحلیلی ہے ماسوائے نقطہ $z = 0$ پر

سوال 14.117: دلیل $f(z) = z$
جواب: غیر تحلیلی

سوال 14.118: مساوات 14.48 حاصل کرنے کے لئے درکار تمام قدم دکھائیں۔

سوال 14.119: مساوات 14.48 استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ $f(z)=z^4$ تحلیلی ہے۔

سوال 14.120: مساوات 14.48 استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ $z\neq 0$ $f(z)=\frac{1}{z^2},$ تحلیلی ہے۔

سوال 14.121 تا سوال 14.126 میں تصدیق کریں کہ دیے گئے تفاعل ہارمونی ہیں۔ان کا مطابقتی تحلیلی تفاعل $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ حاصل کریں۔

سوال 14.121: $u=x$
جواب: $f(z)=x+iy=z$

سوال 14.122: $u=xy$
جواب: $f(z)=xy-\frac{i}{2}(x^2-y^2)=-i\frac{z^2}{2}$

سوال 14.123: $v=xy$
جواب: $\frac{1}{2}(x^2-y^2)+ixy=\frac{z^2}{2}$

سوال 14.124: $u=\sin x\cosh y$
جواب: $f(z)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

سوال 14.125: $v=-\sin x\sinh y$
جواب: $f(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$

سوال 14.126: $u=\frac{x}{x^2+y^2}$
جواب: $f(z)=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$

سوال 14.127: کس صورت میں $u=ax^3+bx^2y+cxy^2+ky^3$ ہارمونی ہو گا؟
جواب: $u=ax^3-3kx^2y-3axy^2+ky^3$ ہے لہٰذا $b=-3k$ اور $c=-3a$ ہونا لازم ہے۔

سوال 14.128: کس صورت میں $e^{\alpha x}\cos\beta y$ ہارمونی ہو گا؟

سوال 14.129: اگر u کا جوڑی دار ہارمونی v ہو تب ثابت کریں کہ $-v$ کا جوڑی دار ہارمونی u ہو گا۔

سوال 14.130: $\cos\alpha x\cosh y$ کب ہارمونی ہو گا؟

سوال 14.131: اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو اور D میں $c = \text{مستقل} = |f(z)|$ ہو، تب دکھائیں کریں کہ $f(z) = \text{مستقل}$ ہے۔

سوال 14.132: اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو اور D میں $\text{مستقل} = \text{حقیقی}\, z$ ہو تب دکھائیں کہ $f = \text{مستقل}$ ہے۔

سوال 14.133: اگر دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو اور D میں ہر جگہ $f'(z) = 0$ ہو تب دکھائیں کہ $f(z) = \text{مستقل}$ ہے۔

14.6 ناطق تفاعل۔جذر

اس باب کے باقی حصوں میں اہم ترین بنیادی مخلوط تفاعل مثلاً طاقتی تفاعل، قوت نمائی، لوگارتھم، تکونیاتی تفاعل، وغیرہ پر غور کیا جائے گا۔ہم دیکھیں گے کہ ان تفاعل کی تعریف یوں کی جا سکتی ہے کہ حقیقی قیمت کی غیر تابع متغیرات کے لئے یہ عین جانی پہچانی حقیقی تفاعل کی صورت اختیار کریں۔ چند مخلوط تفاعل دلچسپ خصوصیات رکھتے ہیں جو حقیقی غیر تابع متغیرہ کی صورت میں ظاہر نہیں ہوتی ہیں۔آپ سے گزارش ہے کہ ذیل تفصیل کو غور سے پڑھیں چونکہ عملی استعمال میں ان بنیادی تفاعل کی ضرورت ہو گی۔مزید ان تفاعل کی تفصیلی معلومات ہمیں عمومی غور و فکر میں مدد دے گی۔

ان میں سے چند تفاعل پوری مخلوط سطح میں تحلیلی ہوں گے۔ایسے تفاعل کو سالم تفاعل[47] کہتے ہیں۔

طاقتی تفاعل

$$w = z^n \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{14.50}$$

پوری مخلوط سطح پر تحلیلی ہیں لہٰذا یہ سالم تفاعل ہیں۔یہی درج ذیل صورت کی تفاعل کے لئے بھی درست ہے

$$w = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \qquad (c_n \neq 0) \tag{14.51}$$

[47] entire function

جہاں c_0 ، $\cdots$ ، c_n (مخلوط یا حقیقی) مستقل ہیں۔ایسا تفاعل **کثیر رکنی** یا سالم ناطق تفاعل کہلاتا ہے جہاں n کثیر رکنی کا درجہ کہلاتا ہے۔کثیر رکنی کا مطالعہ کلاسیکی الجبرا کا بنیادی موضوع ہے۔

دو کثیر رکنی $p(z)$ اور $q(z)$ کا حاصل تقسیم

$$z = \frac{p(z)}{q(z)} \tag{14.52}$$

(کسری) **ناطق تفاعل**[48] کہلاتا ہے۔یہ تفاعل ان تمام z پر تحلیلی ہو گا جہاں $q(z)$ صفر نہ ہو؛ یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ $p(z)$ اور $q(z)$ کے مشترکہ جزو ضربی حذف شدہ ہیں۔ناطق تفاعل کی بالخصوص سادہ صورت

$$\frac{c}{(z-z_0)^m} \tag{14.53}$$

جہاں c اور z_0 مخلوط اعداد ہیں جبکہ m مثبت عدد صحیح ہے کو **جزوی کسر**[49] کہتے ہیں۔ریاضی میں اس کا ثبوت موجود ہے کہ ہر ناطق تفاعل کو ایک کثیر رکنی اور محدود تعداد کی جزوی کسر کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

اگر $z = w^n \, (n = 1, 2, \cdots)$ ہو تب w کی ہر ایک قیمت کا ایک مطابقتی z قیمت ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بھی $z \neq 0$ کے مطابقتی n منفرد w قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ایسی ہر ایک قیمت کو z کی n **واں جذر** کہتے ہیں جسے

$$w = \sqrt[n]{z} \tag{14.54}$$

لکھا جاتا ہے۔یوں یہ علامت کثیر قیمتی یعنی n قیمتی ہے جبکہ حقیقی احصاء میں ایسا نہیں ہوتا ہے۔ $\sqrt[n]{z}$ کی n قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$w = R(\cos\phi + i\sin\phi) \quad \text{اور} \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

لیتے ہیں۔یوں کلیہ ڈی موے ور مساوات 14.24 استعمال کرتے ہوئے

$$z = w^n = R^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

حاصل ہو گا جس کے دونوں اطراف کی مطلق قیمتیں آپس میں برابر پر کرتے ہوئے

$$R^n = r \quad \implies R = \sqrt[n]{r} \tag{14.55}$$

---

[48] rational function
[49] partial fraction

ملتا ہے جہاں جذر حقیقی مثبت لہٰذا منفرد ہو گا۔اسی طرح دونوں اطراف کے دلیل آپس میں پر کرتے ہوئے

$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad \Longrightarrow \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

ملتا ہے جہاں k عدد صحیح ہے۔یوں $z \neq 0$ لیتے ہوئے $\sqrt[n]{z}$ کے درج ذیل n عدد منفرد قیمتیں ہوں گی۔

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{14.56}$$

یہ قیمتیں n اطراف کی منظم کثیر الاضلاع بناتے ہوئے رداس $\sqrt[n]{r}$ کی دائرہ، جس کا مرکز مبدا ہو، پر پائے جاتے ہیں (شکل 14.11)۔

دلیل z کی صدر قیمت (حصہ 14.2) اور مساوات 14.56 میں $k = 0$ لیتے ہوئے $\sqrt[n]{z}$ کی حاصل قیمت کو $w = \sqrt[n]{z}$ کی صدر قیمت[50] کہتے ہیں۔

مثال 14.16: جذر المربع

$w = \sqrt{z}$ کی درج ذیل دو قیمتیں ہیں

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{r}\Big(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\Big) \\ z_2 &= \sqrt{r}\Big[\cos\Big(\frac{\theta}{2} + \pi\Big) + i\sin\Big(\frac{\theta}{2} + \pi\Big)\Big] = -z_1 \end{aligned}$$

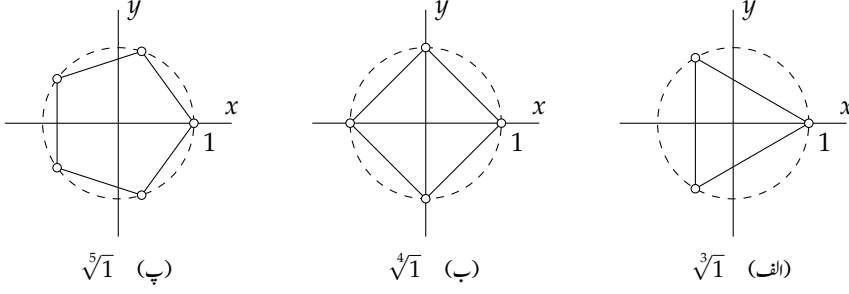
جو مبدا کے لحاظ سے تشاکلی نقطوں پر ہیں یعنی

$$\sqrt{i4} = \mp 2\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big) = \mp(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$$

□

سوال 14.134: جذر المکعب

اگر z مثبت حقیقی ہو تب $w = \sqrt[3]{z}$ کے جذر حقیقی قیمت $\sqrt[3]{r}$ اور درج ذیل جوڑی دار مخلوط قیمتیں ہوں گی۔

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{r}\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\Big) &= \sqrt[3]{r}\Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \\ \sqrt[3]{r}\Big(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\Big) &= \sqrt[3]{r}\Big(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \end{aligned}$$

شکل 14.11: مخلوط جذر

مثلاً $\sqrt[3]{1} = 1, -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہوں گے (شکل 14.134-الف)۔ ظاہر ہے کہ یہ مساوات $w^3 - 1 = 0$ کی جذر ہیں۔

مثال 14.17: اکائی کے n ویں جذر

مساوات 14.56 سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

اگر $k = 1$ کا مطابقتی جذر w ہو تب $\sqrt[n]{1}$ کے n جذر کو $1, w, w^2, \cdots w^{n-1}$ لکھا جا سکتا ہے جو مبدا پر اکائی رداس کے دائرے پر n اطراف کی منظم کثیر الاضلاع بناتے ہیں جس کی ایک نوک نقطہ 1 پر ہے۔ ان n قیمتوں میں سے ہر ایک کو 1 کی n ویں جذر کہتے ہیں۔ مثلاً $\sqrt[4]{1}$ کی قیمتیں $1, i, -1, -i$ ہیں (شکل 14.11-ب)۔ شکل 14.11-پ میں $\sqrt[5]{1}$ دکھائے گئے ہیں۔

اگر کسی اختیاری مخلوط عدد z کا کوئی n واں جذر w_1 ہو تب درج ذیل $\sqrt[n]{z}$ کی n قیمتیں ہوں گی

$$w_1, \quad w_1\omega, \quad w_1\omega^2, \quad \cdots, \quad w_1\omega^{n-1}$$

چونکہ w_1 کو ω^k سے ضرب دینا w_1 کی زاویہ میں $\frac{2k\pi}{n}$ اضافہ کے مترادف ہے۔ □

principal value[50]

سوالات

سوال 14.135 تا سوال 14.146 میں تمام جذر تلاش کریں۔ان جذروں کو مخلوط سطح پر دکھائیں۔

سوال 14.135: $\sqrt{i}$
جواب: $\mp\frac{1}{2}(1+i)$

سوال 14.136: $\sqrt{-i}$
جواب: $\mp\frac{1}{2}(1-i)$

سوال 14.137: $\sqrt{-9}$
جواب: $\mp i3$

سوال 14.138: $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$
جواب: $\mp\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}$

سوال 14.139: $\sqrt[3]{-1}$
جواب: $\frac{1\mp i\sqrt{3}}{2}, \quad -1$

سوال 14.140: $\sqrt[3]{i}$
جواب: $\mp\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}, \quad -i$

سوال 14.141: $\sqrt[3]{-i}$
جواب: $\mp\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}, \quad i$

سوال 14.142: $\sqrt[3]{1+i}$
جواب: $1.08+i0.29, \quad -0.29-i1.08, \quad -0.79+i0.79$

سوال 14.143: $\sqrt[3]{1-i}$
جواب: $1.08-i0.29, \quad -0.29+i1.08, \quad -0.79-i0.79$

سوال 14.144: $\sqrt[4]{-1}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$

سوال 14.145: $\sqrt[5]{-1}$
جواب: $-1, -\cos\frac{2\pi}{5}\mp i\sin\frac{2\pi}{5}, -\cos\frac{4\pi}{5}\mp i\sin\frac{4\pi}{5}$

سوال 14.146: $\sqrt[6]{-1}$
جواب: $\mp i, \mp \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \mp \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

سوال 14.147 تا سوال 14.149 میں دی گئی مساوات کو حل کریں۔

سوال 14.147: $z^3 = 8$
جواب: $2, -1-i\sqrt{3}, -1+i\sqrt{3}$

سوال 14.148: $z^4 + 5z^2 = 32$
جواب: $2, -2, i3, -i3$

سوال 14.149: $z^6 + 7z^3 = 8$
جواب: $1, -2, 1 \mp i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$

سوال 14.150: اکائی کے n جذر کا مجموعہ حاصل کریں۔ (الف) $n = 3$ لیں۔ (ب) $n = 4$ لیں۔
جواب: 0

سوال 14.151: جذر المربع
درج ذیل تعلق ثابت کریں جہاں $y < 0$ کی صورت میں علامت $y = -1$ اور $y > 0$ کی صورت میں علامت $y = 1$ ہے جبکہ تمام مثبت قیمتوں کے جذر مثبت علامت کے ساتھ لئے گئے ہیں۔

$$z = x + iy \quad \sqrt{z} = \mp\Big[\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + (\text{علامت}\, y) i \sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\Big]$$

اشارہ۔ $\sqrt{z} = w = u + iv$ لے کر حقیقی اور خیالی اجزاء سے دو عدد حقیقی مساوات حاصل کریں۔ u^2 اور v^2 کو x اور y کی صورت میں لکھیں۔

سوال 14.152 تا سوال 14.154 میں سوال 14.151 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے جذر حاصل کریں۔

سوال 14.152: $\sqrt{i4}$
جواب: $\mp\sqrt{2}(1+i)$

سوال 14.153: $\sqrt{4+i3}$
جواب: $\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(3+i)$

سوال 14.154: $\sqrt{-8+i6}$
جواب: $-3, \mp(1+i3)$

سوال 14.155 تا سوال 14.158 کو حل کریں۔ سوال 14.151 کا نتیجہ استعمال کریں۔

سوال 14.155: $z^2-3z+3-i=0$
جواب: $2+i, 1-i$

سوال 14.156: $z^2+z+1-i=0$
جواب: $i, -1-i$

سوال 14.157: $z^2-(5+i)z+8+i=0$
جواب: $2-i, 2+i2$

سوال 14.158: $z^4-3(1+i2)z^2=8-i6$
جواب: $\mp(1+i), \mp(2+i)$

سوال 14.159: درج ذیل سے $z=x+iy$ کی ایک عدد مساوات حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔
$$x^4-6x^2y^2+y^4=4, \quad xy(x^2-y^2)=1$$
جواب: $z^4=4(1+i), z=\mp\sqrt[8]{32}(\cos\beta+i\sin\beta), \quad \beta=\frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}$

سوال 14.160: z^4+4 کو حقیقی عددی سر والے دو درجی اجزاء کا حاصل ضرب لکھیں۔

سوال 14.161: z^4+1 کو حقیقی عددی سر والے دو درجی اجزاء کا حاصل ضرب لکھیں۔
جواب: $(z^2-z\sqrt{2}+1)(z^2+z\sqrt{2}+1)$

سوال 14.162: ایک منظم کثیر الاضلاع p کے n عدد اطراف اکائی دائرے پر پائے جاتے ہیں۔ p کے کسی ایک کونے سے باقی $n-1$ کونوں تک سیدھے فاصلوں کا مجموعہ دریافت کریں۔

14.7 قوت نمائی تفاعل

حقیقی قوت نمائی تفاعل e^x کی دو خواص

$$(e^x)' = e^x \tag{14.57}$$
$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2} \tag{14.58}$$

ہیں جبکہ اس کی مکلارن تسلسل درج ذیل ہے۔

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{14.59}$$

مخلوط $z = x + iy$ کی قوت نمائی تفاعل جسے e^z سے ظاہر کیا جاتا ہے کی تعریف حقیقی تفاعل e^x ، $\cos y$ اور $\sin y$ کی مدد سے پیش کی جاتی ہے یعنی:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{14.60}$$

یہ تعریف ذیل حقائق سے اخذ کی جا سکتی ہے۔ حقیقی $z = x$ کی صورت میں $e^z = e^x$ ہو گا۔ کوشی ریمان مساوات کے تحت e^z تمام z کے لئے تحلیلی ہے۔ مساوات 14.42 کی مدد سے

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i\frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

یعنی

$$(e^z)' = e^z \tag{14.61}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مزید $z_1 = x_1 + iy_1$ اور $z_2 = x_2 + iy_2$ لے کر ضمیمہ ب میں مساوات ب.6 استعمال کرتے ہوئے

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \tag{14.62}$$

حاصل ہوتا ہے جو عین مساوات 14.58 کی طرح ہے۔ بالخصوص جب $z_1 = x$ اور $z_2 = iy$ ہوں تب

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \tag{14.63}$$

ہو گا۔ ہم بعد میں (باب 18 میں) دیکھیں گے کہ مخلوط تحلیلی تفاعل کی ٹیلر تسلسل عین حقیقی تفاعل کی ٹیلر تسلسل کی طرح حاصل کی جاتی ہیں۔ یوں ہم دیکھ پائیں گے کہ مساوات 14.59 میں x کی جگہ z پر کرنے سے e^z کی مکلارن تسلسل[51] حاصل ہوتی ہے۔

[51] یہ تسلسل e^z کی تعریف کے طور پر استعمال کی جا سکتی ہے۔

مساوات 14.60 سے ہم کلیہ یولر

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{14.64}$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں ظاہر ہے کہ مخلوط عدد $z = x + iy$ کی قطبی روپ (حصہ 14.2) کو اب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r^{i\theta} \tag{14.65}$$

مزید مساوات 14.64 سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\left|e^{iy}\right| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1 \tag{14.66}$$

ہو گا یعنی خالص خیالی طاقت کے لئے قوت نمائی تفاعل کی مطلق قیمت اکائی کے برابر ہے۔اس اہم نتیجہ کو یاد رکھنا مفید ثابت ہو گا۔یوں مساوات 14.60 کے تحت درج ذیل ہوں گے۔

$$\left|e^{z}\right| = \left|e^{x}\right|, \quad \text{دلیل}\ e^{z} = y \tag{14.67}$$

چونکہ $\cos 2\pi = 1$ اور $\sin 2\pi = 0$ ہیں لہٰذا مساوات 14.64 سے

$$e^{i2\pi} = 1 \tag{14.68}$$

ملتا ہے۔اسی طرح درج ذیل بھی حاصل ہوتے ہیں۔

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \tag{14.69}$$

مساوات 14.69 اور مساوات 14.62 سے

$$e^{z+i2\pi} = e^{z}e^{i2\pi} = e^{z} \tag{14.70}$$

ملتا ہے جس کے تحت e^z دوری ہے جس کا خیالی دوری عرصہ 2π ہے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

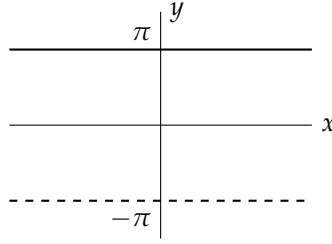
$$e^{z\mp i2n\pi} = e^{z}, \qquad (n = 0, 1, \cdots) \tag{14.71}$$

دوری ہونے کی بنا $w = e^z$ کی جتنی بھی ممکنہ قیمتیں ہیں وہ تمام درج ذیل پٹی (شکل 14.12)

$$-\pi < y \leq \pi \tag{14.72}$$

میں موجود ہیں۔اس لامتناہی پٹی کو e^z کا **بنیادی خطہ** کہتے ہیں۔

مساوات 14.62 سے $e^{z}e^{-z} = e^{0} = 1$ ملتا ہے جس سے مراد درج ذیل ہے۔

$$e^{z} \neq 0 \quad \text{تمام}\ z \tag{14.73}$$

شکل 14.12: قوت نمائی تفاعل e^z کا بنیادی خطہ

سوالات

سوال 14.163: مساوات کوشی ریمان استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں کہ e^z تمام z کے لئے تحلیلی ہے۔

سوال 14.164: مساوات 14.62 حاصل کریں۔

سوال 14.165 تا سوال 14.168 میں دیا گیا z استعمال کرتے ہوئے e^z دریافت کریں۔

سوال 14.165: $i\frac{\pi}{4}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

سوال 14.166: $-i\frac{\pi}{4}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

سوال 14.167: $1+i$
جواب: $e(\cos 1 + i\sin 1)$

سوال 14.168: $-5+i\pi$
جواب: $-e^{-5}$

سوال 14.169 تا سوال 14.172 میں حقیقی اور خیالی اجزاء دریافت کریں جہاں $z = x + iy$ ہے۔

سوال 14.169: e^{2z}
جوابات: $\text{حقیقی} = e^{2x}\cos 2y, \quad \text{خیالی} = e^{2x}\sin 2y$

سوال 14.170: e^{-2z}
جوابات: $-e^{-2x}\sin 2y =$ خیالی, $e^{-2x}\cos 2y =$ حقیقی

سوال 14.171: e^{z^2}
جوابات: $e^{x^2-y^2}\sin 2xy =$ خیالی, $e^{x^2-y^2}\cos 2xy =$ حقیقی

سوال 14.172: e^{z^3}
جوابات: $e^{x^3-3xy^2}\sin(3x^2y-y^3) =$ خیالی, $e^{x^3-3xy^2}\cos(3x^2y-y^3) =$ حقیقی

سوال 14.173 تا سوال 14.177 میں دیے گئے تفاعل کو کو قطبی روپ میں لکھیں۔

سوال 14.173: $\sqrt{i}$
جواب: $e^{i\frac{\pi}{4}}$

سوال 14.174: $4-i3$
جواب: $5e^{-i\tan^{-1}\frac{3}{4}}$

سوال 14.175: $1+i$
جواب: $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

سوال 14.176: $\sqrt{z}$
جواب: $(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}\,e^{i\frac{\tan^{-1}\frac{y}{x}}{2}}$

سوال 14.177: $\sqrt[n]{z}$ جواب: $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2n}}\,e^{i\frac{\tan^{-1}\frac{y}{x}}{n}}$

سوال 14.178 تا سوال 14.180 میں دیے مساوات کا حل تلاش کریں۔چند حل کو مخلوط سطح پر دکھائیں۔

سوال 14.178: $e^z=1$
جوابات: $z=\mp i2n\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.179: $e^z=3$
جوابات: $z=\ln 3\mp i2n\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.180: $e^z=-3$
جوابات: $z=\ln 3 \mp i(2n+1)\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.181 تا سوال 14.184 میں z کی وہ تمام قیمتیں تلاش کریں جو دیے گئے تعلق کو مطمئن کرتے ہوں۔

سوال 14.181: $e^{\bar{z}}=\overline{e^z}$
جواب: تمام z

سوال 14.182: $e^{i\bar{z}}=\overline{e^{iz}}$
جواب: $z=0$

سوال 14.183: $\left|e^{-2z}\right|<1$
جواب: حقیقی $z>0$

سوال 14.184: e^z حقیقی ہے
جواب: $y=\mp 2n\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.185: دکھائیں کہ $u=e^{xy}\cos(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2})$ ہارمونی ہے اور اس کا جوڑی دار ہارمونی جزو حاصل کریں۔
جواب: $v=-e^{xy}\sin(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2})$

سوال 14.186: یہ ایک دلچسپ بات ہے کہ $f(x+i0)=e^x$ $f'(z)=f(z),$ کی شرط، $f(z)$ (جسے تمام پر تحلیل تصور کیا گیا ہے) کی یکتا قیمت یعنی $f(z)=e^z$ تعین کرتی ہے جہاں e^z کی تعریف مساوات 14.60 میں پیش کی گئی ہے۔اس حقیقت کو کوشی ریمان مساوات سے ثابت کریں۔

سوال 14.187: مختلف راہ مثلاً دلیلz $=0$ ، دلیلz $=\frac{\pi}{2}$ اور دلیلz $=\pi$ پر چلتے ہوئے $|z|\to\infty$ کرنے سے تفاعل e^z کی کیا خاصیت ہو گی؟
جوابات: دلیلz $=0$ کی راہ پر $e^z\to\infty$ ہو گا، دلیلz $=\frac{\pi}{2}$ کی راہ پر کوئی حد نہیں ہو گا جبکہ دلیلz $=\pi$ کی راہ پر $e^z\to 0$ ہو گا۔

14.8 تکونیاتی اور ہذلولی تفاعل

یولر مساوات 14.64 سے

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{i2}(e^{ix} - e^{-ix}) \qquad (x \text{ حقیقی ہے})$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں دیکھ کر ہم مخلوط z کے تفاعل $\cos z$ اور $\sin z$ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{i2}(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{14.74}$$

مزید باقی حقیقی تکونیاتی تفاعل کی طرح ہم مخلوط z کے لئے درج ذیل تفاعل کی تعریف پیش کرتے ہیں۔

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \tag{14.75}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z} \tag{14.76}$$

چونکہ e^z تمام z کے لئے تحلیلی ہے لہٰذا $\sin z$ اور $\cos z$ بھی تمام z کے لئے تحلیلی ہوں گے۔تفاعل $\tan z$ اور $\sec z$ تحلیلی ہیں ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $\cos z$ کی قیمت صفر ہے۔اسی طرح $\cot z$ اور $\operatorname{cosec} z$ تحلیلی ہیں ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $\sin z$ کی قیمت صفر ہے۔

تفاعل $\cos z$ اور $\sec z$ جفت ہیں جبکہ باقی تفاعل طاق ہیں مثلاً:

$$\begin{aligned} \cos(-z) &= \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z \\ \cot(-z) &= -\cot z, \quad \tan(-z) = -\tan z \end{aligned} \tag{14.77}$$

وغیرہ۔ چونکہ قوت نمائی تفاعل دوری ہے لہٰذا تکونیاتی تفاعل بھی دوری ہیں اور ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں جہاں $n = 0, 1, \cdots$ ہے۔

$$\begin{aligned} \cos(z \mp 2n\pi) &= \cos z, \quad \sin(z \mp 2n\pi) = \sin z \\ \tan(z \mp 2n\pi) &= \tan z, \quad \cot(z \mp 2n\pi) = \cot z \end{aligned} \tag{14.78}$$

ان مخلوط تفاعل کی تعریف سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ حقیقی تفاعل کے تعلق مخلوط تفاعل کے لئے بھی درست ہوں گے مثلاً:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z = -\sin z, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z = \cos z, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tan z = \sec^2 z \tag{14.79}$$

اور

$$\cos(z_1 \mp z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \pm \sin z_1 \sin z_2$$
$$\sin(z_1 \mp z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \mp \cos z_1 \sin z_2 \tag{14.80}$$
$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

مساوات 14.74 سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات یولر مخلوط قیمتوں کے لئے بھی درست ہے۔

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{14.81}$$

مساوات 14.80 استعمال کرتے ہوئے ہم $\cos z$ اور $\sin z$ کو حقیقی تفاعل کی صورت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ہم پہلے

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$
$$\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \tag{14.82}$$

لکھتے ہیں۔اب مساوات 14.74 اور ہذلولی کوسائن اور ہذلولی سائن کی تعریف سے

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \cosh y, \quad \sin iy = \frac{1}{2}(e^{-y} - e^{y}) = i \sinh y$$

لکھا جا سکتا ہے اور یوں درکار تعلق

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$
$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \tag{14.83}$$

حاصل ہوتے ہیں جو $\cos z$ اور $\sin z$ کی اعدادی قیمتیں حاصل کرنے کی کام آتے ہیں۔

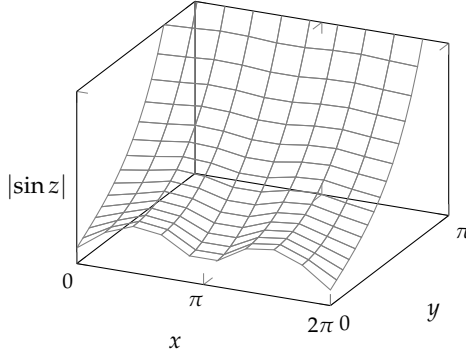
مخلوط متغیرہ z کی ہذلولی کوسائن[52] اور ہذلولی سائن[53] کی تعریف درج ذیل ہے

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) \tag{14.84}$$

جو مطابقتی حقیقی تفاعل کی تعریف کے عین مطابق ہے (ضمیمہ ب مساوات ب.17)۔ یہ تفاعل پوری مخلوط سطح میں تحلیلی ہیں۔مساوات 14.84 اور مساوات 14.74 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cosh z = \cos(iz), \quad \sinh z = -i \sin(iz) \tag{14.85}$$

---

[52] hyperbolic cosine
[53] hyperbolic sine

شکل 14.13: $\sin z$ کی مقیاسی سطح

حقیقی تفاعل کی طرح ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}\\
\operatorname{sech} z &= \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}
\end{aligned}
\tag{14.86}
$$

مخلوط متغیرہ $z = x + iy$ کے مخلوط تفاعل $f(z)$ کی مطلق قیمت $|f(z)|$ دو حقیقی متغیرات x اور y کا حقیقی تفاعل ہے لہٰذا اس کو تین بعدی فضا میں ایک سطح سے ظاہر کر سکتے ہیں۔یوں xy مستوی پر ہر نقطہ (x, y) کا مطابقتی نقطہ تین بعدی فضا میں کارتیسی محدد $(x, y, |f|)$ دیتا ہے اور یہ نقطے مل کر ایک سطح دیتے ہیں جس کو مقیاسی سطح[54] کہتے ہیں۔مقیاسی سطح پر $|f| =$ مستقل اور z دلیل $=$ مستقل کی منحنی دکھائے جا سکتے ہیں جو تحلیلی تفاعل کی رویہ کی جیومیٹریائی روپ پیش کرتی ہے۔

شکل 14.13 میں $\sin z$ کی مقیاسی سطح دکھائی گئی ہے۔مقیاسی سطحیں برقی انجینئری میں بہت کار آمد ثابت ہوتی ہیں۔

سوال 14.188: دکھائیں کہ $\cos z$ ، $\sin z$ ، $\cosh z$ اور $\sinh z$ تمام z کے لئے تحلیلی ہیں۔

سوال 14.189: مساوات 14.77 ثابت کریں۔

[54] modular surface

سوال 14.190: مساوات 14.74 سے مساوات 14.78 حاصل کریں۔

سوال 14.191: مساوات 14.79 ثابت کریں۔

سوال 14.192: مساوات 14.80 ثابت کریں۔

سوال 14.193: مساوات 14.85 ثابت کریں۔

سوال 14.194 تا سوال 14.199 میں دی گئی تفاعل کی قیمت دریافت کریں جہاں $z = x + iy$ ہے۔

سوال 14.194: $|\cos z|$
جواب: $\sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$

سوال 14.195: $|\sin z|$
جواب: $\sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$

سوال 14.196: $|\tan z|$
جواب: $\sqrt{\frac{\sin^2 x+\sinh^2 y}{\cos^2 x+\sinh^2 y}}$

سوال 14.197: حقیقی $\tan z$
جواب: $\frac{\sin^2 x+\sinh^2 y}{\sin x \cos x}$

سوال 14.198: حقیقی $\cot z$
جواب: $\frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x+\sinh^2 y}$

سوال 14.199: حقیقی $\sec z$
جواب: $\frac{\cos x \cosh y}{\cos^2 x+\sinh^2 y}$

سوال 14.200 تا سوال 14.204 میں اعدادی قیمتیں حاصل کریں۔

سوال 14.200: $\sin i$
جواب: $i1.175$

سوال 14.201: $\sinh i$
جواب: $i0.841$

سوال 14.202: $\sinh(1+i)$
جواب: $0.635 + i1.298$

سوال 14.203: $\cos(3.2 - i5.3)$
جواب: $-100 - i5.847$

سوال 14.204: $\cosh(-2 - i3)$
جواب: $-3.725 + i0.512$

سوال 14.205 تا سوال 14.210 میں دی گئی مساوات کے تمام حل تلاش کریں۔

سوال 14.205: $\cos z = 5$
جواب: $\mp 2n\pi \mp i2.29, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.206: $\sin z = 10$
جواب: $\mp 2n\pi - i2.99, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.207: $\cosh z = 0$
جواب: $\mp i(2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.208: $\cosh z = 0.5$
جواب: $\mp i2n\pi \mp i\frac{\pi}{3}, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.209: $\sinh z = 0$
جواب: $\mp in\pi, \quad n = 0, 1, \cdots$

سوال 14.210: $\sin z = i \sinh 1$
جواب: $i \mp 2n\pi$

سوال 14.211 تا سوال 14.219 میں دیے تعلق کی تصدیق کریں۔

سوال 14.211: $\cos z = \cosh iz, \quad \sin z = -i \sinh z$

سوال 14.212: $(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z$

سوال 14.213:

$$\begin{aligned}\cosh z &= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y,\\ \sinh z &= \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y\end{aligned}$$

سوال 14.214: $\left|\sinh y\right| \le |\sin z| \le \cosh y, \quad \left|\sinh y\right| \le |\cos z| \le \cosh y$

سوال 14.215: $\cosh^2 z - \sinh^2 = 1$

سوال 14.216: تمام z کے لئے $\cot z \neq \mp i$

سوال 14.217: $\tanh z$ کا دوری عرصہ $i\pi$ ہے۔

سوال 14.218: $\cos z = 0$ صرف حقیقی z کے لئے ہے۔

سوال 14.219: $\sin z = 0$ صرف حقیقی z کے لئے ہے۔

سوال 14.220: مساوات 14.74 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔
$\cos^4 \theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)$

سوال 14.221: مساوات 14.64 اور $z = e^{i\frac{\theta}{2}}$ ، $1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$1 + \tfrac{1}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{4}\cos 2\theta + \tfrac{1}{8}\cos 3\theta + \cdots = \frac{4 - 2\cos\theta}{5 - 4\cos\theta}$$

14.9 لوگارتھم۔عمومی طاقت

z کی قدرتی لوگارتھم **لوگارتھم|قدرتی**[55] کو $\ln z$ (بعض اوقات $\log z$) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ قوت نمائی تفاعل کی الٹ کو قدرتی لوگارتھم کہتے ہیں (یہ قدرتی لوگارتھم کی تعریف ہے) یوں ہر $z \neq 0$ کے لئے $w = \ln z$ کی تعریف درج ذیل تعلق ہے۔

$$e^w = z \tag{14.87}$$

مساوات 14.87 میں $w = u + iv$ اور $z = |z| e^{i\theta} = re^{i\theta}$ پر کرتے ہوئے

$$e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = re^{i\theta}$$

ملتا ہے۔ مساوات کی دونوں اطراف مطلق قیمت یکساں ہو گی۔ مساوات 14.66 کے تحت $\left|e^{iv}\right| = 1$ ہے لہٰذا $e^u e^{i\theta}$ کی مطلق قیمت e^u ہو گی۔ اسی طرح $re^{i\theta}$ کی مطلق قیمت r ہے لہٰذا

$$e^u = |z| = r \qquad \Longrightarrow \qquad u = \ln|z|$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $\ln|z|$ مثبت عدد $|z|$ کی بنیادی حقیقی قدرتی لوگارتھم ہے۔ اسی طرح مساوات کی دونوں اطراف دلیل بھی یکساں ہو گی:

$$v = \theta = \text{دلیل}\, z$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\ln z = \ln|z| + i(\text{دلیل}\, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + i(\text{دلیل}\, z) \tag{14.88}$$

چونکہ مخلوط z کی دلیل ہر $2n\pi$ پر دہراتا ہے لہٰذا مخلوط قدرتی لوگارتھم کی لامتناہی قیمتیں ہوں گی۔

دلیل z کی صدر قیمت

$$-\pi < \text{دلیل}\, z \leq \pi \qquad (\text{حصہ } 14.2)$$

پر $\ln z$ کی قیمت کو $\ln z$ کی صدر قیمت[56] کہتے ہیں جس کو عموماً $\operatorname{Ln} z$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

---

[55] natural logarithm
[56] principal value

ظاہر ہے کہ $\ln z$ کی باقی قیمتیں درج ذیل ہوں گی

$$\ln z = \operatorname{Ln} z \mp i2n\pi \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{14.89}$$

جن کی خیالی اجزاء میں 2π کی مضرب کا فرق پایا جائے گا جو اس حقیقت کے عین مطابق ہے کہ e^z دوری تفاعل ہے جس کا خیالی دوری عرصہ $i2\pi$ ہے۔

مزید حقیقی مثبت z کی صورت میں دلیل z کی صدر قیمت صفر ہو گی لہٰذا $\operatorname{Ln} z$ کی صدر قیمت اور حقیقی قدرتی لوگارتھم کی قیمت یکساں ہوں گی۔ اگر z حقیقی منفی ہو تب دلیل z کی صدر قیمت π ہو گی اور تب درج ذیل ہو گا۔

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\pi$$

مثال 14.18: قدرتی لوگارتھم۔ صدر قیمت

$$\begin{aligned}
\ln(-1) &= \mp i\pi, \mp i3\pi, \mp i5\pi, \cdots, \quad \operatorname{Ln}(-1) = i\pi \\
\ln i &= i\frac{\pi}{2}, -i\frac{3\pi}{2}, i\frac{5\pi}{2}, -i\frac{7\pi}{2}, i\frac{9\pi}{2}, \cdots, \quad \operatorname{Ln} i = i\frac{\pi}{2} \\
\operatorname{Ln}(-i) &= -i\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Ln}(-2 - i2) = \ln\sqrt{8} - i\frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

□

حقیقی قدرتی لوگارتھم کے قواعد مخلوط قیمتوں کے لئے بھی درست ہیں یعنی

$$\text{(ب)} \quad \ln\frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2, \qquad \text{(الف)} \quad \ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \tag{14.90}$$

لیکن ان تعلق کا مطلب کچھ یوں لینا ہو گا کہ مساوات کی ایک ہاتھ کی ہر ایک قیمت دوسری ہاتھ کی قیمتوں میں شامل ہے۔

مثال 14.19: مخلوط قیمتوں کی صورت میں مساوات 14-90 کا اطلاق

مان لیں کہ

$$z_1 = z_2 = e^{i\pi} = -1$$

ہے۔اگر ہم

$$\ln z_1 = \ln z_2 = i\pi$$

لیں تب مساوات 14.90 اس صورت درست ہو گی جب ہم $\ln(z_1 z_2) = \ln 1 = i2\pi$ لکھیں جبکہ صدر قیمت کے لئے یہ درست نہیں ہے یعنی $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}(1) = 0$ □

مساوات 14.42 کو مساوات 14.88 پر لاگو کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln z &= \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2+y^2} + i \frac{\partial}{\partial x}(z \text{ دلیل}) \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\Big(-\frac{y}{x^2}\Big) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}\end{aligned}$$

ملتا ہے۔اس طرح قدرتی لوگارتھم کی تفرق درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln z = \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0) \tag{14.91}$$

یوں صدر قیمت $\mathrm{Ln}\, z\, (z \neq 0)$ جو واحد قیمتی ہے اور یوں تفاعل کی عمومی تعریف پر پورا اترتا ہے، دائرہ کار $-\pi < z \text{ دلیل} < \pi$ یعنی ماسوائے منفی حقیقی محور کے، تمام مخلوط سطح پر تحلیلی ہے۔منفی حقیقی محور پر یہ تفاعل غیر استمراری ہے جہاں اس میں 2π کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔

عمومی طاقت: مخلوط عدد $z = x + iy (\neq 0)$ کی عمومی طاقت کی تعریف درج ذیل کلیہ ہے۔

$$z^c = e^{c \ln z} \qquad (z \neq 0, \quad c \text{ مخلوط}) \tag{14.92}$$

چونکہ $\ln z$ کی لاتمناہی قیمتیں ہیں لہٰذا z^c بھی عموماً کثیر قیمتی ہو گا۔اس کی مخصوص قیمت

$$z^c = e^{c\, \mathrm{Ln}\, z}$$

کو z^c کی صدر قیمت کہتے ہیں۔

$c = n = 1, 2, \cdots$ کی صورت میں z^n واحد قیمتی ہو گا جس کی وہی قیمت ہو گی جو z کی عمومی n ویں طاقت کی ہوتی ہے۔اسی طرح $c = -1, -2, \cdots$ کے لئے بھی ایسا ہی ہو گا۔

اگر $c=\frac{1}{n}$ ہو جہاں $n=2,3,\cdots$ ہے تب

$$z^c=\sqrt[n]{z}=e^{(1/n)\ln z} \qquad (z\neq 0)$$

ہو گا جہاں طاقت ($1/n\ln z$) کی قیمت $\frac{i2\pi}{n}$ کی مضرب تک تعین کی جا سکتی ہے جس سے ہمیں جذر کی n منفرد قیمتیں حاصل ہوں گی، جو حصہ 14.6 میں حاصل کردہ نتیجہ کے عین مطابق ہے۔ اگر $c=\frac{p}{q}$ دو مثبت عدد صحیح کا حاصل تقسیم ہو تب بھی صورت حال یہی ہو گی اور z^c کی محدود تعداد کی منفرد قیمتیں ہوں گی۔البتہ، اگر c حقیقی غیر ناطق یا واقعتاً مخلوط ہو تب z^c کی لامتناہی تعداد کی قیمتیں ہوں گی۔

مثال 14.20: عمومی طاقت

$$i^i=e^{i\ln i}=e^{i[i\frac{\pi}{2}\mp i2n\pi]}=e^{-\frac{\pi}{2}\pm 2n\pi}$$

یہ تمام قیمتیں حقیقی ہیں اور صدر قیمت $(n=0)$ کو درج بالا سے $e^{-\frac{\pi}{2}}$ لکھا جا سکتا ہے۔ □

روایتی طور پر حقیقی مثبت $z=x$ کی صورت میں z^c کا مطلب $e^{c\ln x}$ لیا جاتا ہے جہاں $\ln x$ بنیادی حقیقی قدرتی لوگارتھم ہے (یعنی ہماری تعریف کی رو سے $\ln z\,(z=x>0)$ کی صدر قیمت)۔اس کے علاوہ اگر $z=e$ (یعنی قدرتی لوگارتھم کی اساس) ہو تب $z^c=e^c$ سے مراد مساوات 14.60 سے حاصل کردہ یکتا قیمت لی جاتی ہے۔

مساوات 14.91 سے کسی بھی مخلوط عدد a کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a^z=e^{z\ln a} \tag{14.93}$$

سوالات

سوال 14.222: مساوات 14.90 کی تصدیق $z_1=i$ اور $z_2=-1$ کے لئے کریں۔

سوال 14.223: مساوات 14.48 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\operatorname{Ln} z\,(z\neq 0)$ خطہ $-\pi<\theta<\pi$ میں تحلیلی ہے جہاں دلیل z کے زاویہ کی صدر قیمت θ ہے۔

سوال 14.224: دکھائیں کہ منفی حقیقی محور پر $\operatorname{Ln} z$ غیر استمراری ہے۔

سوال 14.225: دکھائیں: $e^{\ln z}=z,\, \ln(e^z)=z\mp i2n\pi,\, n=0,1,\cdots$

سوال 14.226 تا سوال 14.233 میں تمام قیمتیں دریافت کریں۔چند قیمتوں کو مخلوط سطح پر دکھائیں۔

سوال 14.226: $\ln 1$
جواب: $\mp i2n\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.227: $\ln 2$
جواب: $0.693\mp i2n\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.228: $\ln i$
جواب: $i(\frac{\pi}{2}\mp 2n\pi), \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.229: $\ln e$
جواب: $1\mp i2n\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.230: $\ln(ie)$
جواب: $1+i\frac{\pi}{2}\mp i2n\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.231: $\ln(-ie)$
جواب: $1-i\frac{\pi}{2}\mp i2n\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.232: $\ln(e^i)$
جواب: $i\mp i2n\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.233: $\ln(e^{-3})$
جواب: $-3\mp i2n\pi, \quad n=0,1,\cdots$

سوال 14.234 تا سوال 14.237 کو z کے لئے حل کریں۔

سوال 14.234: $\ln z=-i\frac{\pi}{2}$
جواب: $z=-i$

سوال 14.235: $\ln z=i\frac{\pi}{2}$
جواب: $z=i$

سوال 14.236: $\ln z = 1 + i\pi$
جواب: $z = -e$

سوال 14.237: $\ln z = (1 + i)\pi$
جواب: $z = e^{-\pi}$

سوال 14.238 تا سوال 14.241 میں صدر قیمت $\operatorname{Ln} z$ دریافت کریں جہاں z دیا گیا ہے۔

سوال 14.238: $(1 - i)^2$
جواب: $0.693 - i1.571$

سوال 14.239: $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
جواب: $0.693 + i0.785$

سوال 14.240: -5
جواب: $1.609 + i\pi$

سوال 14.241: $3 + i\sqrt{11}$
جواب: $1.498 + i0.835$

سوال 14.242 تا سوال 14.248 میں صدر قیمت دریافت کریں۔

سوال 14.242: $(2i)^{\frac{1}{2}}$
جواب: $1 + i$

سوال 14.243: $(1 + i)^i$
جواب: $0.429 + i0.155$

سوال 14.244: $(1 + i)^{1-i}$
جواب: $2.808 + i1.318$

سوال 14.245: 3^{3-i}
جواب: $12.28 - i24.046$

سوال 14.246: $2^(i2)$
جواب: $0.183 + i0.983$

سوال 14.247: $(2-i)^{1+i}$
جواب: $3.35+i1.189$

سوال 14.248: $(2+i)^{3-i2}$
جواب: $27.588-i6.126$

الٹ سائن یعنی $w=\sin^{-1} z$ سے مراد (کی تعریف) ایسا تفاعل ہے جو $\sin w = z$ کی تعلق کو مطمئن کرتا ہو۔اسی طرح الٹ کوسائن $w=\cos^{-1} z$ سے مراد ایسا تفاعل ہے جو $\cos w = z$ کو مطمئن کرتا ہو۔باقی تمام الٹ تکونیاتی تفاعل اور الٹ ہذلولی تکونیاتی تفاعل کی تعریف بھی اسی طرح کی جاتی ہے۔طاقتی روپ (مثلاً $\sin w = (e^{iw}-e^{-iw})/i2$ وغیرہ) استعمال کرتے ہوئے سوال 14.249 تا سوال 14.254 میں دیے گئے تعلق کی تصدیق کریں۔

سوال 14.249: $\sin^{-1} z = -i\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$

سوال 14.250: $\cos^{-1} z = -i\ln(z+\sqrt{z^2-1})$

سوال 14.251: $\cosh^{-1} z = \ln(z+\sqrt{z^2-1})$
جواب:

$$\cosh w = \frac{e^w+e^{-w}}{2} = z, \quad \frac{e^{2w}+1}{2e^w} = z, \quad e^{2w}-2ze^w+1=0$$
$$e^w = z+\sqrt{z^2-1}, \quad w=\ln(z+\sqrt{z^2-1})$$

سوال 14.252: $\sinh^{-1} z = \ln(z+\sqrt{z^2+1})$

سوال 14.253: $\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\ln\frac{i+z}{i-z}$

سوال 14.254: $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$

سوال 14.255: دکھائیں کہ $w=\sin^{-1} z$ کثیر قیمتی ہے، اور اگر w_1 ان میں سے ایک ہو تب باقی کی روپ $w_1 \mp 2n\pi$ اور $\pi - w_1 \mp 2n\pi$ ہو گی جہاں $n=0,1,\cdots$ ہے۔
($w=u+iv=\sin^{-1} z$ کی صدر قیمت سے مراد (کی تعریف) وہ قیمت ہے جس کا $v \geq 0$ کی صورت میں $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ہو اور $v<0$ کی صورت میں $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ ہو۔)
جواب: $\sin(w \mp 2n\pi) = \sin w$ اور $\sin(\pi - w) = \sin w$ سے یک دم یہ نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

باب 15

محافظ زاویہ نقشہ کشی

اگر z سطح میں دائرہ کار D میں مخلوط تفاعل $w = f(z)$ معین ہو، تب D میں ہر نقطہ کا مطابقتی نقطہ w سطح میں پایا جاتا ہے۔یوں D کا مطابقتی، $f(z)$ کے سعت کا نقشہ، w سطح پر حاصل ہو گا۔جیومیٹریائی نقشہ ذہن میں تفاعل کی تصویر قائم کرتا ہے۔مختلف منحنیات اور خطوں کے نقوش دیکھ کر مخلوط تفاعل سمجھنے میں مدد ملتی ہے۔

جیسا ہم دیکھیں گے، اگر $f(z)$ تحلیلی ہو تب $f(z)$ سے حاصل نقشے میں زاویے تبدیل نہیں ہوں گے ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $f'(z) = 0$ ہو۔ایسا نقشہ **محافظ زاویہ نقشہ**[1] کہلاتا ہے۔

محافظ زاویہ نقشہ کشی[2] کے ذریعہ دیے گئے پیچیدہ خطے کا تبادل سادہ خطے میں کرتے ہوئے نظریہ مخفی قوہ کی دو بعدی سرحدی مسائل حل کیے جاتے ہیں۔اسی وجہ سے محافظ زاویہ نقشہ کشی انجینئری میں اہمیت رکھتی ہے۔

ہم نقشہ کشی کی تعریف پیش کرنے کے بعد نقشہ کشی کا عمل سکھائیں گے۔اس کے بعد کئی بنیادی تحلیلی تفاعل کے نقوش پیش کریں گے۔عملی استعمال اس باب کے علاوہ باب 20 میں بھی پیش کیے جائیں گے۔

---

[1] conformal map
[2] conformal mapping

15.1 نقشہ کشی

حقیقی متغیرہ x کے حقیقی تفاعل $y = f(x)$ کی منحنی کو کارتیسی xy سطح پر کھینچا جا سکتا ہے۔اس خط کو تفاعل کی ترسیم کہتے ہیں۔چونکہ مخلوط متغیرہ z کو جیومیٹریائی طور پر مخلوط سطح میں نقاط سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہی کچھ w کے لئے بھی درست ہے لہٰذا مخلوط تفاعل

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad (z = x + iy) \tag{15.1}$$

کی صورت حال زیادہ پیچیدہ ہے۔اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم ان دو متغیرات کے لئے دو علیحدہ علیحدہ مخلوط سطحیں استعمال کریں۔ایک z سطح جس میں $z = x + iy$ دکھایا جائے اور دوسری w سطح جس میں مطابقتی $w = u + iv$ دکھایا جائے۔یوں $f(z)$ کی دائرہ کار D میں ہر z کے لئے تفاعل $f(z)$ سطح w میں قیمت $w = f(z)$ مختص کرے گا۔اس معین تعلق کو f کی دائرہ کار کی سطح w **میں**[3] **نقشہ کشی**[4] (یا تبادل) کہتے ہیں، یا f کی دائرہ کار کا f کے سعت پر[5] نقشہ کشی کہتے ہیں۔

$w_0 = f(z_0)$ جو نقطہ z_0 کا مطابقتی نقطہ ہے، $f(z)$ کے لحاظ سے نقشے میں، z_0 کا **عکس نقطہ**[6] یا **عکس**[7] کہلاتا ہے۔ اگر z کسی منحنی پر حرکت کرے اور $f(z)$ استمراری (نا کہ مستقل) ہو تب مطابقتی نقطہ $w = f(z)$ عمومی طور پر سطح w میں منحنی C^* پر حرکت کرے گا۔اس منحنی کو منحنی C کا عکس کہیں گے۔لفظ "عکس" کسی بھی نقطوں کے سلسلے اور خطہ کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم دیکھیں گے کہ ایسی نقشہ کشی کی خواص کی تفتیش، z سطح میں منحنیات اور خطے اور w سطح میں ان کے عکس پر غور اور w سطح میں منحنیات اور خطے اور z سطح میں ان کے عکس پر غور کرنے سے کی جا سکتی ہے۔ اس طرح انفرادی نقطوں پر غور کرنے سے حاصل معلومات سے زیادہ معلومات حاصل ہو گی۔

اگرچہ w اور z کو دو علیحدہ علیحدہ سطحوں سے ظاہر کیا جاتا ہے، بعض اوقات یوں سوچنا زیادہ بہتر ثابت ہوتا ہے کہ اصل اور نقش ایک ہی سطح پر پائے جاتے ہوں اور عمومی اصطلاحات مثلاً "گھومنا" اور "مستقیم حرکت" استعمال کرنا۔یوں $w = z + 3$ مستقیم حرکت کہلائے گی جو z سطح میں ہر نقطہ کو دائیں جانب تین اکائیاں منتقل کرتی ہے۔

---

[3] into
[4] mapping
[5] onto
[6] image point
[7] image

تحلیل تفاعل $w = u + iv = f(z)$ جس نقشہ کو ظاہر کرتا ہو، کی کسی مخصوص خاصیت جاننے کے لئے ہم z سطح میں سیدھے لکیروں $x =$ مستقل اور $y =$ مستقل کا w سطح میں عکس پر غور کر سکتے ہیں۔اسی طرح ہم دائرہ $|z| =$ مستقل یا مبدا سے گزرتی سیدھی لکیروں کی عکس پر غور کر سکتے ہیں۔اس کے علاوہ ہم $u(x, y) =$ مستقل اور $v(x, y) =$ مستقل منحنیات پر z سطح میں غور کر سکتے ہیں۔ان منحنیات کو u اور v کی **ہم قد منحنیات**[8] کہتے ہیں۔ ہم سادہ اشکال مثلاً چکور، تکون، مستطیل وغیرہ اور ان کے عکس پر بھی غور کر سکتے ہیں۔

آئیں چند مثالوں کی مدد سے ان حقائق کو بہتر سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔

مثال 15.1: **خطی تبادل** $w = ax + b$
درج ذیل نقش **مستقیم حرکت** کو ظاہر کرتا ہے۔

$$w = z + b \tag{15.2}$$

شکل 15.1 میں مساوات 15.2 کو $w = z + 2 + i$ کے لئے دکھایا گیا ہے جہاں مستطیل اور اس کا عکس دکھائے گئے ہیں جو یکساں ہیں (کیوں؟)۔ A کا عکس A^* ، وغیرہ۔زیادہ پیچیدہ اشکال میں نقطوں کو اس طرح ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ مساوات 15.2 میں $b = 0$ پر کرنے سے **مماثل تبادل**[9]

$$w = z$$

حاصل ہوتا ہے جو ہر نقطے کو اپنے آپ پر نقش کرتا ہے۔

درج ذیل تبادل

$$w = az \qquad (|a| = 1)$$

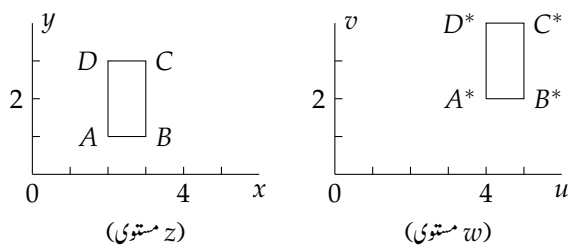
مقررہ زاویہ $\underline{/a}$ سے گھومنے کو ظاہر کرتا ہے۔شکل 15.2 میں $w = iz$ یعنی گھڑی کی سوئیوں کی گھومنے کی الٹ رخ $\frac{\pi}{2}$ زاویہ سے گھومنا دکھایا گیا ہے۔

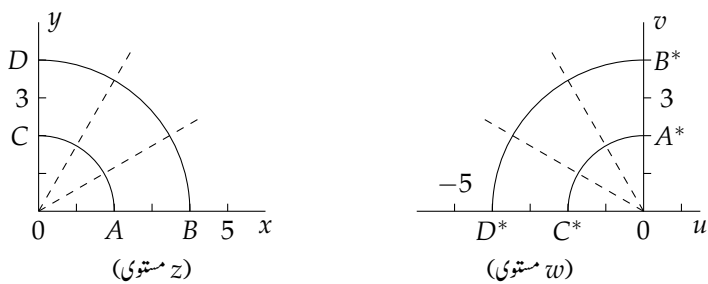
درج ذیل تبادل

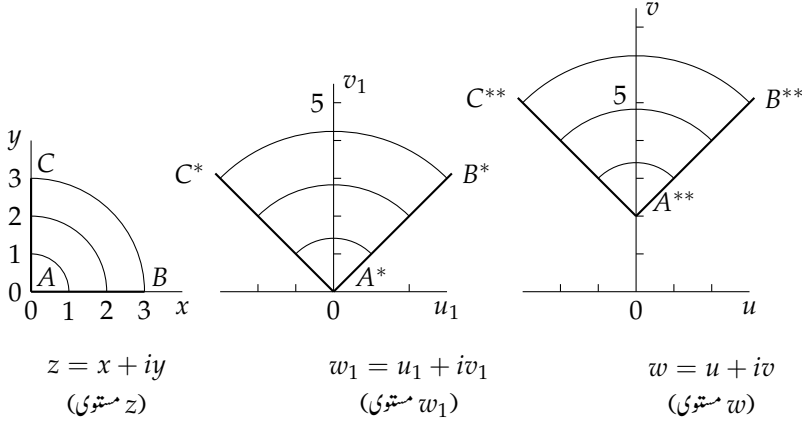
$$w = az \qquad (\text{مثبت حقیقی } a)$$

---

[8] level curves
[9] identity transformation

(مستوی z) (مستوی w)

شکل 15.1: مستقیم حرکت $w = z + 2 + i$

(مستوی z) (مستوی w)

شکل 15.2: گھڑی کی الٹ رخ گھومنے کا زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہے۔

$z = x + iy$ (مستوی z) $w_1 = u_1 + iv_1$ (مستوی w_1) $w = u + iv$ (مستوی w)

شکل 15.3: خطی تبادل $w = (1+i)z + 2i$ جس میں گھومنا، اتساع $w_1 = (1+i)z$ اور مستقیم حرکت $w = w_1 + 2i$ شامل ہے۔

میں $a > 1$ اتساع جبکہ $0 < a < 1$ سکڑاو کو ظاہر کرتا ہے۔اسی طرح

$$w = az \qquad (a \text{ اختیاری}) \tag{15.3}$$

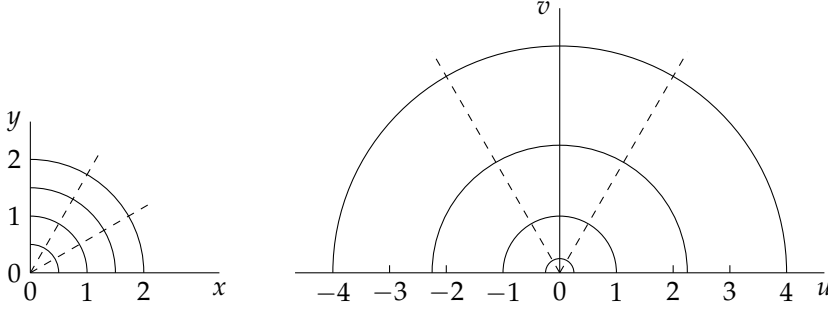
زاویہ $\angle a$ سے گھومنے کو اور ساتھ ہی یکساں اتساع یا سکڑاو کو ظاہر کرتا ہے۔ درج ذیل تبادل

$$w = az + b \tag{15.4}$$

خطی تبادل[10] کہلاتا ہے جو گھومنے کے ساتھ اتساع یا سکڑاو $w_1 = az$ کے ساتھ ساتھ مستقیم حرکت $w = w_1 + b$ کو ظاہر کرتا ہے۔ شکل 15.3 میں $w = (1+i)z + 2i$ تبادل دکھایا گیا ہے جو گھڑی کی الٹ رخ $\frac{\pi}{4}$ زاویے کے گھومنے اور $|1+i| = \sqrt{2}$ تناسب کی اتساع کے بعد اوپر کی رخ مستقیم حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔
□

مثال 15.2: **نقش** $w = z^2$
ہم درج ذیل نقش پر غور کرنا چاہتے ہیں۔

$$w = z^2 \tag{15.5}$$

[10] linear transformation

شکل 15.4: نقش $w = z^2$

یہاں قطبی محدد استعمال کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔یوں $z = e^{i\theta}$ اور $w = Re^{i\phi}$ لیتے ہوئے مساوات 15.5 $Re^{i\phi} = r^2e^{i2\theta}$ لکھی جائے گی جس سے

$$R = r^2, \quad \phi = 2\theta$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں دائروں $r = r_0 =$ مستقل کا نقش دائرے $R = r_0^2 =$ مستقل ہوں گے جبکہ مبدا سے گزرتی سیدھی لکیروں $\theta = \theta_0 =$ مستقل کا نقش دگنی زاویہ پر لکیریں $\phi = 2\theta_0 =$ مستقل ہوں گی۔ خاص کر z سطح میں مثبت حقیقی محور $(\theta = 0)$ کا نقش w سطح میں مثبت حقیقی محور ہو گا جبکہ z سطح میں مثبت خیالی محور $\theta = \frac{\pi}{2}$ کا نقش w سطح میں منفی حقیقی محور ہو گا۔ یہ نقش مبدا پر ہر زاویہ کو دگنا کرتا ہے۔ ربع اول $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ کا نقش بالائی نصف w سطح ہو گی (شکل 15.4)۔

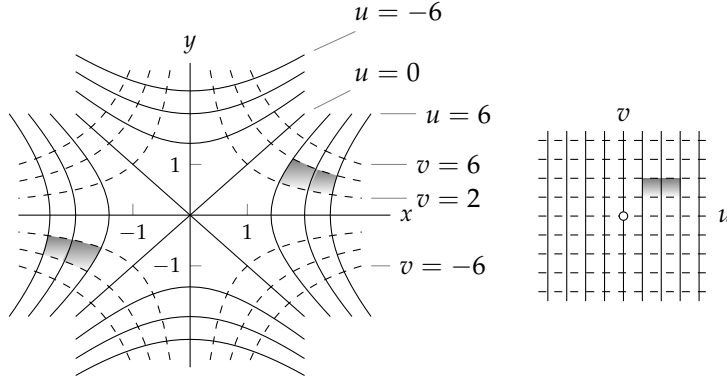
مستطیل محدد میں تبادل $w = z^2$ درج ذیل دے گا۔

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy$$

حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ کرتے ہوئے

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy \tag{15.6}$$

ملتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ u اور v کی ہم قد سطحات متساوی الاضلاع قطع زائد ہوں گے جن کی متقارب لکیریں[11] $y = \mp x$ اور محدد کی محور ہیں۔ہم دیکھتے ہیں مساوات 15.6 میں دیے گئے خطوط ایک دوسرے کی عمودی مطقاطع

[11] asymptotes

شکل 15.5: نقش $w = z^2$ کی صورت میں u اور v کی ہم قد سطحیں

خطوط (حصہ 1.6) ہیں۔ شکل 15.5 میں z سطح میں دو خطے w سطح میں مستطیل پر نقش ہوں گے۔ ظاہر ہے کہ ہر نقطہ $w \neq 0$ سطح z میں ٹھیک دو نقطوں کا عکس ہو گا۔

ہم مساوات 15.6 استعمال کرتے ہوئے سیدھی خطوط $x =$ مستقل اور $y =$ مستقل کا عکس تلاش کر سکتے ہیں۔ خط $x = c =$ مستقل کا عکس

$$u = c^2 - y^2, \quad v = 2cy$$

سے y حذف کرتے ہوئے

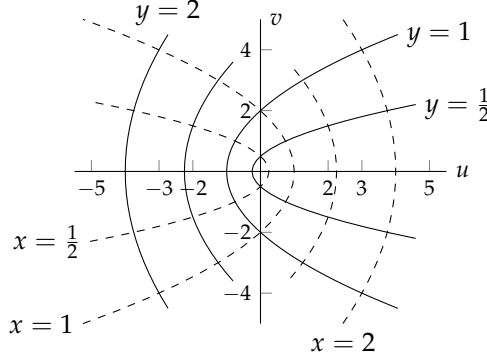
$$v^2 = 4c^2(c^2 - u)$$

حاصل ہوتا ہے جو قطع مکافی کو ظاہر کرتی ہے جو بائیں رخ کھلتا ہے۔ مبدا اس قطع مکافی کا ماسکہ ہو گا۔ اسی طرح $y = k =$ مستقل کا عکس

$$v^2 = 4k^2(k^2 + u)$$

ہو گا جو دائیں کو کھلتا ہوا قطع مکافی ہے جس کا ماسکہ عین مبدا پر ہے (شکل 15.6)۔ □

باقی طاقت

$$w = z^n, \quad n = 3, 4, \cdots \tag{15.7}$$

شکل 15.6: نقش $w=z^2$ میں سیدھے خطوط $x=c$ اور $y=c^*$ کے عکس

شکل 15.7: نقش $w=z^n$

پر بھی اسی طرح غور کیا جا سکتا ہے۔ظاہر ہے کہ ان کی ہم قد سطحات کی مساوات مزید پیچیدہ ہوں گی۔زاویائی خطہ $0 \le \angle z \le \frac{\pi}{n}$ بالائی نصف w سطح پر نقش ہو گا (شکل 15.7)۔

منفی طاقت کی نقش $\ldots, \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z}$ پر بھی قطبی محدد کی مدد سے غور کیا جا سکتا ہے۔عملاً اہم ترین صورت درج ذیل مثال میں دی گئی ہے۔

مثال 15.3: نقش $w=\frac{1}{z}$۔ الٹ جانا
ہم درج ذیل نقش پر غور کرتے ہیں۔

$$w=\frac{1}{z} \qquad z \neq 0 \tag{15.8}$$

قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے $z=re^{i\theta}$ اور $w=Re^{i\phi}$ لکھتے ہیں۔یوں مساوات 15.8 سے

$$R=\frac{1}{r}, \quad \phi=-\theta \qquad (r \neq 0) \tag{15.9}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ $w = \frac{1}{z}\ (z \neq 0)$ ، مبدا سے نکلتی سیدھی لکیر جو $\bar{z}$ سے گزرتی ہو پر واقع ہے۔مبدا سے اس نقطے کا فاصلہ $\frac{1}{|z|}$ ہے۔

جیومیٹریائی طور پر z کو اکائی دائرے میں الٹاتے ہوئے اس کا x محور میں عکس لینے سے $w = \frac{1}{z}$ حاصل ہو گا۔آپ تشابہ مثلثات استعمال کرتے ہوئے اس حقیقت کو ثابت کر سکتے ہیں (شکل 15.8)۔

شکل 15.9 میں دکھایا گیا ہے کہ $w = \frac{1}{z}$ نقش، افقی اور کھڑی سیدھی لکیروں کو دائروں یا سیدھی لکیروں پر عکس کرتی ہے۔یہاں تک کہ درج ذیل جملہ ہر صورت درست ہو گا۔

$w = \frac{1}{z}$ ہر سیدھی لکیر یا دائرے کو دائرے یا سیدھے لکیر پر نقش کرتا ہے۔

ثبوت: z سطح میں ہر سیدھی لکیر یا دائرہ کو درج ذیل مساوات ظاہر کرتی ہے۔

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \qquad (A,B,C,D \text{ حقیقی})$$

$A=0$ سیدھی لکیر دیتی ہے جبکہ $A \neq 0$ دائرہ دیتی ہے۔ z اور $\bar{z}$ استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Az\bar{z}+B\frac{z+\bar{z}}{2}+C\frac{z-\bar{z}}{i2}+D=0$$

چونکہ $w = \frac{1}{z}$ ہے لہٰذا اس میں $z = \frac{1}{w}$ پر کرتے ہوئے $w\bar{w}$ سے ضرب دینے سے

$$A+B\frac{w+\bar{w}}{2}+C\frac{\bar{w}-w}{i2}+Dw\bar{w}=0$$

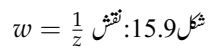
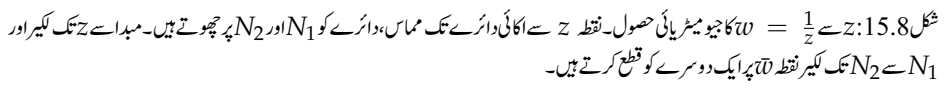
حاصل ہوتا ہے جس کو u اور v کی صورت میں لکھتے ہوئے

$$A+Bu-Cv+D(u^2+v^2)=0$$

حاصل ہوتا ہے جو $D \neq 0$ کی صورت میں دائرہ ہو گا جبکہ $D=0$ کی صورت میں w سطح میں سیدھی لکیر ہو گی۔

□

شکل 15.8: z سے $w = \frac{1}{z}$ کا جیومیٹریائی حصول۔ نقطہ z سے اکائی دائرے تک مماس، دائرے کو N_1 اور N_2 پر چھوتے ہیں۔ مبدا سے z تک لکیر اور N_1 سے N_2 تک لکیر نقطہ $\bar{w}$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

شکل 15.9: نقش $w = \frac{1}{z}$

سوالات

سوال 15.1 تا سوال 15.3 میں زیر نقش $w=(1-i)z+2$ دیے گئے منحنیات یا خطوں کا عکس تلاش کریں۔ عکس کو w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.1: $x=0,1,2,3$
جواب: $v=u-2,u-4,u-6,u-8 \quad v=u-2-2x,$

سوال 15.2: $y=0,-1,-2,-3$
جواب: $v=-u+2,-u,-u-2,-u-4 \quad v=-u+2+2y,$

سوال 15.3: $\lvert z+2\rvert \le 2$
جواب: $\lvert w-i2\rvert \le 2\sqrt{2}$

سوال 15.4 تا سوال 15.9 میں نقش $w=u+iv=z^2$ ہے۔ دیے گئے منحنیات کا عکس تلاش کرتے ہوئے انہیں w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.4: $y=x$
جواب: $u=0,v\ge 0$

سوال 15.5: $y=0,1,2,3$
جواب: $v=0,\mp 2\sqrt{u+1},\mp 4\sqrt{u+4},\mp 6\sqrt{u+9} \quad v=2y\sqrt{u+y^2},$

سوال 15.6: $x=0,1,2,3$
جواب: $x=0$ پر $v=0,u<0$ ہو گا جبکہ عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$v=2x\sqrt{x^2-u},v=0,\mp 2\sqrt{1-u},\mp 4\sqrt{4-u},\mp 6\sqrt{9-u}$$

سوال 15.7: $y=1+x$
جواب: $u=x^2-y^2,v=2xy$ میں $y=1+x$ پر کرنے سے $u=-1-2x,v=2x(1+x)$ ملتا ہے۔ یوں $x=-\frac{1}{2}(1+u)$ حاصل کرتے ہوئے $v=\frac{1}{2}(u^2-1)$ حاصل ہو گا۔

سوال 15.8: $y=1-x$
جواب: $v=\frac{1}{2}(u+1)(u+3)$

سوال 15.9: $y^2 = 1 + x^2$
جواب: $u = -1$

سوال 15.10 تا سوال 15.15 میں نقش $w = z^2$ ہے۔ دیا گیا خطہ w سطح میں حاصل کرتے ہوئے w سطح میں دکھائیں۔

سوال 15.10: $|z| \geq 3$
جواب: $|w| \geq 9$

سوال 15.11: $|z| < 2$
جواب: $|w| < 4$

سوال 15.12: $\angle z < \frac{\pi}{3}$
جواب: $\angle w < \frac{2\pi}{3}$

سوال 15.13: $1 < x < 2$
جواب: قطع مکافی $v^2 = 4(1-u)$ اور $v^2 = 16(4-x)$ کے درمیان خطہ۔

سوال 15.14: $0 \leq y \leq 1$
جواب: قطع مکافی $v^2 = 4(1+u)$ اور مثبت u محور اور ان دونوں کے درمیان خطہ۔

سوال 15.15: $-\frac{\pi}{4} < \angle z < \frac{\pi}{2}$
جواب: $-\frac{\pi}{2} < \angle w < \pi$

سوال 15.16 تا سوال 15.21 میں دیے سیدھی لکیروں اور دائروں کا زیر نقش $w = \frac{1}{z}$ عکس دریافت کریں۔

سوال 15.16: $|z| = 1$
جواب: $|w| = 1$

سوال 15.17: $|z+1| = 1$
جواب:

$$|z+1| = 1, \quad \left|\frac{1}{w} + 1\right| = 1, \quad |1+w| = |w|, |u+iv+1| = |u+iv|$$
$$(u+1)^2 + v^2 = u^2 + v^2, \quad u = -\frac{1}{2}$$

سوال 15.18: $|z+1|=1$
جواب: $u=\frac{1}{2}$

سوال 15.19: $|z-i2|=2$
جواب: $v=-\frac{1}{4}$

سوال 15.20: $y=x-1$
جواب: $z=x+iy$ سے $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ اور $y=\frac{1}{i2}(z-\bar{z})$ لکھتے ہوئے $y=x-1$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $z=\frac{1}{w}$ اور $\bar{z}=\frac{1}{\bar{w}}$ کا استعمال کرتے ہوئے دونوں اطراف کو $i2$ سے ضرب دیا گیا ہے۔

$$\tfrac{1}{i2}(z-\bar{z})=\tfrac{1}{2}(z+\bar{z})-1, \quad z-\bar{z}=i(z+\bar{z})-i2$$

اس میں $\bar{z}=\frac{1}{\bar{w}}$ پر کرتے ہوئے دونوں اطراف کو $w\bar{w}$ سے ضرب دینے سے

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{w}-\tfrac{1}{\bar{w}}=i(\tfrac{1}{w}+\tfrac{1}{\bar{w}})-i2, \quad \bar{w}-w=i(\bar{w}+w)-i2w\bar{w},\\ -i2v=i2u-i2w\bar{w}, \quad u^2-u+v^2-v=0,\\ (u-\tfrac{1}{2})^2+(v-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{2}, \quad \left|w-\tfrac{1}{2}(1+i)\right|=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\end{gathered}$$

حاصل ہوتا ہے۔

سوال 15.21: $x=1$
جواب: $z=x+iy$ سے $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ لکھتے ہوئے $x=1$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $z=\frac{1}{w}$ اور $\bar{z}=\frac{1}{\bar{w}}$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$\begin{gathered}\frac{z+\bar{z}}{2}=1, \quad \frac{1}{w}+\frac{1}{\bar{w}}=2, \quad \bar{w}+w=2w\bar{w}, \quad 2u=2(u^2+v^2),\\ u^2-u+v^2=0, \quad (u-\tfrac{1}{2})^2+v^2=\frac{1}{4}, \quad \left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\end{gathered}$$

سوال 15.22: زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ خطہ $-2<x<1, -1<y<1$ کا عکس تلاش کریں۔
جواب: وہ خطہ جس کے حدود $\left|w+\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ ، $\left|w+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ ، $\left|w-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ اور $\left|w+\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ دائرے ہوں۔

سوال 15.23: زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ خطہ $1<x<2$ کا عکس تلاش کریں۔
جواب: دائرہ $\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ اور دائرہ $\left|w-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ کے درمیان خطہ۔

سوال 15.24: زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ کن سیدھی لکیروں کا عکس سیدھی لکیریں اور کن کا عکس دائرے ہیں۔اسی طرح کن دائروں کا عکس دائرے اور کن کا عکس سیدھی لکیریں ہیں؟
جواب: اگر سیدھی لکیر $Bx+Cy+D=0$ میں $D=0$ ہو تب عکس سیدھی لکیر ہو گی ورنہ عکس دائرہ ہو گا۔اسی طرح اگر دائرہ $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ میں $D=0$ ہو تب عکس سیدھی لکیر ہو گی ورنہ عکس دائرہ ہو گا۔

سوال 15.25: دکھائیں کہ زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ دائرہ اور منعکس دائرہ عموماً ہم مرکز نہیں ہوں گے۔
جواب: دائرہ $|z-z_0|=r$ کا مرکز $z_0=x_0+iy_0$ ہے۔زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ اس دائرے کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں تیسری قدم پر $|w_0-w|=|w-w_0|$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$\left|\frac{1}{w}-\frac{1}{w_0}\right|=r, \quad \left|\frac{w_0-w}{ww_0}\right|=r, \quad |w-w_0|=r|ww_0|$$

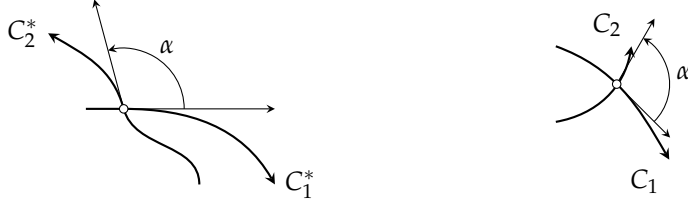
اس دائرے کا مرکز $w_0=\frac{1}{z_0}$ ہے جو اصل دائرے کی مرکز z_0 سے مختلف ہے۔($z_0=1$ کی صورت میں $w_0=1$ ہو گا لہٰذا دائرہ اور عکس ہم مرکز ہوں گے۔)

سوال 15.26: زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ نقطہ $3+i4$ کا عکس $\frac{1}{3+i4}$ جیومیٹریائی طریقے سے دریافت کریں۔

سوال 15.27: زاویائی خطہ $0\le \underline{/z} \le \frac{\pi}{4}$ کا زیر نقش $w=z$ ، $w=iz$ ، $w=-iz$ ، $w=z^2$ ، $w=-z^2$ ، $w=-iz^2$ اور $w=z^3$ عکس دریافت کریں اور انہیں w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.28: زیر نقش $w=\frac{1}{z}$ ، $w=\frac{i}{z}$ ، $w=\frac{1}{z^2}$ اور $w=\frac{i}{z^2}$ سوال 15.27 میں دیے گئے خطے کا عکس تلاش کریں۔

سوال 15.29: ایسا نقش $w=u+iv=f(z)$ دریافت کریں جو آدھی سطح $x\ge 0$ کو خطہ $u\ge 2$ پر عکس کرے اور ساتھ ہی ساتھ نقطہ $z=0$ کو نقطہ $w=2+i$ پر عکس کرے۔
جواب: $w=z+2+i$

سوال 15.30: ایسا نقش $w=u+iv=f(z)$ تلاش کریں جو زاویائی خطہ $0<\underline{/z}<\frac{\pi}{3}$ کو خطہ $u<1$ پر عکس کرتا ہو۔
جواب: $w=iz^3$

شکل 15.10: منحنیات C_1 اور C_2 کا محافظ زاویہ نقش میں عکس بالترتیب C_1^* اور C_2^* ہے۔

15.2 محافظ زاویہ نقش

ہم اب تحلیلی تفاعل کی نقش کی اہم ترین خاصیت یعنی **محافظت زاویہ**[12] پر تبصرہ کرتے ہیں۔

سطح میں ایسا نقش جو سمت بند منحنیات کے درمیان زاویوں کی مقدار اور ان زاویوں کی مثبت سمت برقرار رکھتا ہو **محافظ زاویہ نقش**[13] کہلاتا ہے، یعنی دو سمت بند منحنیات کا زاویہ تقاطع اور اس زاویہ کی مثبت سمت، عکس کی (مطابقتی سمت بن) منحنیات کا زاویہ تقاطع اور اس زاویہ کی مثبت سمت ایک جیسے ہوں گے۔ یہاں دو منحنیات کے مابین زاویہ سے مراد ان کی نقطہ تقاطع پر مماثل کے مابین زاویہ $\alpha\ (0 \le \alpha \le \pi)$ ہے (شکل 15.10)۔

ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ نقش $w = f(z)$ ان تمام نقطوں پر محافظ زاویہ ہے جہاں $f(z)$ تحلیلی ہے، ماسوائے ان نقطوں پر جہاں تفرق $f'(z)$ کی قیمت صفر ہے۔ ایسے نقطہ کو **نقطہ فاصل**[14] کہتے ہیں۔ مثلاً $f(z) = z^2$ کی صورت میں $z = 0$ پر $f'(z) = 2z = 0$ ہے لہٰذا $z = 0$ پر نقش محافظ زاویہ نہیں ہے اور اس نقطہ پر زاویہ دگنا ہوتا ہے (مثال 15.2)۔

اس مقصد کے لئے ہمیں منحنیات اور ان کی عکس پر غور کرنا ہو گا۔ مخلوط سطح z میں منحنی C کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے

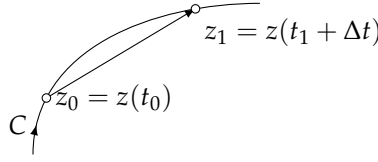
$$z(t) = x(t) + iy(t) \tag{15.10}$$

جہاں t حقیقی مقدار معلوم ہے۔ مثال کے طور پر تفاعل

$$z(t) = r\cos t + ir\sin t$$

---

[12] conformality
[13] conformal
[14] critical point

$z_1 = z(t_1 + \Delta t)$
$z_0 = z(t_0)$
C

شکل 15.11: مساوات 15.11 کی استنباط

دائرہ $|z| = r$ کو ظاہر کرتا ہے جبکہ تفاعل

$$z(t) = t + it^2$$

قطع مکافی $y = x^2$ کو ظاہر کرتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ مساوات 15.10 میں بڑھتے t سے حاصل رخ کو منحنی پر مثبت سمت[15] کہتے ہیں۔ یوں مساوات 15.10 منحنی C پر سمت بندی تعین کرتی ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 15.10 میں $z(t)$ قابل تفرق ہے اور تفرق $\dot{z}(t)$ استمراری اور ہر نقطے پر غیر صفر ہے۔ تب C کے ہر نقطہ پر یکتا مماس پایا جائے گا اور C ہموار منحنی[16] کہلائے گی۔ C پر مثبت سمت کا مماس پر مطابقتی سمت اس مماس پر مثبت سمت کہلاتی ہے اور ایسا مماس سمت بند کہلاتا ہے۔

C پر $z_0 = z(t_0)$ اور $z_1 = z(t_1 + \Delta t)$ نقطوں سے گزرتی وہ تحدیدی سیدھی لکیر جو $\Delta z \to 0$ کرنے سے حاصل ہو، نقطہ z_0 پر C کی مماس کہلاتی ہے (حصہ 10.5 دیکھیں)۔ اب عدد $z_1 - z_0$ کو z_0 سے z_1 تک سمتیہ (شکل 15.11) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے اور $\frac{z_1 - z_0}{\Delta t}$، جہاں $\Delta t > 0$ ہے، کی مطابقتی سمتیہ کی وہی سمت ہو گی جو اس سمتیہ کی ہے۔ یوں درج ذیل کا مطابقتی سمتیہ

$$\dot{z}(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} = \lim_{t \to 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \tag{15.11}$$

نقطہ z_0 پر C کا مماس ہو گا اور اس سمتیہ اور مثبت x محور کے مابین زاویہ $\underline{/\dot{z}(t_0)}$ ہو گا۔

اب ایسے غیر مستقل تحلیلی تفاعل $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ کی نقش پر غور کریں جو اس دائرہ کار میں معین ہو جس میں C پایا جاتا ہو۔ اس نقش میں C کا عکس، سطح w میں منحنی C^* ہو گی یعنی:

$$w(t) = f[z(t)]$$

---

[15] positive sense
[16] smooth curve

$w(t_0)$ پر نقطہ C^* کا مطابقتی نقطہ $z_0 = z(t_0)$ ہے اور $\dot{w}(t_0)$ اس نقطہ پر C^* کی مماسی سمتیہ ہے۔اب زنجیری قاعدہ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{15.12}$$

لہٰذا $f'(z_0) \neq 0$ کی صورت میں ہم دیکھتے ہیں کہ $\dot{w}(t_0) \neq 0$ ہو گا اور $w(t_0)$ پر C^* کا یکتا مماس موجود ہو گا جو مثبت u محور کے ساتھ $\underline{/\dot{w}(t_0)}$ زاویہ بنائے گا۔چونکہ حاصل ضرب کی دلیل جزو ضربی کی دلیلوں کا مجموعہ ہوتا ہے لہٰذا مساوات 15.12 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\underline{/\dot{w}(t_0)} = \underline{/f'(z_0)} + \underline{/\dot{z}(t_0)}$$

یوں زیر نقش نقطہ z_0 پر C کا سمتی مماس زاویہ

$$\underline{/\dot{w}(t_0)} - \underline{/\dot{z}(t_0)} = \underline{/f'(z_0)} \tag{15.13}$$

سے گھوم جائے گا جو C اور C^* کی مماسوں کے مابین زاویہ کے برابر ہے۔چونکہ مساوات 15.13 کا دایاں ہاتھ C کے غیر تابع ہے لہٰذا یہ زاویہ بھی C کی انتخاب کے تابع نہیں ہو گا۔یوں تبادل $w = f(z)$ نقطہ z_0 سے گزرتی ہوئی تمام منحنیات کی مماس کو ایک ہی زاویہ $\underline{/f'(z_0)}$ سے گھومائے گی۔اس طرح نقطہ z_0 سے گزرتی ایسی دو منحنیات جن کی مماس کے مابین ایک مخصوص زاویہ ہو کی عکس کی منحنیات کی مماس کے مابین بھی، نقطہ z_0 کے مطابقتی نقطہ w_0 پر، مقدار اور سمت دونوں میں، یہی مخصوص زاویہ ہو گا۔ اس سے درج ذیل بنیادی نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 15.1: محافظ زاویہ نقش
تحلیلی تفاعل $f(z)$ کا نقش محافظ زاویہ ہے، ماسوائے ان نقطوں پر جہاں تفرق $f'(z)$ صفر کے برابر ہو۔

مثال 15.4: محافظت زاویہ زیر $w = z^2$
نقش $w = z^2$ محافظ زاویہ ہے ماسوائے نقطہ $z = 0$ پر جہاں $w' = 2z = 0$ ہے۔ شکل 15.4 اور شکل 15.6 میں دکھایا گیا ہے کہ عکسی منحنیات ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں ماسوائے $z = 0$ پر جہاں زاویے دگنا ہو جاتے ہیں یعنی اس نقطے پر سیدھے خط $\underline{/z} = c$ کا عکس سیدھا خط $\underline{/w} = 2c$ ہو گا (شکل 15.4)۔ □

مزید تفرق کی تعریف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \left|f'(z_0)\right|$$

یوں نقش $w=f(z)$ چھوٹے قطعات کی لمبائی کو تقریباً $|f'(z_0)|$ گنا بڑھاتا ہے۔ کسی چھوٹے شکل کا عکس تقریباً اصل صورت برقرار رکھے گا۔ چونکہ $f'(z_0)$ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ پر تبدیل ہوتا ہے لہٰذا وسیع شکل کا عکس عموماً اصل سے بہت مختلف ہو گا۔

ہم یہاں بتانا چاہتے ہیں کہ مساوات 14.40 اور کوشی ریمان مساوات سے

$$\left|f'(z)\right|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right| = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{15.14}$$

یعنی

$$\left|f'(z)\right|^2 = \begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \tag{15.15}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں نقش $w=f(z)$ کی حقیقی روپ

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$$

استعمال کرتے ہوئے مقطع، یعقوبی[17] (حصہ 11.3) کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں شرط $f'(z_0)\neq 0$ سے مراد ہے کہ z_0 پر یعقوبی غیر صفر ہے۔ اس شرط کی بنا نقش $w=f(z)$ کو کافی چھوٹی پڑوس میں محدود کرنے سے ایک ایک مطابقتی[18] نقش حاصل ہوتی ہے یعنی ہر انفرادی نقطے کا منفرد عکس پایا جاتا ہے۔ اس حقیقت کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مثال 15.5: نقش $w=z^2$ ماسوائے $z=0$ کے، کافی چھوٹی پڑوس میں ایک ایک مطابقت رکھتا ہے۔ نقطہ $z=0$ کی پڑوس میں یہ نقش ایک ایک مطابقت نہیں رکھتا ہے۔ پوری z سطح یوں w سطح پر نقش ہوتی ہے کہ w سطح کا ہر نقطہ $w\neq 0$ سطح z کی دو نقطوں کا عکس ہوتا ہے۔ مثلاً $z=1$ اور $z=-1$ دونوں $w=1$ پر عکس ہوتے ہیں بلکہ z_1 اور $-z_1$ کا ایک ہی عکس $w=z_1^2$ ہو گا۔ □

---

[17] Jacobian
[18] one to one

محافظ زاویہ نقش کی عملی اہمیت اس حقیقت کی بنا ہے کہ دو حقیقی متغیرات کی ہارمونی تفاعل محافظ زاویہ تبادل کے بعد نئ متغیرات کے لحاظ سے ہارمونی رہتا ہے (مسئلہ 15.2)۔ اس کے دور رس اثرات ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر ہمیں دو بعدی نظریہ مخفی قوہ میں سرحدی مسئلہ حل کرنا ہو یعنی ہمیں دو متغیرات کی لاپلاس مساوات کا حل دائرہ کار D میں درکار ہو جو D کی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ایسے موقع پر عین ممکن ہے کہ ہم ایسا محافظ زاویہ نقش استعمال کر پائیں جو D کو ایک سادہ خطہ D^* ، جیسے آدھی سطح یا دائری قرص، پر عکس کر سکے۔ ہم مساوات لاپلاس کے D^* کے لحاظ سے حل کا اسی نقش کے ذریعہ الٹ حاصل کرتے ہوئے اصل مسئلے کا حل تلاش کر پائیں گے۔ یہ انتہائی طاقتور ترکیب درج ذیل مسئلہ کے تحت ممکن ہے۔

مسئلہ 15.2: **ہارمونی تفاعل اور محافظ زاویہ نقش**
تحلیلی تفاعل $w = f(z)$ کی، ایک ایک مطابقتی، محافظ زاویہ تبادل سے ہارمونی تفاعل $h(x, y)$ ، تبدیل شدہ متغیرات کے لحاظ سے ہارمونی رہتا ہے۔

ثبوت : **پہلا ثبوت۔ جوڑی دار ہارمونی تفاعل کی موجودگی فرض کرتا ہے**
فرض کریں کہ دائرہ کار D میں ہارمونی تفاعل $h(x, y)$ ہے اور D میں $h(x, y)$ کا جوڑی دار[19] ہارمونی تفاعل $g(x, y)$ ہے، نتیجتاً $h + ig$ دائرہ کار D میں $z = x + iy$ کا تحلیلی تفاعل $H(z)$ ہو گا۔ ہم فرض کر چکے ہیں کہ نقش $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ایک ایک مطابقتی اور محافظ زاویہ ہے لہٰذا D کا عکس D^* دائرہ کار ہے؛ ساتھ ہی D میں $f'(z) \neq 0$ ہے اور الٹ تفاعل $z = F(w)$ جو D^* کو واپس D پر عکس کرتا ہو موجود ہے۔ D^* میں $F(w)$ تحلیلی ہے: یقیناً اس کا تفرق درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w} = \frac{1}{\mathrm{d}f/\mathrm{d}z}$$

اس کلیہ کا ثبوت حقیقی احصاء کی طرح ہے۔یوں $H[F(w)]$ دائرہ کار D^* میں w کا تحلیلی تفاعل ہو گا۔اس کا حقیقی جزو $h[x(u, v), y(u, v)]$ ہو گا جو D^* میں u اور v کا ہارمونی تفاعل ہے۔

□

ثبوت : **دوسرا ثبوت۔ بلا جوڑی دار ہارمونی تفاعل**
فرض کریں کہ D میں $h(x, y)$ ہارمونی ہے۔پہلے کی طرح ہم اب بھی $z = x + iy = F(w)$ استعمال

[19] حصہ 14.5 دیکھیں۔ ہم بغیر ثبوت دیے بتانا چاہتے ہیں کہ اگر D سادہ تعلق (تعریف حصہ 11.12) خطہ ہو تب جوڑی دار ہارمونی تفاعل موجود ہو گا۔

کرتے ہوئے $h[x(u,v), y(u,v)]$ حاصل کرتے ہیں۔ہم اپنی آسانی کی خاطر، اس تفاعل، جو u اور v کا تابع ہے، کو دوبارہ h سے ہی ظاہر کرتے ہیں اور دکھاتے ہیں کہ D^* میں یہ ہارمونی ہے جہاں D^* زیر نقش $w = f(z)$ دائرہ کار D کا عکس ہے۔ہم زنجیری قاعدہ بروئے کار لاتے ہیں

$$h_x = h_u u_x + h_v v_x$$

جہاں زیر نوشت میں x اور y تفرق کو ظاہر کرتے ہیں۔ہم زنجیری قاعدہ ایک بار دوبارہ استعمال کرتے ہیں اور ان ارکان کے نیچے خط کھینچتے ہیں جو $h_{xx} + h_{yy}$ مجموعہ حاصل کرتے وقت آپس میں کٹ جائیں گے۔

$$h_{xx} = \underline{h_u u_{xx}} + (h_{uu} u_x + \underline{h_{uv} v_x}) u_x + \underline{h_v v_{xx}} + (\underline{h_{vu} u_x} + h_{vv} v_x) v_x$$

بالکل اسی طرح ہم h_{yy} حاصل کر سکتے ہیں جو درج بالا میں x کی جگہ y اور y کی جگہ x لکھنے سے حاصل ہو گا۔ان دونوں کا مجموعہ $h_{xx} + h_{yy}$ ہمیں درکار ہے۔اب چونکہ $w = u + iv$ تحلیلی ہے لہٰذا مسئلہ 14.3 کے تحت

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

ہو گا اور ساتھ ہی مجموعہ میں $h_{vu} = h_{uv}$ کو

$$u_x v_x + u_y v_y$$

ضرب کرتا ہے جو مساوات کوشی ریمان کے تحت صفر کے برابر ہے۔یوں مجموعہ

$$h_{xx} + h_{yy} = h_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + h_{vv}(v_x^2 + v_y^2)$$

حاصل ہوتا ہے جس کو مساوات کوشی ریمان کی مدد سے

$$(h_{uu} + h_{vv})(u_x^2 + v_x^2)$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 15.14 استعمال کرتے ہوئے

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \left|f'(z)\right|^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\right) \tag{15.16}$$

حاصل ہوتا ہے۔محافظت زاویہ کی وجہ سے $f'(z) \neq 0$ ہے اور ہم فرض کر چکے ہیں کہ D میں بایاں ہاتھ صفر کے برابر ہے لہٰذا قوسین میں بند حصہ D^* میں لازماً صفر کے برابر ہو گا۔

□

نظریہ مخفی قوہ میں محافظ زاویہ نقش کی ترکیب استعمال کرنے میں سب سے مشکل قدم اس نقش کا جاننا ہے جو دیے گئے خطہ کو سادہ خطہ پر نقش کرتا ہو۔اس کے لئے ہمیں تجربہ درکار ہو گا اور ساتھ ہی ساتھ بنیادی تحلیلی تفاعل کی خواص نقش کی گہری سمجھ ضروری ہو گی۔اس ضرورت کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم اہم ترین بنیادی تحلیلی تفاعل پر غور کریں گے۔

سوالات

سوال 15.31: تحلیلی تفاعل کی نقش میں منحنیات c = مستقل = $|z|$ اور c^* = مستقل = $\underline{/z}$ کیوں ایک دوسرے کو $90°$ درجہ پر قطع کرتی ہیں؟
جواب: چونکہ محافظ زاویہ نقش میں زاویے تبدیل نہیں ہوتے ہیں۔

سوال 15.32: ایسا نقطہ جہاں $f'(z) \neq 0$ ہو پر تحلیلی تفاعل $w = u + iv = f(z)$ کی ہم قد منحنیات c = مستقل = u اور c^* = مستقل = v کیوں ایک دوسرے کو $90°$ پر قطع کرتی ہیں؟

سوال 15.33: کیا نقش $w = \bar{z} = x - iy$ زاویوں کی مقدار اور مثبت سمت برقرار رکھتا ہے؟
جواب: نہیں۔مقدار برقرار رہتا ہے لیکن مثبت سمت الٹ ہوتی ہے۔

سوال 15.34 تا سوال 15.39 میں دیے منحنیات کو z سطح $(z = x + iy)$ میں $z = z(t)$ روپ میں لکھیں۔

سوال 15.34: $x^2 + y^2 = 4$
جواب: $z(t) = 2\cos t + i2\sin 2$

سوال 15.35: $y = \frac{1}{x}$
جواب: $z(t) = t + \frac{i}{t}$

سوال 15.36: $y = 3x^2$
جواب: $z(t) = t + i3t^2$

سوال 15.37: $x^2 - y^2 2 = 1$
جواب: $z(t) = \cosh t + i\sinh t$

سوال 15.38: $y = ax + b$
جواب: $z(t) = t + i(at + b)$

سوال 15.39: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$
جواب: $z(t) = -2 + 4\cos t + i(3 + 4\sin t)$

سوال 15.40 تا سوال 15.45 میں ان نقطوں کو تلاش کریں جہاں نقش $w = f(z)$ محافظ زاویہ نہیں ہے۔ $f(z)$ سوال میں دیا گیا ہے۔

سوال 15.40: z^3
جواب: $z = 0$

سوال 15.41: $\cos z$
جواب: $z = n\pi, \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$

سوال 15.42: $z + \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$
جواب: $z = \mp 1$

سوال 15.43: e^{z^2}
جواب: $z = 0$

سوال 15.44: $z^3 - z^2$
جواب: $z = 0, \frac{2}{3}$

سوال 15.45: $az^2 + bz + c$
جواب: $z = -\frac{b}{2a}$

سوال 15.46 تا سوال 15.49 میں درج ذیل تفاعل $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ کے لئے مساوات 15.15 کی تصدیق کریں۔

سوال 15.46: e^z

سوال 15.47: $\sin z$

سوال 15.48: $\cos z$

سوال 15.49: $z^2 - 4z$

سوال 15.50: مسئلہ 15.2 کی دوسری ثبوت میں ہر مساوات کو تفصیلاً لکھیں۔

سوال 15.51: مسئلہ 15.2 کی تصدیق $f(z) = 2z + 1$ ، $h(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ کے لئے کریں۔

15.3 خطی کسری تبادل

خطی کسری تبادل[20] یا **موبیوس تبادل**[21] سے مراد درج ذیل روپ کی تبادل ہے

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0) \tag{15.17}$$

جہاں مستقل a ، b ، c ، d حقیقی یا مخلوط اعداد ہو سکتے ہیں۔شرط $ad - bc \neq 0$ سمجھنے کی خاطر مساوات 15.17 کا تفرق

$$w' = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

لیتے ہیں۔اب $ad - bc \neq 0$ سے مراد $w' \neq 0$ ہے جو محافظ زاویہ نقش دے گا جبکہ $ad - bc = 0$ غیر دلچسپ صورت $w' \equiv 0$ یا $w = \text{مستقل} = c$ دے گا جس پر مزید کوئی بحث نہیں کی جائے گی۔

مساوات 15.17 کی **مخصوص صورتیں** مثلاً مستقیم حرکت

$$w = z + b \tag{15.18}$$

گھومنا اور پھیلاو یا سکڑاو

$$w = az \tag{15.19}$$

[20] linear fractional transformation
[21] Mobius transformation

الٹ جانے کے بعد x محور میں انعکاس

$$w=\frac{1}{z} \tag{15.20}$$

اور خطی تبادل

$$w=az+b \tag{15.21}$$

پر ہم بحث کر چکے ہیں۔

مبسوط مخلوط سطح۔ یہ ایک اہم معاملہ ہے جس کو مساوات 15.17 کی مدد سے سمجھا جا سکتا ہے۔مساوات 15.17 کے تحت $cz+d\neq 0$ کی صورت میں ہر z کا مطابقتی یکتا مخلوط عدد $w=az+b$ ہو گا۔فرض کریں کہ $c\neq 0$ ہے۔تب $z=-\frac{d}{c}$ ، جس کے لئے $cz+d=0$ ہے، کا مطابقتی کوئی عدد w نہیں ہو گا۔اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم w سطح کے ساتھ ایک "غیر مناسب نقطہ" منسلک کریں۔ اس نقطہ کو **لامتناہی پر نقطہ**[22] کہتے ہیں جس کو ∞ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔مخلوط سطح بشمول ∞ کو **مبسوط مخلوط سطح**[23] کہتے ہیں۔لامتناہی پر نقطہ کے بغیر مخلوط سطح کو **متناہی مخلوط سطح**[24] کہتے ہیں۔ہم اب $w=\infty$ کو زیر نقش مساوات 15.17 نقطہ $z=-\frac{d}{c}$ $(d\neq 0)$ کا عکس تصور کرتے ہیں۔اگر مساوات 15.17 میں $c=0$ ہو تب $a\neq 0$ اور $d\neq 0$ (کیوں؟[25]) کی صورت میں $w=\infty$ کو مبسوط مخلوط z سطح کی غیر مناسب نقطہ $z=\infty$ کا عکس تصور کیا جاتا ہے۔

مساوات 15.17 کا الٹ نقش حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات 15.17 کو z کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a} \tag{15.22}$$

جب $c\neq 0$ ہو تب $cw-a=0$ نقطہ $w=\frac{a}{c}$ پر ہو گا، اور ہم $w=\frac{a}{c}$ کو $z=\infty$ کا مطابقتی نقطہ تصور کریں گے۔اس کے برعکس اگر $c=0$ ہو تب $a\neq 0$ ، $d\neq 0$ ہوں گے[26] اور ہم $w=\infty$ کو نقطہ $z=\infty$ کا عکس تصور کریں گے۔اس طرح مساوات 15.17 مبسوط z سطح کی ایک ایک مطابقتی عکس

---

[22] point at infinity
[23] extended complex plane
[24] finite complex plane
[25] اس لئے کہ اگر $c=0$ ہو تب صرف $a\neq 0$ اور $d\neq 0$ کی صورت میں مساوات 15.17 محافظ زاویہ نقش دیتی ہے۔
[26] چونکہ حافظ زاویہ نقش صرف انہیں شرائط کو پورا کرنے سے حاصل ہو گا۔

مبسوط w سطح دے گی؛ ہم کہتے ہیں کہ ہر خطی کسری تبادل مساوات 15.17 مبسوط سطح کو ایک ایک مطابقت کے ساتھ اپنے آپ پر عکس کرتی ہے۔

ہماری موجودہ گفتگو سے درج ذیل کہا جا سکتا ہے۔

عمومی رائے۔ $z = \infty$ کی صورت میں مساوات 15.17 بے معنی صورت $\frac{a\cdot\infty+b}{c\cdot\infty+d}$ اختیار کرتی ہے۔ہم $c \neq 0$ کی صورت میں اس کو $w = \frac{a}{c}$ تصور کرتے ہیں جبکہ $c = 0$ کی صورت میں ہم اس کو $w = \infty$ تصور کرتے ہیں۔

مقررہ نقطہ۔ نقش $w = f(z)$ کے مقررہ نقطہ[27] سے مراد ایسا نقطہ ہے جس کا عکس یہی مخلوط عدد ہو۔یوں مقررہ نقطہ کو درج ذیل مساوات

$$w = f(z) = z$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 15.17 کا مقررہ نقطہ

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

یعنی

$$cz^2 - (a-d)z - d = 0 \tag{15.23}$$

سے

$$z = \frac{a - d \mp \sqrt{(a-d)^2 + 4b}}{2}$$

حاصل ہوں گے البتہ $a = d \neq 0$ ، $b = c$ کی صورت میں درج بالا دو درجی مساوات (نا قابل حل ہو گا اور اس) کے تمام عددی سر صفر ہوں گے، اور مساوات 15.17 مماثل تبادل $w = z$ دے گی۔اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 15.3: مقررہ نقطہ
ایک خطی کسری تبادل، نا کہ مماثل تبادل، کے زیادہ سے زیادہ دو مقررہ نقطے ہوں گے۔ایسا خطی کسری تبادل جس کے تین یا تین سے زائد مقررہ نقطے ہوں لازماً مماثل تبادل ہو گا۔

عملاً اہم مخصوص خطی کسری تبادل اور خطی کسری تبادل کی مزید عمومی خصوصیات پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

[27] fixed point

سوالات

سوال 15.52 تا سوال 15.61 میں دیے نقش کے مقررہ نقطے تلاش کریں۔

سوال 15.52: $w=iz$
جواب: $z=0 \quad z(i-1)=0, \quad iz=z,$

سوال 15.53: $w=iz-3$
جواب: $z=-\frac{3}{2}(1+i)$

سوال 15.54: $w=z^2$
جواب: $z=0,1$

سوال 15.55: $w=(z+1+i)^2$
جواب: $z=-1,-i2$

سوال 15.56: $w=z^3$
جواب: $z=0,\mp 1$

سوال 15.57: $w=-z^3$
جواب: $z=0,\mp i$

سوال 15.58: $w=-iz^2$
جواب: $z=0,i$

سوال 15.59: $w=\frac{2z-1}{z+2}$
جواب: $z=\mp i$

سوال 15.60: $w=\frac{5z+4}{z+5}$
جواب: $z=\mp 2$

سوال 15.61: $w=\frac{i3z-1}{z+i3}$
جواب: $z=\mp i$

سوال 15.62 تا سوال 15.64 میں ایسا نقش تلاش کریں جس کے مقررہ نقطے سوال میں دیے گئے ہیں۔

سوال 15.62: $i,-i$
جواب: $w=\frac{az+b}{a-bz}$ ملتا ہے جس میں $a=0$ پر کرنے سے درکار جواب $w=-\frac{1}{z}$ حاصل ہوتا

ہے۔آپ تسلی کر لیں کہ $b=0$ پر کرنے سے $w=z$ ملتا ہے جو مماثل نقش ہے یعنی ہر نقطہ اس کا مقررہ نقطہ ہے۔

سوال 15.63: $1,-1$
جواب: $w=\frac{az+b}{bz+a}$ ملتا ہے جس میں $a=0$ پر کرنے سے $w=\frac{1}{z}$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 15.64: 1
جواب: $a+b=c+d$ میں $b=c=0,\ a=d=1$ پر کرنے سے $w=z$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 15.65: ایسے تمام نقش تلاش کریں جس کے مقررہ نقطے $z=i,-i$ ہوں۔
جواب: $w=\frac{az+b}{a-bz}$

سوال 15.66: ایسے تمام نقش تلاش کریں جس کے مقررہ نقطے $z=1,-1$ ہوں۔
جواب: $w=\frac{az+b}{bz+a}$

سوال 15.67: ایسا نقش تلاش کریں جس کا متناہی سطح میں کوئی بھی مقررہ نقطہ نہ ہو۔(اشارہ: مساوات 15.23 استعمال کریں۔)
جواب: تمام مستقیم حرکت

15.4 مخصوص خطی کسری تبادل

اس حصے میں چند سادہ دائرہ کار کو دوسرے دائرہ کار پر عکس کرنے کے لئے درکار خطی کسری تبادل

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\qquad (ad-bc\neq 0) \tag{15.24}$$

کے حصول پر غور کیا جائے گا اور مساوات 15.24 کی خصوصیات پر بحث کے طریقوں پر غور کیا جائے گا۔ ایسا درج ذیل کی مدد سے ممکن ہو گا۔

مسئلہ 15.4: دائرے اور سیدھی لکیریں
ہر خطی کسری تبادل مساوات 15.24 z سطح کی تمام دائروں اور سیدھی لکیروں کو w سطح کی تمام دائروں اور سیدھی لکیروں پر عکس کرتا ہے۔

ثبوت: مستقیم حرکت اور گھومنے سے کوئی شکل تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا ثبوت کی ضرورت نہیں ہے، یکساں پھیلاو یا سکڑاو کی صورت میں بھی صاف ظاہر ہے کہ دائرے اور سیدھی لکیریں اپنی شکلیں بر قرار رکھیں گی لہٰذا ثبوت کی ضرورت نہیں ہے۔ نقش $w=\frac{1}{z}$ کو ہم مثال 15.3 میں دیکھ سکے ہیں۔ان تمام کی مرکب کے لئے بھی ایسا ہی ہو گا۔یوں $c\neq 0$ کی صورت میں یہ مساوات 15.24 کے لئے درست ہو گا چونکہ تب اس کو درج ذیل لکھنا ممکن ہو گا

$$w=K\frac{1}{cz+d}+\frac{a}{c}\qquad (K=-\frac{ad-bc}{c}) \tag{15.25}$$

جس میں درج ذیل

$$w_1=cz,\quad w_2=w_1+d,\quad w_3=\frac{1}{w_2},\quad w_4=Kw3$$

پر کرتے ہوئے $w=w_4\frac{a}{c}$ لکھا جا سکتا ہے۔اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ مساوات 15.24 درحقیقت مساوات 15.18 تا مساوات 15.20 میں دیے گئے مخصوص تبادل کا مرکب ہے۔

□

خطی کسری تبادل مساوات 15.24 حقیقتاً صرف تین مستقل، یعنی a ، b ، c ، d میں سے کسی ایک کا باقی تینوں کے ساتھ نسبت، پر منحصر ہے۔اس ضرورت کی کہ، z سطح میں کسی تین منفرد نقطوں کا w سطح میں مخصوص عکس ہوں، سے یکتا خطی کسری تبادل حاصل ہوتا ہے یعنی:

مسئلہ 15.5: تین نقطے جن کا عکس دیا گیا ہو
تین منفرد نقطوں z_1 ، z_2 ، z_3 کو تین منفرد نقطوں w_1 ، w_2 ، w_3 پر صرف اور صرف ایک عدد خطی کسری تبادل $w=f(z)$ کے ذریعہ عکس کیا جا سکتا ہے۔یہ تبادل درج ذیل خفی مساوات دیتی ہے۔

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \tag{15.26}$$

(اگر ان میں سے ایک نقطہ ∞ ہو تب ان دو فرق کا کسر جن میں یہ نقطہ پایا جاتا ہو کی جگہ 1 لکھا جائے گا۔)

ثبوت: مساوات 15.26 کی روپ $F(w)=G(z)$ ہے جہاں F اور G متعلقہ متغیرات کے خطی کسری تبادل ہیں۔اس سے ہم $w=f(z)=F^{-1}[G(z)]$ لکھ سکتے ہیں جہاں F^{-1} سے مراد F

کا الٹ تبادل ہے۔چونکہ خطی کسری تبادل اور خطی کسری تبادلوں کا مرکب بھی خطی کسری تبادل ہوتے ہیں (سوال 15.70) لہٰذا $w=f(z)$ خطی کسری تبادل ہو گا۔مزید مساوات 15.26 سے درج ذیل ملتے ہیں۔

$$F(w_1)=0,\quad F(w_2)=1,\quad F(w_3)=\infty$$
$$G(z_1)=0,\quad G(z_2)=1,\quad G(z_3)=\infty$$

یوں $w_1=f(z_1)$ ، $w_2=f(z_2)$ ، $w_3=f(z_3)$ ہوں گے۔اس سے ایسے تبادل $w=f(z)$ کی موجودگی ثابت ہوتی ہے جو z_1 ، z_2 ، z_3 کو بالترتیب w_1 ، w_2 ، w_3 پر عکس کرتا ہو۔

ہم ثابت کرتے ہیں کہ نقش $w=f(z)$ یکتا ہے۔فرض کریں کہ $w=g(z)$ دوسرا خطی کسری تبادل ہے جو z_1 ، z_2 ، z_3 کو بالترتیب w_1 ، w_2 ، w_3 پر عکس کرتا ہے۔تب اس کا الٹ $g^{-1}(w)$ نقاط w_1 ، w_2 ، w_3 کو بالترتیب z_1 ، z_2 ، z_3 پر عکس کرے گا لہٰذا مرکب تبادل $H=g^{-1}[f(z)]$ نقاط z_1 ، z_2 ، z_3 کو اپنے آپ پر عکس کرے گا۔اس طرح اس کے تین مقررہ نقطے ہوں گے۔یوں مسئلہ 15.3 کے تحت H مماثلی نقش ہو گا لہٰذا $g(z)\equiv f(z)$ ہو گا۔

مسئلے کا آخری جملہ گزشتہ حصے میں عمومی رائے کی بنا ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

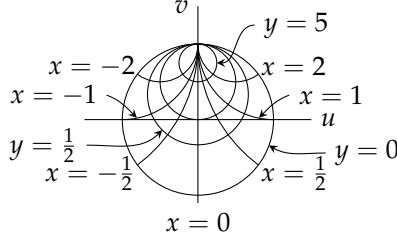
□

نصف سطحوں کا اقراص پر نقش۔ یہ عملاً اہم نقش ہے جو مخفی قوہ کے مسائل کے علاوہ دیگر جگہوں پر کام آتا ہے۔آئیں بالائی نصف سطح $y\geq 0$ کو اکائی قرص $|w|\leq 1$ پر نقش کریں۔ x محور بالائی سطح کی سرحد ہے اور ظاہر ہے کہ اس کو اکائی دائرہ $|z|=1$ پر نقش کرنا ہو گا۔اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ ہم x محور پر تین نقطے منتخب کرتے ہوئے انہیں اکائی دائرے پر اپنی مرضی کے تین نقطوں پر نقش کریں اور مسئلہ 15.5 کا اطلاق کریں۔پس دھیان کرنا ہو گا کہ نصف سطح $y\geq 0$ اکائی دائرے کے اندر نا کہ باہر نقش ہو۔

مثال 15.6: **نصف سطح کا اکائی قرص پر نقش**

ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جو $z_1=-1$ ، $z_2=0$ ، $z_3=1$ کو بالترتیب $w_1=-1$ ، $w_2=-i$ ، $w_3=1$ پر عکس کرتا ہو۔

حل: مساوات 15.26 سے

$$\frac{w-(-1)}{w-1}\cdot\frac{-i-1}{-1-(-1)}=\frac{z-(-1)}{z-1}\cdot\frac{0-1}{0-(-1)}$$

شکل 15.12: خطی کسری نقش برائے مثال 15.6

لکھتے ہوئے درج ذیل نقش حاصل ہوتا ہے۔

$$w=\frac{z-i}{-iz+1} \tag{15.27}$$

آئیں دیکھتے ہیں کہ اس نقش کے مخصوص خصوصیات بغیر زیادہ کوشش دریافت کیے جا سکتا ہے۔سیدھی لکیریں مستقل $=x$ اور مستقل $=y$ کے نقش حاصل کرتے ہیں۔ اب $z=i$ نقطہ $w=0$ کا مطابقتی نقطہ ہے جبکہ $z=\infty$ کا مطابقتی نقطہ $w=i$ ہے۔اب اگر $z=iy$ ہو تب $w=\frac{i(y-1)}{y+1}$ ہو گا؛ یعنی مثبت خیالی محور کا عکس $u=0,\ -1\geq v\geq 1$ ہو گا۔اب چونکہ نقش محافظ زاویہ ہے اور سیدھی لکیروں کو عکس سیدھی لکیریں یا دائرے ہوں گے لہٰذا لکیر مستقل $=y$ کا نقش نقطہ $z=\infty$ سے گزرتا دائرے ہوں گی یعنی $w=i$ سے گزرتے ہوئے دائرے جن کا مرکز v محور پر ہو گا۔ اسی طرح اور انہیں وجوہات کی بنا لکیریں مستقل $=x$ ایسی دائروں پر نقش ہوں گی جو مستقل $=y$ کی عکس کی عمودی ہوں (شکل 15.12)۔ نچلا نصف سطح اکائی دائرہ $|w|=1$ کی باہر ہو گا۔ □

مثال 15.7: نقطہ ∞

ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جو $z_1=0$ ، $z_2=1$ ، $z_3=\infty$ کو بالترتیب $w_1=-1$ ، $w_2=-i$ ، $w_3=1$ پر عکس کرتا ہو۔

حل: مساوات 15.26 سے

$$\frac{w+1}{w-1}\cdot\frac{-i-1}{i+1}=\frac{z-0}{z-\infty}\cdot\frac{1-\infty}{1-0}=\frac{1-\infty}{z-\infty}\cdot\frac{z-0}{1-0}$$

لکھ کر $\frac{1-\infty}{z-\infty}$ کی جگہ 1 پر کرتے ہوئے

$$\frac{w+1}{w-1}\cdot\frac{-i-1}{i+1}=1\cdot\frac{z-0}{1-0}$$

حاصل کرتے ہیں جس سے درج ذیل نقش ملتا ہے۔

$$w = \frac{z-i}{z+i} \tag{15.28}$$

□

نصف سطحات کا نصف سطحات پر نقش۔ عملی اہمیت کا یہ دوسرا نقش ہے جس پر غور کرتے ہیں۔ہم بالائی نصف سطح $y \geq 0$ کو بالائی نصف سطح $v \geq 0$ پر عکس کرتے ہیں۔یوں x محور کو u محور پر نقش کیا جائے گا۔

مثال 15.8: **نصف سطح کا نصف سطح پر نقش**

ایسا خطہ کسری نقش تلاش کریں جو $z_1 = -2$ ، $z_2 = 0$ ، $z_3 = 2$ کو بالترتیب $w_1 = \infty$ ، $w_2 = \frac{1}{4}$ ، $w_3 = \frac{3}{8}$ پر نقش کرے۔

حل: جیسا آپ خود معلوم کر سکتے ہیں درکار نقش درج ذیل ہے۔ x محور کا عکس کیا ہو گا؟

$$w = \frac{z+1}{2z+4} \tag{15.29}$$

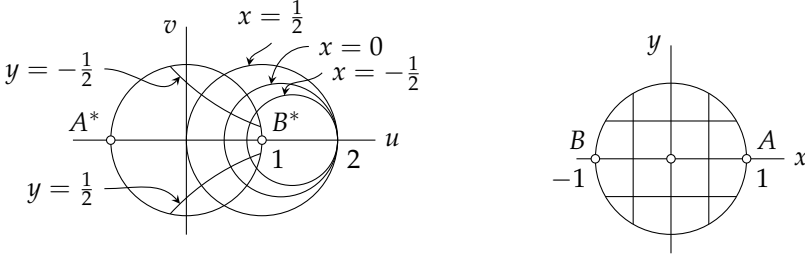
□

اقراص کا اقراص پر نقش۔ عملی استعمال کے نقش کی یہ تیسری قسم ہے۔ہم z سطح میں اکائی قرص کو w سطح میں اکائی قرص پر نقش کر سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا جو نقطہ z_0 کو اکائی قرص کی مرکز $w = 0$ پر نقش کرتا ہے (سوال 15.72)۔

$$w = \frac{z-z_0}{cz-1}, \quad c = \bar{z}_0, \quad |z_0| < 1 \tag{15.30}$$

مثال 15.9: **اکائی قرص کا اکائی قرص پر عکس**

فرض کریں کہ $z_0 = \frac{1}{2}$ ہے۔یوں مساوات 15.30 سے

$$w = \frac{2z-1}{z-2}$$

شکل 15.13: نقش برائے مثال 15.9

حاصل ہو گا۔ حقیقی محور کا نقش حقیقی محور ہی ہے۔ بالخصوص

$$w(-1) = 1, \quad w(0) = \frac{1}{2}, \quad w(1) = -1$$

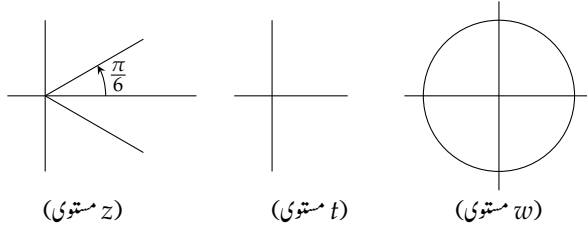
ہیں۔ چونکہ نقش محافظ زاویہ ہے اور سیدھی لکیروں کا نقش سیدھی لکیریں یا دائرے ہوں گی اور $w(\infty) = 2$ ہے لہٰذا $x =$ مستقل لکیروں کے عکس نقطہ $w = 2$ سے گزرتی دائرے ہوں گی جن کے مراکز u محور پر ہوں گے۔ $y =$ مستقل کے نقش متذکرہ بالا کی عمودی ہوں گی (شکل 15.13)۔ □

زاویائی خطہ کا اکائی قرص پر نقش حاصل کرنے کی خاطر خطی کسری نقش کے ساتھ $w = z^n$ روپ کا تبادل استعمال کرنا ہو گا جہاں $n > 1$ ہو گا۔

مثال 15.10: **زاویائی خطہ کا اکائی قرص پر نقش**

زاویائی خطہ $D: -\frac{\pi}{6} \le \angle z \le \frac{\pi}{6}$ کا اکائی قرص $|w| \le 1$ پر نقش تلاش کریں۔

حل: ہم پہلے نقش $t = z^3$ کے ذریعہ دیے گئے زاویائی خطے کو دایاں نصف t سطح پر نقش کرتے ہیں۔ اس کے بعد خطی کسری نقش مثلاً

$$w = i\frac{t-1}{t+1}$$

شکل 15.14: نقش برائے مثال 15.10

پر کرتے ہوئے درکار نقش $t = z^3$ کی مدد سے اس نصف سطح کو اکائی قرص پر نقش کرتے ہیں۔ درج بالا میں

$$w = i\frac{z^3 - 1}{z^3 + 1}$$

حاصل ہوتی ہے (شکل 15.14)۔ □

سوالات

سوال 15.68: نقش $w = \frac{z+i}{iz+4}$ کو مساوات 15.18 تا مساوات 15.20 کے مرکب کے طور پر لکھیں۔

جواب: مساوات 15.25 سے $K = -\frac{5}{i} = i5$ اور $w = \frac{i5}{iz+4} + \frac{1}{i}$ لکھ کر درج ذیل ملتا ہے۔
$w_1 = iz,\ w_2 = w_1 + 4,\ w_3 = \frac{1}{w_2},\ w_4 = i5w_3,\ w = w_4 + \frac{1}{i} = w_4 - i$

سوال 15.69: مسئلہ 15.4 کو $w = az,\ a \neq 0$ کے لئے ثابت کریں۔

سوال 15.70: دکھائیں کہ دو خطی کسری تبادل کا مجموعہ بھی خطی کسری تبادل ہو گا۔

سوال 15.71: مساوات 15.28 میں دیے نقش کو مساوات 15.18 تا مساوات 15.20 کے مرکب کے طور پر لکھیں۔

جواب: $w = -i2\frac{1}{z+i} + 1$

سوال 15.72: مسئلہ 15.5 سے مساوات 15.30 حاصل کریں۔

سوال 15.73: ایسا خطی کسری نقشہ تلاش کریں جو $|z| \le 1$ کو $|w| \le 1$ پر اور نقطہ $z = \frac{i}{4}$ کو $w = 0$ پر نقش کرتا ہو۔ سیدھی لکیریں مستقل $= x$ اور مستقل $= y$ کی عکس کی ترسیم کھینچیں۔
جواب: $w = \frac{4z-i}{-iz-4}$

سوال 15.74: مساوات 15.27 کا الٹ دریافت کریں۔ دکھائیں کہ مساوات 15.27 سیدھی $x =$ مستقل لکیروں کو ایسی دائروں پر نقش کرتا ہے جن کا مرکز $v = 1$ پر ہوتا ہے۔

سوال 15.75 تا سوال 15.84 میں ایسا نقش تلاش کریں جو

سوال 15.75: $z : 0, 1, \infty$ کو بالترتیب $w : \infty, 1, 0$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = \frac{1}{z}$

سوال 15.76: $z : 0, 1, i$ کو بالترتیب $w : 2, 3, 2 + i$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = z + 2$

سوال 15.77: $z : 0, 1, 2$ کو بالترتیب $w : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = \frac{4-z}{2z+4}$

سوال 15.78: $z : -1, 0, 1$ کو بالترتیب $w : 0, 1, \infty$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = \frac{z+1}{1-z}$

سوال 15.79: $z : 0, i, i2$ کو بالترتیب $w : \infty, -1, 1$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = \frac{3z-i4}{z}$

سوال 15.80: $z : 0, 1, 2$ کو بالترتیب $w : -1, -i, 1$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = -\frac{z-1-i}{iz-1-i}$

سوال 15.81: $z : -i, 0, i$ کو بالترتیب $w : \infty, -1, 1$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = \frac{3z-i}{z+i}$

سوال 15.82: $z : -1, 0, i$ کو بالترتیب $w : -1, 1, 1 + i$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w = \frac{z(3+i2)+2+i}{z+2+i}$

سوال 15.83: $z:-1,0,-i$ کو بالترتیب $w:1,0,i$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w=-z$

سوال 15.84: $z:0,1,\infty$ کو بالترتیب $w:\infty,1+i,2$ پر نقش کرتا ہو۔
جواب: $w=\frac{2z-1+i}{z}$

سوال 15.85 تا سوال 15.87 میں ایسے تمام خطی کسری نقش تلاش کریں جن کی خاصیت دی گئی ہے۔

سوال 15.85: $z_1=0$ مقررہ نقطہ ہے۔
جواب: $w=\frac{az}{cz+d}$

سوال 15.86: $z_1=0$ اور $z_2=\infty$ مقررہ نقطے ہیں۔
جواب: z_1 کے لئے حل کرتے ہوئے $b=0$ حاصل ہوتا ہے۔ z_2 کے لئے $\infty=\frac{a\infty}{c\infty+d}$ لکھا جائے گا۔ صفحہ 1113 پر عمومی رائے استعمال کرتے ہوئے $c=0$ چنتے ہوئے $\infty=\infty$ لکھا جائے گا جس سے مزید کوئی معلومات فراہم نہیں ہوتی۔ یوں $b=0$ اور $c=0$ استعمال کرتے ہوئے درکار نقش $w=\frac{az}{d}=a^*z$ ملتا ہے۔ اگر ہم $c\neq 0$ لیتے تب عمومی رائے سے $\frac{a}{c}=\infty$ لکھا جاتا جو $c=0$ دیتا ہے۔

سوال 15.87: x محور کا عکس u محور ہے۔
جواب: تمام چار عددی سر حقیقی ہیں۔ (تمام عددی سر میں یکساں مخلوط جزو ضربی بھی ممکن ہے۔)

سوال 15.88: ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جس کے مقررہ نقطے -1 اور 1 ہوں اور جو 0 کو ip پر نقش کرتا ہو جہاں p حقیقی ہے۔ بتلائیں کہ $p=0$ اور $p-1$ کی صورتوں میں کیسے نقش حاصل ہوں گے۔
جواب: $w=\frac{z+ip}{ipz+1}$ جو $p=0$ کی صورت میں مماثل نقش $w=z$ دیتا ہے جبکہ $p=1$ کی صورت میں $w=\frac{z+i}{iz+1}$ دیتا ہے جو نصف سطح کو اکائی دائرے کے اندر عکس کرتا ہے۔

سوال 15.89: ایسا خطی کسری نقش تلاش کریں جو ربع دوم کو w سطح میں اکائی دائرے کی اندرون پر عکس کرتا ہو۔
جواب: $w=-\frac{z^2+1}{iz^2+1}$

سوال 15.90: ایسا خطی کسری نقش $w=f(z)$ تلاش کریں جو $2\leq y\leq x+1$ کی پٹی کو اکائی قرص $|w|\leq 1$ پر عکس کرتا ہو۔

سوال 15.91: ایسا خطی کسری نقش $w=f(z)$ تلاش کریں جو زاویائی خطہ $0 \le \angle z \le \frac{\pi}{4}$ کو اکائی قرص $|w| \le 1$ پر عکس کرتا ہو۔
جواب: $w_3=\frac{z^4-i}{-iz^4+1}$

15.5 نقش زیر دیگر تفاعل

ہم اب دیگر خصوصی تفاعل کی نقش پر غور کرتے ہیں۔

قوت نمائی تفاعل (حصہ 14.7)

$$w=e^z \tag{15.31}$$

کی تفرق کہیں پر بھی صفر کے برابر نہیں ہوتی ہے لہٰذا یہ تفاعل ہر نقطہ پر محافظ زاویہ ہو گا۔ $w=Re^{i\phi}$ لکھتے ہوئے

$$Re^{i\phi}=e^{x+iy}=e^xe^{iy}$$

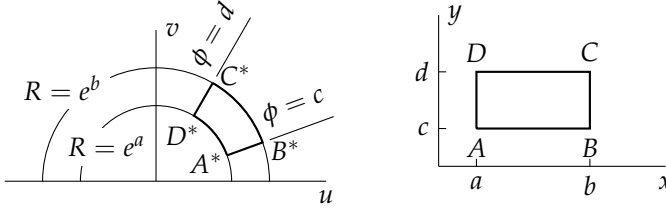
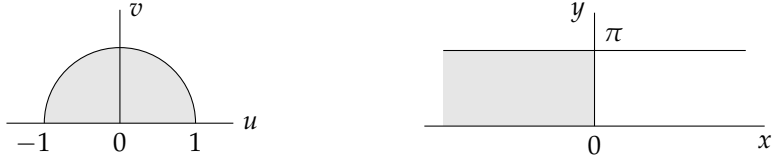
حاصل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 15.31 کو

$$R=e^x, \quad \phi=y \tag{15.32}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ہم دیکھتے ہیں کہ مستقل $x=a=$ لکیروں کا نقش دائرے $R=e^a$ ہوں گے جبکہ $y=c$ کے نقش مبدا سے نکلتی $\phi=c$ لکیریں ہوں گی۔چونکہ تمام z پر $e^z \neq 0$ ہے لہٰذا $w=0$ کسی بھی نقطہ z کا عکس نہیں ہو گا۔مستطیل خطہ مثلاً $a \le x \le b, \; c \le y \le d$ کا عکس خطہ

$$e^a \le R \le e^b, \quad c \le \phi \le d$$

ہو گا (شکل 15.15)۔

بنیادی پٹی $-\pi < y \le \pi$ پوری w سطح (جو منفی حقیقی محور پر کٹی ہوئی ہوئی ہو گی) پر عکس ہو گی۔مزید ہر $y=c$ اور $y=c+2\pi$ لکیروں کے درمیان افقی پٹی پوری w سطح پر عکس ہو گی۔یہ e^z کی دوریت کی بدولت ہے جس کا خیالی دوری عرصہ $i2\pi$ ہے۔

$w = e^z$ شکل 15.15: نقش

$w = e^z$ شکل 15.16: نقش

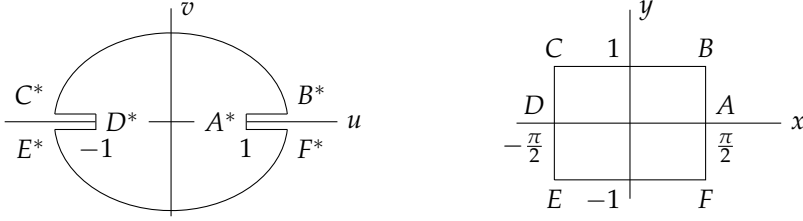
مساوات 15.32 کے تحت، افقی پٹی $0 \le y \le \pi$ بالائی نصف w سطح پر عکس ہوتی ہے۔ سرحد $y = 0$ مثبت u محور پر عکس ہوتی ہے جبکہ لکیر $y = \pi$ منفی u محور پر عکس ہوتی ہے۔ قطع 0 تا $i\pi$ کا عکس نصف دائرہ $|w| = 1, v \ge 0$ ہو گا۔ پٹی کی بائیں نصف $(x \le 0)$ حصے کا عکس $|w| \le 1, v \ge 0$ اور دائیں نصف $(x \ge 0)$ حصہ اس نصف دائرہ $|w| = 1$ کی بیرون پر بالائی نصف w مستوی پر عکس ہو گا (شکل 15.16)۔

چونکہ قوت نمائی تفاعل کا الٹ تعلق **قدرتی لوگارتھم** $w = u + iv = \ln z$ ہے لہٰذا قدرتی لوگارتھم کی محافظ زاویہ نقش کی خواص، متذکرہ بالا میں z اور w سطحوں کی کردار الٹ کرنے سے قوت نمائی تفاعل کی خواص سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔ یوں صدر قیمت $w = \operatorname{Ln} z$، (منفی حقیقی محور پر کٹی ہوئی) z مستوی کو w مستوی کی افقی پٹی $-\pi < v \le \pi$ پر عکس کرتی ہے۔ مزید خواص پر اگلے حصے کے مثال 15.15 میں غور کیا جائے گا۔

سائن تفاعل (حصہ 14.8)

$$w = u + iv = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \tag{15.33}$$

جہاں

$$u = \sin x \cosh y, \quad v = \cos x \sinh y \tag{15.34}$$

شکل 15.17: نقش $w = \sin z$

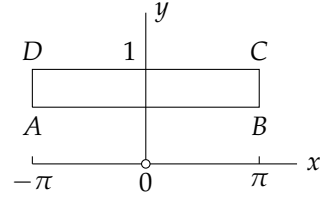
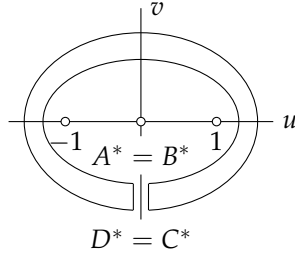
دوری ہیں۔یوں پوری xy مستوی پر مساوات 15.34 ہر گز ایک ایک مطابقتی نہیں ہے۔ہمیں z کو لا متناہی نصف پٹی $S: -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ کے اندر رہنے کا پابند کرنا ہو گا۔چونکہ $f'(z) = \cos z$ نقطہ $z = \mp\frac{\pi}{2}$ پر صفر کے برابر ہے لہٰذا نقش ان دو نقطوں پر محافظ زاویہ نہیں ہو گا۔مساوات 15.34 سے ہم دیکھتے ہیں کہ S کی سرحد u محور میں عکس ہو گی۔ x محور کا قطع $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ محور u کی قطع $-1 \leq u \leq 1$ پر عکس ہو گا، لکیر $x = -\frac{\pi}{2}$ کا عکس $u \leq -1,\ v = 0$ اور لکیر $x = \frac{\pi}{2}$ کا عکس $u \geq 1,\ v = 0$ ہو گا۔قطع $y = c > 0, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ کا عکس بالائی نصف w مستوی کی قطع مکافی

$$u = \cosh c \sin x, \quad v = \sinh c \cos x$$

یعنی

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1 \tag{15.35}$$

پر ہو گا۔قطع $y = -c, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\ (c > 0)$ قطع مکافی مساوات 15.35 کی نچلی نصف حصے پر عکس ہو گی۔قطع مکافی کے ماسکہ جو c کے تابع نہیں ہیں $w = \mp 1$ پر پائے جائیں گے۔یوں c تبدیل کرنے سے ہمیں ہم ماسکہ قطع مکافی حاصل ہوں گے۔مستطیل خطہ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -c < y < c$ یوں قطع مکافی مساوات 15.35 کی اندرون پر عکس ہو گا؛ البتہ دھیان رہے کہ جیسا شکل 15.17 میں دکھایا گیا ہے، مستطیل کی سرحد کا عکس قطع مکافی اور u محور کے دو قطعات ہوں گے (جہاں $c = 1$ ہے)۔مستطیل کی سرحد کی انتصابی حصوں پر نقطوں کے عکس جوڑیوں میں ہم مکان نقطے ہوں گے۔ بالخصوص $B^* = F^*$ اور $C^* = E^*$ ہوں گے۔

مستطیل خطہ $-\pi < x < \pi, c < y < d\ (c > 0)$ کا نقش قطع مکافی جھلی ہو گی جو منفی v محور پر کٹی ہو گی (شکل 15.18)۔سیدھی لکیریں $x = c$ جہاں $-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$ ہے کے نقش ہم ماسکہ قطع زائد ہوں گی جو متذکرہ بالا قطع مکافی کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں گی۔

شکل 15.18: نقش $w = \sin z$

z کی $\frac{\pi}{2}$ اکائیاں دائیں مستقیم حرکت کے بعد سائن تفاعل لینے سے **کوسائن تفاعل**

$$w = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \tag{15.36}$$

کا نقش حاصل ہوتا ہے۔

ہذلولی تفاعل

$$w = \sinh z = -i \sin(iz) \tag{15.37}$$

لکھی جا سکتی ہے۔یوں گھڑی کی سمت میں $\frac{\pi}{2}$ زاویہ گھمانے $t = iz$ کے بعد نقش $p = \sin t$ لے کر اس کو گھڑی کی الٹ سمت $w = -ip$ گھمانے سے درکار ہذلولی نقش حاصل ہوتا ہے۔

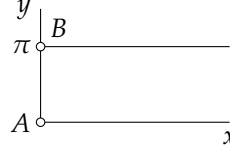
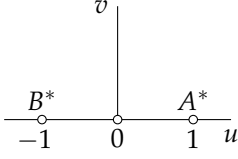
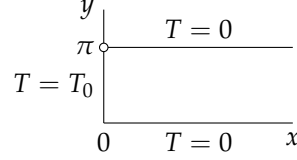
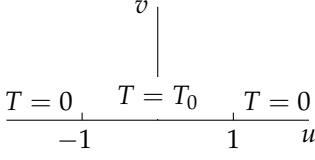
اسی طرح درج ذیل تبادل

$$w = \cosh z = \cos(iz) \tag{15.38}$$

گھمانے $t = iz$ کے بعد نقش $w = \cos t$ کے مترادف ہے۔

مثال 15.11: نصف لامتناہی پٹی کا نصف سطح پر نقش

نصف لامتناہی پٹی $x \geq 0, 0 \leq y \leq \pi$ (شکل 15.19) کا عکس مساوات 15.38 میں دیے گئے نقش کی صورت میں دریافت کریں۔

حل: ہم $w = u + iv$ لیتے ہیں۔چونکہ $\cosh 0 = 1$ کے برابر ہے لہٰذا $z = 0$ کو عکس $w = 1$ ہو گا۔حقیقی مثبت $z = x \geq 0$ کے لئے $\cosh z$ حقیقی ہے جو 1 سے شروع ہو کر، x بڑھانے سے،

شکل 15.19: نقش برائے مثال 15.11

شکل 15.20: سرحدی شرائط برائے مثال 15.12

بتدریج بڑھتا ہے۔ یوں مثبت x محور u محور کے حصہ $1 \geq u$ پر عکس ہوتا ہے۔ خالص خیالی $z = iy$ کے لئے $\cosh iy = \cos y$ ہو گا لہٰذا پٹی کی بائیں سرحد $-1 \geq u \geq 1$ پر عکس ہو گی۔ نقطہ $z = i\pi$ کا عکس

$$w = \cosh i\pi = \cos \pi = -1$$

ہو گا۔ پٹی کی بالائی سرحد پر $y = \pi$ ہے اور چونکہ $\sin \pi = 0$ کے برابر ہے لہٰذا سرحد کا یہ حصہ $u \leq -1$ پر عکس ہو گا۔ یوں پٹی کی سرحد u محور پر عکس ہو گی۔ یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ پٹی کی اندرون بالائی نصف w مستوی پر عکس ہو گی اور کہ یہ نقش ایک ایک مطابقتی ہے۔ □

مثال 15.12: سرحدی شرائط مسئلہ

مثال 15.11 میں دی گئی پٹی میں برقرار حال (وقت پر غیر منحصر) درجہ حرارت $T(x, y)$ پر غور کریں۔ پٹی کی سرحد پر درجہ حرارت درج ذیل ہے۔

$$T = T_0 \quad \text{قطع } 0 \text{ تا } i\pi \text{ پر}$$
$$T = 0 \quad \text{بالائی اور نچلی سرحد پر}$$

حل: حراری مساوات برقرار حال کی صورت میں لاپلاس مساوات (حصہ 13.11)

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

کی صورت اختیار کرتی ہے۔ ہمیں اس مساوات کا ایسا حل درکار ہے جو دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

ہم پٹی کو مساوات 15.38 کی مدد سے بالائی نصف مستوی پر عکس کرتے ہیں۔ چونکہ قطع $0 \le y \le \pi$ کا عکس $-1 \le u \le 1$ ہے لٰہذا سرحدی شرائط کو w مستوی میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (شکل 15.20)۔

$$\begin{aligned} T &= T_0 \quad \text{قطع } -1 \text{ تا } 1 \\ T &= 0 \quad \text{محور کا باقی حصہ} \end{aligned}$$

تحلیلی تفاعل کے حقیقی اور خیالی اجزاء لاپلاس مساوات کے حل ہوتے ہیں۔ ہمیں ایسا ہی تفاعل $T(u,v)$، جو ان سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہو، بالائی نصف w مستوی میں دریافت کرنا ہے۔ ہم درج ذیل تفاعل پر غور کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(w+1) &= \ln|w+1| + i\phi_1, \quad \phi_1 = \underline{/w+1} = \tan^{-1}\frac{v}{u+1} \\ \operatorname{Ln}(w-1) &= \ln|w-1| + i\phi_2, \quad \phi_2 = \underline{/w-1} = \tan^{-1}\frac{v}{u-1} \end{aligned} \tag{15.39}$$

چونکہ $\phi_1(u,v)$ اور $\phi_2(u,v)$ ہارمونی تفاعل ہیں لٰہذا $\phi_2 - \phi_1$ بھی ہارمونی تفاعل ہو گا۔ اگر $w = u$ حقیقی اور -1 سے چھوٹا ہو، تب $\phi_2 - \phi_1 = \pi - \pi = 0$ ہو گا۔ وقفہ $-1 < u < 1$ میں حقیقی $w = u$ کی صورت میں $\phi_2 - \phi_1 = \pi - 0 = \pi$ ہو گا، اور حقیقی $w = u > 1$ کی صورت میں $\phi_2 - \phi_1 = 0 - 0 = 0$ ہو گا۔ یوں بالائی نصف مستوی $v > 0$ میں تفاعل

$$T(u,v) = \frac{T_0}{\pi}(\phi_2 - \phi_1) \tag{15.40}$$

ہارمونی ہو گا اور یہ w سطح میں سرحدی شرائط کو مطمئن کرے گا۔ چونکہ $\tan\phi_1 = \frac{v}{u+1}$ اور $\tan\phi_2 = \frac{v}{u-1}$ ہیں لٰہذا

$$\tan(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\tan\phi_2 - \tan\phi_1}{1 + \tan\phi_1 \tan\phi_2} = \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 15.40 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$T(u,v) = \frac{T_0}{\pi}\tan^{-1}\frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \tag{15.41}$$

تفاعل $w = \cosh z$ اس پٹی کو نصف مستوی $v \geq 0$ پر نقش کرتا ہے اور ہمارے پاس

$$w = u + iv = \cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

ہے جس کے حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ علیحدہ کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$u = \cosh x \cos y, \quad v = \sinh x \sin y$$

ان u اور v کے ساتھ یوں مساوات 15.41 میں

$$u^2 + v^2 - 1 = \cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y - 1 = \sinh^2 x - \sin^2 y$$

ہو گا۔مساوات 15.41 میں درج بالا تعلق اور v کا تعلق پر کرنے سے

$$T^*(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{2 \sinh x \sin y}{\sinh^2 x - \sin^2 y}$$

ملتا ہے۔ اب شمار کنندہ اور نسب نما بالترتیب تفاعل $(\sinh x + i \sin y)^2$ کے حقیقی اور خیالی حصے ہیں لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$T^*(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \underline{/[(\sinh x + i \sin y)^2]} = \frac{2T_0}{\pi} \underline{/(\sinh x + i \sin y)}$$

یوں ہمارے مسئلے کا حل

$$T^*(x, y) = \frac{2T_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{\sin y}{\sinh x} \tag{15.42}$$

ہو گا۔یہ تفاعل ہماری پٹی کی اندرون میں ہارمونی ہے (مسئلہ 15.2) اور یہ دی گئی سرحدی شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔یقیناً $y = 0$ یا $y = \pi$ پر $T^* = 0$ ہے اور $x = 0$ پر $T^* = T_0$ ہے۔ ہم حرارت خط (جن پر یکساں حرارت ہو گی) درج ذیل خطوط ہوں گے۔

$$\frac{\sin y}{\sinh x} = \text{مستقل}$$

□

مثال 15.12 میں تفاعل $w = u(x, y) + iy(x, y)$ ، جو نصف مستوی کو دیے گئے خطے پر نقش کرتا ہے، کی استعمال سے حقیقی مخفی قوہ $T(u, v)$ کا عکس حقیقی مخفی قوہ $T^*(x, y)$ حاصل کیا گیا۔مخلوط مخفی قوہ کی استعمال سے

کئی مسئلوں کا حل نسبتاً آسان ہو جاتا ہے، یعنی ایسا مخلوط تحلیلی تفاعل $F(w)$ لینے سے کہ حقیقی تفاعل $T(u,v)$ ، تفاعل $F(w)$ کا حقیقی یا خیالی جزو ہو اور T کی بجائے F کا تبادل لیا جائے۔ظاہر ہے کہ T کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل (حصہ 14.5 کا آخر دیکھیں) حاصل کرنے سے مخلوط مخفی قوہ F حاصل ہو گا۔ آئیں "مخلوط مخفی قوہ کی ترکیب" گزشتہ مثال کی صورت میں دیکھیں۔مخلوط مخفی قوہ پر باب 20 میں غور کیا جائے گا۔

مثال 15.13: مخلوط مخفی قوہ
مساوات 15.39 سے ہم دیکھتے ہیں کہ مثال 15.12 میں حقیقی مخفی قوہ (مساوات 15.40)

$$T(u,v)=\frac{T_0}{\pi}(\phi_2-\phi_1)$$

در حقیقت مخلوط مخفی قوہ

$$T(w)=\frac{T_0}{\pi}[\operatorname{Ln}(w-1)-\operatorname{Ln}(w+1)]=\frac{T_0}{\pi}\operatorname{Ln}\frac{w-1}{w+1} \tag{15.43}$$

کا خیالی جزو ہے۔مثال 15.12 میں تفاعل نقش

$$w=\cosh z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})$$

ہے جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 15.43 میں

$$\frac{w-1}{w+1}=\frac{\cosh z-1}{\cosh z+1}=\frac{e^z+e^{-z}-2}{e^z+e^{-z}+2}=\frac{(e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}})^2}{(e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}})^2}=\tanh^2\frac{z}{2}$$

ہو گا۔اس کو مساوات 15.43 میں پر کرتے ہوئے اور $F(w(z))$ کو $F^*(z)$ سے اور $\tanh\frac{z}{2}$ کو H سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$F^*(z)=\frac{T_0}{\pi}\operatorname{Ln}\tanh^2\frac{z}{2}=\frac{2T_0}{\pi}\operatorname{Ln}\tanh\frac{z}{2}=\frac{2T_0}{\pi}\operatorname{Ln}h \tag{15.44}$$

مساوات 14.88 کی استعمال سے اس کو

$$F^*(z)=\frac{2T_0}{\pi}\operatorname{Ln}H=\frac{2T_0}{\pi}\Big(\ln|H|+i\tan^{-1}\frac{H_{\text{خیالی}}}{H_{\text{حقیقی}}}\Big) \tag{15.45}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $F^*(z)$ مثال 15.12 میں مخلوط مخفی قوہ ہے اور اس کا خیالی جزو ہمارے مسئلے کا حل ہے۔ H کو قوت نمائی تفاعل کی مدد سے لکھ کر

$$H=\frac{\sinh x+i\sin y}{\cosh x+\cos y} \tag{15.46}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو مساوات 15.45 کے ساتھ ملا کر

$$T^*(x,y) = F^*(z)_{\text{خیالی}} = \frac{2T_0}{\pi}\tan^{-1}\frac{\sin y}{\sinh x}$$

حاصل ہوتا ہے جو مثال 15.12 کی نتیجہ کے عین مطابق ہے۔

مزید مساوات 15.46 سے

$$|H|^2 = \frac{\sinh^2 x + \sin^2 y}{(\cosh x + \cos y)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 15.45 میں ہم دیکھتے ہیں کہ $F^*(z)$ کا حقیقی جزو درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔

$$S^*(x,y) = F^*(z)_{\text{حقیقی}} = \frac{T_0}{\pi}\ln\frac{\sinh^2 x + \sin^2 y}{(\cosh x + \cos y)^2}$$

منحنیات $S^* =$ مستقل ہم حرارت خطوط $T^* =$ مستقل کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتی ہیں اور یوں حرارت انہیں خطوط کی راہ پر بہاو کرتی ہے۔مخلوط مخفی قوہ کی استعمال سے ہمیں دونوں خطوط حاصل ہوتے ہیں۔ □

سوالات

سوال 15.92 تا سوال 15.97 میں زیر نقش $w = e^z$ دیے گئے تفاعل کا عکس تلاش کریں۔عکس کو w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.92: $-1 < x < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
جواب: $w = |w|\,\underline{/w} = e^{x+iy}$ سے $|\underline{/w}| < \frac{\pi}{2}, \quad e^{-1} < |w| < e^1$ ملتا ہے۔

سوال 15.93: $0 < x < 4, \quad 0 < y < \pi$
جواب: $e^0 < |w| < e^4, \quad 0 < \underline{/w} < \pi$

سوال 15.94: $0 < x < 1, \quad -1 < y < 1$
جواب: $e^0 < |w| < e^1, \quad -1 < \underline{/w} < 1$

سوال 15.95: $-\pi < x < 2, \quad -\frac{\pi}{2} < y < 3$
جواب: $e^{-\pi} < |w| < e^2, \quad -\frac{\pi}{2} < \underline{/w} < 3$

سوال 15.96: $-2 \le x \le 3, \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

جواب: $e^{-2} \le \lvert w \rvert \le e^3, \quad -\frac{\pi}{2} \le \underline{/w} \le \frac{\pi}{2}$

سوال 15.97: $0 < x \le 2.2, \quad -\frac{\pi}{2} \le y < \pi$

جواب: $e^0 < \lvert w \rvert \le e^{2.2}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \underline{/w} < \pi$

سوال 15.98: ایسا تحلیلی تفاعل تلاش کریں جو ربع اول میں ایسا خطہ جس کی سرحد مثبت x ، مثبت y اور قطع زائد $xy = \frac{\pi}{2}$ ہو کو بالائی نصف سطح پر عکس کرتا ہو۔ اشارہ۔ پہلے اس خطے کو افقی پٹی پر عکس کریں۔

جواب: $t = z^2$ اس خطے کو $\pi > t > 0$ خیالی پٹی پر عکس کرتی ہے اور $w = e^t$ اس پٹی کو بالائی نصف مستوی پر عکس کرتی ہے لہٰذا درکار تفاعل $w = e^{z^2}$ ہے۔

سوال 15.99 تا سوال 15.102 میں دیے تفاعل کا عکس زیر نقش $w = \sin z$ تلاش کریں۔ عکس کو w سطح پر دکھائیں۔

سوال 15.99: $0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < 2$

سوال 15.100: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad 1 < y < 2$

جواب: بالائی نصف مستوی میں وہ خطہ کس کی سرحد درج ذیل قطع مکافی ہوں۔

$$\frac{u^2}{\cosh^2 2} + \frac{v^2}{\sinh^2 2} = 1, \quad \frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1$$

سوال 15.101: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < 1$

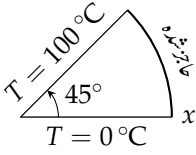
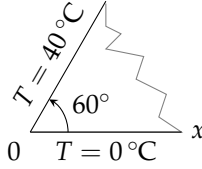
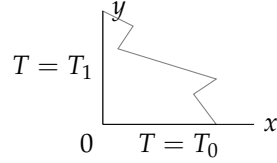
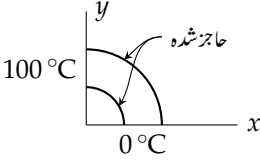
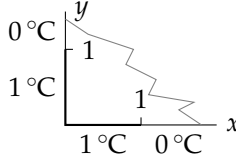
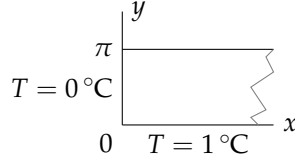
سوال 15.102: $0 < x < 2\pi, \quad 1 < y < 2$

جواب: بالائی نصف مستوی میں وہ چھلا جس کی سرحد درج ذیل قطع مکافی ہوں اور جو مثبت خیالی محور پر کٹا ہوا ہو۔

$$\frac{u^2}{\cosh^2 2} + \frac{v^2}{\sinh^2 2} = 1, \quad \frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1$$

سوال 15.103: زیر نقش $w = \sin z$ سیدھی لکیریں $x = 0, \mp\frac{\pi}{6}, \mp\frac{\pi}{3}, \mp\frac{\pi}{2}$ کا عکس تلاش کریں اور انہیں w مستوی پر دکھائیں۔

جواب: $x = 0 : u = 0, \quad x = \mp\frac{\pi}{6} : 4u^2 - \frac{4}{3}v^2 = 1$

شکل 15.21: شکل برائے سوال 15.105

شکل 15.22: دھات کی تختی برائے سوال 15.106-الف تا سوال 15.106-ث

سوال 15.104: نقش $w = \cosh z$ کو نقش $w = \sin z$ ، گھومنے اور مستقیم حرکت کی صورت میں لکھیں۔

جواب: $\cosh z = \cos(iz) = \sin(iz + \frac{\pi}{2})$

سوال 15.105: دکھائیں کہ نقش $w = \operatorname{Ln} \frac{z-1}{z+1}$ بالائی نصف مستوی کو افقی پٹی $0 \le$ خیالی $w \le \pi$ پر عکس کرتا ہے (شکل 15.21)۔

سوال 15.106 تا سوال 15.111 میں دھات کی پتلی تختی دکھائی گئی ہے جس کی دونوں سطحیں حاجز شدہ ہیں جبکہ کنارے دیے گئے درجہ حرارت پر رکھے گئے ہیں۔ برقرار حال درجہ حرارت $T(x,y)$ تلاش کریں۔

سوال 15.106: شکل 15.22-الف

جواب: $T = T_0 + \frac{1}{\pi}(T_1 - T_0)\tan^{-1}\frac{2xy}{x^2-y^2} = T_0 + \frac{2}{\pi}(T_1 - T_0)\tan^{-1}\frac{y}{x}$

سوال 15.107: شکل 15.22-ب

سوال 15.108: شکل 15.22-پ
جواب: $T=\frac{100}{\pi/4}\tan^{-1}\frac{y}{x}$

سوال 15.109: شکل 15.22-ت

سوال 15.110: شکل 15.22-ٹ
جواب: $T=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2-1}$

سوال 15.111: شکل 15.22-ث

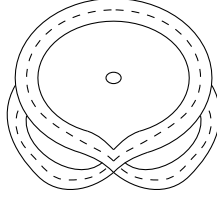
15.6 ریمان سطحیں

ہم نقش

$$w=u+iv=z^2 \tag{15.47}$$

پر غور کرتے ہیں (حصہ 15.1)۔ یہ نقش محافظ زاویہ ہے ماسوائے نقطہ $z=0$ پر جہاں $w'=2z$ صفر کے برابر ہے۔ یہ نقش نقطہ $z=0$ پر زاویہ دگنا کرتا ہے۔ z مستوی کا دایاں نصف (بشمول مثبت y محور)، منفی u محور پر کٹے ہوئے، پوری w مستوی پر ایک ایک مطابقت کے ساتھ عکس ہوتا ہے۔اسی طرح z مستوی کا بایاں نصف (بشمول منفی y محور) کٹے ہوئے w مستوی پر عکس ہو گا۔

چونکہ ہر $w\neq 0$ نقطہ کے ٹھیک دو مطابقتی z نقطے پائے جاتے ہیں لہٰذا پوری z مستوی کے لحاظ سے یہ نقش ایک ایک مطابقتی نہیں ہے۔یوں اگر ایسا ایک نقطہ z_1 ہو تب دوسرا نقطہ $-z_1$ ہو گا۔مثال کے طور پر $z=i$ اور $z=-i$ دونوں کا مطابقتی نقطہ $w=-1$ ہے۔یوں پوری z مستوی کا عکس w مستوی کو دو مرتبہ ڈھانپتا ہے۔ہم کہتے ہیں کہ پوری z مستوی "دوہرا ڈھانپا" w مستوی پر عکس ہوتا ہے۔ہم اپنی سوچ و فکر کو درکار سہارا درج ذیل طریقہ سے دیتے ہیں۔

ہم پوری z مستوی کا w مستوی پر دو مرتبہ عکس کے دونوں حصوں کو ایک دوسرے کے اوپر یوں رکھتے ہیں کہ دایاں نصف z مستوی کا عکس اوپر اور بایاں نصف z مستوی کا عکس نیچے ہو۔ہم دائیں نصف z مستوی کو

شکل 15.23: ریمان سطح اور تقسیمی نقطہ

D اور بائیں نصف z مستوی کو B سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں z مستوی پر چلتے ہوئے D سے B جانب جانے سے مطابقتی نقطہ عکس بالائی سے نچلی چادر پر منتقل ہو گا۔اسی لئے ہم دونوں چادروں کو کٹے ہوئے مقام پر آپس میں جوڑتے ہیں۔دونوں مبدا ایک ہی نقطہ پر جڑتے ہیں۔یوں **ریمان سطح**[28] حاصل ہوتی ہے جسے شکل 15.23 میں دکھایا گیا ہے۔ ریمان سطح پر ہر نقطہ $w \neq 0$ ، منطبق مقام پر، دو مرتبہ ظاہر ہو گا جبکہ مبدا صرف ایک مرتبہ نظر آئے گا۔تفاعل $w = z^2$ اب پوری z سطح کو اس ریمان سطح پر، ایک ایک مطابقت سے، عکس کرتا ہے، اور یہ نقش محافظ زاویہ ہے ماسوائے $w = 0$ یعنی **تقسیمی نقطہ**[29] پر جہاں $w' = 0$ ہے (شکل 15.23)۔ ایسا تقسیمی نقطہ جو دو چادروں کو ملاتا ہو یک رتبی کہلاتا ہے۔ n چادروں کو ملانے والا تقسیمی نقطہ $n-1$ **رتبی** کہلائے گا۔

ہم اب دوہرا قیمت تعلق

$$w = \sqrt{z} \tag{15.48}$$

پر غور کرتے ہیں۔ہر $z = 0$ کے مطابقتی دو w قیمتیں پائی جائیں گی جن میں سے ایک **صدر قیمت** ہو گی۔اگر ہم z مستوی کی جگہ متذکرہ بالا دو چادری ریمان سطح لیں تب ہر مخلوط عدد $z \neq 0$ منطبق مقامات پر دو مرتبہ ظاہر کیا جائے گا۔ہم ان میں سے ایک نقطہ کو صدر قیمت کا مطابقتی نقطہ تصور کرتے ہیں (مثلاً بالائی چادر میں نقطہ) اور دوسرے نقطہ کو دوسری قیمت کا مطابقتی نقطہ تصور کرتے ہیں۔یوں مساوات 15.48 کا تعلق، واحد قیمت تعلق بن جاتا ہے یعنی مساوات 15.48 ریمان سطح پر نقطوں کا تفاعل ہو گا، اور یوں سطح پر z کی کسی بھی استمراری حرکت کا w مستوی پر عکس کا مطابقتی استمراری حرکت پایا جائے گا۔یہ تفاعل صدر قیمت کی مطابقتی چادر کو w مستوی کی دائیں نصف حصے پر عکس کرتا ہے جبکہ دوسری چادر کو w مستوی کی بائیں نصف پر عکس کرتا ہے۔

آئیں چند اہم مثال دیکھیں۔

[28] Riemann surface
[29] branch point

مثال 15.14: $\sqrt[n]{z}$ کی ریمان سطح

درج ذیل تعلق کے لئے ہمیں n چادر کی ریمان سطح درکار ہو گی جس کا $z = 0$ پر $n-1$ رتبی تقسیمی نقطہ پایا جائے گا۔

$$\sqrt[n]{z} \qquad n = 3, 2, \cdots \tag{15.49}$$

ان میں سے ایک چادر صدر قیمت کی مطابقتی چادر ہو گی جبکہ باقی $n-1$ چادر باقی $n-1$ قیمتوں کے مطابقتی ہوں گے۔ □

مثال 15.15: قدرتی لوگارتھم کی ریمان سطح

ہر $z \neq 0$ کے لئے درج ذیل تعلق لامتناہی قیمتی ہے۔

$$w = \ln z = \operatorname{Ln} z + i2n\pi \qquad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots, \quad z \neq 0) \tag{15.50}$$

یوں مساوات 15.50 لامتناہی تعداد کی چادروں پر مشتمل ریمان سطح پر تفاعل ہو گا۔ تفاعل $w = \operatorname{Ln} z$ ان میں سے ایک چادر کا مطابقتی ہے۔ اس چادر پر z کی دلیل θ کا سعت $-\pi < \theta \le \pi$ ہو گا (حصہ 14.9)۔ منفی حقیقی محور چادر کو کاٹ کر جوڑ کی بالائی کنارے کو اگلی چادر کی نچلے کنارے کے ساتھ منسلک کیا جائے گا جو سعت $\pi < \theta \le 3\pi$ کا مطابقتی یعنی تفاعل $w = \operatorname{Ln} z + i2\pi$ کا مطابقتی ہو گا۔ اس طرح مساوات 15.50 میں n کی ہر قیمت کا، ان لامتناہی چادروں میں سے، واحد ایک مطابقتی چادر پایا جائے گا۔ تفاعل $w = \operatorname{Ln} z$ مطابقتی چادر کو w سطح میں افقی پٹی $-pi < v \le \pi$ پر عکس کرتا ہے۔ اگلی چادر پڑوسی پٹی $\pi < v \le 3\pi$ پر عکس ہو گی، وغیرہ وغیرہ۔ یوں تفاعل $w = \ln z$ مطابقتی ریمان سطح کی تمام چادروں کو پوری w مستوی پر، ایک ایک مطابقت سے، عکس کرتا ہے۔ □

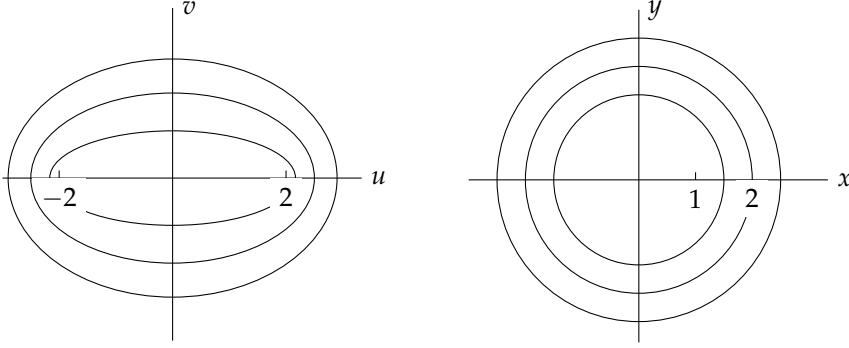
مثال 15.16: ہوائی پترا

آئیں درج ذیل نقش پر غور کرتے ہیں جو ہوائی حرکیات[30] کے لئے انتہائی اہم ہے (نیچے تفصیل دی گئی ہے)۔

$$w = z + \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0) \tag{15.51}$$

چونکہ

$$w' = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{(z+1)(z-1)}{z^2}$$

[30] aerodynamics

شکل 15.24: شکل برائے مثال 15.16

کے برابر ہے لہٰذا یہ نقش محافظ زاویہ ہے، ماسوائے نقطہ $z = 1$ اور نقطہ $z = -1$ پر جہاں $w' = 0$ ہے۔ یہ نقطے بالترتیب $w = 2$ اور $w = -2$ کے مطابقتی نقطے ہیں۔ مساوات 15.51 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$z = \frac{w}{2} \mp \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1} = \frac{w}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(w+2)(w-2)} \tag{15.52}$$

اس طرح $w = 2$ اور $w = -2$ تفاعل $z = z(w)$ کے یک رتبی تقسیمی نقطے ہیں۔ کسی بھی $w\,(\neq 2, \neq -2)$ قیمت کے مطابقتی دو z قیمتیں ہوں گی لہٰذا مساوات 15.51 مستوی z کو دو چادر کی ریمان سطح پر، ایک ایک مطابقت سے، عکس کرتی ہے اور یہ دو چادر $w = -2$ تا $w = 2$ آپس میں صلیبی جڑی ہیں (شکل 15.24)۔ ہم $z = re^{i\theta}$ لیتے ہوئے مستقل $= r$ اور مستقل $= \theta$ کے عکس تلاش کرتے ہیں۔ مساوات 15.51 سے

$$w = u + iv = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

حاصل ہو گا جس کے حقیقی اور خیالی اجزاء علیحدہ علیحدہ کرتے ہوئے

$$u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \quad v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \tag{15.53}$$

ملتا ہے جن سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \qquad a = r + \frac{1}{r}, \quad b = \left|r - \frac{1}{r}\right|$$

یوں مستقل $= r$ دائروں کا عکس قطع مکافی ہوں گے جن کی صدر محور u اور v ہوں گی اور ان کی لمبائیاں بالترتیب $2a$ اور $2b$ ہوں گی۔ چونکہ $a^2 - b^2 = 4$ متغیر r کا تابع نہیں ہے لہٰذا یہ قطع مکافی ہم ماسکہ ہوں گی اور اس کے ماسکہ $w = -2$ اور $w = 2$ پر ہوں گے۔اکائی دائرہ $r = 1$ کا عکس $w = -2$ تا $w = 2$ قطع ہو گا۔ہر $r \neq 1$ کی صورت میں رداس r اور رداس $\frac{1}{r}$ کے دائرے w مستوی میں ریمان سطح کی دو چادروں پر ہم مقام (ایک جیسے) قطع مکافی پر عکس ہوں گے۔یوں اکائی دائرہ $|z| = 1$ کی اندرون ایک چادر پر اور اس کی بیرون دوسری چادر پر ہو گی۔

مزید مساوات 15.53 سے

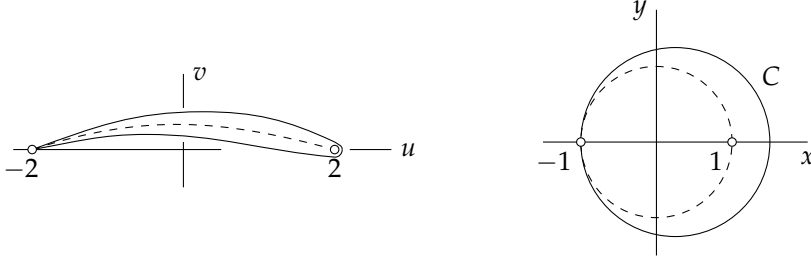
$$\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = -4 \tag{15.54}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں سیدھی لکیریں مستقل $= \theta$ متذکرہ بالا قطع مکافی کی قائمہ الزاویہ، قطع زائد پر عکس ہوں گی۔ حقیقی محور یعنی مبدا سے نکلتی سیدھی لکیریں $\theta = 0$ اور $\theta = \pi$ کا عکس حقیقی محور پر $w = 2$ سے $w = \infty$ کے راستے $w = -2$ تک ہو گا۔ y محور کا عکس v محور پر ہو گا۔مبدا سے نکلتی کوئی اور سیدھی لکیروں کی جوڑی $\theta = \theta_0$ اور $\theta = \theta_0 + \pi$ ایک ہی قطع زائد کی دو شاخوں پر عکس ہوں گی۔

متذکرہ بالا قطع مکافی کی بیرون تقسیمی نقطہ سے پاک ہے اور z مستوی میں یہ یا تو دائرے کی اندرون اور یا اس کی بیرون کا مطابقتی خطہ ہو گا؛ یہ اس ریمان سطح پر منحصر ہے جس پر یہ خطہ پایا جاتا ہو۔بالخصوص (جیسا ہم ذکر کر چکے ہیں) پوری w مستوی اکائی دائرہ $|z| = 1$ کی اندرون یا بیرون کا مطابقتی ہو گا۔

نقش مساوات 15.51 موزوں دائروں کو ہوائی پترا[31] میں عکس کرتا ہے جس کے پچھلے کنارے کی دھار تیز اور اندرونی زاویہ صفر ہوتا ہے۔ ان ہوائی پترا کو ژکوسکی ہوائی پترا[32] کہتے[33] ہیں۔ چونکہ تیز دھار والی ہوائی پتری درکار ہوتی ہے لہٰذا وہ دائرہ جو $z = \mp 1$ میں سے ایک نقطہ سے گزرتا ہو کا عکس ہمیں چاہیے ہے۔ ان نقطوں پر نقش غیر محافظ ہے۔ آئیں ہم دائرہ C منتخب کرتے ہیں جو $z = -1$ سے گزرتا ہے اور اس دائرے کی رداس اتنا چنتے ہیں کہ نقطہ $z = 1$ دائرے کے اندر ہو۔جیومیٹری کی مدد سے z اور $\frac{1}{z}$ سمتیات کا سمتی مجموعہ لینے سے یہ عکس با آسانی حاصل ہو گا (جہاں $\frac{1}{z}$ کو z سے حاصل کرنا حصہ 15.1 میں دکھایا گیا ہے)۔حاصل عکس کو شکل 15.25 میں دکھایا گیا ہے $\square$

---

[31] aerofoil
[32] Joukowski aerofoil
[33] روسی ریاضی دان [1847-1921] نکولائے یگوروچ ژکوسکی

شکل 15.25: ژکوسکی ہوائی پترا

سوالات

سوال 15.112: $w = \sqrt{z}$ لیں۔نقطہ z اکائی دائرے کے گرد دو مرتبہ گھومتا ہے۔اس نقطے کی عکس کی راہ تلاش کریں۔ابتدائی نقطہ $z = 1$ لیں۔
جواب: نقطہ w اکائی دائرہ $|w| = 1$ کے گرد ایک مرتبہ گھومے گا۔

سوال 15.113: دکھائیں کہ $\sqrt[3]{z}$ کی ریمان سطح تین چادروں پر مشتمل ہے جس کا دو رتبی تقسیمی نقطہ $z = 0$ ہے۔ نقطہ z اکائی دائرے کے گرد تین مرتبہ گھومتا ہے۔یہ نقطہ $z = 1$ سے ابتدا کرتا ہے۔اس کے عکس کی راہ تلاش کریں۔

سوال 15.114: $\sqrt[4]{z}$ اور $\sqrt[5]{z}$ کی ریمان سطحوں پر بھی سوال 15.113 کی طرح تبصرہ کریں۔
جواب: بالترتیب 4 اور 5 چادریں۔تقسیمی نقطہ $z = 0$ پر ہے۔

سوال 15.115: $\sqrt[4]{z}$ اور $\sqrt[5]{z}$ کی شکل 15.23 کی طرح ریمان سطحوں کا خاکہ بنائیں جن میں تقسیمی نقطوں کی وضاحت ہو۔

سوال 15.116: زیر نقش $w = z + \frac{1}{z}$ جھلی $1 < |z| < 2$ ، $\frac{1}{2} < |z| < 1$ اور $3 > |z| > 2$ کے عکس تلاش کریں۔
جواب: اندرون قطع مکافی $\frac{u^2}{(5/2)^2} + \frac{v^2}{(3/2)^2} = 1$ ، دوسری چادر پر اسی قطع مکافی کی اندرون، اس قطع مکافی اور قطع مکافی $\frac{u^2}{(10/3)^2} + \frac{v^2}{(8/3)^2} = 1$ کے درمیان جھلی۔

سوال 15.117: زیر نقش $w=\ln z$ نقطہ z اکائی دائرے کے گرد کئی مرتبہ چکر کاٹتا ہے۔اس نقطے کے عکس کی راہ تلاش کریں۔

سوال 15.118: دکھائیں کہ نقش $w=\sqrt{(z-1)(z-4)}$ کی ریمان سطح دو چادروں پر مشتمل ہے جس کے تقسیمی نقطے $z=1$ اور $z=4$ ہیں۔مزید دکھائیں کہ ان چادروں کو 1 تا 4 لکیر پر کاٹ کر صلیبی جوڑا جائے گا۔اشارہ۔ قطبی محدد $z-1=r_1e^{i\theta_1}$ اور $z-4=r_2e^{i\theta_2}$ استعمال کریں۔

سوال 15.119: دکھائیں کہ نقش $w=\sqrt{(1-z^2)(4-z^2)}$ کی ریمان سطح دو چادروں پر مشتمل ہے جس کے چار تقسیمی نقطے ہیں۔مزید دکھائیں کہ ان چادروں کو x محور پر لکیر $-2\le x\le -1$ اور لکیر $1\le x\le 2$ پر کاٹ کر صلیبی جوڑا جائے گا۔

سوال 15.120 تا سوال 15.131 میں دیے تفاعل کی ریمان سطحوں کے تقسیمی نقطے تلاش کریں اور چادروں کی تعداد دریافت کریں۔

سوال 15.120: $w=i\sqrt{z}$
جواب: دو چادر، تقسیمی نقطہ $z=0$ پر ہے۔

سوال 15.121: $w=\sqrt{z-i}$

سوال 15.122: $w=\sqrt[3]{z-i}$
جواب: تین چادر، دو رتبی تقسیمی نقطہ $z=i$ پر ہے۔

سوال 15.123: $w=\sqrt[3]{2z+i3}$

سوال 15.124: $w=\sqrt{z^2+1}$
جواب: دو چادر، تقسیمی نقطہ $\mp i$ پر ہے۔

سوال 15.125: $w=\sqrt{z(z-1)(z+1)}$

سوال 15.126: $w=\sqrt{(z-a)(z-b)},\quad a\neq b$
جواب: دو چادر، تقسیمی نقطے a اور b پر ہیں۔

سوال 15.127: $w = 1 + z + \sqrt{z}$

سوال 15.128: $w = \ln(z - a)$

جواب: چادروں کی تعداد لا متناہی ہے، تقسیمی نقطہ a پر ہے۔

سوال 15.129: $w = e^{\sqrt{z}}$

سوال 15.130: $w = \sqrt{e^z}$

جواب: دو چادر جو آپس میں جڑے نہیں ہیں۔یوں کوئی تقسیمی نقطہ نہیں پایا جائے گا۔در حقیقت $\sqrt{e^z}$ دو علیحدہ علیحدہ تفاعل $e^{\frac{z}{2}}$ اور $-e^{\frac{z}{2}}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

سوال 15.131: $w = \sqrt{\sqrt[3]{z} - 1}$

باب16

مخلوط تکملات

مخلوط تکملات دو وجوہات کی بنا اہم ہیں۔ عملی وجہ یہ ہے کہ حقیقی تکملات حل کرنے کی تراکیب سے کئی حقیقی تکملات حل کرنا ناممکن ہے جبکہ ان کو مخلوط تکملات کی ترکیب سے حل کیا جا سکتا ہے۔دوسری وجہ نظریاتی ہے۔ جہاں مخلوط تکملات کی ترکیب سے تحلیلی تفاعل کی چند بنیادی خصوصیات دریافت ہوتی ہیں (بالخصوص بلند رتبی تفرق کی موجودگی) جن کا ثبوت تکمل استعمال کیے بغیر انتہائی مشکل ہو گا۔یہ صورت حال حقیقی اور مخلوط احصاء میں بنیادی فرق کی نشاندہی کرتی ہے۔

اس باب میں ہم پہلے مخلوط تکملات کی تعریف پیش کرتے ہیں۔سب سے بنیادی نتیجہ کوشی مخلوط تکمل کا مسئلہ حاصل ہو گا جس سے سے کوشی تکمل کی کلیات حاصل ہوں گی جو بہت اہم ہیں۔ ہم ثابت کریں گے کہ اگر کوئی تفاعل تحلیلی ہو تب اس کے ہر رتبہ کے تفرق موجود ہوں گے۔اس نقطہ نظر سے مخلوط تحلیلی تفاعل حقیقی متغیر کی حقیقی تفاعل سے زیادہ سادہ رویہ رکھتے ہیں۔

16.1 مخلوط مستوی میں خطی تکمل

حقیقی احصاء کی طرح ہم قطعی تکمل اور غیر قطعی تکمل میں تمیز کرتے ہیں۔ایک غیر قطعی تکمل ایسا تفاعل ہوتا ہے جس کا تفرق خطے میں دیا گیا تحلیلی تفاعل ہو گا۔تفاعل کی تفرق کو الٹ لکھتے ہوئے ہم کئی غیر قطعی تکمل دریافت کر سکتے ہیں۔

آئیں اب مخلوط تفاعل $f(z)$ ، جہاں $z = x + iy$ ہے، کی قطعی تکمل یا خطی تکمل کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ہم دیکھیں گے کہ حقیقی قطعی تکمل کی تصور کو وسعت دیتے ہوئے مخلوط قطعی تکمل کا تصور پیدا ہوتا ہے۔یوں موجودہ بحث عین حصہ 11.1 کی طرح ہو گی۔قطعی تکمل کی صورت میں حقیقی محور پر کوئی وقفہ تکمل کی راہ ہو گی۔مخلوط قطعی تکمل کی صورت میں ہم مخلوط مستوی پر کسی منحنی[1] پر چلتے ہوئے تکمل حاصل کریں گے۔

فرض کریں کہ مخلوط z مستوی میں C ایک ہموار منحنی (حصہ 15.2) ہے۔تب ہم C کو درج ذیل روپ میں لکھ سکتے ہیں

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (a \le t \le b) \tag{16.1}$$

جہاں تمام t کے لئے $z(t)$ کا استمراری تفرق $\dot{z}(t) \neq 0$ پایا جاتا ہے، اور یوں C قابل تصحیح (حصہ 10.4) ہو گی جس کا ہر نقطہ پر یکتا مماس ہو گا۔آپ کو یاد ہو گا کہ C پر مثبت رخ سے مراد t کی بڑھتی قیمت کا مطابقتی رخ ہے۔

فرض کریں کہ $f(z)$ ایک استمراری تفاعل ہے جو (کم از کم) C کی ہر نقطہ پر معین ہے۔ہم مساوات 16.1 میں دیے گئے وقفہ $a \le t \le b$ کو درج ذیل ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں

$$t_0(=a), t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n(=b)$$

جہاں $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ ہے۔اس کے مطابق C کے ٹکڑے (شکل 16.1)

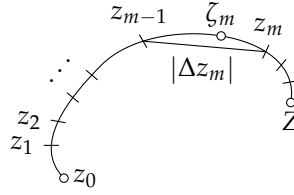
$$z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n() = Z$$

پائے جاتے ہیں جہاں $z_j = z(t_j)$ ہے۔ہم C کے ہر ٹکڑے پر کوئی اختیاری نقطہ منتخب کرتے ہیں، مثلاً ہم z_0 اور z_1 کے درمیان نقطہ ζ_1 منتخب کرتے ہیں (یعنی $\zeta_1 = z(t)$ جہاں $t_0 \le t \le t_1$ ہے) اور z_1 اور z_2 کے درمیان نقطہ ζ_2 منتخب کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ہم اب مجموعہ

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m)\Delta z_m \tag{16.2}$$

لیتے ہیں جہاں

$$\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$$

[1] در حقیقت منحنی کے کسی حصے یا قوس پر تکمل لیا جائے گا۔اپنی آسانی کی خاطر ہم "منحنی" کی اصطلاح کو پوری منحنی کے لئے اور منحنی کے چھوٹے حصہ کے لئے بھی استعمال کریں گے۔

شکل 16.1: مخلوط خطی تکمل

ہے۔ہم ایسے مجموعے $n = 2, 3, \cdots$ کے لئے بلا منصوبہ حاصل کرتے ہیں پس اتنا دھیان رکھتے ہیں کہ جب n لامتناہی کے قریب پہنچے تب $|\Delta z_m|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر کے قریب پہنچتی ہو۔یوں ہمیں مخلوط قیمتوں کا سلسلہ $S_2, S_3, \cdots$ ملتا ہے۔اس سلسلے کی حد، راہ C پر $f(z)$ کا **خطی تکمل**[2] (یا صرف تکمل) کہلاتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \tag{16.3}$$

منحنی C کو تکمل کی راہ کہتے ہیں۔

ہم درج ذیل پوری بحث میں فرض کرتے ہیں کہ مخلوط خطی تکمل کی تمام راہ **ٹکڑوں میں** ہموار ہیں یعنی ہر راہ محدود تعداد کی ہموار منحنیات پر مشتمل ہے۔

ہمارے مفروضوں کی مد نظر خطی تکمل مساوات 16.3 موجود ہو گا، بلکہ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ لکھتے ہوئے اور

$$\zeta_m = \xi_m + i\eta_m \quad \text{اور} \quad \Delta z_m = \Delta x_m + i\Delta y_m$$

لیتے ہوئے مساوات 16.2 کو

$$S_n = \sum (u + iv)(\Delta x_m + i\Delta y_m) \tag{16.4}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $u = u(\zeta_m, \xi_m)$ اور $v = v(\zeta_m, \xi_m)$ ہیں اور ہم m کو 1 تا n لیتے ہوئے مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔ہم اب S_n کو چار مجموعوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔

$$S_n = \sum u\Delta x_m - \sum v\Delta y_m + i[\sum u\Delta y_m + \sum v\Delta x_m]$$

---

[2] line integral

یہ مجموعے حقیقی ہیں۔ چونکہ f استمراری ہے لٰہذا u اور v بھی استمراری ہوں گے۔ یوں اگر ہم n کی قیمت کو متذکرہ بالا طریقے سے بڑھا کر لامتناہی کے قریب کریں تب Δx_m اور Δy_m کی زیادہ سے زیادہ قیمت صفر کے قریب ہو گی اور دائیں ہاتھ ہر مجموعہ حقیقی تکمل کی صورت اختیار کرے گا:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_C u\,\mathrm{d}x - \int\limits_C v\,\mathrm{d}y + i\Big[\int\limits_C u\,\mathrm{d}y + \int\limits_C v\,\mathrm{d}x\Big] \tag{16.5}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ خطی تکمل مساوات 16.3 موجود ہو گا اور اس تکمل کی قیمت پر راہ ٹکڑے کرنے کی ترکیب اور ہر ٹکڑے کے بیچ نقطہ ζ_m کی انتخاب کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔

مزید، حصہ 11.2 کی طرح، منحنی C کی مساوات 16.1 استعمال کرتے ہوئے ہم ان میں سے ہر حقیقی تکمل کو قطعی تکمل میں تبدیل کر سکتے ہیں:

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_a^b u\dot{x}\,\mathrm{d}t - \int\limits_a^b v\dot{y}\,\mathrm{d}t + i\Big[\int\limits_a^b u\dot{y}\,\mathrm{d}t + \int\limits_a^b v\dot{x}\,\mathrm{d}t\Big] \tag{16.6}$$

جہاں $u = u[x(t), y(t)]$ ، $v = v[x(t), y(t)]$ ہیں جبکہ t کے ساتھ تفرق کو نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

ہم اس کو عموماً

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y})\,\mathrm{d}t$$

یا مختصراً

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_a^b f[z(t)]\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t \tag{16.7}$$

لکھتے ہیں۔

آئیں چند سادہ مثالیں دیکھیں۔

مثال 16.1: اکائی دائرے پر $\frac{1}{z}$ کا تکمل
اکائی دائرہ C پر گھڑی کی الٹ رخ $z=1$ سے شروع کر کے ایک چکر لگاتے ہوئے $f(z)=\frac{1}{z}$ کا تکمل حاصل کریں۔ہم C کو درج ذیل روپ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$z(t)=\cos t+i\sin t \qquad (0\le t\le 2\pi) \tag{16.8}$$

یوں

$$\dot{z}(t)=-\sin t+i\cos t$$

ہو گا لہٰذا مساوات 16.7 کے تحت درکار تکمل

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos t+i\sin t}(-\sin t+i\cos t)\,\mathrm{d}t=i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=i2\pi$$

ہو گا۔یہ بنیادی نتیجہ ہے جو ہم بار بار استعمال کریں گے۔

ظاہر ہے کہ ہم مساوات 16.8 کو مختصراً

$$z(t)=e^{it} \qquad (0\le t\le 2\pi) \tag{16.9}$$

لکھ سکتے ہیں۔یوں تفرق لیتے ہوئے

$$\dot{z}(t)=ie^{it}, \quad \mathrm{d}z=ie^{it}\,\mathrm{d}t$$

لکھ کر یہی نتیجہ

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}}ie^{it}\,\mathrm{d}t=i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=i2\pi \tag{16.10}$$

دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ □

مثال 16.2: غیر تحلیلی تفاعل کا تکمل
سیدھی راہ C_1 پر $z_0=0$ تا $z=1+i$ تفاعل x = حقیقی $f(z)=z$ کا تکمل تلاش کریں (شکل 16.2-الف)۔
اس راہ کو درج ذیل روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$z(t)=x(t)+iy(t)=(1+i)t \qquad (0\le t\le 1)$$

یوں

$$f[z(t)] = z_{\text{حقیقی}} = x(t) = t, \quad \mathrm{d}z = (1+i)\,\mathrm{d}t$$

ہو گا جس سے ہم تکمل حاصل کرتے ہیں:

$$\int_{C_1} z_{\text{حقیقی}}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 t(1+i)\,\mathrm{d}t = (1+i)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+i)$$

آئیں اب حقیقی محور پر 0 تا 1 چل کر، یہاں سے خیالی محور کے متوازی چلتے ہوئے $1+i$ تک اسی تفاعل $f(z) = z_{\text{حقیقی}} = x$ کا تکمل حاصل کرتے ہیں (شکل 16.2-الف میں راہ C_2)۔ ہم اس راہ کے پہلے حصے کو

$$z = z(t) = t \qquad (0 \le t \le 1)$$

اور دوسرے حصے کو

$$z(t) = 1 + i(t-1) \qquad (1 \le t \le 2)$$

لکھ سکتے ہیں۔یوں پوری راہ وقفہ $0 \le t \le 2$ کی مطابقتی ہو گی۔پہلے حصے پر $z_{\text{حقیقی}} = t, \mathrm{d}z = \mathrm{d}t$ اور دوسرے حصے پر $z_{\text{حقیقی}} = 1, \mathrm{d}z = i\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔یوں پورا تکمل دو ٹکڑوں میں حاصل ہو گا:

$$\int_{C_2} \mathrm{d}z = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 i\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + i$$

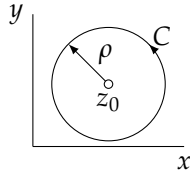
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ راہ کے دوسرے حصے کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے

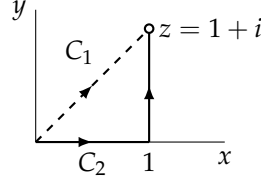
$$z(t) = 1 + it \qquad (0 \le t \le 1)$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے تکمل کے حدود 0 اور 1 ہوں گے اور تکمل کی قیمت وہی رہے گی۔

اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر تحلیلی تفاعل کے تکمل کی قیمت نا صرف راہ کی آخری حدود بلکہ راہ کی جیومیٹریائی شکل پر بھی منحصر ہوتی ہے۔ □

مثال 16.3: عدد صحیح طاقت کے تکمل

مان لیں کہ $f(z) = (z-z_0)^m$ ہے جہاں m عدد صحیح اور z_0 مستقل ہیں۔گھڑی کی الٹ رخ رداس ρ

(الف) مثال 16.2 میں تکمل کی راہ

(ب) مثال 16.3 میں تکمل کی راہ

شکل 16.2: تکملات کی راہ

کے دائرہ C پر تکمل حاصل کریں۔دائرے کا مرکز z_0 ہے (شکل 16.2-ب)۔
ہم C کو

$$z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i \sin t) = z_0 + \rho e^{it} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

لکھ سکتے ہیں۔یوں

$$(z - z_0)^m = \rho^m e^{imt}, \quad \mathrm{d}z = i\rho e^{it}\,\mathrm{d}t$$

ہو گا لہٰذا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C (z - z_0)^m \,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i\rho e^{it}\,\mathrm{d}t = i\rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\,\mathrm{d}t$$

$m = -1$ کی صورت مثال 16.1 میں دیکھی گئی ہے جبکہ $m \neq -1$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا (مساوات 14.71 دیکھیں):

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} = \left[\frac{e^{i(m+1)t}}{i(m+1)}\right]_0^{2\pi} = 0 \qquad (m \neq -1, \text{عدد صحیح})$$

یوں تکمل کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C (z - z_0)^m \,\mathrm{d}z = \begin{cases} i2\pi & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1, \text{عدد صحیح}) \end{cases} \tag{16.11}$$

□

مثال 16.4: **تکمل کی تعریف کی عملی استعمال**
مان لیں کہ $f(z) = k =$ مستقل ہے جبکہ ابتدائی نقطہ z_0 اور اختتامی نقطہ Z کے درمیان C کوئی راہ

ہے۔اس صورت میں ہم تکمل کی تعریف، یعنی مساوات 16.2 میں دیے گئے مجموعہ S_n کی حد، استعمال کرتے ہیں۔یوں

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} k\Delta z_m = k[(z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots + (Z - z_{n-1})] = k(Z - z_0)$$

ہو گا جس سے تکمل کی قیمت درج ذیل حاصل ہو گی۔

$$\int_C k \,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} S_n = k(Z - z_0)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ اس تکمل کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں z_0 اور Z پر منحصر ہے نا ان نقطوں کے مابین راہ پر۔بالخصوص اگر راہ C بند ہو تب $Z = z_0$ ہو گا لہٰذا تکمل کی قیمت صفر ہو گی۔ □

مثال 16.5: تکمل کی تعریف کی دوسری مثال

فرض کریں کہ $f(z) = z$ ہے جبکہ ابتدائی نقطہ z_0 اور اختتامی نقطہ Z کے مابین C کوئی راہ ہے۔ہم دوبارہ مساوات 16.2 استعمال کرتے ہیں۔ $\zeta_m = z_m$ لیتے ہوئے

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} z_m \Delta z_m = z_1(z_1 - z_0) + z_2(z_2 - z_1) + \cdots + Z(Z - z_{n-1})$$

حاصل ہو گا۔اسی طرح $\zeta_m = z_{m-1}$ لیتے ہوئے

$$S_n^* = \sum_{m=1}^{n} z_{m-1}\Delta z_m = z_0(z_1 - z_0) + z_1(z_2 - z_1) + \cdots + z_{n-1}(Z - z_{n-1})$$

حاصل ہو گا۔ان دونوں کو جمع کرتے ہوئے $S_n + S_n^* = Z^2 - z_0^2$ ملتا ہے۔یوں

$$\lim_{n\to\infty}(S_n + S_n^*) = 2\int_{z_0}^{Z} z \,\mathrm{d}z = Z^2 - z_0^2$$

ہو گا جس سے ان نقطوں کے مابین ہر راہ پر تکمل کی قیمت

$$\int_{z_0}^{Z} z \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}(Z^2 - z_0^2)$$

حاصل ہوتی ہے۔ بالخصوص اگر C بند راہ ہو تب $Z = z_0$ ہو گا لہٰذا

$$\oint_C z \, \mathrm{d}z = 0 \tag{16.12}$$

ہو گا۔ یہی نتیجہ مسئلہ 11.1 سے مساوات 16.6 میں دیے گئے کلیہ کی مدد سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ □

سوالات

سوال 16.1 تا سوال 16.6 میں A تا B قطع کو $z = z(t)$ روپ میں لکھیں۔

سوال 16.1: $A: z = 0, \quad B: z = 2 - i3$
جواب: $(2 - i3)t, \quad 0 \le t \le 1$

سوال 16.2: $A: z = 0, \quad B: z = 1 + i$
جواب: $(1 + i)t, \quad 0 \le t \le 1$

سوال 16.3: $A: z = 1 - i, \quad B: z = -1 + i$
جواب: $1 - i + (-1 + i)t, \quad 0 \le t \le 2$

سوال 16.4: $A: z = -2 - i, \quad B: z = 0$
جواب: $-2 - i + (2 + i)t, \quad 0 \le t \le 1$

سوال 16.5: $A: z = i3, \quad B: z = 3$
جواب: $i3 + (1 - i)t, \quad 0 \le t \le 3$

سوال 16.6: $A: z = 3i, \quad B: z = -2i$
جواب: $i3 - it, \quad 0 \le t \le 5$

سوال 16.7 تا سوال 16.15 میں دی گئی منحنیات کو $z = z(t)$ روپ میں لکھیں۔

سوال 16.7: $|z - 2 + i3| = 5$
جواب: $z = 2 - i3 + 5e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال 16.8: $y = x, \quad (0,0)$ تا $(4,4)$
جواب: $z = (1 + i)t, \quad 0 \le t \le 4$

سوال 16.9: $y = x^2, \quad (0,0)$ تا $(3,9)$
جواب: $z = t + it^2, \quad 0 \le t \le 3$

سوال 16.10: $x^2 + 4y^2 = 4$
جواب: $z = 2\cos t + i\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال 16.11: $4x^2 + 9y^2 = 36$
جواب: $z = 3\cos t + i2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال 16.12: $4(x-2)^2 + 9(y+3)^2 = 36$
جواب: $z = (2 + 3\cos t) + i(-3 + 2\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال 16.13: $y = \sqrt{x}, \quad (1,1)$ تا $(9,3)$
جواب: $z = t + i\sqrt{t}, \quad 1 \le t \le 9$ یا $z = t^2 + it, \quad 1 \le t \le 3$

سوال 16.14: $y = \frac{1}{x}, \quad (1,1)$ تا $(5, \frac{1}{5})$
جواب: $z = t + \frac{i}{t}, \quad 1 \le t \le 5$

سوال 16.15: $y = 5 + 2x - 3x^2, \quad (0,5)$ تا $(2,-3)$
جواب: $z = t + i(5 + 2t - 3t^2), \quad 0 \le t \le 2$

سوال 16.16 تا سوال 16.21 میں دیے تفاعل کن منحنیات کو ظاہر کرتے ہیں۔

سوال 16.16: $-1 + (2+i)t, \quad 0 \le t \le 1$
جواب: سیدھی لکیر $x - 2y + 1 = 0$ پر -1 تا $1 + i$

سوال 16.17: $i + t + i2t^2, \quad -2 \le t \le 1$
جواب: منحنی $y = 2x^2 + 1$ پر $(-2 + i9)$ تا $(1 + i3)$

سوال 16.18: $2 - i3 + 5e^{it}, \quad 0 \le t \le \pi$
جواب: بالائی نصف دائرہ $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$

سوال 16.19: $1 + 2e^{it}, \quad -\pi \le t \le 0$
جواب: نچلا نصف دائرہ $(x-1)^2 + y^2 = 4$

سوال 16.20: $t + i2t^3, \quad -1 \le t \le 0$
جواب: منحنی $y = 2x^3$ پر $(-1, -i2)$ تا مبدا

سوال 16.21: $i - t + it^3, \quad 0 \le t \le 3$
جواب: منحنی $y = 1 - x^3$ پر i تا $(-3 + 28i)$

سوال 16.22 تا سوال 16.25 میں z^2 کا تکمل دی گئی قطع پر تلاش کریں۔

سوال 16.22: 0 تا $i3$
جواب: $-i9$

سوال 16.23: 0 تا $3 + i3$
جواب: $-18 + i18$

سوال 16.24: $1 + i$ تا $2 - i$
جواب: $\frac{1}{3}(4 - i13)$

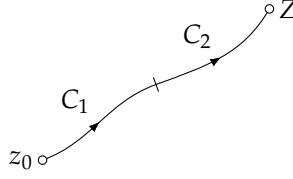
سوال 16.25: $-1 + i$ تا $1 - i$
جواب: $-\frac{4}{3}(1 + i)$

سوال 16.26: تفاعل z^2 کا، گھڑی کی الٹ رخ، تکون کے گرد ایک مرتبہ تکمل حاصل کریں۔ تکون کے کونے 0 ، 1 اور i ہیں۔
جواب: 0

سوال 16.27: $z + \frac{1}{z}$ کا اکائی رداس کے گرد گھڑی کی رخ تکمل تلاش کریں۔
جواب: $-i2\pi$

سوال 16.28: z کا 1 سے انتصابی $1 + i$ تک اور یہاں سے افقی $-1 + i$ تک تکمل تلاش کریں۔
جواب: $-\frac{1}{2} - i$

سوال 16.29: $az + b$ کا 0 تا $2 + i3$ قطع پر تکمل تلاش کریں۔
جواب: $2b - 2.5a + i(3b + 6a)$

سوال 16.30: تکمل $\int_C (z-1)^{-1}\,\mathrm{d}z$ کو گھڑی کی رخ $C : |z - 1| = 2$ پر تلاش کریں۔ یہی تکمل گھڑی کی الٹ رخ تلاش کریں۔
جواب: گھڑی کی الٹ رخ $i2\pi$ جبکہ گھڑی کی رخ $-i2\pi$ ہے۔

شکل 16.3: تکمل کی راہ کے ٹکڑے

سوال 16.31: تکمل $\int_C z \, dz$ حقیقی گھڑی کی الٹ رخ دائرہ $|z| = r$ کے گرد حاصل کریں۔
جواب: $i\pi r^2$

سوال 16.32: تکمل $\int_C |z| \, dz$ کو $A : z = -i$ تا $B : z = i$ (الف) قطع AB پر تلاش کریں، (ب) بائیں نصف مستوی میں اکائی دائرہ پر تلاش کریں، (پ) دائیں نصف مستوی میں اکائی دائرہ پر تلاش کریں۔
جواب: (الف) i ، (ب) $i2$ ، (پ) $i2$

16.2 مخلوط خطی تکمل کی خواص

مجموعہ کی حد، مخلوط خطی تکمل کی تعریف ہے۔اس سے درج ذیل خواص اخذ ہوتے ہیں۔

اگر ہم راہ C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2 میں تقسیم کریں (شکل 16.3) تب درج ذیل ہو گا:

$$\int_C f(z) \, dz = \int_{C_1} f(z) \, dz + \int_{C_2} f(z) \, dz \tag{16.13}$$

اگر ہم تکمل لیتے ہوئے راہ پر الٹ رخ چلیں تب تکمل کی قیمت منفی اکائی سے ضرب ہو گی

$$\int_{z_0}^{Z} f(z) \, dz = -\int_{Z}^{z_0} f(z) \, dz \tag{16.14}$$

جہاں z_0 اور Z راہ C کے سر ہیں؛ بائیں ہاتھ تکمل کو z_0 تا Z حاصل کیا گیا ہے جبکہ دائیں ہاتھ تکمل کو Z تا z_0 حاصل کیا گیا ہے۔

دو یا دو سے زیادہ تفاعل کے مجموعہ کا تکمل جزو در جزو حاصل کیا جا سکتا ہے، اور مشترک مستقل جزو ضربی کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے، یعنی:

$$\int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)] \, \mathrm{d}z = k_1 \int_C f_1(z) \, \mathrm{d}z + k_2 \int_C f_2(z) \, \mathrm{d}z \tag{16.15}$$

ہمیں مخلوط خطی تکمل کی مطلق قیمت کا تخمینہ بار بار درکار ہو گا جس کی حصول کا بنیادی کلیہ درج ذیل ہے

$$\left| \int_C f(z) \, \mathrm{d}z \right| \le Ml \tag{16.16}$$

جہاں l راہ C کی لمبائی ہے جبکہ M ایسا حقیقی مستقل ہے کہ پوری C پر $\left|f(z)\right| \le M$ ہو۔

مساوات 16.16 کو ثابت کرنے کی خاطر ہم مساوات 14.26 کو مساوات 16.2 کے ساتھ ملا کر

$$|S_n| = \left| \sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m) \Delta z_m \right| \le \sum_{m=1}^{n} \left| f(\zeta_m) \right| \left| \Delta z_m \right| \le M \sum_{m=1}^{n} \left| \Delta z_m \right|$$

لکھتے ہیں۔اب Δz_m اس قطع کی لمبائی ہے جس کے سر z_{m-1} اور z_m ہیں (شکل 16.1 دیکھیں)۔یوں دائیں ہاتھ مجموعہ در حقیقت ان سیدھی قطعات کی لمبائیوں کا مجموعہ L ہے جن کے سر $z_0, z_1, \cdots, z_n (= Z)$ ہیں۔ اگر n کی قیمت اس طرح لامتناہی کے قریب پہنچتی ہو کہ Δz_m کی زیادہ سے زیادہ لمبائی صفر کے قریب پہنچتی ہو تب L کی قیمت، لمبائی قوس کی تعریف (حصہ 10.4) کی رو سے، قوس C کی لمبائی l کے قریب پہنچے گی۔ یوں 16.16 میں دیا گیا کلیہ ثابت ہوتا ہے۔

مثال 16.6: مساوات 16.16 کی استعمال

تفاعل $f(z) = \frac{1}{z}$ کا دائرہ $|z| = \rho$ کے گرد ایک مرتبہ تکمل تلاش کریں۔

حل: یوں $l = 2\pi\rho$ ہے اور دائرے پر $\left|f(z)\right| = \frac{1}{\rho}$ ہے۔اس طرح مساوات 16.16 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\left| \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} \right| \le \frac{1}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi \qquad \text{(مثال 16.1 دیکھیں)}$$

□

مثال 16.7: ایک اور تکمل کی قیمت کا تخمینہ

مثال 16.2 میں راہ C_2 کی لمبائی $l = 2$ ہے اور C_2 پر $\left|z \text{ حقیقی}\right| \leq 1$ ہے۔یوں مساوات 16.16 درج ذیل دے گی۔

$$\left|\int_{C_2} z \text{ حقیقی} \, \mathrm{d}z\right| \leq 2$$

□

سوالات

سوال 16.33: مساوات 16.13 کی تصدیق کریں جہاں C اکائی دائرہ ہے جبکہ C_1 اس کا بالائی نصف حصہ اور C_2 اس کا نچلا نصف حصہ ہے۔

سوال 16.34: تفاعل $f(z) = z^2$ کے لئے مساوات 16.14 کی تصدیق کریں جہاں C نقطہ $-1-i$ سے $1+i$ تک ہے۔

سوال 16.35: تفاعل $k_1 f_1 + k_2 f_2 = 3z - z^2$ کے لئے مساوات 16.15 کی تصدیق کریں جہاں C اکائی دائرے کا بالائی نصف حصہ 1 تا -1 ہے۔

سوال 16.36: تفاعل $f(z) = \frac{1}{z}$ کے لئے مساوات 16.16 کی تصدیق کریں جہاں C اکائی دائرے کا بالائی نصف حصہ 1 تا -1 ہے۔

سوال 16.37 تا سوال 16.48 میں $\int_C f(z) \, \mathrm{d}z$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 16.37: سیدھی قطع $-1-i$ تا $2+i$ پر تفاعل $f(z) = az + b$ ہے۔
جواب: $\frac{(a+2b)(3+i2)}{2}$

سوال 16.38: گھڑی کی الٹ رخ اکائی دائرے پر $f(z) = z^2 + \frac{2}{z}$
جواب: $i4\pi$

سوال 16.39: 1 تا -1 اکائی دائرے کی بالائی نصف پر $f(z) = z^2 + \frac{3}{z^4}$
جواب: $\frac{4}{3}$

سوال 16.40: گھڑی کی الٹ رخ اکائی دائرے پر $f(z)=2z+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.41: 0 تا $1+i\frac{\pi}{2}$ سیدھی قطع پر $f(z)=e^z$
جواب: $-1+ie$

سوال 16.42: گھڑی کی رخ دائرہ $|z-1|=4$ پر $f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}$
جواب: $-i2\pi$

سوال 16.43: قطع $i\pi$ تا $i2\pi$ پر $f(z)=\cos z$
جواب: $i(\sinh 2\pi-\sinh\pi)$

سوال 16.44: قطع $i\pi$ تا $i2\pi$ پر $f(z)=\sin z$
جواب: $\cosh\pi-\cosh 2\pi$

سوال 16.45: قطع $-i$ تا i پر $f(z)=\sin z$
جواب: 0

سوال 16.46: قطع 0 تا i پر $f(z)=\sin z$
جواب: $1-\cosh 1$

سوال 16.47: قطع 0 تا i پر $f(z)=\sinh z$
جواب: $\cos 1-1$

سوال 16.48: قطع 0 تا i پر $f(z)=\cosh z$
جواب: $i\sin 1$

سوال 16.49 تا سوال 16.52 میں مساوات 16.16 کی مدد سے 0 تا $3+i4$ راہ پر تکمل کی زیادہ سے زیادہ قیمت کا تخمینہ لگائیں۔

سوال 16.49: $\int_C z\,\mathrm{d}z$
جواب: 25

سوال 16.50: $\int_C e^z\,\mathrm{d}z$
جواب: $5e^3$

سوال 16.51: $\int_C \operatorname{Ln}(z+1)\,\mathrm{d}z$

سوال 16.52: $\int_C \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z$
جواب: 5

سوال 16.53: سوال 16.49 میں راہ کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے تکمل کی زیادہ سے زیادہ قیمت کا بہتر تخمینہ لگائیں۔

16.3 کوشی کا مسئلہ تکمل

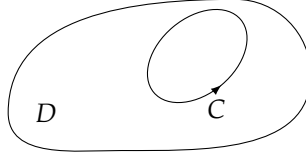
مخلوط تجزیہ میں کوشی کا مسئلہ تکمل اہم کردار ادا کرتا ہے۔ اس کے علاوہ اس مسئلے کے دیگر نظریاتی اور عملی اثرات بھی مرتب ہوتے ہیں۔اس مسئلہ کو بیان کرنے کی خاطر درج ذیل تصورات کی ضرورت پیش آئی گی۔

مخلوط مستوی میں دائرہ کار D اس صورت **سادہ تعلق خطہ**[3] کہلاتا ہے جب اس میں ہر سادہ بند منحنی (یعنی D میں اپنے آپ کو غیر منقطع کرتا ہوا بند منحنی) صرف D کے نقطوں کو گھیرتی ہو۔ایسا دائرہ کار جو سادہ تعلق نہ ہو **مضرب تعلق خطہ**[4] کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر ایک دائرے کی اندرون (دائری قرص)، قطع مکافی کی اندرون اور چکور کی اندرون سادہ تعلق ہیں۔ بلکہ کسی بھی سادہ بند منحنی کی اندرون سادہ تعلق ہو گی۔ دائری چھلی (حصہ 14.3) مضرب تعلق (زیادہ درست اصطلاح دوہرا تعلق ہو گی) ہے۔

مزید، ایسا دائرہ کار D جو مکمل طور پر مبدا کے گرد کسی دائرے میں پایا جاتا ہو **محدود**[5] کہلاتا ہے ورنہ اس کو **غیر محدود**[6] کہتے ہیں۔

مسئلہ 16.1: **کوشی مسئلہ تکمل**
سادہ تعلق محدود دائرہ کار D میں تحلیلی[7] $f(z)$ کی صورت میں D میں ہر سادہ بند منحنی C پر درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{16.17}$$

شکل 16.4: کوشی کا مسئلہ تکمل

ثبوت : کوشی کا ثبوت
مساوات 16.5 سے

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\int_C (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x) \tag{16.18}$$

ملتا ہے۔ $f(z)$ تحلیلی ہے لہٰذا $f'(z)$ موجود ہے۔کوشی نے اضافی فرض کیا کہ $f'(z)$ استمراری ہے۔تب مساوات 14.42 اور مساوات 14.43 کے تحت D میں u اور v کے استمراری جزوی تفرق پائے جائیں گے۔مسئلہ 11.1 قابل اطلاق ہو گا (جس میں f اور g کی جگہ بالترتیب u اور v پر کرتے ہیں) لہٰذا

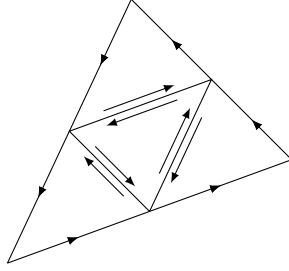
$$\int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) = \iint_R \Big(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں R کی سرحد C ہے۔مساوات 14.44 کے تحت دائیں ہاتھ تکمل مکمل صفر کے برابر ہے لہٰذا بائیں ہاتھ کا تکمل صفر ہو گا۔اسی طرح مساوات 14.44 کے تحت مساوات 16.18 کا آخری تکمل بھی صفر ہو گا۔یوں کوشی کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ثبوت : گرسا کا ثبوت
گرسا[8] نے مسئلہ کوشی کو $f'(z)$ کی استمراری ہونے کی شرط کے بغیر ثابت کیا جو بہت اہم حقیقت ہے۔ہم شروع ایسی صورت سے کرتے ہیں جہاں C ایک تکون کی سرحد ہے۔ہم اس تکون کو گھڑی کی الٹ رخ سمت بند کرتے

---

[3] simply connected domain
[4] multiply connected
[5] bounded
[6] unbounded
[7] یاد رہے کہ تفاعل کی تعریف کی رو سے تفاعل واحد قیمت تعلق ہوتا ہے۔
[8] فرانسیسی ریاضی دان ایڈورڈ گرسا [1858-1936]

شکل 16.5: مسئلہ کوشی کا ثبوت

ہیں۔ تکون کی اطراف کی درمیانے نقطوں کو آپس میں ملاتے ہوئے تکون کو چار مماثل تکونوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 16.5)۔ یوں

$$\int_C f\,\mathrm{d}z = \int_{C_a} f\,\mathrm{d}z + \int_{C_b} f\,\mathrm{d}z + \int_{C_c} f\,\mathrm{d}z + \int_{C_d} f\,\mathrm{d}z$$

ہو گا جہاں C_a ، $\cdots$ ، C_d ان چار تکون کی سرحد ہیں۔اب دائیں ہاتھ میں ہم تقسیم کی ہر قطع پر تکمل دو مرتبہ آپس میں الٹ رخ حاصل کرتے ہیں۔ایک ہی قطع پر آپس میں الٹ رخ کی جوڑی تکمل ایک دوسرے کو حذف کرتے ہیں لہٰذا دائیں ہاتھ چار تکملوں کا مجموعہ بائیں ہاتھ کی تکمل کے برابر ہو گا۔دائیں ہاتھ کے تکملوں میں سے ایک تکمل، جس کی سرحد کو ہم C_1 کہیں گے، ایسا ہو گا جس کے لئے درج ذیل لکھنا ممکن ہو گا۔

$$\left|\int_C f\,\mathrm{d}z\right| \le 4\left|\int_{C_1} f\,\mathrm{d}z\right|$$

ہم درج بالا اس لئے لکھ سکتے ہیں کہ چاروں تکمل میں سے ہر ایک کی مطلق قیمت چاروں کے مجموعے کی مطلق قیمت سے چار گنا کم نہیں ہو سکتی ہے۔یہ مساوات 14.26 سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

ہم اس تکون جس کی سرحد C_1 ہے کو اسی طرح چار تکونوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ان میں سے ایسی تکون، جس کی سرحد کو ہم C_2 کہیں گے، منتخب کرتے ہیں جس کے لئے

$$\left|\int_{C_1} f\,\mathrm{d}z\right| \le 4\left|\int_{C_2} f\,\mathrm{d}z\right| \quad \implies \quad \left|\int_C f\,\mathrm{d}z\right| \le 4^2\left|\int_{C_2} f\,\mathrm{d}z\right|$$

لکھنا ممکن ہو۔

اسی طرح بڑھتے ہوئے ہمیں تکونوں کا ایک سلسلہ T_1 ، T_2 ، $\cdots$ حاصل ہو گا جن کی سرحدیں بالترتیب C_1 ، C_2 ، $\cdots$ ہوں گی۔ یہ تکون متشابہ ہوں گے اور $n > m$ کی صورت میں تکون T_n تکون T_m کے اندر پایا جائے گا۔ مزید

$$\left|\int_C f\,\mathrm{d}z\right| \le 4^n\left|\int_{C_n} f\,\mathrm{d}z\right|, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{16.19}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

فرض کریں کہ z_0 ان تمام تکونوں کے اندر ایک نقطہ ہے۔ چونکہ f نقطہ z_0 پر قابل تفرق ہے لہٰذا $f'(z_0)$ موجود ہو گا لہٰذا ہم

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + h(z)(z - z_0) \tag{16.20}$$

لکھ سکتے ہیں جس کا تکون T_n کی سرحد C_n پر تکمل حاصل کرتے ہوئے

$$\int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z_0)\,\mathrm{d}z + \int_{C_1}(z - z_0)f'(z_0)\,\mathrm{d}z + \int_{C_n} h(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z \tag{16.21}$$

لکھتے ہیں۔ چونکہ $f(z_0)$ اور $f'(z_0)$ مستقل ہیں لہٰذا مثال 16.4 اور مثال 16.5 کے نتیجہ کے تحت بائیں ہاتھ پہلے دو تکمل صفر کے برابر ہوں گے۔ یوں

$$\int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_n} h(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z \tag{16.22}$$

رہ جاتا ہے۔ مساوات 16.20 کو $z - z_0$ سے تقسیم کر کے دو اجزاء کو بائیں ہاتھ منتقل کرتے ہوئے مطلق قیمت لے کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| = \left|h(z)\right|$$

اس کا مساوات 14.38 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ دیے گئے مثبت عدد ϵ کی صورت میں ہم ایسا مثبت عدد σ تلاش کر سکتے ہیں جو درج ذیل شرط کو مطمئن کرے گا۔

جب $|z - z_0| < \sigma$ ہو تب $\left|h(z)\right| \le \epsilon$ ہو گا۔

ہم اب عدد n اتنا بڑا لیتے ہیں کہ تکون T_n دائرہ $|z - z_0| < \sigma$ میں پایا جائے۔ہم C_n کی لمبائی کو l_n لکھتے ہیں۔یوں T_n میں z_0 اور C_n پر تمام z کے لئے $|z - z_0| \le \frac{l_n}{2}$ ہو گا۔مساوات 16.16 کی اطلاق سے ہم

$$\left|\int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{C_n} h(z)(z - z_0)\,\mathrm{d}z\right| < \epsilon \frac{l_n}{2} l_n = \frac{\epsilon}{2} l_n^2 \tag{16.23}$$

لکھ سکتے ہیں۔فرض کریں کہ C کی لمبائی l ہو۔تب راہ C_1 کی لمبائی $l_1 = \frac{l}{2}$ ہو گی، راہ C_2 کی لمبائی $l_2 = \frac{l_1}{2} = \frac{l}{4}$ ہو گی، اور اسی طرح C_n کی لمبائی

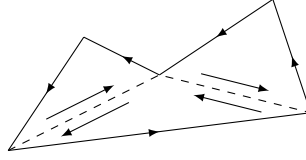
$$l_n = \frac{l}{2^n}$$

ہو گی۔مساوات 16.23 اور مساوات 16.19 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left|\int_C f\,\mathrm{d}z\right| \le 4^n \left|\int_{C_n} f\,\mathrm{d}z\right| < 4^n \frac{\epsilon}{2} l_n^2 = 4^n \frac{\epsilon}{2} \frac{l^2}{4^n} = \frac{\epsilon}{2} l^2$$

اب $\epsilon\,(> 0)$ کی قیمت کو کافی چھوٹا کرتے ہوئے ہم دائیں ہاتھ کو جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں جبکہ دایاں ہاتھ (تکمل کی) ایک مستقل قیمت ہے۔اس سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ اس تکمل کی قیمت صفر ہو گی۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

آئیں اب کثیر الاضلاع کے لئے اس مسئلے کو ثابت کریں۔ہم کثیر الاضلاع کو تکونوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 16.6)۔ایسی ہر تکون کا تکمل صفر ہو گا۔ ہر تکون کی سرحد پر گھڑی کی الٹ رخ تکمل حاصل کیا جاتا ہے لہٰذا ہر دو تکونوں کے درمیان تقسیمی قطع پر تکمل دو مرتبہ آپس میں الٹ رخ حاصل ہو گا۔ایسی ہر جوڑی تکملات کا مجموعہ صفر ہو گا۔یوں تمام تکونوں کی سرحد پر تکملوں کا مجموعہ کثیر رکنی کی سرحد پر تکمل کے برابر ہو گا۔اب چونکہ ہر تکون پر تکمل صفر کے برابر ہے لہٰذا ان کا مجموعہ بھی صفر کے برابر ہو گا۔یوں کثیر رکنی کی سرحد پر تکمل صفر ہو گا۔

کسی بھی بند راہ C کے لئے اب ثبوت پیش کرتے ہیں۔کسی بھی بند راہ کے اندر اتنے اطراف کی کثیر رکنی P نقش کریں کہ C اور کثیر رکنی میں فرق قابل نظر انداز ہو۔ہم بغیر ثبوت پیش کیے (چونکہ یہ ثبوت پیچیدہ ہے) کہنا چاہیں گے کہ C کے تکمل کی قیمت اور P کے تکمل کی قیمت میں فرق ϵ کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں جہاں ϵ ایک مثبت عدد ہے۔ چونکہ کثیر رکنی کے لئے ہم اس مسئلے کو ثابت کر چکے ہیں لہٰذا کسی بھی بند راہ کے لئے بھی مسئلہ ثابت ہوا۔

شکل 16.6: کثیر رکنے کے لئے کوشی مسئلہ تکمل کا ثبوت

□

مثال 16.8:

$$\int_C e^z \, \mathrm{d}z = 0$$

چونکہ ہر z پر e^z تحلیلی ہے لہٰذا درج بالا ہو گا۔ □

مثال 16.9:

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = 0$$

جہاں C اکائی دائرہ ہے (حصہ 16.1)۔ چونکہ $z = 0$ پر $\frac{1}{z^2}$ تحلیلی نہیں ہے لہٰذا یہ نتیجہ مسئلہ کوشی سے اخذ نہیں ہو گا۔ یوں D میں f کی تحلیلی ہونے کی شرط، مساوات 16.17 کی درست ہونے کے لئے، کافی ہے نا کہ لازمی۔ □

مثال 16.10:

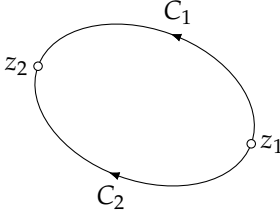
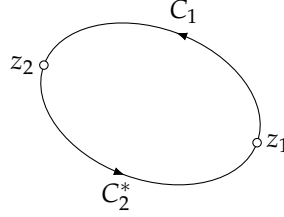
$$\int_C \frac{\mathrm{d}}{z} = i2\pi$$

جہاں تکمل اکائی دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا گیا ہے (حصہ 16.1)۔ راہ C جھلی $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$ میں پائی جاتی ہے جہاں $\frac{1}{z}$ تحلیلی ہے لیکن یہ راہ سادہ تعلق نہیں رکھتی لہٰذا مسئلہ کوشی قابل اطلاق نہیں ہو گا۔ یوں دائرہ کار D کی سادہ تعلق ہونے کی شرط انتہائی اہم ہے۔

□

C_1 z_2 z_1 C_2

(ب) مساوات 16.25

C_1 z_2 z_1 C_2^*

(الف) مساوات 16.24

شکل 16.7: دو نقطوں کے درمیان دو مختلف راہ

مسئلہ کوشی میں راہ C کو دو ٹکڑوں C_1 اور C_2^* میں تقسیم (شکل 16.7-الف) کرنے سے مساوات 16.17 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\int_C f\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}z + \int_{C_2^*} f\,\mathrm{d}z = 0$$

یوں

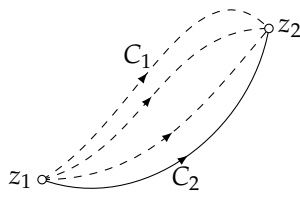
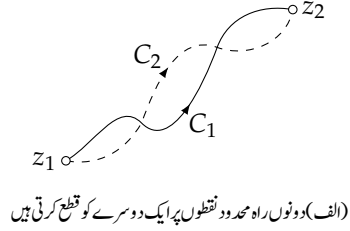
$$-\int_{C_2^*} f\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}z \tag{16.24}$$

ہو گا۔ C_2^* پر تکمل کی سمت الٹ کرنے سے تکمل کی قیمت -1 سے ضرب ہو گی۔یوں

$$\int_{C_2} f\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}z \tag{16.25}$$

حاصل ہو گا (شکل 16.7-ب)۔اس طرح اگر D میں f تحلیلی ہو اور D میں دو نقطوں کے درمیان C_1 اور C_2 کوئی بھی راہ ہوں جن پر کوئی نقطہ مشترک نہ ہو تب ان راہ پر مساوات 16.25 درست ہو گی۔

اگر ان راہ C_1 اور C_2 میں محدود تعداد کے نقطے مشترک ہوں (شکل 16.8-الف) تب ہر قریبی مشترک نقطوں کی جوڑی کے مابین چونکہ مساوات 16.25 قابل اطلاق ہے لہٰذا ان پوری راہ C_1 اور C_2 کے لئے بھی مساوات 16.25 درست ہو گی۔

درحقیقت کسی بھی دو نقطوں z_1 اور z_2 کے درمیان کسی بھی دو راہ، جو مکمل طور پر سادہ تعلق دائرہ کار D میں ہوں جہاں $f(z)$ تحلیلی ہے، کے لئے مساوات 16.25 درست ہو گا۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ z_1

(الف) دونوں راہ محدود نقطوں پر ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں

(ب) راہ کی مسلسل تبدیلی

شکل 16.8: دو نقطوں کے مابین مختلف طرز کی راہ

تا z_2 تفاعل $f(z)$ کے تکمل کی قیمت D میں **راہ کی غیر تابع** (یا راہ سے آزاد) ہے۔(ظاہر ہے کہ ایسی تکمل کی قیمت z_1 اور z_2 پر منحصر ہو گی۔)

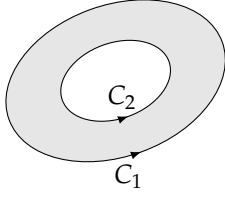
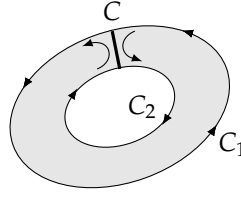
ہم تصور کر سکتے ہیں کہ راہ C_1 کو مسلسل تبدیل کرتے ہوئے راہ C_2 حاصل کی گئی ہے (شکل 16.8-ب)۔یوں ایسے تکمل میں، راہ کے سر z_1 اور z_2 تبدیل کیے بغیر، تکمل کی راہ یوں مسلسل تبدیل کرنے سے کہ ایسے نقطہ سے نہ گزرا جائے جہاں $f(z)$ غیر تحلیلی ہو، تکمل کی قیمت تبدیل نہیں ہو گی۔ اس حقیقت کو **تبدیلی راہ کا اصول**[9] کہتے ہیں۔

مضرب تعلق دائرہ کار D^* کو یوں کاٹا جا سکتا ہے کہ حاصل دائرہ کار (یعنی D^* ماسوائے ان نقطوں کے جو ایک کٹ یا ایک سے زیادہ کٹ پر ہوں) سادہ تعلق دائرہ کار ہو۔دوہرا تعلق دائرہ کار D^* پر ہمیں ایک عدد کٹ $\tilde{C}$ درکار ہو گا (شکل 16.9-الف)۔اگر دائرہ کار D^* ، راہ C_1 اور C_2 پر $f(z)$ تحلیلی ہو تب چونکہ C_1 ، C_2 اور $\tilde{C}$ سادہ تعلق دائرہ کار کو گھیرتے ہیں لہٰذا مسئلہ کوشی کے تحت راہ C_1 ، C_2 اور $\tilde{C}$ پر، شکل 16.9-الف میں تیر کی نشان سے دکھائے گئے رخ، $f(z)$ کے تکمل کی قیمت صفر ہو گی۔ چونکہ ہم $\tilde{C}$ پر دونوں رخ تکمل لیتے ہیں جن کا مجموعہ صفر ہو گا لہٰذا ہمیں

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{16.26}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ایک بند راہ پر گھڑی کی رخ اور دوسری راہ پر گھڑی کی الٹ رخ تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔

[9] principle of deformation of path

(الف) دوہرا تعلق دائرہ کار

(ب) مساوات 16.27 میں تکمل کی راہ

شکل 16.9: دوہرا تعلق دائرہ کار

مساوات 16.26 کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{16.27}$$

جہاں دونوں بند راہ پر تکمل گھڑی کی ایک ہی رخ حاصل کیا جاتا ہے (شکل 16.9-ب)۔ یاد رہے کہ مساوات 16.27 اس صورت درست ہو گا جب C_1 اور C_2 کی ہر نقطہ پر اور ان کی گھیرے ہوئے دائرہ کار پر $f(z)$ تحلیلی ہو۔

زیادہ پیچیدہ دائرہ کار میں ایک سے زیادہ کٹ درکار ہوں گے۔ان کٹ کو لگانے کا بنیادی اصول وہی رہے گا۔ مثلاً تین تعلقی دائرہ کار (شکل 16.10) کے لئے

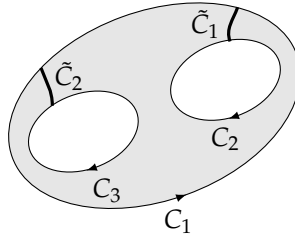
$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں C_2 اور C_3 پر تکمل ایک ہی رخ حاصل کیا جائے گا جبکہ C_1 پر تکمل ان کی الٹ رخ حاصل کیا جائے گا۔

سادہ بند راہ کو کبھی کبھار **خط ارتفاع**[10] بھی کہتے ہیں اور ایسی راہ پر تکمل کو **ارتفاعی تکمل**[11] کہتے ہیں۔

مثال 16.11: فرض کریں کہ C_1 اکائی دائرہ $|z| = 1$ ہے جبکہ C_2 دائرہ $|z| = \frac{1}{2}$ ہے۔تب مساوات 16.27 سے

$$\int_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = i2\pi \qquad \text{(16.1 مثال)}$$

contour[10]
contour integral[11]

شکل 16.10: تین تعلقی دائرہ کار

ہو گا جہاں دونوں دائروں پر تکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا گیا ہے۔ □

مثال 16.12: مثال 16.3 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے تبدیلی راہ کے اصول کے تحت

$$\int_C (z-z_0)^m \,\mathrm{d}z = \begin{cases} i2\pi & (m=-1) \\ 0 & (m \neq -1, \text{عدد صحیح}) \end{cases}$$

ہو گا جہاں C ایسا کوئی بھی خط ارتفاع ہو سکتا ہے جو نقطہ z_0 کو گھیرتا ہو اور تکمل کو C پر گھڑی کی الٹ رخ ایک مرتبہ حاصل کیا جاتا ہے۔ □

سوالات

سوال 16.54: مسئلہ کوشی کی تصدیق $\int_C z^2 \,\mathrm{d}z$ کے لئے کریں جہاں C وہ تکون ہے جس کے کونے 0 ، 2 اور $i2$ ہیں۔

سوال 16.55: دکھائیں کہ اکائی دائرے کے گرد $\frac{1}{z^3}$ کا تکمل صفر کے برابر ہے۔کیا یہ نتیجہ مسئلہ کوشی سے اخذ کیا جا سکتا ہے؟

جواب: چونکہ $z=0$ پر تفاعل $\frac{1}{z^3}$ غیر تحلیلی ہے اور اکائی دائرہ اس نقطے کو گھیرتی ہے لہٰذا یہ نتیجہ مسئلہ کوشی سے اخذ نہیں کیا جا سکتا ہے۔

سوال 16.56: کس سادہ بند راہ پر $\frac{1}{z}$ کا تکمل صفر کے برابر ہو گا؟

جواب: وہ راہ جو $z=0$ کو نہ گھیرتی ہو۔

سوال 16.57 تا سوال 16.65 اکائی دائرے کے گرد ایک مرتبہ گھڑی کی الٹ رخ دیے گئے تفاعل کے تکمل کی قیمت حاصل کریں۔ہر سوال میں بتلائیں کہ آیا اس سوال میں مسئلہ کوشی کا اطلاق ہو گا؟

سوال 16.57: $f(z)=\frac{1}{z^4}$
جواب: 0 ؛ جی نہیں

سوال 16.58: $f(z)=e^{-z}$
جواب: 0 ؛ جی ہاں

سوال 16.59: $f(z)=\lvert z\rvert$
جواب: 0 ؛ جی نہیں

سوال 16.60: $f(z)=$ خیالی z
جواب: $-\pi$ ؛ جی نہیں

سوال 16.61: $f(z)=$ حقیقی z
جواب: $i\pi$ ؛ جی نہیں

سوال 16.62: $f(z)=\tanh z$
جواب: 0 ؛ جی ہاں

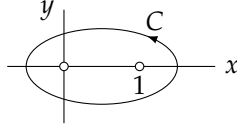
سوال 16.63: $f(z)=\frac{1}{z^2+2}$
جواب: 0 ؛ جی ہاں

سوال 16.64: $f(z)=\frac{1}{\bar{z}}$
جواب: 0 ؛ جی نہیں

سوال 16.65: $f(z)=z^2\sec z$
جواب: 0 ؛ جی ہاں

سوال 16.66: مسئلہ کوشی کا اطلاق $f(z)=z$ پر کرتے ہوئے سوال 16.60 سے سوال 16.61 کا جواب حاصل کریں۔

سوال 16.67: تبدیلی راہ کا اصول اور

$$\frac{2z-1}{z^2-z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}$$

شکل 16.11: شکل برائے سوال 16.67

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں جہاں C کو شکل 16.67 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_C \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-1} = i4\pi$$

سوال 16.68: تفاعل $f(z) = \frac{z}{|z|}$ کا تکمل گھڑی کی الٹ رخ (الف) دائرہ $|z| = 2$ اور (ب) دائرہ $|z| = 4$ پر حاصل کریں۔ کیا (الف) کے جواب سے تبدیلی راہ کے قاعدہ کی مدد سے (ب) کا جواب حاصل کیا جا سکتا ہے؟
جواب: (الف) $i2\pi$ ، (ب) $i2\pi$ ؛ جی نہیں

سوال 16.69 تا سوال 16.77 میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ جہاں ضرورت ہو وہاں تفاعل کو جزوی کسر کی صورت میں لکھیں۔

سوال 16.69: گھڑی کی رخ $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z}, \quad C: |z-2| = 1$
جواب: 0

سوال 16.70: گھڑی کی الٹ رخ $\int_C \frac{z^2-z-1}{z^3-z^2}\,\mathrm{d}z$، (الف) $C: |z| = 2$، (ب) $C: |z| = \frac{1}{2}$
جواب: (الف) $i2\pi$، (ب) 0

سوال 16.71: گھڑی کی رخ $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}$، (الف) $C: |z| = 2$، (ب) $C: |z-1| = 1$
جواب: (الف) 0، (ب) $-i\pi$

سوال 16.72: گھڑی کی الٹ رخ $\int_C \frac{z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$، (الف) $C: |z| = 2$، (ب) $C: |z+i| = 1$
جواب: (الف) $i2\pi$، (ب) $i\pi$

سوال 16.73: گھڑی کی الٹ رخ $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$، (الف) $C: |z+i| = 1$، (ب) $C: |z-i| = 1$
جواب: (الف) $-\pi$، (ب) π

سوال 16.74: $\int_C \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z, \quad$ (الف) $C:|z|=2$, (ب) $C:|z|=1$, گھڑی کی الٹ رخ
جواب: (الف) 0، (ب) 0

سوال 16.75: $\int_C \frac{\cos z}{z^2}\,\mathrm{d}z, \quad$ (الف) $C:|z-i2|=1$, گھڑی کی الٹ رخ
جواب: 0

سوال 16.76: $\int_C \frac{3z+1}{z^3-z}\,\mathrm{d}z, \quad$ (الف) $C:|z|=\frac{1}{2}$, (ب) $C:|z|=2$, گھڑی کی الٹ رخ
جواب: (الف) $-i2\pi$، (ب) $-i2\pi$

سوال 16.77: $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^4+4z^2}, \quad$ (الف) $C:|z|=\frac{3}{2}$, (ب) $C:|z|=1$, گھڑی کی الٹ رخ
جواب: (الف) $i2\pi$، (ب) 0

16.4 خطی تکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ غیر قطعی تکمل

کوشی مسئلہ تکمل استعمال کرتے ہوئے ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ بہت سارے مخلوط خطی تکمل کو ایک سادہ طریقہ کار، یعنی غیر قطعی تکمل، سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

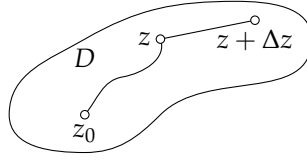
فرض کریں کہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہے اور D میں z_0 ایک مقررہ نقطہ ہے۔تب z_0 اور z کے درمیان D میں تمام راہ پر تکمل

$$\int_{z_0}^{z} f(z^*)\,\mathrm{d}z^*$$

z کا تفاعل ہو گا لہٰذا ہم

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z^*)\,\mathrm{d}z^* \tag{16.28}$$

لکھ سکتے ہیں۔

آئیں ثابت کرتے ہیں کہ D میں $F(z)$ متغیرہ z کا تحلیلی تفاعل ہے اور $F'(z)=f(z)$ ہے۔

شکل 16.12: تکمل کی راہ

ہم z کو مقررہ رکھتے ہیں۔چونکہ D دائرہ کار ہے لہٰذا z کی پڑوس N بھی D کا حصہ ہو گی۔ ہم N میں نقطہ $z+\Delta z$ یوں منتخب کرتے ہیں کہ وہ قطع جس کے سر z اور $z+\Delta z$ ہوں از خود N کا اور یوں D کا حصہ ہو۔ مساوات 16.28 سے ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z^*)\,\mathrm{d}z^* - \int_{z_0}^{z} f(z^*)\,\mathrm{d}z^* = \int_{z}^{z+\Delta z} f(z^*)\,\mathrm{d}z^*$$

جہاں z تا $z+\Delta z$ تکمل کو اس قطع پر حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 16.12)۔ چونکہ z مقررہ ہے لہٰذا

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(z^*)-f(z)]\,\mathrm{d}z^*$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$-\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,\mathrm{d}z^* = -\frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}z^* = -f(z)$$

ہو گا۔ اب $f(z)$ استمراری ہے لہٰذا کسی بھی دیے گئے $\epsilon>0$ کے لئے ہم ایسا $\sigma>0$ حاصل کر سکتے ہیں کہ

جب $|z^*-z|<\sigma$ ہو تب $|f(z^*)-f(z)|<\epsilon,$ ہو گا۔

نتیجتاً اگر $|\Delta z|<\sigma$ ہو تب

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| &= \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(z^*)-f(z)]\,\mathrm{d}z^*\right|\\ &< \frac{\epsilon}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}z^*\right| = \epsilon\end{aligned}$$

ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z) \tag{16.29}$$

اب مساوات 16.28 سے ہم دیکھتے ہیں کہ z_0 کی جگہ کوئی دوسرا مقررہ نقطہ منتخب کرنے سے تفاعل $F(z)$ کے ساتھ ایک مستقل جمع ہو گا۔مساوات 16.29 سے ہم دیکھتے ہیں کہ $F(z)$ تفاعل $f(z)$ کا تفرق یا غیر قطعی تکمل ہے، جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے،

$$F(z) = \int f(z)\,\mathrm{d}z$$

یعنی D میں $F(z)$ تحلیلی تفاعل ہے جس کا تفرق $f(z)$ ہے۔

اگر $F'(z) = f(z)$ اور $G'(z) = f(z)$ ہوں تب D میں $F'(z) - G'(z) \equiv 0$ ہو گا۔یوں تفاعل $F(z) - G(z)$ ایک مستقل (سوال 14.133) ہو گا۔یوں غیر قطعی تکمل $F(z)$ اور $G(z)$ میں صرف ایک مستقل کا فرق ہو سکتا ہے۔اب مساوات 16.28 کو مد نظر رکھتے ہوئے D میں نقطہ a اور b اور D میں a تا b کسی بھی راہ کے لئے حقیقی قطعی تکمل کی طرح

$$\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{z_0}^b f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{z_0}^a f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a)$$

لکھا جا سکتا ہے، پس اتنا ضروری ہے کہ تکمل کی راہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں پائی جاتی ہو جہاں $f(z)$ تحلیلی ہے۔

ہم متذکرہ بالا نتیجہ کو درج ذیل مسئلہ میں بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 16.2: **تکمل کا حصول بذریعہ غیر قطعی تکمل**

اگر سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو تب D میں $f(z)$ کا غیر قطعی تکمل موجود ہو گا، یعنی ایسا تحلیلی تفاعل $F(z)$ کہ D میں $F'(z) = f(z)$ ہو، اور D میں نقطہ a اور نقطہ b کے درمیان D میں ہر راہ کے لئے درج ذیل ہو۔

$$\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = F(b) - F(a) \tag{16.30}$$

یہ مسئلہ مخلوط خطی تکمل کا حصول بذریعہ غیر قطعی تکمل ممکن بناتا ہے۔یاد رہے کہ چونکہ $F(z)$ ایک مستقل جمعی جزو کے علاوہ یکتا ہے لہٰذا مساوات 16.30 میں ہم D میں $f(z)$ کا کوئی بھی غیر قطعی تکمل $F(z)$ لے سکتے ہیں۔

مثال 16.13:

$$\int_i^{1+i4} z^2 \,\mathrm{d}z = \left[\frac{z^3}{3}\right]_i^{1+i4} = \frac{1}{3}[(1+i4)^3 - i^3] = -\frac{47}{3} - i17$$

□

مثال 16.14:

$$\int_i^{\frac{\pi}{2}} \cos z \,\mathrm{d}z = \sin z\Big|_i^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin i = 1 - i\sinh 1$$

□

سوالات

سوال 16.78 تا سوال 16.97 میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 16.78: $\int_i^{1+i2} z \,\mathrm{d}z$
جواب: $-1+i2$

سوال 16.79: $\int_i^2 z^2 \,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{1}{3}(8+i)$

سوال 16.80: $\int_i^1 (z-1)^2 \,\mathrm{d}z$
جواب: $-\frac{2}{3}(1+i)$

سوال 16.81: $\int_{1+i}^{1-i} z^3 \,\mathrm{d}z$
جواب: 0

سوال 16.82: $\int_1^{1+i\pi} e^z \,\mathrm{d}z$
جواب: $-2e$

سوال 16.83: $\int_{i\pi}^{i2\pi} e^{3z} \,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{2}{3}$

سوال 16.84: $\int_{-i}^{i} ze^{z^2}\,\mathrm{d}z$
جواب: 0

سوال 16.85: $\int_{1-i\pi}^{1+i\pi} e^{\frac{z}{2}}\,\mathrm{d}z$
جواب: $i4\sqrt{e}$

سوال 16.86: $\int_{0}^{i\pi} \cos z\,\mathrm{d}z$
جواب: $i\sinh\pi$

سوال 16.87: $\int_{0}^{i\frac{\pi}{2}} \sin z\,\mathrm{d}z$
جواب: $1-\cosh\frac{\pi}{2}$

سوال 16.88: $\int_{0}^{i\frac{\pi}{2}} z\sin z^2\,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{1}{2}(1-\cos\frac{\pi^2}{4})$

سوال 16.89: $\int_{0}^{i\frac{\pi}{2}} 16z\sin z\,\mathrm{d}z$
جواب: $-ie^{-\frac{\pi}{2}}\left[2\pi^2e^{\frac{\pi}{2}}\sinh\frac{\pi}{2}+(-\pi^2+4\pi-8)e^{\pi}+\pi^2+4\pi+8\right]$

سوال 16.90: $\int_{-i\pi}^{i\pi} \sin^2 z\,\mathrm{d}z$
جواب: $i(\pi-\frac{1}{2}\sinh 2\pi)$

سوال 16.91: $\int_{1-i}^{1+i} \cos z\,\mathrm{d}z$
جواب: $\sin(i+1)+\sin(i-1)$

سوال 16.92: $\int_{0}^{i3} \cosh z\,\mathrm{d}z$
جواب: $i\sin 3$

سوال 16.93: $\int_{i}^{1+i3} \sinh z\,\mathrm{d}z$
جواب: $\cosh(1+i3)-\cos 1$

سوال 16.94: $\int_{0}^{i3} \sinh z\,\mathrm{d}z$
جواب: $\cos 3-1$

سوال 16.95: $\int_{i}^{i3} z\sinh z^2\,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{1}{2}(\cosh 9-\cosh 1)$

سوال 16.96: $\int_{-1}^{1} z\cosh z^2\,\mathrm{d}z$
جواب: 0

سوال 16.97: $\int_{-i\pi}^{i\pi} z\cosh z\,\mathrm{d}z$
جواب: 0

$\circ\, z_0$ D C

شکل 16.13: کوشی کا کلیہ تکمل

16.5 کوشی کا کلیہ تکمل

کوشی کے مسئلہ تکمل کا اہم ترین نتیجہ کوشی کا کلیہ تکمل ہے۔یہ کلیہ اور اس کے کے لازمی شرائط درج ذیل مسئلہ میں پیش کیے گئے ہیں۔

مسئلہ 16.3: **کوشی کا کلیہ تکمل**[12]
فرض کریں کہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہے۔تب D میں کسی بھی نقطہ z_0 اور D میں کسی بھی بند راہ C جو z_0 کو گھیرتا (شکل 16.13) ہو درج ذیل ہو گا

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = i2\pi f(z_0) \qquad \text{کوشی کا کلیہ تکمل} \tag{16.31}$$

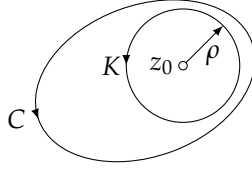
جہاں تکمل کو C پر گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا جاتا ہے۔

ثبوت: $f(z)=f(z_0)+[f(z)-f(z_0)]$ لکھ کر یاد رکھتے ہوئے کہ مستقل کو تکمل سے باہر نکالا جا سکتا ہے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0)\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} + \int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \tag{16.32}$$

مثال 16.12 کے تحت دائیں ہاتھ پہلا تکمل $i2\pi f(z_0)$ کے برابر ہے۔یوں مساوات 16.32 میں دائیں ہاتھ دوسرا تکمل صفر ہونے کی صورت میں مساوات 16.31 درست ثابت ہو گی۔اب اس تکمل لا متکمل ماسوائے نقطہ z_0 کے D میں تحلیلی ہے۔یوں ہم تکمل کی قیمت بغیر تبدیل کیے C کی جگہ z_0 کے گرد ایک چھوٹے

[12] Cauchy's integral formula

K z_0 ρ C

شکل 16.14: کوشی کے کلیہ تکمل کا ثبوت

دائرے پر تکمل حاصل کر سکتے ہیں (شکل 16.14)۔چونکہ $f(z)$ تحلیلی ہے لہٰذا یہ استمراری ہے۔یوں کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کی صورت میں ہم ایسا $\sigma > 0$ تلاش کر سکتے ہیں کہ

قرص $|z - z_0| < \sigma$ میں ہر z کے لئے $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ ہو گا۔

قرص کا رداس ρ چھوٹے سے چھوٹا کرتے ہوئے K کو σ سے کم بنایا جا سکتا ہے۔یوں K پر ہر نقطہ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| < \frac{\epsilon}{\rho}$$

K کی لمبائی $2\pi\rho$ ہے۔یوں مساوات 16.16 کے تحت

$$\left|\int_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon$$

ہو گا۔چونکہ ϵ کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں لہٰذا مساوات 16.32 میں آخری تکمل صفر ہو گا۔یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 16.15: مختلف راہوں پر تکمل کی قیمت

درج ذیل تکمل گھڑی کی الٹ رخ اکائی دائرے پر حاصل کریں۔ دائرے کا مرکز (الف) $z = 1$ ، (ب) $z = \frac{1}{2}$ ، (پ) $z = -1$ اور (ت) $z = i$ پر لیں۔

$$\int_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z$$

جواب: (الف) اس تکمل کو

$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2-1}\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{z^2+1}{z+1}\frac{\mathrm{d}z}{z-1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔دائیں ہاتھ کا مساوات 16.31 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z+1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ نقطہ $z_0 = 1$ دائرہ C کے اندر پایا جاتا ہے اور $f(z)$ راہ C پر اور اس کے اندر ہر نقطہ پر تحلیلی ہے (نقطہ $z = -1$ جہاں $f(z)$ غیر تحلیلی ہے C کے باہر پایا جاتا ہے۔) لہٰذا کوشی کے کلیہ تکمل کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2-1}\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{z^2+1}{z+1}\frac{\mathrm{d}z}{z-1} = i2\pi\Big[\frac{z^2+1}{z+1}\Big]_{z=1} = i2\pi$$

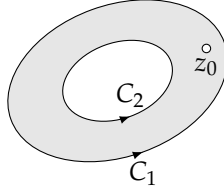
(ب) ہمیں یہی نتیجہ دوبارہ ملتا ہے چونکہ دیا گیا تفاعل نقطہ $z = 1$ اور نقطہ $z = -1$ پر غیر تحلیلی ہے اور ہم (الف) میں استعمال ہوئے دائرے کو، بغیر کسی غیر تحلیلی نقطہ سے گزرتے ہوئے، مسلسل تبدیل کرتے ہوئے یہاں درکار دائرہ حاصل کر سکتا ہے۔
(پ) ہم اب درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2-1}\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{z^2+1}{z-1}\frac{\mathrm{d}z}{z+1} = i2\pi\Big[\frac{z^2}{z-1}\Big]_{z=-1} = -i2\pi$$

(ت) چونکہ دیا گیا تفاعل دائرے پر اور دائرے کے اندر ہر نقطہ پر تحلیلی ہے لہٰذا کوشی کے کلیہ تکمل کے تحت یہ تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ □

مضرب تعلق دائرہ کار میں ہم حصہ 16.3 کی طرح ہی بڑھتے ہیں۔مثلاً اگر C_1 اور C_2 کے درمیان دائرہ کار (شکل 16.15) میں $f(z)$ تحلیلی ہو اور C_1 اور C_2 پر بھی $f(z)$ تحلیلی ہو اور اس دائرہ کار میں z_0 کوئی نقطہ ہو تب

$$f(z_0) = \frac{1}{i2\pi}\int\limits_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{i2\pi}\int\limits_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \tag{16.33}$$

ہو گا جہاں دونوں تکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیے جائیں گے۔

شکل 16.15: شکل برائے مساوات 16.33

سوالات

سوال 16.98 تا سوال 16.101 میں دیے دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ $\frac{z^2}{z^2+1}$ کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 16.98: $|z+i|=1$
جواب: π

سوال 16.99: $|z-i|=\frac{2}{3}$
جواب: $-\pi$

سوال 16.100: $|z|=3$
جواب: 0

سوال 16.101: $|z|=\frac{1}{3}$
جواب: 0

سوال 16.102 تا سوال 16.105 میں گھڑی کی الٹ رخ دیے گئے دائرے پر $\frac{z^2}{z^4-1}$ کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 16.102: $|z-1|=1$
جواب: $i\frac{\pi}{2}$

سوال 16.103: $|z+i|=1$
جواب: $-\frac{\pi}{2}$

سوال 16.104: $|z-i|=1$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 16.105: $|z| = 3$
جواب: 0

سوال 16.106 تا سوال 16.117 میں دیے تفاعل کی اکائی دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ تکمل حاصل کریں۔

سوال 16.106: $\frac{1}{z}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.107: $\frac{1}{z^2+9}$
جواب: 0

سوال 16.108: $\frac{1}{3z+1}$
جواب: $i\frac{2\pi}{3}$

سوال 16.109: $\frac{e^z}{z}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.110: $\frac{e^{3z}}{z+i3}$
جواب: 0

سوال 16.111: $\frac{e^{3z}}{3z+i}$
جواب: $\frac{i2\pi e^{-i}}{3}$

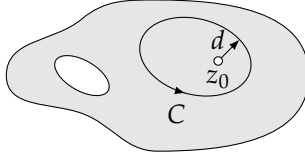
سوال 16.112: $\frac{\cos z}{z}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.113: $\frac{\sin z}{z}$
جواب: 0

سوال 16.114: $\frac{e^z-1}{z}$
جواب: 0

سوال 16.115: $\frac{\sinh z}{z}$
جواب: 0

سوال 16.116: $\frac{\cosh z}{z}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.117: $\frac{\cosh z}{z-2}$
جواب: 0

شکل 16.16: شکل برائے مسئلہ 16.4

16.6 تحلیلی تفاعل کے تفرق

یہ جانتے ہوئے کہ ایک حقیقی تفاعل ایک مرتبہ قابل تفرق ہے سے یہ جاننا ممکن نہیں ہے کہ اس کے بلند رتبی تفرق موجود ہوں گے یا نہیں۔ہم اب دیکھیں گے کہ یہ جانتے ہوئے کہ ایک مخلوط تفاعل کا دائرہ کار D میں یک رتبی تفرق موجود ہے سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ D میں اس تفاعل کے ہر رتبہ کا تفرق موجود ہو گا۔اس لحاظ سے مخلوط تفاعل ایک مرتبہ قابل تفرق حقیقی تفاعل سے زیادہ سادہ رویہ رکھتے ہیں۔

مسئلہ 16.4: تحلیلی تفاعل کے تفرق
دائرہ کار D میں تحلیلی تفاعل $f(z)$ کا D میں ہر رتبہ کا تفرق موجود ہے اور ایسا تفرق از خود D میں تحلیلی ہو گا۔ D میں نقطہ z_0 پر ان تفاعل کے تفرق درج ذیل کلیات

$$f'(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} \, dz \tag{16.34}$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{i2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} \, dz \tag{16.35}$$

اور عمومی کلیہ

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{i2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{16.36}$$

سے حاصل ہوں گے جہاں دائرہ کار D میں C کوئی بھی ایسی سادہ بند راہ ہے جو z_0 کو گھیرتی ہو اور جس کی مکمل اندرون D میں پائی جاتی ہو؛ تکمل گھڑی کی الٹ رخ C پر حاصل کیا جاتا ہے (شکل 16.16)۔

رائے۔ مساوات 16.31 میں تکمل کی نشان کے اندر z_0 کے لحاظ سے تفرق لینے سے مساوات 16.36 کو با ضابطہ طور پر حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات 16.36 کو یاد رکھنے کا یہی بہترین طریقہ ہے۔

ثبوت: ہم مساوات 16.34 کو ثابت کرتے ہیں۔ تفرق کی تعریف کی رو سے

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

ہو گا۔یوں کوشی کے کلیہ تکمل مساوات 16.31 سے

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{i2\pi \Delta z} \Big[\int_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} \, \mathrm{d}z - \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \Big] \tag{16.37}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{1}{\Delta z} \Big[\frac{1}{z - (z_0 + \Delta z)} - \frac{1}{z - z_0} \Big] = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2}$$

یوں مساوات 16.37 کو

$$f'(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, \mathrm{d}z + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{i2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2} \, \mathrm{d}z$$

لکھا جا سکتا ہے۔اگر ہم ثابت کر سکیں کہ دائیں ہاتھ آخری جزو صفر کے برابر ہے تب ہم مساوات 16.34 کو ثابت کر پائیں گے۔آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔

C پر تفاعل $f(z)$ استمراری ہے۔یوں C پر $f(z)$ کی مطلق قیمت محدود ہو گی مثلاً $|f(z)| < M$ جہاں M حقیقی عدد ہے۔فرض کریں کہ z_0 سے C کا قریب ترین نقطہ یا نقطوں کا فاصلہ d ہے۔تب C پر تمام z کے لئے

$$\frac{1}{|z - z_0|} \le \frac{1}{d} \quad \text{اور} \quad |z - z_0| \ge d$$

ہوں گے۔ مزید اگر $|\Delta z| \le \frac{d}{2}$ ہو تب C پر تمام z کے لئے

$$\frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} \le \frac{2}{d} \quad \text{اور} \quad |z - z_0 - \Delta z| \ge \frac{d}{2}$$

ہوں گے۔یوں C کی لمبائی کو L سے ظاہر کرتے ہوئے مساوات 16.16 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\left|\frac{\Delta z}{i2\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{|\Delta z|}{2\pi}\frac{M}{\frac{1}{2}dd^2}L \qquad \left(|\Delta z| \le \frac{d}{2}\right)$$

Δz صفر کے قریب پہنچنے سے دایاں ہاتھ بھی صفر کے قریب پہنچتا ہے۔ یوں مساوات 16.34 ثابت ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ ہم نے یہاں کوشی کا کلیہ تکمل مساوات 16.31 استعمال کیا لیکن اگر ہمیں صرف اتنا معلوم ہوتا کہ $f(z_0)$ کو مساوات 16.31 سے ظاہر کیا جا سکتا ہے تب ہمارے متذکرہ بالا دلائل اس حقیقت کو ثابت کر پاتے کہ $f(z)$ کا تفرق $f'(z_0)$ موجود ہے۔اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ اسی طرح کے دلائل مساوات 16.32 کو ثابت کر پائیں گے۔اسی طرح الکراجی ماخوذ سے ہم عمومی تفرق کی مساوات 16.36 کو بھی ثابت کر پائیں گے۔

□

مسئلہ 16.4 کی استعمال سے مسئلہ کوشی کا الٹ ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ 16.5: مسئلہ موریرا[13]
اگر سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ استمراری ہو اور D میں ہر بند راہ پر

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{16.38}$$

ہو تب D میں $f(z)$ تحلیلی ہو گا۔

ثبوت: حصہ 16.4 میں دکھایا گیا کہ D میں $f(z)$ تحلیلی ہونے کی صورت میں D میں

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z^*)\,\mathrm{d}z^*$$

تحلیلی ہو گا اور $F'(z) = f(z)$ ہو گا۔ ایسا ثابت کرتے ہوئے ہم نے صرف $f(z)$ کی استمرار اور اس حقیقت کو استعمال کیا کہ D میں ہر بند راہ پر $f(z)$ کا تکمل صفر ہے؛ ان مفروضوں سے ہم نے اخذ کیا کہ $F(z)$ تحلیلی ہے۔ مسئلہ 16.4 کے تحت $F(z)$ کا تفرق تحلیلی ہے یعنی D میں $f(z)$ تحلیلی ہے۔یوں مسئلہ موریرا ثابت ہوا۔

[13] اطالوی ریاضی دان جاچینتو موریرا [1856-1909]

□

ہم اب ایک اہم عدم مساوات دریافت کرتے ہیں۔ مساوات 16.36 میں فرض کریں کہ C رداس r کا ایک دائرہ ہے جس کا مرکز z_0 پر ہے اور C پر $|f(z)|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت M ہے۔تب مساوات 16.16 کو مساوات 16.36 پر لاگو کرتے ہوئے

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{n!}{2\pi}M\frac{1}{r^{n+1}}2\pi r$$

ملتا ہے جس سے کوشی عدم مساوات[14]

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{n!M}{r^n} \tag{16.39}$$

حاصل ہوتی ہے۔

آئیں مساوات 16.39 سے درج ذیل اہم اور بنیادی نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

مسئلہ 16.6: مسئلہ لیوویل
محدود مخلوط مستوی (حصہ 15.3) میں تمام z کے لئے تحلیلی $f(z)$ اور محدود $|f(z)|$ کی صورت میں $f(z)$ مستقل ہو گا۔

ثبوت: ہم فرض کر چکے ہیں کہ تمام z کے لئے $|f(z)|$ محدود ہے مثلاً $|f(z)| < K$ جہاں K حقیقی عددی ہے۔ مساوات 16.39 استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $|f'(z_0)| < \frac{K}{r}$ ہو گا۔چونکہ یہ ہر r کے لئے درست ہے لہٰذا ہم r کو جتنا چاہیں بڑا لے سکتے ہیں جس سے $f'(z_0) = 0$ حاصل ہوتا ہے۔چونکہ z_0 اختیاری ہے اور تمام محدود z کے لئے $f'(z) = 0$ ہے لہٰذا $f(z)$ مستقل (سوال 14.133) ہو گا۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

[14] Cauchy's inequality

سوالات

سوال 16.118 تا سوال 16.132 میں دیے تفاعل کا گھڑی کی الٹ رخ اکائی دائرے پر تکمل تلاش کریں۔

سوال 16.118: $\frac{z^2}{(3z-1)^2}$
جواب: $i\frac{4\pi}{27}$

سوال 16.119: $\frac{z^2}{(3z-1)^4}$
جواب: 0

سوال 16.120: $\frac{z^2}{(2z-i)^3}$
جواب: $-\frac{3\pi}{8}$

سوال 16.121: $\frac{z^4}{(z+i)^2}$
جواب: -8π

سوال 16.122: $\frac{z}{(5z+i)^2}$
جواب: $i\frac{2\pi}{25}$

سوال 16.123: $\frac{e^z}{z^2}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.124: $\frac{e^z}{z^4}$
جواب: $i\frac{\pi}{3}$

سوال 16.125: $\frac{e^z}{z^n}$
جواب: $i\frac{2\pi}{(n-1)!}$

سوال 16.126: $\frac{ze^z}{(z+i\pi)^2}$
جواب: $i2\pi(i\pi-1)$

سوال 16.127: $z^{-2}\cos z$
جواب: 0

سوال 16.128: $z^{-2}\sin z$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.129: $z^{-2n-1}\cos z$
جواب: $i\frac{2\pi(-1)^n}{(2n)!}$

سوال 16.130: $\frac{e^{z^2}}{z^3}$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.131: $z^{-2}e^{z}\sin z$
جواب: $i2\pi$

سوال 16.132: $z^{-3}e^{z^3}$
جواب: 0

سوال 16.133: اگر $f(z)$ غیر مستقل ہو اور تمام (محدود) z کے لئے تحلیلی ہو، اور M اور R کوئی مثبت حقیقی اعداد ہیں (جو جتنا چاہیں بڑے ہو سکتے ہیں) تب دکھائیں کہ z کی ایسی قیمتیں موجود ہوں گی جن کے لئے $\lvert z\rvert > R$ اور $\lvert f(z)\rvert > M$ ہو گا۔اشارہ۔ مسئلہ لیوویل استعمال کریں۔

سوال 16.134: اگر $f(z)$ درجہ $n > 0$ کا کثیر رکنی ہو اور M (جتنا چاہیں بڑا) اختیاری مثبت حقیقی عدد ہو تب دکھائیں کہ ایسا حقیقی مثبت عدد R موجود ہو گا کہ تمام $\lvert z\rvert > R$ کے لئے $\lvert f(z)\rvert > M$ ہو گا۔

سوال 16.135: دکھائیں کہ $f(z) = e^{z}$ سوال 16.133 میں بیان کی گئی خاصیت رکھتا ہے جبکہ سوال 16.134 میں بیان کہ گئی خاصیت نہیں رکھتا ہے۔

سوال 16.136: الجبرا کا بنیادی مسئلہ[15] کہتا ہے کہ اگر غیر مستقل تفاعل $f(z)$ متغیرہ z کا کثیر رکنی ہو تب z کی کم از کم ایک قیمت کے لئے $f(z) = 0$ ہو گا۔اس مسئلے کو ثابت کریں۔ اشارہ۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام z کے لئے $f(z) \neq 0$ ہے سوال 16.133 کا نتیجہ $g = \frac{1}{f}$ پر لاگو کریں۔

[15] Fundamental theorem of algebra

باب 17

ترتیب اور تسلسل

اس باب میں مخلوط اور حقیقی ترتیب اور تسلسل کے بنیادی تصورات پیش کیے جائیں گے۔

17.1 ترتیب

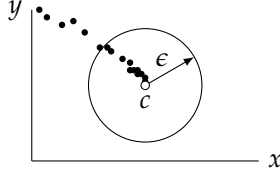
تسلسل، بالخصوص طاقتی تسلسل مخلوط تجزیہ میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ان کو متعارف کرنے کی خاطر ہم پہلے ترتیب اور اس سے متعلقہ تصورات کی تعریف پیش کرتے ہیں۔ہم دیکھیں گے کہ مخلوط ترتیب اور تسلسل کی زیادہ تر مسئلے اور تعریف، حقیقی ترتیب اور تسلسل کے مسائل اور تعریف کی مانند ہوں گے جنہیں حقیقی احصاء میں استعمال کیا جاتا ہے۔

اگر ہر مثبت عدد صحیح n کو عدد z_n مختص کی جائے تب ہم کہتے ہیں کہ اعداد

$$z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$$

لامتناہی ترتیب[1] یا، مختصراً، **ترتیب** بناتے ہیں۔ان اعداد z_n کو ترتیب کے مقدار یا اجزاء[2] کہتے ہیں۔

حقیقی اجزاء پر مبنی ترتیب کو **حقیقی ترتیب**[3] کہتے ہیں۔

[1] infinite sequence
[2] terms
[3] real sequence

شکل 17.1: مرتکز مخلوط ترتیب

بعض اوقات ہم ترتیب کے اجزاء کی گنتی 0 یا 2 یا کسی دیگر عدد صحیح سے شروع کرتے ہیں۔

ایک ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ اس صورت مرکوز یا مرتکز ہو گا جب ایسا عدد c پایا جاتا ہو کہ کسی بھی مثبت (غیر صفر) حقیقی عدد ϵ (جو چاہے جتنا چھوٹا کیوں نہ ہو) کی صورت میں ہم ایسا عدد صحیح N تلاش کر سکتے ہوں کہ تمام $n > N$ کے لئے درج ذیل درست ہو۔

$$|z_n - c| < \epsilon \qquad n > N \tag{17.1}$$

c کو ترتیب کا حد[4] کہتے ہیں جس کو عموماً

$$z_n \to c \qquad (n \to \infty)$$

لکھا جاتا ہے اور ہم کہتے ہیں کہ ترتیب c کو مرکوز ہے یا کہ ترتیب کی حد c ہے۔

ایسی ترتیب جو مرتکز نہ ہو منفرج[5] کہلاتی ہے۔

مساوات 17.1 کا ایک سادہ جیومیٹریائی مطلب ہے۔یہ مساوات کہتی ہے کہ $n > N$ کی صورت میں ہر جزو z_n اس کھلے قرص میں پایا جاتا ہے جس کا رداس ϵ اور مرکز c ہے (شکل 17.1) جبکہ قرص کا رداس ϵ کتنا ہی کم کیوں نہ کر دیا جائے اس قرص کے باہر اجزاء z_n کی زیادہ سے زیادہ تعداد متناہی ہو گی۔ظاہر ہے کہ N کی قیمت عموماً ϵ پر منحصر ہو گی۔

حقیقی ترتیب کی صورت میں مساوات 17.1 جیومیٹریائی طور کہتی ہے کہ $n > N$ کی صورت میں جزو z_n وقفہ $c - \epsilon$ تا $c + \epsilon$ پر پایا جائے گا (شکل 17.2) اور اس وقفہ سے باہر اجزاء کی زیادہ سے زیادہ تعداد متناہی ہو گی۔

---

[4] limit
[5] divergent

$c-\epsilon \quad c \quad c+\epsilon \quad x$

شکل 17.2: حقیقی مرتکز ترتیب

مثال 17.1: مرتکز اور منفرج ترتیب
ترتیب $z_n = 1+\frac{2}{n}$ کے اجزاء $3, 2, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \cdots$ ہیں۔یہ ترتیب مرتکز ہے اور اس کی حد $c = 1$ ہے۔در حقیقت مساوات 17.1 سے

$$z_n - c = 1+\frac{2}{n} - 1 = \frac{2}{n}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\frac{2}{n} < \epsilon$ اس صورت ہو گا جب $\frac{n}{2} > \frac{1}{\epsilon}$ یا $n > \frac{2}{\epsilon}$ ہو۔مثلاً $\epsilon = 0.01$ منتخب کرتے ہوئے $\frac{2}{n} < 0.01$ تب ہو گا جب $n > 200$ ہو۔

ترتیب $1, 2, 3, \cdots$ اور $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \cdots$ منفرج ہیں۔

وہ ترتیب جس کے اجزاء

$$z_n = 2 - \frac{1}{n} + i\Big(1+\frac{2}{n}\Big)$$

یعنی

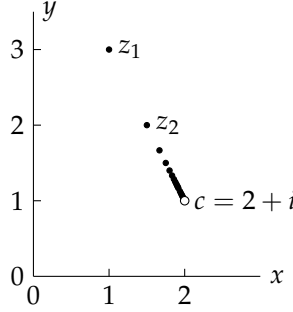
$$1+i, \quad \frac{3}{2}+i2, \quad \frac{7}{4}+i\frac{3}{2}, \cdots$$

ہیں کو شکل 17.3 میں دکھایا گیا ہے جہاں پہلے دو اجزاء $z_1 = 1+i3$ اور $z_2 = \frac{3}{2}+i2$ کی نشاندہی کی گئی ہے۔یہ ترتیب مرتکز ہے اور اس کی حد $c = 2+i$ ہے۔مساوات 17.1 سے

$$|z_n - c| = \left|\frac{2n-1}{n} + i\frac{n+2}{n} - (2+i)\right| = \left|-\frac{1}{n} + i\frac{2}{n}\right| = \frac{\sqrt{5}}{n}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں $\frac{\sqrt{5}}{n} < \epsilon$ تب ہو گا جب $\frac{n}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\epsilon}$ یعنی $n > \frac{\sqrt{5}}{\epsilon}$ ہو۔مثال کے طور پر $\epsilon = \frac{1}{100}$ منتخب کرتے ہوئے $|z_n - c| < \epsilon$ تب ہو گا جب $n > 223.6$ یعنی $n = 224$ یا $n = 225$، وغیرہ ہو۔ □

مخلوط ترتیب $z_1, z_2, z_3, \cdots$ کی صورت میں $z_n = x_n + iy_n$ لکھ کر ہم حقیقی حصوں کی ترتیب اور خیالی حصوں کی ترتیب

$$x_1, x_2, x_3, \cdots \quad \text{اور} \quad y_1, y_2, y_3, \cdots$$

شکل 17.3: مثال 17.1 میں آخری ترتیب

پر علیحدہ علیحدہ غور کر سکتے ہیں۔ مثلاً مثال 17.1 کی آخری ترتیب کے دو علیحدہ علیحدہ ترتیب درج ذیل ہوں گی۔

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \cdots \quad \text{اور} \quad 3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \cdots$$

ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی اور خیالی ترتیب کے حد بالترتیب 2 اور 1 ہیں (شکل 17.3) جو اصل مخلوط ترتیب کی حقیقی اور خیالی حصوں کی حد ہیں۔ عموماً ایسا ہی ہوتا ہے جو درج ذیل کی ایک مثال ہے۔

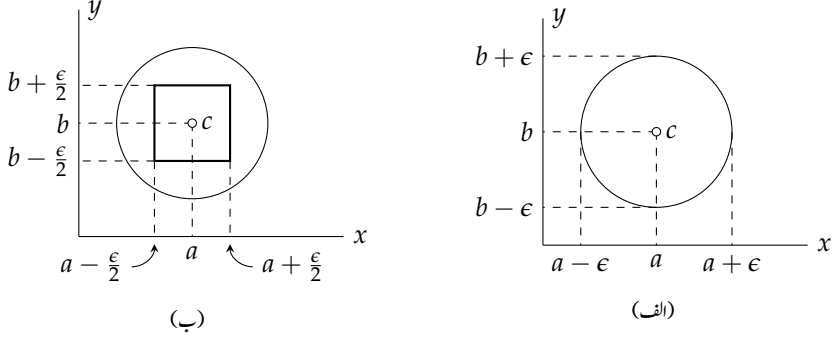
مسئلہ 17.1: (حقیقی اور خیالی اجزاء کی ترتیب)
مخلوط اعداد $(n = 1, 2, \cdots)$ $z_n = x_n + iy_n$ کی ترتیب $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ صرف اور صرف اس صورت حد $c = a + ib$ پر مرکوز ہو گی جب حقیقی حصوں کی ترتیب $x_1, x_2, \cdots$ نقطہ a پر مرتکز ہو اور خیالی حصوں کی ترتیب $y_1, y_2, \cdots$ نقطہ b پر مرتکز ہو۔

ثبوت: اگر $|z_n - c| < \epsilon$ ہو تب $z_n = x_n + iy_n$ اس دائرہ کے اندر پایا جائے گا جس کا رداس ϵ اور مرکز $c = a + ib$ ہوں۔ یوں لازماً

$$|x_n - a| < \epsilon, \quad |y_n - b| < \epsilon$$

ہو گا (شکل 17.4-الف)۔ یوں $n \to \infty$ کی صورت میں مرکوزیت $z_n \to c$ سے مراد مرکوزیت $x_n \to a$ اور مرکوزیت $y_n \to b$ ہے۔

اس کی الٹ چلتے ہوئے، اگر $n \to \infty$ کی صورت میں $x_n \to a$ اور $y_n \to b$ ہوں تب کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کی صورت میں ہم ایسا N اتنا بڑا منتخب کر سکتے ہیں کہ ہر $n > N$ کے لئے

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

شکل 17.4: مسئلہ 17.1 کا ثبوت

ہو۔ان دو عدم مساوات کہتی ہیں کہ $z_n = x_n + iy_n$ اس چکور کے اندر پایا جائے گا جس کے اطراف کی لمبائی ϵ اور مرکز c ہو (شکل 17.4-ب)۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اس مسئلہ کی باعث حقیقی حصہ اور خیالی حصہ کی ترتیب پر غور کرتے ہوئے مخلوط ترتیب کی مرکوزیت کو حقیقی ترتیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اگر ایسا مثبت عدد K پایا جاتا ہو کہ مرکز پر رداس K کے دائرے میں ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ کے تمام اجزاء پائے جاتے ہوں یعنی

$$|z_n| < K \qquad \text{تمام } n$$

تب یہ ترتیب **محدود**[6] کہلاتا ہے۔ایسی ترتیب جو محدود نہ ہو **غیر محدود**[7] کہلاتا ہے۔

اس تصور کو استعمال کرتے ہوئے انفراج کو عموماً درج ذیل سادہ مسئلہ سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 17.2: ہر مرتکز ترتیب محدود ہو گی۔یوں اگر ایک ترتیب غیر محدود ہو تب یہ منفرج ہو گی۔

bounded[6]
unbounded[7]

ثبوت : فرض کریں کہ ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ مرکوز ہے اور اس کی حد c ہے۔ تب ہم $\epsilon > 0$ منتخب کرتے ہوئے ایسا مطابقتی N تلاش کر سکتے ہیں کہ $n > N$ کے لئے ہر z_n رداس ϵ کے قرص، جس کا مرکز c ہو، میں پائے جائیں گے اور وہ z_n جو اس قرص کے باہر ہوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد متناہی ہو گی۔اب ظاہر ہے کہ ہم مرکز پر اتنے بڑی رداس K کا دائرہ منتخب کر سکتے ہیں کہ یہ قرص اور قرص کے باہر تمام z_n اس دائرے میں پائیں جاتے ہوں۔اس سے ثابت ہوتا ہے کہ یہ ترتیب محدود ہے۔

□

یہاں دہان رہے کہ محدود ہونا مرکوزیت کے لئے کافی نہیں ہے۔مثلاً ترتیب $1, 0, 1, 0, \cdots$ محدود لیکن منفرج ہے۔ (کیوں؟) غیر محدود ترتیب کی مثالیں درج ذیل ہیں

$$1, 2, 3, 4, \cdots \quad \text{اور} \quad \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \cdots$$

جو مسئلہ 17.2 کے تحت منفرج ترتیب ہیں۔

سوالات

سوال 17.1 تا سوال 17.6 میں دیے ترتیب کے ابتدائی چند اجزاء لکھ کر ترسیم کریں۔

سوال 17.1: $\frac{n}{n+3}$
جواب: $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \cdots$

سوال 17.2: $\frac{2n}{n^2+1}$
جواب: $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{17}, \frac{5}{13}, \cdots$

سوال 17.3: $\frac{i^n}{n^2}$
جواب: $i, -\frac{1}{4}, -\frac{i}{9}, \frac{1}{16}, \frac{i}{25}, \cdots$

سوال 17.4: $\frac{in}{n+1}$
جواب: $\frac{i}{2}, \frac{i2}{3}, \frac{i3}{4}, \frac{i4}{5}, \frac{i5}{6}, \cdots$

سوال 17.5: $\frac{i^n n^2}{n+i}$
جواب: $\frac{1}{2}(1+i), \frac{4}{5}(-2+i), \frac{9}{10}(-1-i3), \frac{16}{17}(4-i), \frac{25}{26}(1+i5), \cdots$

سوال 17.6: $(-1)^n + i2\pi n$
جواب: $-1+i2\pi, 1+i4\pi, -1+i6\pi, 1+i8\pi, -1+i10\pi, \cdots$

سوال 17.7: ترتیب $z_1=1$ ، $z_2=\frac{i}{2}$ ، $z_n = iz_{n-2}z_{n-1}\ (n=3,4,\cdots)$ کے ابتدائی چند اجزاء لکھیں۔اس ترتیب کی حد تلاش کریں۔
جواب: $1, \frac{i}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{i}{8}, \cdots$

سوال 17.8 تا سوال 17.13 میں دریافت کریں کہ آیا دی گئی ترتیب محدود ہے؟ کیا یہ ترتیب مرکوز ہے؟ مرکوزیت کی صورت میں ترتیب کی حد تلاش کریں۔

سوال 17.8: $z_n = i^n$
جواب: محدود، منفرج

سوال 17.9: $z_n = \frac{i^n}{n}$
جواب: محدود، مرکوز، حد 0

سوال 17.10: $z_n = \frac{in}{n+1}$
جواب: محدود، مرکوز، حد i

سوال 17.11: $z_n = \frac{n^2}{n+i}$
جواب: غیر محدود، منفرج

سوال 17.12: $z_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$
جواب: محدود، مرکوز، حد 0

سوال 17.13: $z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$
جواب: محدود، منفرج

سوال 17.14: حد کی یکتائی
دکھائیں کہ اگر ایک ترتیب مرتکز ہو تب اس کا حد یکتا ہو گا۔

سوال 17.15: ثابت کریں (مثال 17.1 کی طرح) کہ $\frac{i^n}{n^3}$ مرکوز ہے۔

سوال 17.16: ایک ترتیب کے اجزاء درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔اس ترتیب کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ 17.1 کی تصدیق کریں۔

$$z_n = \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 1} + i\frac{n}{n+2}$$

سوال 17.17: دکھائیں کہ مخلوط ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ اس صورت محدود ہو گی جب اس کے حقیقی حصہ اور خیالی حصہ کے مطابقتی ترتیب محدود ہوں۔

سوال 17.18: اگر ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ مرکوز ہو اور اس کا حد 0 ہو، اور ترتیب $b_1, b_2, \cdots$ کسی مقررہ $K > 0$ اور تمام n کے لئے $|b_n| \le K|z_n|$ کو مطمئن کرتا ہو تب دکھائیں کہ ترتیب $b_1, b_2, \cdots$ مرکوز ہے اور اس کا حد 0 ہے۔

سوال 17.19: اگر ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ مرکوز ہو اور اس کا حد l ہو اور ترتیب $z_1^*, z_2^*, \cdots$ مرکوز ہو اور اس کا حد l^* ہو تب دکھائیں کہ ترتیب $z_1 + z_1^*, z_2 + z_2^*, \cdots$ مرکوز ہو گا اور اس کا حد $l + l^*$ ہو گا۔

سوال 17.20: سوال 17.19 کے مفروضوں کے ساتھ دکھائیں کہ ترتیب $z_1 z_1^*, z_2 z_2^*, \cdots$ مرکوز ہو گا اور اس کا حد ll^* ہو گا۔

17.2 تسلسل

فرض کریں کہ $w_1, w_2, \cdots, w_m, \cdots$ حقیقی یا مخلوط اعداد کی ترتیب ہے۔تب ہم درج ذیل لامتناہی تسلسل یا، مختصراً، **تسلسل**[8] پر غور کرتے ہیں۔

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots \tag{17.2}$$

w_m کو ترتیب کی مقدار یا اجزاء[9] کہتے ہیں۔ابتدائی n اجزاء کے مجموعہ

$$s_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n \tag{17.3}$$

---

series[8]
terms[9]

کو تسلسل 17.2 کا n واں **جزوی مجموعہ**[10] کہتے ہیں۔ تسلسل 17.2 سے s_n ترک کرنے سے

$$R_n = w_{n+1} + w_{n+2} + w_{n+3} + \cdots \tag{17.4}$$

باقی رہ جاتا ہے جس کو تسلسل 17.2 کا، n اجزاء کے بعد، **باقی**[11] کہتے ہیں۔

اس طرح ہم تسلسل 17.2 کے ساتھ اس کے جزوی مجموعوں $s_1, s_2, s_3, \cdots$ کی ترتیب وابستہ کرتے ہیں۔اگر یہ ترتیب مرتکز ہو، مثلاً،

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

تب ہم کہتے ہیں کہ تسلسل 17.2 **مرکوز**[12] یا **مرتکز** ہے اور عدد s اس کی **قیمت**[13] یا مجموعہ کہلاتا ہے اور ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

اگر جزوی مجموعوں کی ترتیب منفرج ہو تب ہم کہتے ہیں کہ تسلسل 17.2 **منفرج**[14] ہے۔

اگر تسلسل 17.2 مرکوز ہو اور اس کی قیمت s ہو تب

$$s = s_n + R_n \quad \Longrightarrow \quad R_n = s - s_n \tag{17.5}$$

ہو گا۔مرکوزیت کی تعریف کی رو سے n کو کافی بڑا لیتے ہوئے ہم $|R_n|$ کو جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں۔ بہت سی صورتوں میں مرکوز تسلسل کا مجموعہ s تلاش کرنا ناممکن ہو گا۔تب حساب کی خاطر ہم اس کے جزوی مجموعہ s_n کو s کی تقریب تصور کریں گے اور R_n کا تخمینہ لگا کر تقریب کی درستگی کا جائزہ لیں گے۔

مثال 17.2: مرتکز اور منفرج تسلسل

تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

---

[10] partial sum
[11] remainder
[12] convergent
[13] value
[14] divergent

مرکوز ہے اور چونکہ

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \implies \quad \lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

ہے لہٰذا تسلسل کی قیمت 1 ہے۔اس کے برعکس تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} m = 1 + 2 + 3 + \cdots$$

منفرج ہے اور تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m = 1 - 1 + 1 - + \cdots$$

منفرج ہے چونکہ

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1 - 1 = 0, \quad s_2 = 1 - 1 + 1 = 1, \cdots$$

ہے اور ترتیب $1, 0, 1, 0, \cdots$ منفرج ہے۔

ہارمونی تسلسل[15]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

منفرج ہے۔در حقیقت جزوی مجموعہ s_n

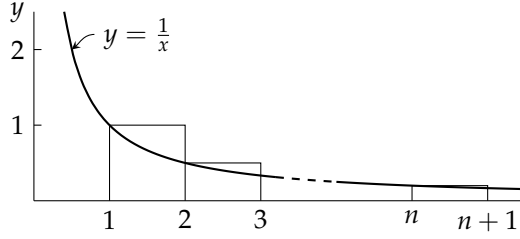
$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

شکل 17.2 میں n عدد مستطیل کے نیچے رقبہ کے برابر ہے۔یہ رقبہ قوس $y = \frac{1}{x}$ کے نیچے مطابقتی رقبہ A_n سے زیادہ ہے۔اب

$$A_n = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(n+1) \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

ہے اور چونکہ $s_n > A_n$ ہے لہٰذا $n \to \infty$ کرنے سے $s_n \to \infty$ حاصل ہو گا جو انفراج کی تعریف ہے۔
□

---

[15] harmonic series

شکل 17.5: شکل برائے مثال 17.2

مسئلہ 17.1 سے فوری طور پر تسلسل کے لئے درج ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 17.3: **حقیقی اور خیالی حصوں کی تسلسل**
فرض کریں کہ $w_m = u_m + iv_m$ ہے۔تب تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

کی قیمت صرف اور صرف اس صورت $s = a + jb$ ہو گی جب حقیقی حصہ کی تسلسل اور خیالی حصہ کی تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \quad \text{اور} \quad \sum_{m=1}^{\infty} v_m = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

مرکوز ہوں اور حقیقی حصے کی تسلسل کی قیمت a اور خیالی حصے کی تسلسل کی قیمت b ہو۔

یہ مسئلہ حقیقی اور مخلوط تسلسل کے درمیان تعلق دیتا ہے۔اس سے زیادہ اہم تعلق درج ذیل تصور پر مبنی ہے۔

تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ اس صورت **مطلق مرتکز**[16] کہلاتا ہے جب مطابقتی تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} |w_m| = |w_1| + |w_2| + \cdots \tag{17.6}$$

(جس کے اجزاء حقیقی اور غیر منفی ہیں) مرتکز ہو۔

[16] absolutely convergent

اگر تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ مرکوز ہو جبکہ تسلسل 17.6 منفرج ہو تب تسلسل **مشروط مرتکز**[17] کہلاتا ہے۔

مثال 17.3: *مطلق اور مشروط مرکوز تسلسل*
تسلسل

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + - \cdots$$

مطلق مرتکز ہے چونکہ مطابقتی تسلسل 17.6 مرکوز ہے (مثال 17.2)۔اس کے برعکس تسلسل

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

مشروط مرکوز ہے چونکہ تسلسل از خود (لیبنٹز پرکھ کے تحت جس پر حصہ 17.4 میں غور کیا جائے گا) مرتکز ہے لیکن مطابقتی تسلسل 17.6 ہارمونی ہے جو منفرج ہے (مثال 17.2)۔ □

مطلق مرتکز تسلسل کی درج ذیل خاصیت بالکل واضح ہے۔

مسئلہ 17.4: اگر تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ مطلق مرتکز ہو تب یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔

ہم اگلے حصے کی آخر میں کوشی اصول مرکوزیت کی مدد سے مسئلہ 17.9 میں اس مسئلے کا سادہ ثبوت پیش کریں گے
۔

ہم آخر میں ایک سادہ مسئلہ پیش کرتے ہیں جو عموماً کارآمد ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 17.5: اگر تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ مرتکز ہو تب

$$\lim_{m\to\infty} w_m = 0 \tag{17.7}$$

ہو گا۔یوں وہ تسلسل جو مساوات 17.7 کو مطمئن نہ کرتا ہو منفرج ہو گا۔

---

[17] conditional convergent

ثبوت: فرض کریں کہ $w_1 + w_2 + \cdots$ مرتکز ہے اور اس کا مجموعہ s ہے۔ تب

$$w_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

اور

$$\lim_{n\to\infty}(s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0$$

ہو گا۔

□

یاد رہے کہ مساوات 17.7 مرکوزیت کے لئے لازمی لیکن ناکافی شرط ہے۔ مثلاً مثال 17.2 کی ہارمونی تسلسل مساوات 17.7 کو مطمئن کرتے ہوئے بھی منفرج ہے۔ مساوات 17.7 میں دوسری اور تیسری تسلسل مساوات 17.7 کو مطمئن نہیں کرتے ہیں لہٰذا وہ منفرج ہیں۔

17.3 کوشی اصول مرکوزیت برائے ترتیب اور تسلسل

کسی بھی ترتیب یا تسلسل کو استعمال کرنے سے پہلے ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا وہ مرتکز ہے یا نہیں۔ چونکہ ہمیں پہلے سے حد معلوم نہیں ہوتا ہے لہٰذا مرکوزیت کی تعریف سے ایسا فیصلہ کرنا عموماً ممکن نہیں ہو گا۔ کوشی اصول مرکوزیت سے، حد جانے بغیر مرکوزیت دریافت کرتا ہے۔

کوشی اصول مرکوزیت میں ہم مسئلہ بُلزانو وائشٹراس زیر استعمال لائیں گے۔ مسئلہ بُلزانو وائشٹراس کو بیان کرنے کی خاطر درج ذیل تصور کی ضرورت ہو گی۔

نقطہ a اس صورت ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ کا **تحدیدی نقطہ**[18] کہلائے گا جب کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ (جو جتنا چاہیں چھوٹا کیوں نا ہو) کے لئے درج ذیل درست ہو۔

$$|z_n - a| < \epsilon \qquad \text{(جہاں } n \text{ لامتناہی تعداد ہے)} \tag{17.8}$$

جیومیٹریائی طور پر اس کا مطلب ہے کہ ϵ کو جتنا بھی چھوٹا کیوں نہ منتخب کیا جائے، رداس ϵ کا دائرہ جس کا مرکز a ہو، میں تسلسل کے نقطوں کی لامتناہی تعداد پائی جائے گی۔

---

[18] limit point

جدول 17.1: تحدیدی نقطے، مرکوزیت، محدود ہونا (مثال 17.4)

ترتیب	تحدیدی نقطہ	مرتکز یا منفرج	محدود یا غیر محدود
$1, 2, 3, \cdots$	(کوئی نہیں)	منفرج	غیر محدود
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$	1	مرتکز	محدود
$\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \cdots$	0	منفرج	غیر محدود
$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \cdots$	0 اور 1	منفرج	محدود

دھیان رہے کہ مساوات 17.8 مطمئن ہونے کے باوجود دائرے کے باہر نقطوں کی تعداد لامتناہی ہو سکتی ہے اور ترتیب منفرج ہو سکتا ہے۔ در حقیقت مرتکز ترتیب کا حد ہی تحدیدی نقطہ ہو گا (کیوں؟) اور یہ ترتیب کا واحد تحدیدی نقطہ ہو گا۔اگر کسی ترتیب کا ایک سے زیادہ تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو تب یہ ترتیب منفرج ہو گا۔

مزید، اگر ایک نقطہ لامتناہی بار کسی ترتیب میں پایا جاتا ہو تب تحدیدی نقطہ کی تعریف کی رو سے یہی نقطہ اس ترتیب کا تحدیدی نقطہ ہو گا۔

آئیں صورت حال کو سمجھنے کے لئے مثال 17.4 دیکھتے ہیں۔یاد رہے کہ حصہ 17.1 کے آخر کے قریب محدود ہونے کی تعریف پیش کی گئی۔

مثال 17.4: **تحدیدی نقطہ، مرکوزیت اور محدود ہونا**
جدول 17.1 میں مختلف ممکنہ صورت حال دکھائے گئے ہیں۔ □

اس مثال میں دو محدود ترتیب کے تحدیدی نقطے پائے گئے جو درج ذیل اہم مسئلہ کے عین مطابق ہے۔

مسئلہ 17.6: **بلزانو[19] اور وائشٹراس[20]**
مخلوط مستوی میں محدود لامتناہی ترتیب $z_1, z_2, z_3, \cdots$ کا کم از کم ایک عدد تحدیدی نقطہ ہو گا۔

ثبوت: صاف ظاہر ہے کہ ہمیں دونوں شرائط کی ضرورت ہو گی: ایک متناہی ترتیب کا کوئی تحدیدی نقطہ نہیں ہو گا، اور ترتیب $1, 2, 3, \cdots$ جو لامتناہی لیکن غیر محدود ہے کا کوئی تحدیدی نقطہ نہیں ہے۔اس مسئلے کو ثابت کرنے کی خاطر محدود لامتناہی ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ پر غور کرتے ہیں جہاں تمام n کے لئے K ایسا عدد ہے

[19] جرمن ریاضی دان برنارٹ بلزانو [1781-1848]
[20] جرمن ریاضی دان کارل وائشٹراس [1815-1897]

شکل 17.6: مسئلہ 17.6 کا ثبوت

جو $|z_n| < K$ کو مطمئن کرتا ہو۔اگر z_n کی قیمتوں میں متناہی تعداد قیمتیں آپس میں مختلف ہوں، تب، چونکہ ترتیب لامتناہی ہے لہٰذا کوئی عدد z ترتیب میں ضرور لامتناہی بار پایا جائے گا، جو تحدیدی نقطہ کی تعریف کی رو سے، اس ترتیب کا تحدیدی نقطہ ہو گا۔

آئیں اب اس صورت پر غور کرتے ہیں جب ترتیب میں لامتناہی تعداد کی مختلف قیمتیں پائی جاتی ہوں۔ہم ایک بڑا چکور Q_0 بناتے ہیں (شکل 17.6) جس میں تمام z_n پائے جاتے ہیں۔ہم اس چکور کو چار مماثل چکوروں میں تقسیم کرتے ہیں۔ظاہر ہے کہ ان میں سے کم از کم ایک چکور (بشمول چکور کی مکمل سرحد) میں ترتیب کے لامتناہی تعداد کے اجزاء پائے جائیں گے۔ ایسے چکور کو ہم Q_1 سے ظاہر کرتے ہیں۔یہ پہلا قدم ہے۔دوسرے قدم میں ہم Q_1 کو چار مماثل چکوروں میں تقسیم کرتے ہوئے اسی قاعدہ کے تحت چکور Q_2 منتخب کرتے ہیں۔اسی طرح چلتے ہوئے ہمیں چکوروں کی ترتیب $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, \cdots$ یوں حاصل ہوتی ہے کہ $n \to \infty$ کرتے ہوئے چکور Q_n کے طرف کی لمبائی صفر کو پہنچتی ہے اور $n > m$ کی صورت میں Q_m میں تمام Q_n شامل ہوں گے۔یہاں صاف ظاہر ہے کہ وہ عدد (جس کو ہم $z = a$ کہتے ہیں) جو ان تمام چکوروں میں پایا جاتا ہو[21] ترتیب کا تحدیدی نقطہ ہو گا۔درحقیقت کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کی صورت میں ہم N اتنا بڑا منتخب کر سکتے ہیں کہ چکور Q_N کی ایک طرف کی لمبائی ϵ سے چھوٹی ہو، اور چونکہ Q_N میں لامتناہی تعداد کے z_n پائے جاتے ہیں لہٰذا لامتناہی تعداد کے z_n کے لئے $|z_n - a| < \epsilon$ ہو گا۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب اس حصے کی مرکزی مسئلہ کو پیش کرنے کے قابل ہیں۔

---

[21] ایسے یکتا عدد $a = z$ کی موجودگی صاف واضح ہے لیکن حقیقتاً حقیقی اعداد کے نظام کی ایک مسلمہ سے یہ حقیقت حاصل ہوتی ہے جس کو مسلمہ کانتور اور دے دے کند کہتے ہیں۔ صفحہ 1207 پر حاشیہ دیکھیں۔

مسئلہ 17.7: (کوشی اصول مرکوزیت برائے ترتیب)
ترتیب $z_1, z_2, z_3, \cdots$ صرف اور صرف اس صورت مرکوز ہو گی جب ہر مثبت عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا عدد N (جو ϵ پر منحصر ہو سکتا ہے) تلاش کر سکیں کہ $m > N$ اور $n > N$ کے لئے

$$|z_m - z_n| < \epsilon \qquad m > N, n > N \tag{17.9}$$

ہو؛ (یعنی $m > N, n > N$ کی صورت میں دو اجزاء z_m, z_n کا ایک دوسرے سے فاصلہ ϵ سے کم ہو)۔

ثبوت: (الف) فرض کریں کہ ترتیب $z, z_2, \cdots$ مرکوز ہے اور اس کا حد c ہے۔ تب دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا N تلاش کر سکتے ہیں کہ ہر $n > N$ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو گا۔

$$|z_n - c| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{ہر } n > N$$

یوں جب $m > N, n > N$ ہوں تب تکونی عدم مساوات کے تحت

$$|z_m - z_n| = \left|(z_m - c) - (z_n - c)\right| \le |z_m - c| + |z_n - c| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ہو گا یعنی اگر ترتیب مرکوز ہو تب مساوات 17.9 مطمئن ہو گی۔

(ب) اب الٹ چلتے ہوئے دوسرا ثبوت پیش کرتے ہیں۔ ترتیب $z_1, z_2, \cdots$ جو مساوات 17.9 کو مطمئن کرتا ہو پر غور کرتے ہیں۔ ہم پہلے دکھاتے ہیں کہ یہ ترتیب محدود ہے۔ مساوات 17.9 میں ایک مقررہ ϵ اور ایک مقررہ $n = n_0 > N$ منتخب کریں۔ تب مساوات 17.9 کہتی ہے کہ ہر $m > N$ کے لئے ہر z_m، رداس ϵ کے قرص جس کا مرکز z_{n_0} ہو میں پایا جائے گا، اور ترتیب کے اجزاء کی متناہی تعداد قرص کے باہر پائی جائے گی۔ اب ظاہر ہے کہ ہم مبدا پر اتنا بڑا دائرہ لے سکتے ہیں کہ قرص اور z_n کے متناہی تعداد کے وہ اجزاء جو قرص کے باہر ہیں، اس دائرے کے اندر پائے جائیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ یہ ترتیب محدود ہے، اور مسئلہ بُلزانو اور وائشٹراس (مسئلہ 17.6) کے تحت اس ترتیب کا کم از کم ایک تحدیدی نقطہ ہو گا، جس کو ہم L کہتے ہیں۔

ہم اب دکھائیں گے کہ یہ ترتیب مرکوز ہے اور اس کا حد L ہے۔ تحدیدی نقطہ کی تعریف سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کی صورت میں لامتناہی تعداد کی n کے لئے $|z_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$ ہو گا۔ چونکہ مساوات 17.9 کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لئے درست ہے، جب کوئی $\epsilon > 0$ دیا گیا ہو ہم ایسا N^* تلاش کر سکتے ہیں کہ کسی بھی $m > N^*, n > N^*$ کے لئے $|z_m - z_n| < \frac{\epsilon}{2}$ ہو۔ ایک مقررہ $n > N^*$ یوں منتخب کریں

کہ $|z_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$ ہو اور فرض کریں کہ m ایسا عدد صحیح ہے جو N^* سے بڑا ہو۔تب تکونی عدم مساوات سے

$$|z_m - L| = \left|(z_m - z_n) + (z_n - L)\right| \leq |z_m - z_n| + |z_n - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ہو گا، یعنی، تمام $m > N^*$ کے لئے $|z_m - L| < \epsilon$ ہو گا، جو مرکوزیت کی تعریف ہے۔یوں یہ ترتیب مرکوز ہے اور اس کا حد L ہے۔

□

کسی بھی دیے گئے تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ کے جزوی مجموعوں s_n کی ترتیب پر ہم موجودہ مسئلے کا اطلاق کر سکتے ہیں۔ یوں عدم مساوات 17.9 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$|s_m - s_n| < \epsilon \qquad (m > N, n > N)$$

یا اگر ہم $m = n + p$ لکھیں تب

$$\left|s_{n+p} - s_n\right| < \epsilon \qquad (n > N, p = 1, 2, \cdots)$$

صورت اختیار کرے گی۔اب جزوی مجموعہ کی تعریف سے درج ذیل ہو گا۔

$$s_{n+p} - s_n = w_{n+1} + w_{n+2} + \cdots + w_{n+p}$$

اس سے درج ذیل بنیادی مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 17.8: (کوشی اصول مرکوزیت برائے تسلسل)
تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب ہر دیے گئے $\epsilon > 0$ (جو جتنا کم کیوں نہ ہو) کے لئے ہم ایسا N (جو عموماً ϵ پر منحصر ہو گا) تلاش کر سکیں کہ ہر $n > N$ اور $p = 1, 2, \cdots$ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\left|w_{n+1} + w_{n+2} + \cdots + w_{n+p}\right| < \epsilon \qquad n > N, \; p = 1, 2, \cdots$$

اس اہم مسئلے کی پہلی استعمال کے طور پر ہم مسئلہ 17.4 کو ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ 17.9: اگر تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ مطلق مرتکز ہو تب یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔

ثبوت: عمومی عدم مساوات 14.26 سے درج ذیل ہو گا۔

$$\left|w_{n+1} + \cdots + w_{n+p}\right| \le |w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \cdots + \left|w_{n+p}\right| \tag{17.10}$$

چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ تسلسل $|w_1| + |w_2| + \cdots$ مرتکز ہے لٰہذا مسئلہ 17.8 کے تحت مساوات 17.10 کا دایاں ہاتھ ہر $n > N$ (جہاں N کافی بڑا ہے) اور $p = 1, 2, \cdots$ کے لئے کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ سے چھوٹا ہو گا۔ یوں یہی کچھ مساوات 17.10 کے بائیں ہاتھ کے لئے بھی درست ہو گا لٰہذا، اسی مسئلہ کے تحت، تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ مرتکز ہو گا۔

□

سوالات

کیا سوال 17.21 تا سوال 17.35 میں دیے گئے ترتیب $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ محدود ہیں؟ مرتکز ہیں؟ ان کے تحدیدی نقطے تلاش کریں۔

سوال 17.21: $z_n = (i2)^n$
جواب: غیر محدود، منفرج، کوئی نہیں

سوال 17.22: $z_n = 1 + i^n$
جواب: محدود، منفرج، $0, 2, 1+i, 1-i$

سوال 17.23: $z_n = (-1)^n + \frac{i}{n}$
جواب: محدود، منفرج، $1, -1$

سوال 17.24: $z_n = e^{\frac{in\pi}{2}}$
جواب: محدود، منفرج، $1, -1, i, -i$

سوال 17.25: $z_n = i^n \cos n\pi$
جواب: محدود، منفرج، $1, -1, i, -i$

سوال 17.26: $z_n = i^n \cosh n\pi$
جواب: غیر محدود، منفرج، کوئی نہیں

سوال 17.27: $z_n = (1-i)^n$
جواب: غیر محدود، منفرج، کوئی نہیں

سوال 17.28: $z_n = (1+i)^{2n}$
جواب: غیر محدود، منفرج، کوئی نہیں

سوال 17.29: $z_n = \frac{(3+i4)^n}{n!}$
جواب: محدود، مرتکز، 0

سوال 17.30: $z_n = i\pi + \sin n\pi$
جواب: محدود، مرتکز، $i\pi$

سوال 17.31: $z_n = \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$
جواب: محدود، مرتکز، 0

سوال 17.32: $z_n = i^n n^2$
جواب: غیر محدود، منفرج، کوئی نہیں

سوال 17.33: $z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3, z_n = z_{n-3} - z_{n-2} + z_{n-1} \quad (n = 4, 5, \cdots)$
جواب: محدود، منفرج، $1, 2, 3$

سوال 17.34: $z_1 = \frac{1}{3}, z_2 = \frac{1}{4}, z_n = \frac{z_{n-2}}{z_{n-1}} \quad (n = 3, 4, \cdots)$
جواب: غیر محدود، منفرج، 0

سوال 17.35: $z_1 = 1, z_2 = i, z_n = z_{n-2} z_{n-1} \quad (n = 3, 2, \cdots)$
جواب: محدود، منفرج، $1, -1, i, -i$

17.4 یک سر حقیقی ترتیب۔ لیبنٹز پرکھ برائے حقیقی تسلسل

اس حصے میں حقیقی ترتیب اور حقیقی تسلسل کے دو مسئلے پیش کیے گئے ہیں جن کے مخلوط ترتیب اور مخلوط تسلسل کے مماثل مسئلے نہیں پائے جاتے ہیں۔ دونوں مسئلے عملاً بہت اہم ہیں۔

ایسی حقیقی ترتیب $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ جس میں

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots$$

ہو یک سر بڑھتی[22] کہلاتی ہے۔ اسی طرح اگر

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots$$

ہو تب یہ یک سر گھٹتی[23] کہلائے گی۔ یک سر بڑھتی یا یک سر گھٹتی ترتیب کو یک سر ترتیب[24] کہتے ہیں۔

مثلاً منفرج ترتیب $1, 2, 3, \cdots$ یک سر اور غیر محدود ہے۔ مرتکز ترتیب $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$ یک سر اور محدود ہے، اور ہم ثابت کریں گے کہ یہ دو خواص مرکوزیت کے لئے کافی ہیں:

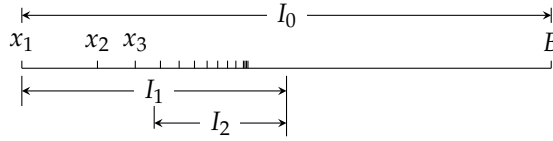
مسئلہ 17.10: (حقیقی ترتیب کی مرکوزیت)
محدود اور یک سر حقیقی ترتیب مرکوز ہو گی۔

ثبوت: فرض کریں کہ $x_1, x_2, \cdots$ محدود یک سر ترتیب ہے۔ تب اس کے اجزاء کسی عدد B سے چھوٹے ہوں گے اور، چونکہ، تمام n کے لئے $x_1 \leq x_n$ ہے لہٰذا تمام اجزاء وقفہ $x_1 \leq x_n \leq B$ میں پائے جائیں گے جس کو ہم I_0 سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہم وقفہ I_0 کو دو برابر لمبائی کے ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ اگر I_0 کے دائیں نصف (بشمول اس کے دونوں سر) میں ترتیب کے اجزاء پائے جاتے ہوں تب اس ٹکڑے کو ہم I_1 سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر اس میں ترتیب کے اجزاء نہ پائے جاتے ہوں تب ہم I_0 کے بائیں نصف (بشمول اس کے دونوں سر) کو ہم I_1 سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ پہلا قدم ہے (شکل 17.7)۔

دوسرے قدم پر ہم I_1 کو برابر لمبائی کے دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے اسے اصول کے تحت I_2 منتخب کرتے ہیں۔

---

[22] monotone increasing
[23] monotone decreasing
[24] monotone sequence

I_0, x_1, x_2, x_3, B, I_1, I_2

شکل 17.7: شکل برائے ثبوت مسئلہ 17.10

اسی طرح چلتے ہوئے ہمیں بتدریج چھوٹے وقفے $I_0, I_1, I_2, \cdots$ ملتے ہیں جن کے خواص کچھ یوں ہیں: $n > m$ کی صورت میں I_m میں تمام I_n شامل ہیں۔ ترتیب کا کوئی جزو I_m کے دائیں جانب نہیں پایا جاتا ہے اور چونکہ ترتیب یک سر بڑھتی ہے، کسی عدد N (جو عموماً m پر منحصر ہو گا) سے زیادہ تمام n کے لئے x_n وقفہ I_m میں پائے جاتے ہیں۔ جیسے جیسے m لامتناہی تک پہنچتا ہو ویسے ویسے I_m کی لمبائی صفر کو پہنچتی ہے۔ یوں واحد ایک عدد ایسا ہو گا جو ان تمام وقفوں میں پایا جائے گا[25]۔ اس عدد کو ہم L کہتے ہیں۔ ہم اب با آسانی ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ ترتیب مرتکز ہے اور اس کا حد L ہے۔

ہم ایسا m منتخب کرتے ہیں کہ I_m کی لمبائی کسی بھی دیے عدد $\epsilon > 0$ سے کم ہو۔ یوں L اور تمام x_n، جہاں $n > N(m)$ ہے، I_m میں پائے جائیں گے، اور، یوں ان تمام n کے لئے $|x_n - L| < \epsilon$ ہو گا۔ یوں بڑھتی ترتیب کے لئے ثبوت مکمل ہوتا ہے۔ گھٹتی ترتیب کے لئے ثبوت بالکل ایسا ہی ہے پس وقفوں کی انتخاب کے دوران دائیں کی جگہ بائیں اور بائیں کی جگہ دائیں کا لفظ استعمال کریں۔

□

ہم ایسے حقیقی تسلسل کے ایک اہم مسئلہ کو اب ثابت کرتے ہیں جس کے اجزاء کی علامت متواتر بدلتی ہے اور جس کے اجزاء کی مطلق قیمت بتدریج گھٹتی ہے۔ یہ مسئلہ مرکوزیت کے لئے درکار کافی شرائط اور تسلسل کے باقی کا تخمینہ پیش کرتا ہے

مسئلہ 17.11: لیبنٹز پرکھ برائے حقیقی تسلسل

فرض کریں کہ حقیقی $u_1, u_2, \cdots$ درج ذیل کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(\text{الف}) \quad u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots, \qquad (\text{ب}) \quad \lim_{m\to\infty} u_m = 0 \tag{17.11}$$

[25] یہ فقرہ صریحاً درست معلوم ہوتا ہے، لیکن حقیقت میں ایسا نہیں ہے۔ یہ در حقیقت حقیقی اعدادی نظام کا درج ذیل صورت میں ایک مسلمہ ہے۔ فرض کریں کہ $J_1, J_2, \cdots$ ایسے بند وقفے ہیں کہ $n > m$ کے لئے تمام J_n وقفہ J_m شامل ہوں اور m کی قیمت لامتناہی تک پہنچنے سے J_m کی لمبائی صفر تک پہنچتی ہو۔ تب ایسا واحد ایک حقیقی عدد ہو گا جو ان تمام وقفوں میں پایا جائے گا۔ اس کو مسلمہ کنتور اور دے دے کند کہتے ہیں جو دو جرمن ریاضی دان گیورگ کنتور [1845-1918] جنہوں نے نظریہ سلسلہ ایجاد کیا اور رشارت دے دے کند [1831-1916] کے نام ہے۔ (ایسا وقفہ جس کے سر بھی وقفے میں شامل ہوں بند وقفہ کہلاتا ہے جبکہ وہ وقفہ جس کے سر وقفہ کا حصہ نہ ہوں، کھلا وقفہ کہلاتا ہے۔)

تب تسلسل

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + - \cdots$$

مرتکز ہو گی اور n اجزاء کے بعد تسلسل کا باقی کا تخمینہ درج ذیل ہو گا۔

$$|R_n| \le u_{n+1} \tag{17.12}$$

ثبوت: فرض کریں کہ s_n تسلسل کا n واں جزوی مجموعہ ہے۔تب مساوات 17.11-الف کے تحت

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, & s_2 &= u_1 - u_2 \le s_1, \\ s_3 &= s_2 + u_3 \ge s_2, & s_3 &= s_1 - (u_2 - u_3) \le s_1, \end{aligned}$$

ہوں گے لہٰذا $s_2 \le s_3 \le s_1$ ہو گا۔اسی طرح چلتے ہوئے ہم درج ذیل نتیجہ اخذ کرتے ہیں (شکل 17.8)

$$s_1 \ge s_3 \ge s_5 \ge \cdots \ge s_6 \ge s_4 \ge s_2 \tag{17.13}$$

جس کے تحت طاق جزوی مجموعے محدود یک سر ترتیب بناتے ہیں اور ایسا ہی جفت جزوی مجموعے کرتے ہیں۔یوں مسئلہ 17.10 کے تحت دونوں ترتیب مرتکز ہوں گے مثلاً:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s, \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s^*$$

اب چونکہ $s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1}$ ہے لہٰذا ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 17.11-ب سے مراد

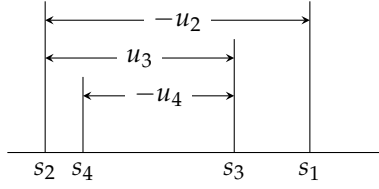
$$s - s^* = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0$$

ہے۔اس طرح $s = s^*$ ہو گا لہٰذا ترتیب مرتکز ہے اور اس کا حد s ہو گا۔

ہم اب مساوات 17.12 ثابت کرتے ہیں جو تسلسل کے باقی کا تخمینہ پیش کرتا ہے۔چونکہ $s_n \to s$ ہے لہٰذا مساوات 17.13 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$s_{2n+1} \ge s \ge s_{2n}, \quad s_{2n-1} \ge s \ge s_{2n}$$

ان سے s_{2n} اور s_{2n-1} تفریق کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$s_{2n+1} - s_{2n} \ge s - s_{2n} \ge 0, \quad 0 \ge s - s_{2n-1} \ge s_{2n} - s_{2n-1}$$

شکل 17.8: ثبوت مسئلہ 17.11 (لیبنٹز پرکھ)

ان میں بایاں عدم مساوات u_{2n+1} کے برابر ہے جبکہ دایاں عدم مساوات $-u_{2n}$ کے برابر ہے اور عدم مساوات کی علامتوں کے درمیان باقیات R_{2n} اور R_{2n-1} پائے جاتے ہیں۔یوں ان عدم مساوات کو

$$u_{2n+1} \geq R_{2n} \geq 0, \quad 0 \geq R_{2n-1} \geq -u_{2n}$$

لکھا جا سکتا ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ ان سے مراد مساوات 17.12 ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

سوالات

کیا سوال 17.36 تا سوال 17.45 میں دیے ترتیب محدود ہیں؟ مرتکز ہیں؟ یک سر ہیں؟ ان کے تحدیدی نقطے تلاش کریں۔

سوال 17.36: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$
جواب: محدود، مرتکز، یک سر، 0

سوال 17.37: $2, -\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{3}, 4, -\frac{1}{4}, \cdots$
جواب: غیر محدود، منفرج، یک سر، 0

سوال 17.38: $2, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots$
جواب: غیر محدود، منفرج، یک سر، کوئی نہیں

سوال 17.39: $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \cdots$
جواب: محدود، مرتکز، غیر یک سر، 1

سوال 17.40: $\frac{7}{6}, \frac{11}{6}, \frac{8}{7}, \frac{13}{7}, \frac{15}{8}, \cdots$
جواب: محدود، منفرج، غیر یک سر، $1, 2$

سوال 17.41: $\ln 1, \ln 2, \ln 3, \cdots$
جواب: غیر محدود، منفرج، یک سر، کوئی نہیں

سوال 17.42: $\frac{4}{1!}, \frac{4^2}{2!}, \frac{4^3}{3!}, \cdots$
جواب: محدود، مرتکز، غیر یک سر، 0

سوال 17.43: $a, a^2, a^3, \cdots$
جواب: اگر $a > 1$ ہو تب غیر محدود، منفرج، یک سر؛ اگر $0 < a < 1$ ہو تب محدود، مرتکز، یک سر، 0 ؛ اگر $a = 1$ ہو تب محدود، منفرج، یک سر، 1 ؛ اگر $a = -1$ ہو تب محدود، منفرج، غیر یک سر، $1, -1$ ؛ اگر $a < -1$ ہو تب غیر محدود، منفرج، غیر یک سر

سوال 17.44: $c, 2c^2, 3c^3, \cdots \quad (|c| < 1)$
جواب: محدود، مرتکز، تحدیدی نقطہ 0 اور $0 \le c \le \frac{1}{2}$ کی صورت میں یک سر

سوال 17.45: $c, 2^2c^2, 3^2c^3, 4^2c^4, \cdots \quad (|c| < 1)$

کیا سوال 17.46 تا سوال 17.49 میں دی گئی تسلسل مرتکز یا منفرج ہے؟

سوال 17.46: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + - \cdots$
جواب: مرتکز

سوال 17.47: $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + - \cdots$
جواب: مرتکز

سوال 17.48: $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \frac{6}{5} + - \cdots$
جواب: مسئلہ 17.5 کے تحت منفرج ہے

سوال 17.49: $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \cdots$

دکھائیں کہ سوال 17.50 تا سوال 17.55 میں دیے گئے تسلسل مرتکز ہیں۔ تسلسل کے مجموعہ s میں خلل ϵ کو 0.01 سے کم رکھنے کی خاطر تسلسل کے کتنے اجزاء درکار ہوں گے؟

سوال 17.50: $s=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-+\cdots$
جواب: 6

سوال 17.51: $s=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}-+\cdots$
6

سوال 17.52: $s=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+-\cdots$
جواب: 5

سوال 17.53: $s=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-+\cdots$

سوال 17.54: $s=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+-\cdots$
جواب: 2

سوال 17.55: $s=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+-\cdots$

17.5 تسلسل کی مرکوزیت اور انفراج کی پرکھیں

کسی بھی تسلسل کو حساب یا دیگر مقاصد کے لئے استعمال کرنے سے پہلے اس کی مرکوزیت جاننا ضروری ہے۔انجینئری حساب کے مسائل میں اس کا جواب عموماً مرکوزیت اور انفراج کے دیگر پرکھوں[26] میں سے کسی ایک کے اطلاق سے حاصل کرنا ممکن ہو گا۔یوں مرکوزیت اور انفراج کی پرکھیں عملاً نہایت اہم ہیں۔

حقیقی تسلسل کی انفراج کی پرکھ کے سادہ اصول مسئلہ 17.5 اور لیبنٹز پرکھ پر ہم پہلے غور کر چکے ہیں۔ درج ذیل مسئلہ مرکوزیت کی دیگر پرکھوں کا جواز ہے۔

مسئلہ 17.12: **تقابلی پرکھ**
اگر تسلسل $w_1+w_2+\cdots$ دیا گیا ہو اور ہم غیر منفی اجزاء والا ایسا تسلسل $b_1+b_2+\cdots$ تلاش کر سکیں کہ

$$|w_n|\le b_n \quad n=1,2,\cdots \tag{17.14}$$

[26] tests

ہو تب دیا گیا تسلسل مطلق مرتکز ہو گا۔

ثبوت: چونکہ تسلسل $b_1 + b_2 + \cdots$ مرتکز ہے لہٰذا مسئلہ 17.8 کے تحت کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا N تلاش کر سکتے ہیں کہ ہر $n > N$ اور $p = 1, 2, \cdots$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \epsilon \qquad n > N, \quad p = 1, 2, \cdots$$

اس کو مساوات 17.14 کے ساتھ ملا کر ان n اور p کے لئے درج ذیل اخذ کیا جا سکتا ہے۔

$$|w_{n+1}| + \cdots + \left|w_{n+p}\right| \le b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \epsilon$$

یوں مسئلہ 17.8 کے تحت تسلسل $|w_1| + |w_2| + \cdots$ مرتکز ہو گا اور دیا گیا تسلسل مطلق مرتکز ہو گا۔

□

مسئلہ 17.12 سے دو اہم پرکھیں اخذ کرنے کی خاطر درج ذیل ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ 17.13: ہندسی تسلسل
$|q| < 1$ کی صورت میں ہندسی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots$$

مرتکز ہو گا اور اس کا مجموعہ $\frac{1}{1-q}$ ہو گا جبکہ $|q| \ge 1$ کی صورت میں ہندسی تسلسل منفرج ہو گا۔

ثبوت: جب $|q| \ge 1$ ہو تب $|q^n| \ge 1$ ہو گا لہٰذا مسئلہ 17.5 کے تحت تسلسل منفرج ہو گا۔اب $|q| < 1$ کی صورت میں n واں جزوی مجموعہ

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n$$

ہو گا جس کو q سے ضرب دینے سے

$$qs_n = q + q^2 + \cdots + q^{n+1}$$

ملتا ہے۔ان کی تفریق سے باقی تمام اجزاء آپس میں کٹ جاتے ہیں اور

$$s_n - qs_n = (1-q)s_n = 1 - q^{n+1}$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ $q \neq 1$ ہے لہٰذا $1 - q \neq 0$ ہو گا اور یوں ہم s_n کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \tag{17.15}$$

چونکہ $|q| < 1$ ہے لہٰذا $n \to \infty$ کی صورت میں آخری جزو صفر تک پہنچتا ہے۔یوں تسلسل مرتکز ہے اور اس کی قیمت $\frac{1}{1-q}$ ہے۔

□

مسئلہ 17.12 اور مسئلہ 17.13 سے دو اہم پرکھیں، تناسبی پرکھ اور جذری پرکھ حاصل کرتے ہیں۔

مسئلہ 17.14: تناسبی پرکھ
ہم درج ذیل تسلسل پر غور کرتے ہیں۔

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

فرض کریں کہ $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے $w_n \neq 0$ ہے اور درج ذیل تناسب کی ترتیب مرتکز ہے اور اس کا حد L ہے۔

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| \qquad n = 1, 2, \cdots$$

تب $L < 1$ کی صورت میں تسلسل مطلق مرتکز ہے جبکہ $L > 1$ کی صورت میں تسلسل منفرج ہے۔(یہ پرکھ $L = 1$ کی صورت میں ناکام ہے اور اس سے کچھ اخذ نہیں کیا جا سکتا ہے۔)

ثبوت: ہم درج ذیل فرض کر چکے ہیں۔

$$\lim_{n\to\infty} k_n = L \qquad k_n = \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right|$$

ظاہر ہے کہ k_n اور L حقیقی ہیں۔حد کی تعریف کی رو سے، کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا N تلاش کر سکتے ہیں کہ ہر $n > N$ کے لئے k_n وقفہ $L - \epsilon$ تا $L + \epsilon$ پر پایا جاتا ہو یعنی:

$$k_n < L + \epsilon \quad \text{(الف)} \qquad k_n > L - \epsilon \quad \text{(ب)} \qquad (n > N) \tag{17.16}$$

ہم اب $L < 1$ کی صورت پر غور کرتے ہیں۔ہم $L + \epsilon = q$ لکھتے ہیں اور $\epsilon = \frac{1-L}{2}$ لیتے ہیں۔یوں $\epsilon > 0$ ہو گا اور ہم مساوات 17.16-الف کو

$$k_n < q = L + \frac{1-L}{2} = \frac{1+L}{2}$$

لکھ سکتے ہیں۔چونکہ $L < 1$ ہے لہٰذا $q < 1$ ہو گا۔اب ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} &|w_{N+1}| + |w_{N+2}| + |w_{N+3}| + \cdots \\ &= |w_{N+1}| \left(1 + \left|\frac{w_{N+2}}{w_{N+1}}\right| + \left|\frac{w_{N+3}}{w_{N+2}}\right|\left|\frac{w_{N+2}}{w_{N+1}}\right| + \cdots\right) \\ &= |w_{N+1}| \left(1 + k_{N+1} + k_{N+2}k_{N+1} + k_{N+3}k_{N+2}k_{N+1} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{17.17}$$

چونکہ $k_n < q < 1$ ہے لہٰذا اس تسلسل کا ہر جزو درج ذیل ہندسی تسلسل کے مطابقتی جزو سے کم ہے۔

$$|w_{N+1}| \left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots\right)$$

چونکہ $q < 1$ ہے لہٰذا مسئلہ 17.13 کے تحت تسلسل مرتکز ہو گا۔مسئلہ 17.12 کے تحت مساوات 17.17 میں دیا گیا تسلسل مرتکز ہو گا۔یوں تسلسل $|w_1| + |w_2| + \cdots$ مرتکز ہو گا۔اس سے مراد تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ کی مطلق مرکوزیت ہے۔

ہم اب $L > 1$ کی صورت پر غور کرتے ہیں۔ہم $\epsilon = \frac{L-1}{2}$ منتخب کرتے ہیں۔یوں ظاہر ہے کہ $\epsilon > 0$ ہو گا اور مساوات 17.16-ب درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$k_n > L - \epsilon = \frac{1+L}{2} > 1 \qquad (n > N) \tag{17.18}$$

یعنی:

$$k_n = \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| > 1 \quad \implies \quad |w_{n+1}| > |w_n| \qquad (n > N) \tag{17.19}$$

یہ آخری عدم مساوات کہتی ہے کہ اجزاء کی مطلق قیمت بتدریج بڑھتی ہے لہٰذا مسئلہ 17.5 کے تحت تسلسل منفرج ہو گا۔($L = 1$ کی صورت میں تسلسل مرتکز یا منفرج ہو سکتا ہے اور تناسبی پرکھ کارآمد نہیں ہو گی۔)

□

$L = 1$ کی صورت میں مرتکز اور منفرج تسلسل کی مثال پیش کرتے ہیں۔ہم مثال 17.2 میں دیکھ چکے ہیں کہ ہارمونی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

منفرج ہے۔اس کے لئے $n \to \infty$ کی صورت میں

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n}{n+1} \equiv L = 1 \qquad n \to \infty$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کے برعکس درج ذیل تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots \tag{17.20}$$

مرتکز ہے جبکہ اس کے لئے

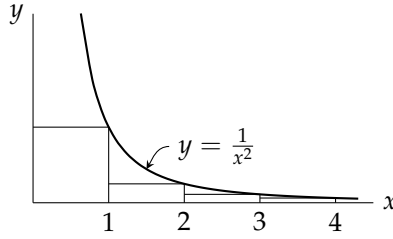
$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \equiv L = 1 \qquad n \to \infty$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 17.20 کی مرکوزیت ثابت کرتے ہیں۔اس کا n ویں جزوی مجموعہ

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

ہو گا۔ظاہر ہے کہ $s_n > 0$ ہو گا اور (شکل 17.9)

$$s_n \le 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 2 - \frac{1}{n}$$

ہو گا۔اس مساوات کے تحت جزوی مجموعوں کی ترتیب محدود ہے۔چونکہ تسلسل کے اجزاء مثبت ہیں، تسلسل یک سر بڑھتا تسلسل ہے لہٰذا مسئلہ 17.10 کے تحت تسلسل مرتکز ہو گا۔

شکل 17.9: تسلسل 17.20 کی مرکوزیت

درج ذیل تناسبی پرکھ سے زیادہ عمومی پرکھ ہے البتہ اس کا استعمال نسبتاً مشکل ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 17.15: **جذری پرکھ**
درج ذیل تسلسل پر غور کریں۔

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

فرض کریں کہ درج ذیل جذر کی ترتیب

$$\sqrt[n]{|w_n|} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

مرتکز ہے اور اس کا حد L ہے۔تب $L < 1$ کی صورت میں دیا گیا تسلسل مطلق مرتکز ہو گا جبکہ $L > 1$ کی صورت میں تسلسل منفرج ہو گا۔($L = 1$ کی صورت میں پرکھ کارآمد نہیں ہو گی۔)

ثبوت: اگر $L < 1$ ہو، تب، تناسبی پرکھ کی طرح، ہم $q < 1$ منتخب کرتے ہوئے ایسا مطابقتی N تلاش کرتے ہیں کہ ہر $n > N$ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$k_n^* \equiv \sqrt[n]{|w_n|} < q < 1 \qquad \text{ہر } n > N$$

اس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$|w_n| < q^n < 1 \qquad (n > N)$$

یوں ہندسی تسلسل کے ساتھ موازنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ تسلسل $|w_N| + |w_{N+1}| + \cdots$ مرتکز ہو گا۔اس طرح تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ مطلق مرتکز ہو گا۔

اگر $L > 1$ ہو، تب کافی بڑے n کے لئے $\sqrt[n]{|w_n|} > 1$ ہو گا۔ یوں ان n کے لئے $|w_n| > 1$ ہو گا لہٰذا مسئلہ 17.5 کے تحت تسلسل منفرج ہو گا۔

اگر $L = 1$ ہو تب پرکھ کارآمد نہیں رہتی ہے۔

□

$L = 1$ کی صورت میں پرکھ کی ناقص پن کو دو تسلسلوں کی مدد سے دیکھتے ہیں۔ ہارمونی تسلسل کی صورت میں $L = 1$ اور

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{e^{(1/n)\ln n}} \to \frac{1}{e^0} = 1 \qquad (n \to \infty)$$

ہو گا، چونکہ $\frac{1}{n}\ln n \to 0$ ہے۔ اسی طرح تسلسل 17.20 کے لئے $L = 1$ اور

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = \frac{1}{e^{2/n}\ln n} \to \frac{1}{e^0} = 1 \qquad (n \to \infty)$$

ہو گا، چونکہ $\frac{2}{n}\ln n \to 0$ ہے۔

مثال 17.5: **تناسبی پرکھ اور جذری پرکھ کا عملی استعمال**
درج ذیل تسلسل کو آزما کر دیکھیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{8} + 1 + \frac{25}{32} + \cdots$$

اس تسلسل سے

$$w_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad w_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}, \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty)$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا تناسبی پرکھ کے تحت تسلسل مرتکز ہے۔ ہم جذری پرکھ بھی استعمال کر سکتے ہیں:

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{n^{\frac{2}{n}}}{2} = \frac{e^{\frac{2}{n}\ln n}}{2} \to \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} \quad (n \to \infty)$$

جو وہی نتیجہ ہے۔

□

مثال 17.6: تناسبی پرکھ کا استعمال
کیا درج ذیل تسلسل مرتکز یا منفرج ہے؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-i4)^n}{n!} = 1 + (3-i4) + \frac{1}{2!}(3-i4)^2 + \cdots$$

اس تسلسل سے

$$\left|w_n\right| = \frac{\left|3-i4\right|^n}{n!} = \frac{5^n}{n!}, \quad \left|w_{n+1}\right| = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \frac{5}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں تناسبی پرکھ کے تحت تسلسل مرتکز ہے۔ □

ہم آخر میں بتلانا چاہتے ہیں کہ تناسبی پرکھ اور جذری پرکھ کو وسعت دیتے ہوئے بالترتیب ایسے ترتیب جن کے اجزاء $\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right|$ اور $\sqrt[n]{|w_n|}$ غیر مرتکز ہوں پر بھی لاگو کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 17.16: تناسبی پرکھ
درج ذیل تسلسل پر غور کریں۔

$$w_! + w_2 + w_3 + \cdots$$

فرض کریں کہ $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے $w_n \neq 0$ ہیں۔ اگر کسی N سے ہر بڑے n کے لئے

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| \le q \qquad (n > N) \tag{17.21}$$

ہو جہاں q اکائی سے کم کوئی مقررہ عدد ہے، تب تسلسل مطلق منفرج ہو گا۔اگر ہر $n > N$ کے لئے

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| \ge 1 \qquad (n > N) \tag{17.22}$$

ہو تب تسلسل منفرج ہو گا۔

ثبوت: مسئلہ 17.14 کے پہلے حصے میں ہر $n > N$ کے لئے ایسے عدد $q < 1$ کی موجودگی کہ مساوات 17.21 مطمئن ہو، مرکوزیت کی وجہ بنی۔یوں موجودہ مسئلے میں بھی مرکوزیت کی یہی وجہ ہے۔مساوات 17.22 کے تحت $|w_{n+1}| \ge |w_n|$ ہے لہٰذا مسئلہ 17.5 سے مسئلے کا دوسرا حصہ ثابت ہوتا ہے۔

□

مثال 17.7: مسئلہ 16۔17 کا اطلاق۔ مسئلہ 14۔17 کی ناکامی

تسلسل

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{512}+\cdots$$

کے طاق اجزاء اور جفت اجزاء دونوں ہندسی تسلسل بناتے ہیں جن کی تناسب $\frac{1}{8}$ ہے۔چونکہ قریبی اجزاء کی تناسب

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots$$

ہے لہٰذا مسئلہ 17.16 کے تحت تسلسل مرتکز ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ ان تناسب کی ترتیب مرتکز نہیں ہے لہٰذا مسئلہ 17.14 یہاں کام نہیں کرے گا۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مسئلہ 17.14 سے مسئلہ 17.16 زیادہ عمومی ہے۔
□

مسئلہ 17.17: جذری پرکھ

درج ذیل تسلسل پر غور کریں۔

$$w_! + w_2 + w_3 + \cdots$$

اگر کسی عدد N سے ہر بڑے n کے لئے

$$\sqrt[n]{|w_n|} \le q \tag{17.23}$$

ہو جہاں q اکائی سے کم کوئی مقررہ عدد ہے، تب دیا گیا تسلسل مطلق مرتکز ہو گا۔اگر n کی متناہی تعداد اجزاء کے لئے

$$\sqrt[n]{|w_n|} \ge 1 \tag{17.24}$$

ہو تب تسلسل منفرج ہو گا۔

ثبوت: اگر مساوات 17.23 مطمئن ہو تب کافی بڑے n کے لئے

$$|w_n| \le q^n < 1 \qquad (n > N)$$

ہو گا اور ہندسی تسلسل کے ساتھ موازنہ کرنے سے تسلسل $|w_N|+|w_{N+1}|+\cdots$ مرتکز حاصل ہوتا ہے۔یوں تسلسل $w_1+w_2+\cdots$ مطلق مرتکز ہو گا۔اگر مساوات 17.24 مطمئن ہو تب n کی متناہی تعداد کے لئے $|w_n|\geq 1$ ہو گا لہٰذا مسئلہ 17.5 کے تحت تسلسل منفرج ہو گا۔

□

درج بالا دونوں مسئلوں میں مرکوزیت کے لئے لازمی ہے کہ بالترتیب $\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right|$ اور $\sqrt[n]{|w_n|}$ کسی مقررہ عدد $q<1$ کے برابر یا اس سے کم ہو۔کسی بھی بڑے n کے لئے مرکوزیت ہرگز $\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right|<1$ یا $\sqrt[n]{|w_n|}<1$ سے اخذ نہیں کی جا سکتی ہے۔

مثال کے طور پر اگرچہ ہارمونی تسلسل $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ کے لئے

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}}<1 \quad \text{اور} \quad \frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}<1$$

ہیں لیکن تسلسل منفرج ہے۔

یہاں یہ بات سمجھنی ضروری ہے کہ ہارمونی تسلسل کے لئے ہم 1 سے کم ایسا کوئی عدد q منتخب نہیں کر سکتے ہیں کہ $\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{n}{n+1}<q$ یا $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}<q$ ہو۔فرض کریں کہ ہم $q=0.9$ منتخب کرتے ہیں۔تب $n=10$ لیتے ہوئے $\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{10}{10+1}=0.909$ حاصل ہوتا ہے جو $q=0.9$ سے کم نہیں ہے۔اسی طرح اگر ہم $q=0.9999$ منتخب کریں تب $n=10000$ لیتے ہوئے $\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{10000}{10000+1}=0.99990001$ حاصل ہوتا ہے جو $q=0.9999$ سے کم نہیں ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی منتخب کردہ $q\,(<1)$ کے لئے ایسا n پایا جاتا ہے کہ یہ شرط مطمئن نہیں ہوتا ہے۔یوں اگرچہ $\frac{w_{n+1}}{w_n}<1$ ہے لیکن ہم اکائی سے کم ایسا کوئی مقررہ عدد q منتخب نہیں کر سکتے ہیں کہ $\frac{w_{n+1}}{w_n}<q$ ہو۔

سوالات

کیا سوال 17.56 تا سوال 17.61 میں دیے گئے تسلسل مرتکز یا منفرج ہیں؟

سوال 17.56: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$

جواب: منفرج

سوال 17.57: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$

سوال 17.58: $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\cdots$
جواب: منفرج (ہارمونی تسلسل کے ساتھ موازنہ کریں۔)

سوال 17.59: $1+i10+\frac{(i10)^2}{2!}+\frac{(i10)^3}{3!}+\cdots$

سوال 17.60: $1+\frac{i}{2}+\frac{i^2}{2^2}+\frac{i^3}{2^3}+\cdots$
جواب: مرتکز

سوال 17.61: $1+i+i^2+i^3+\cdots$

کیا سوال 17.62 تا سوال 17.73 کے تسلسل مرتکز یا منفرج ہیں؟

سوال 17.62: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$
جواب: منفرج

سوال 17.63: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}$

سوال 17.64: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(10+i5)^n}{n!}$
جواب: مرتکز

سوال 17.65: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3+i)^{2n}}{(2n)!}$

سوال 17.66: $\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{i}{2}\right)^n$
جواب: مرتکز

سوال 17.67: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4+i3}{6}\right)^n$

سوال 17.68: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3-i4}{4}\right)^n$
جواب: منفرج

سوال 17.69: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(i10)^{2n}}{(2n)!}$

سوال 17.70: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n2^n}$
جواب: مرتکز

سوال 17.71: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n2^n}$

سوال 17.72: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$
جواب: مرتکز

سوال 17.73: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

سوال 17.74: ہندسی تسلسل $1+q+q^2+\cdots$ کے مجموعہ s میں خلل 0.01 سے کم رکھنے کی خاطر $q=0.25$ ، $q=0.5$ ، $q=0.9$ کی صورت میں کتنے اجزاء درکار ہوں گے؟
جواب: $4,\ 8,\ 66$

سوال 17.75: اگر $\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| \le q < 1$ ہو تا کہ مسئلہ 17.14 کے تحت تسلسل $w_1+w_2+\cdots$ مرتکز ہو تب دکھائیں کہ باقی $R_n = w_{n+1}+w_{n+2}+\cdots$ شرط $|R_n| \le \frac{|w_{n+1}|}{1-q}$ کو مطمئن کرتا ہے۔(اشارہ۔ اس حقیقت کو بروئے کار لائیں کہ تناسبی پرکھ در حقیقت تسلسل $w_1+w_2+\cdots$ اور ہندسی تسلسل کا تقابل ہے۔)اس نتیجے کو استعمال کرتے ہوئے سوال 17.71 میں خلل 0.05 سے کم رکھنے کی خاطر کتنے اجزاء کا مجموعہ s لینا ہو گا؟ اس مجموعہ کو حاصل کریں۔

17.6 تسلسل پر اعمال

تسلسل کے ساتھ کام کرنے کے لئے درکار سادہ اعمال پر ہم اب غور کرتے ہیں۔

آئیں دو تسلسل کے مجموعہ سے شروع کرتے ہیں۔ہم دیکھیں گے کہ دو عدد مرتکز تسلسل کو جزو در جزو جمع کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 17.18: جزو در جزو جمع اور تفریق
اگر مرتکز تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ کا مجموعہ s اور مرتکز تسلسل $z_1 + z_2 + \cdots$ کا مجموعہ s^* ہو تب درج ذیل تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty}(w_n + z_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(w_n - z_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} kw_n \tag{17.25}$$

جہاں k کوئی مستقل ہے، مرتکز ہوں گے اور ان کے مجموعے $s + s^*$ ، $s - s^*$ اور ks ہوں گے۔

ثبوت: دیے گئے دو تسلسل کے جزوی مجموعے

$$s_n = w_1 + \cdots + w_n, \quad s^* = z_1 + \cdots + z_n$$

ہیں اور مرکوزیت کی تعریف کی رو سے

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \quad \lim_{n\to\infty} s_n^* = s^*$$

ہو گا۔اب مساوات 17.25 میں پہلی تسلسل (بایاں ترین) کا n واں جزوی مجموعہ

$$S_n = s_n + s_n^* = (w_1 + z_1) + \cdots + (w_n + z_n)$$

ہے جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(s_n + s_n^*) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} s_n^* = s + s^*$$

یوں یہ تسلسل مرتکز ہے اور اس کا مجموعہ $s + s^*$ ہے۔باقی دو تسلسل کی مرکوزیت اور مجموعوں کے ثبوت اسی طرح پیش کیے جا سکتے ہیں۔

□

اگلا عمل مجموعہ میں قوسین ڈالنے کا عمل ہے جس کو گروہ بندی[27] کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر تسلسل $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$ کے اجزاء کی گروہ بندی کرتے ہوئے ہم تسلسل

$$(w_1 + w_2) + (w_3 + w_4) + (w_5 + w_6) + \cdots$$

حاصل کر سکتے ہیں جس کے اجزاء $W_n = w_{2n-1} + w_{2n}$ ہیں جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے۔

صاف ظاہر ہے کہ متناہی تعداد کی اجزاء پر مبنی تسلسل کا مجموعہ تبدیل کیے بغیر ہم جہاں چاہیں تسلسل میں قوسین ڈال سکتے ہیں۔ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ مرتکز تسلسل کے لئے بھی ایسا کرنا ممکن ہو گا۔ایک دلچسپ بات یہ ہے کہ بعض اوقات منفرج تسلسل کی گروہ بندی کرنے سے مرتکز تسلسل حاصل ہو گی۔مثلاً درج ذیل منفرج تسلسل (مثال 17.2)

$$1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots$$

کی گروہ بندی کرنے سے درج ذیل مرتکز تسلسل حاصل ہوتی ہے جس کا مجموعہ صفر ہے۔

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots$$

مسئلہ 17.19: گروہ بندی
مرتکز تسلسل میں قوسین ڈالنے سے ایک نئی مرتکز تسلسل حاصل ہو گی جس کا مجموعہ اصل تسلسل کے مجموعے کے برابر ہو گا۔

ثبوت : ظاہر ہے کہ نئی تسلسل کے جزوی مجموعے دیے گئے تسلسل کے کچھ جزوی مجموعے شامل کیے بغیر حاصل ہوں گے۔مثال کے طور پر تسلسل

$$(w_1 + w_2 + w_3) + (w_4 + w_5 + w_6) + \cdots$$

کے جزوی مجموعے تسلسل $w_1 + w_2 + \cdots$ کے جزوی مجموعے s_3 ، s_6 ، s_9 ، $\cdots$ ہوں گے۔اب اگر دیے گئے تسلسل کے جزوی مجموعے s_n مرتکز ترتیب بناتے ہوں جس کا حد s ہو تب ترتیب کی مرکوزیت کی تعریف سے اخذ کیا جا سکتا ہے کہ نئی ترتیب، جس میں کئی جزوی مجموعے شامل نہیں ہیں، بھی s کو مرکوز ہو گی۔

□

[27] grouping

مثال 17.8: گروہ بندی
لیبنٹز پرکھ (حصہ 17.4) کے تحت درج ذیل تسلسل مرتکز ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

فرض کریں کہ اس کا مجموعہ s ہے۔تب مسئلہ 17.19 کے تحت

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right) = s\end{aligned} \tag{17.26}$$

ہو گا۔اسی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{1\cdot 2 + 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{5\cdot 6 + 7\cdot 8}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-2} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{4m}\right) = s\end{aligned} \tag{17.27}$$

□

اس حصے میں آخری عمل جس پر غور کیا جائے گا وہ تسلسل میں اجزاء کی ردوبدل ہے۔

ظاہر ہے کہ متناہی تعداد کی اجزاء پر مبنی تسلسل کے اجزاء کو آگے پیچھے کرنے سے تسلسل کا مجموعہ تبدیل نہیں ہو گا۔اسی طرح ہم لامتناہی تسلسل کے متناہی تعداد کے اجزاء کو آگے پیچھے کر سکتے ہیں: اگر دیا گیا تسلسل مرتکز ہو تب حاصل تسلسل بھی مرتکز ہو گا اور اگر دیا گیا تسلسل منفرج ہو تب حاصل تسلسل بھی منفرج ہو گا اور اس کا مجموعہ دیے گئے تسلسل کے مجموعے کے برابر ہو گا۔ یہ مرکوزیت اور انفراج کی تعریف سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

ہم اب جاننا چاہتے ہیں کہ لامتناہی اجزاء کو آگے پیچھے کرنے سے حاصل تسلسل کے مجموعے پر کیا اثر ہو گا۔ہم پہلے اس عمل کی تعریف کرتے ہیں۔

تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n^* = w_1^* + w_2^* + \cdots$$

کو اس صورت تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + \cdots$$

کی ردوبدل[28] کہتے ہیں جب اشاریہ n اور m میں یوں مطابقت پائی جاتی ہو کہ $w_n^* = w_m$ ہوں۔

مثال کے طور پر تسلسل

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \cdots$$

ہارمونی تسلسل

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

کی ردوبدل ہے۔درج ذیل مثال مرتکز تسلسل کی ردوبدل سے ایسا تسلسل حاصل کرتی ہے جس کا مجموعہ دیے گئے تسلسل سے مختلف ہو۔

مثال 17.9: ایسی ردوبدل جو مجموعہ تبدیل کرتی ہو
مرتکز تسلسل

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - + \cdots$$

کے اجزاء کی ردوبدل کرتے ہوئے ہم پہلے دو مثبت اجزاء اور پھر ایک منفی جزو لکھتے ہیں،اسی طرح چلتے ہوئے ہم دو مثبت اور ایک منفی اجزاء لکھتے ہیں۔ایسا کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \cdots$$

ہم بغیر ثبوت پیش کیے بتلانا چاہتے ہیں کہ یہ نئی تسلسل مرتکز ہے۔ہم اس کے مجموعے کو s^* کہتے ہیں۔ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ s اور s^* ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔حاصل تسلسل میں قوسین ڈال کر

$$s^* = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{2m}\right)$$

---

[28] rearrangement

ملتا ہے۔اس کے برعکس مساوات 17.26 میں دی گئی تسلسل کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے کر حاصل تسلسل کو جزو در جزو مساوات 17.27 میں دی گئی تسلسل کے ساتھ جمع کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{3s}{2} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4m-3}-\frac{1}{4m-2}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{4m}+\frac{\frac{1}{2}}{2m-1}-\frac{\frac{1}{2}}{2m}\right)\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4m-3}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{2m}\right)=s^*\end{aligned}$$

یوں $s^*=\frac{3s}{2}$ ہو گا۔آپ نے دیکھا کہ ردوبدل سے تسلسل کا مجموعہ تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ □

درج بالا مثال میں تسلسل مطلق مرتکز نہیں ہے۔آئیں اب ثابت کرتے ہیں کہ مطلق مرتکز تسلسل کی ردوبدل سے مجموعہ تبدیل نہیں ہو گا۔

مسئلہ 17.20: مطلق مرتکز تسلسل کی ردوبدل
مطلق مرتکز تسلسل کی ردوبدل سے حاصل تسلسل بھی مطلق مرتکز ہو گی اور اس کا مجموعہ اصل تسلسل کے مجموعے کے برابر ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ مطلق مرتکز تسلسل $w_1+w_2+\cdots$ کی ردوبدل سے تسلسل $w_1^*+w_2^*+\cdots$ حاصل ہوتی ہے۔اب چونکہ ہر w_m^* کسی مخصوص n کے لئے w_n کے برابر ہے اور کوئی دو m اجزاء کسی ایک n جزو کے مطابقتی نہیں ہیں لہٰذا صاف ظاہر ہے کہ ہر n کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{m=1}^{n}\left|w_m^*\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|w_k\right| \qquad \text{ہر } n$$

بائیں ہاتھ تسلسل $\left|w_1^*\right|+\left|w_2^*\right|\cdots$ کا n واں جزوی مجموعہ ہے۔چونکہ یہ جزوی مجموعے غیر منفی ہیں لہٰذا اس عدم مساوات کے تحت مجموعوں کی ترتیب محدود ہو گی۔چونکہ $\left|w_m^*\right| \ge 0$ ہے لہٰذا ترتیب یک سر بڑھتا ہے اور یوں مسئلہ 17.10 کے تحت مرتکز ہو گا۔یوں ردوبدل سے حاصل تسلسل $w_1^*+w_2^*+\cdots$ مطلق مرتکز ہو گی۔فرض کریں کہ اس کا مجموعہ s^* اور اصل تسلسل کا مجموعہ s ہے۔ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ $s^*=s$ ہے۔

مرکوزیت کی تعریف اور تسلسل $\left|w_1\right|+\left|w_2\right|+\cdots$ پر مسئلہ 17.8 کے اطلاق سے کسی $\epsilon>0$ کے لئے ہم ایسا N تلاش کر سکتے ہیں کہ $p=1,2,\cdots$ اور ہر $n>N$ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو

$$\text{(الف)}\quad \left|s_n-s\right|<\frac{\epsilon}{2} \qquad \text{(ب)}\quad \left|w_{n+1}\right|+\cdots+\left|w_{n+p}\right|<\frac{\epsilon}{2} \tag{17.28}$$

جہاں s_n اصل تسلسل کا n واں جزوی مجموعہ ہے۔اب کافی بڑے m کے لئے ردوبدل کردہ تسلسل کے جزوی مجموعہ s_m^* میں اصل تسلسل کے تمام اجزاء $w_1, w_2, \cdots, w_n$ اور غالباً کچھ اضافی اجزاء w_r شامل ہو گے جہاں $n > N$ ہے اور N کوئی مقررہ مستقل ہے، اور $r > n$ ہے۔یوں s_m^* کی صورت

$$s_m^* = s_n + A_{mn} \tag{17.29}$$

ہو گی جہاں A_{mn} ان اضافی اجزاء کا مجموعہ ہے۔فرض کریں کہ A_{mn} میں اجزاء کی زیادہ سے زیادہ اشاریہ $n + p$ ہے۔تب چونکہ $n > N$ ہے لہٰذا مساوات 17.28-ب کے تحت

$$|A_{mn}| \le |w_{n+1}| + \cdots + \left|w_{n+p}\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

ہو گا۔اس کے ساتھ مساوات 17.29 ملا کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$\left|s_m^* - s_n\right| = |A_{mn}| < \frac{\epsilon}{2}$$

کافی بڑے m کے لئے ہم مساوات 17.28-الف اور تکونی عدم مساوات سے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\left|s_m^* - s\right| = \left|(s_m^* - s_n) + (s_n - s)\right| \le \left|s_m^* - s_n\right| + |s_n - s| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

یوں ترتیب $s_1^*, s_2^*, \cdots$ مرتکز ہو گی اور اس کا حد s ہو گا لہٰذا $s^* = s$ ہو گا۔اس طرح ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

باب 18

طاقتی تسلسل، ٹیلر تسلسل اور لوغوں تسلسل

مخلوط تجزیہ میں طاقتی تسلسل (حصہ 18.1) اہم ترین ہے چونکہ یہ تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے (مسئلہ 18.8)۔اسی طرح ہر تحلیلی تفاعل کا طاقتی تسلسل پایا جاتا ہے جس کو ٹیلر تسلسل کہتے ہیں (حصہ 18.3 تا حصہ 18.6)۔یہ ٹیلر تسلسل حقیقی احصاء کی ٹیلر تسلسل کی مخلوط مماثل ہیں۔بلکہ حقیقی ٹیلر تسلسل میں حقیقی متغیرہ کی جگہ مخلوط متغیرہ پر کرتے ہوئے ہم حقیقی تفاعل کو مخلوط دائرہ کار تک وسعت دے سکتے ہیں۔

باب کے آخری حصے میں تحلیلی تفاعل کی لوغوں تسلسل پر غور کیا جائے گا۔ لوغوں تسلسل میں غیر تابع متغیرہ کی مثبت اور منفی عدد صحیح طاقت پائے جاتے ہیں۔جیسا ہم اگلے باب میں دیکھیں گے، یہ تسلسل حقیقی اور مخلوط تکمل کی قیمت حاصل کرنے میں مددگار ثابت ہوتی ہیں۔

18.1 طاقتی تسلسل

گزشتہ باب کے حصہ 17.2 میں مستقل اجزاء کی تسلسل کی تعریف پیش کی گئی۔اگر تسلسل کے اجزاء متغیر، مثلاً، متغیر z کے تفاعل ہوں تب کسی مقررہ z کے لئے یہ تمام اجزاء کوئی مستقل ہوں گے لہٰذا وہ تمام تعریف یہاں بھی قابل استعمال ہوں گے۔ظاہر ہے کہ ایسا تسلسل جس کے اجزاء متغیر z کے تفاعل ہوں کے جزوی مجموعے، باقی اور مجموعہ بھی z کے تفاعل ہوں گے۔عموماً ایسا تسلسل z کی کچھ قیمتوں، مثلاً، کسی خطے میں تمام z کے لئے مرتکز ہو گا، جبکہ z کی دیگر قیمتوں کے لئے تسلسل منفرج ہو گا۔

مخلوط تجزیہ میں متغیر اجزاء کی اہم ترین تسلسل طاقتی تسلسل ہے۔ متغیر $z-a$ کی **طاقتی تسلسل**[1] درج ذیل روپ کی لامتناہی تسلسل کو کہتے ہیں

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \tag{18.1}$$

جہاں z کوئی متغیر ہے جبکہ $c_0, c_1, \cdots$ ، جنہیں **عددی سر**[2] کہتے ہیں، مستقل قیمتیں ہیں اور a ، جس کو تسلسل کا مرکز[3] کہتے ہیں، مستقل ہے۔ طاقتی تسلسل میں طاقت m صرف غیر منفی ہو سکتا ہے[4]۔

$a=0$ کی صورت میں طاقتی تسلسل کی درج ذیل مخصوص روپ حاصل ہوتی ہے جو z کی طاقتی تسلسل ہے۔

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \tag{18.2}$$

طاقتی تسلسل کی مرکوزیت کو سادہ طریقے سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ آئیں تین عمومی مثالوں سے شروع کرتے ہیں۔

مثال 18.1: قرص میں مرکوزیت، ہندسی تسلسل
ہندسی تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = 1 + z + z^2 + \cdots$$

$|z|<1$ کی صورت میں مطلق مرتکز جبکہ $|z| \geq 1$ کی صورت میں منفرج ہے (مسئلہ 17.13)۔ □

مثال 18.2: پورے متناہی مستوی میں مرکوزیت
درج ذیل طاقتی تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

---

[1] power series
[2] coefficients
[3] center
[4] منفی m والے تسلسل پر اسی باب میں بعد میں غور کیا جائے گا۔

تناسبی پرکھ کے تحت ہر (متناہی) z کے لئے مطلق مرتکز ہے۔در حقیقت کسی بھی مقررہ z کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

□

مثال 18.3: صرف مرکز پر مرکوزیت

درج ذیل تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \cdots$$

صرف مرکز $z = 0$ پر مرتکز ہے جبکہ ہر $z \neq 0$ کے لئے تسلسل منفرج ہے۔یہی نتیجہ تناسبی پرکھ سے مقررہ z کے لئے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی:

$$\left|\frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n}\right| = (n+1)|z| \to \infty \qquad (n \to \infty, \quad z \neq 0)$$

□

$z = a$ کے لئے طاقتی تسلسل مساوات 18.1 مرتکز ہے چونکہ تب $z - a = 0$ ہو گا اور تسلسل واحد ایک جزو c_0 پر مشتمل ہو گا۔ جیسا آپ نے مثال 18.3 میں دیکھا، بعض اوقات z کی یہ واحد قیمت ہو گی جس پر تسلسل مرتکز ہو گا۔البتہ اگر تسلسل 18.3 کسی $z_0 \neq a$ کے لئے مرتکز ہو تب تسلسل z کی ہر اس قیمت کے لئے مرتکز ہو گا جس کا فاصلہ مرکز سے z_0 کے فاصلے سے کم ہو۔

مسئلہ 18.1: طاقتی تسلسل کی مرکوزیت

اگر مساوات 18.1 میں دیا گیا طاقتی تسلسل نقطہ $z = a$ پر مرتکز ہو تب یہ ہر اس z پر مطلق مرتکز ہو گا جس کے لئے $|z - a| < |z_0 - a|$ ہو، یعنی ایسے دائرے کے اندر ہر z پر جو z_0 سے گزرتا ہو اور جس کا مرکز a ہو۔

ثبوت: چونکہ مساوات 18.1 میں دیا گیا طاقتی تسلسل z_0 پر مرتکز ہے لہٰذا مسئلہ 17.5 کے تحت

$$c_n(z_0-a)^n \to 0 \qquad n\to\infty$$

ہو گا یعنی $z=z_0$ پر اس تسلسل کے اجزاء محدود ہوں گے، مثلاً ہر $n=0,1,2,\cdots$ کے لئے

$$\left|c_n(z_0-a)^n\right| < M \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

ہو گا۔اس سے درج ذیل ملتا ہے

$$\left|c_n(z_0-a)^n\right| = \left|c_n(z_0-a)^n\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n\right| < M\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$$

لہٰذا

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n(z_0-a)^n\right| < \sum_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n = M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n \tag{18.3}$$

ہو گا۔چونکہ ہم فرض کر چکے ہیں کہ $|z-a|<|z_0-a|$ لہٰذا

$$\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| < 1$$

ہو گا اور یوں مساوات 18.3 کی دائیں ہاتھ (ہندسی) تسلسل مرتکز ہو گا۔یوں مساوات 18.3 کا بایاں ہاتھ بھی مرتکز ہو گا لہٰذا مساوات 18.1 میں دیا گیا تسلسل $|z-a|<|z_0-a|$ کی صورت میں مطلق مرتکز ہو گا۔

□

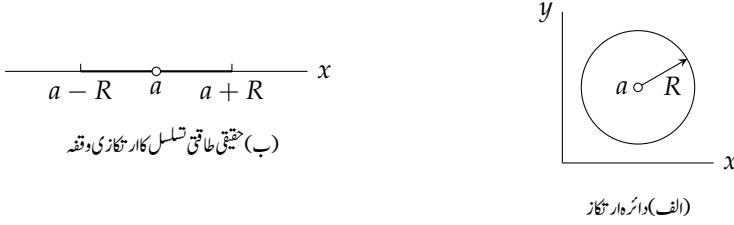
مثال 18.2 اور مثال 18.3 میں ہم نے دیکھا کہ طاقتی تسلسل تمام z یا صرف $z=a$ پر مرتکز ہو سکتا ہے۔آئیں ان دو صورتوں کو فی الحال نظر انداز کریں۔اب اگر کوئی طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) دیا گیا ہو تب ہم مخلوط مستوی میں ان تمام z پر غور کرتے ہیں جہاں تسلسل مرتکز ہو۔فرض کریں کہ R ایسا کم تر حقیقی عدد ہو کہ مرکز a سے ہر ایسے نقطے کا فاصلہ زیادہ سے زیادہ R ہو۔(مثال کے طور پر مثال 18.1 میں $R=1$ ہے۔) تب مسئلہ 18.1 کے تحت رداس R کے دائرہ جس کا مرکز a ہو میں تمام z پر تسلسل مرتکز ہو گا یعنی ان تمام z پر جو درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں

$$|z-a| < R \tag{18.4}$$

y a R x

(الف) دائرہ ارتکاز

$a-R$ a $a+R$ x

(ب) حقیقی طاقتی تسلسل کا ارتکازی وقفہ

شکل 18.1: دائرہ ارتکاز اور وقفہ ارتکاز

اور R کی تعریف کی رو سے ان تمام z پر جو

$$|z-a|>R$$

کو مطمئن کرتے ہوں، تسلسل منفرج ہو گا۔ دائرہ

$$|z-a|=R$$

کو **دائرہ ارتکاز**[5] کہتے ہیں جبکہ R کو **رداس ارتکاز**[6] کہتے ہیں (شکل 18.1-الف)۔

دائرہ مرکوزیت کے نقطوں پر تسلسل مرتکز یا منفرج ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر مثال 18.1 میں $R=1$ ہے اور دائرہ مرکوزیت $|z|=1$ کے ہر نقطہ پر تسلسل منفرج ہے۔ طاقتی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots$$

تناسبی پرکھ کے تحت $|z|<1$ پر مرتکز اور $|z|>1$ پر منفرج ہے۔ عین $z=1$ پر یہ ہارمونی تسلسل کی صورت اختیار کرتا ہے جو منفرج ہے جبکہ $z=-1$ پر یہ $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-+\cdots$ صورت اختیار کرتا ہے جو مرتکز ہے (مثال 17.3)۔ آپ نے دیکھا کہ دائرہ مرکوزیت کے کچھ نقطوں پر تسلسل مرتکز اور کچھ نقطوں پر تسلسل منفرج ہو سکتا ہے۔

ظاہر ہے کہ اگر ہم حقیقی طاقتی تسلسل مساوات 18.1 کی بات کی جائے جس کے عددی سر اور مرکز حقیقی ہوں اور متغیرہ $z=x$ ہو تب x محور پر مساوات 18.4 **ارتکازی وقفہ**[7] کو ظاہر کرے گا جس کی لمبائی $2R$ اور درمیانہ نقطہ $x=a$ ہو گا (شکل 18.1-ب)۔

---

[5] convergence circle
[6] convergence radius
[7] interval of convergence

اگر طاقتی تسلسل مساوات 18.1 تمام z پر (مثال 18.2 کی طرح) مرتکز ہو تب ہم

$$R = \infty \qquad \text{اور} \qquad \frac{1}{R} = 0$$

لکھتے ہیں اور اگر تسلسل (مثال 18.3 کی طرح) صرف مرکز $z = a$ پر مرتکز ہو تب ہم

$$R = 0 \qquad \text{اور} \qquad \frac{1}{R} = \infty$$

لکھتے ہیں۔ان روایات کو استعمال کرتے ہوئے ارتکاز کے رداس R کو تسلسل کی عددی سروں سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی:

مسئلہ 18.2: **ارتکاز کا رداس**
اگر ترتیب $\sqrt[n]{|c_n|},\; n = 1,2,\cdots$ مرتکز ہو اور اس کا حد L ہو، تب طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) کا رداس ارتکاز R درج ذیل ہو گا

$$R = \frac{1}{L} \tag{18.5}$$

جو $L = 0$ کی صورت میں $R = \infty$ دے گا اور تسلسل (مساوات 18.1) تمام z کے لئے مرتکز ہو گا۔

اگر یہ ترتیب مرکوز نہ ہو لیکن محدود ہو، تب

$$R = \frac{1}{l} \tag{18.6}$$

ہو گا جہاں ترتیب کے تحدیدی نقطوں میں سب سے بڑا تحدیدی نقطہ l ہے۔

اگر یہ ترتیب غیر محدود ہو، تب $R = 0$ ہو گا اور تسلسل صرف $z = a$ پر مرتکز ہو گا۔

مساوات 18.6 کلیہ کوشی اور ادامغ[8][9] کہلاتا ہے۔

ثبوت: اگر

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \neq 0$$

[8] فرانسیسی ریاضی دان آگستن لوئی کوشی [1789-1857] اور جیکویس ادامغ [1865-1964]
[9] Cauchy-Hadamard formula

ہو تب

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|c_n(z-a)^n\right|} = |z-a| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |z-a|\, L$$

ہو گا۔چونکہ تسلسل (مساوات 18.1) کے اجزاء $w_n = c_n(z-a)^n$ ہیں لہٰذا جذری پرکھ (حصہ 17.5) کے تحت

$$|z-a| < \frac{1}{L} = R \quad \text{یا} \quad |z-a|\, L < 1$$

کی صورت میں تسلسل مطلق مرتکز ہو گا جبکہ

$$|z-a| > \frac{1}{L} = R \quad \text{یا} \quad |z-a|\, L > 1$$

کی صورت میں تسلسل منفرج ہو گا۔اگر

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L = 0$$

ہو تب حد کی تعریف کی رو سے کسی بھی $\epsilon > 0$ مثلاً $\epsilon = \frac{1}{2|z_1-a|}$ کے لئے جہاں z_1 مستقل ہے، ہم ایسا N تلاش کر سکتے ہیں کہ ہر $n > N$ کے لئے درج ذیل ہو۔

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|z_1-a|} \qquad (\text{ہر } n > N)$$

اس سے ہمیں

$$|c_n| < \frac{1}{(2|z_1-a|)^n} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|c_n(z_1-a)^n\right| < \frac{1}{2^n}$$

ملتا ہے۔اب چونکہ $\sum 2^{-n}$ مرتکز ہے لہٰذا تقابلی پرکھ (حصہ 17.5) کے تحت $z = z_1$ کے لئے تسلسل (مساوات 18.1) مطلق مرتکز ہے۔چونکہ z_1 اختیاری ہے لہٰذا تسلسل ہر z کے لئے مطلق مرتکز ہے۔یوں مساوات 18.5 کا ذکر کرنے والے فقرے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

ہم اب اس فقرے کو ثابت کرتے ہیں جو مساوات 18.6 کا ذکر کرتا ہے۔ مسئلہ بُلزانو وائنشٹراس 17.6 کے تحت l موجود ہو گا اور چونکہ $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 0$ ہے لہٰذا $l > 0$ ہو گا۔حد کی تعریف کی رو سے کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے n کی لامتناہی تعداد کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$l - \epsilon < \sqrt[n]{|c_n|} < l + \epsilon \qquad n \text{ کی لامتناہی تعداد}$$

اس کو مثبت مقدار $|z-a|$ سے ضرب دینے سے عدم مساوات

$$|z-a|\,(l-\epsilon) < \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} \tag{18.7}$$

اور

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < |z-a|\,(l+\epsilon) \tag{18.8}$$

حاصل ہوتی ہیں۔چونکہ l سب سے بڑا تحدیدی نقطہ ہے لہٰذا عدم مساوات 18.8 کے دائیں ہاتھ سے بڑے اجزاء کی تعداد متناہی ہو گی اور یوں کافی بڑے تمام n ، مثلاً $n > N$ ، کے لئے بھی عدم مساوات 18.8 مطمئن ہو گی۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ

$$|z-a| < \frac{1}{l} \tag{18.9}$$

کے لئے طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) کا ارتکاز عدم مساوات 18.8 سے ثابت ہوتا ہے۔در حقیقت، اگر ہم درج ذیل منتخب کریں

$$\epsilon = \frac{1-l|z-a|}{2|z-a|}$$

تب مساوات 18.9 کے تحت $\epsilon > 0$ ہو گا اور عدم مساوات 18.8 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < \frac{1+l|z-a|}{2} \qquad (n > N)$$

مساوات 18.9 سے ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں ہاتھ اکائی سے کم ہے لہٰذا مسئلہ 17.17 کے تحت تسلسل مرتکز ہو گا۔اس کے برعکس اگر

$$|z-a| > \frac{1}{l}$$

ہو تب

$$\epsilon = \frac{l|z-a|-1}{2|z-a|}$$

منتخب کرتے ہوئے $\epsilon > 0$ حاصل ہو گا اور عدم مساوات 18.7 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > \frac{|z-a|\,l+1}{2} > 1$$

یوں جذری پرکھ کے تحت ان z کے لئے تسلسل منفرج ہو گا۔یوں اس فقرے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے جو مساوات 18.6 کا ذکر کرتی ہے۔

آخر میں اگر ترتیب $\sqrt[n]{|c_n|}$ غیر محدود ہو، تب، انفراج کی تعریف کی رو سے، کسی بھی K کے لئے

$$\sqrt[n]{|c_n|} > K \qquad n \text{ کی لامتناہی تعداد کے لئے}$$

ہو گا۔ہم $K = \frac{1}{|z-a|}$ منتخب کرتے ہیں جہاں $z \neq a$ ہے اور یوں عدم مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{|z-a|} \quad \implies \quad \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} > 1$$

لہٰذا مسئلہ 17.17 کے تحت تسلسل منفرج ہو گا۔یوں اس مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب طاقتی تسلسل کے مجموعہ اور ان کی تفریق پر غور کرتے ہیں۔

دو طاقتی تسلسل کو جزو در جزو ان تمام z کے لئے جمع کیا جا سکتا ہے جن پر دونوں تسلسل مرتکز ہوں۔ یہ نتیجہ مسئلہ 17.18 سے اخذ ہوتا ہے۔

آئیں دو طاقتی تسلسل

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots \quad \text{اور} \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m = c_1 + c_1 z + \cdots \tag{18.10}$$

کی جزو در جزو ضرب پر غور کرتے ہیں۔بائیں تسلسل کی ہر جزو کو دائیں تسلسل کی ہر جزو سے ضرب دے کر z کی ایک جیسی طاقتوں کو یکجا کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} & a_0c_0 + (a_0c_1 + a_1c_0)z + (a_0c_2 + a_1c_1 + a_2c_0)z^2 + \cdots \\ & \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (a_0c_n + a_1c_{n-1} + \cdots + z_nc_0)z^n \end{aligned} \tag{18.11}$$

ملتا ہے۔اس کو مساوات 18.10 میں دی گئی تسلسلوں کا کوشی حاصل ضرب[10] کہتے ہیں۔

[10] Cauchy product

مسئلہ 18.3: طاقتی تسلسلوں کا کوشی حاصل ضرب
مساوات 18.10 میں ہر ایک تسلسل کی دائرہ ارتکاز کے اندر ہر z کے لئے کوشی حاصل ضرب (مساوات 18.11) مطلق مرتکز ہو گا۔اگر ان تسلسلوں کے مجموعے بالترتیب $g(z)$ اور $h(z)$ ہوں تب کوشی حاصل ضرب کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$s(z) = g(z)h(z) \tag{18.12}$$

ثبوت: کوشی حاصل ضرب (مساوات 18.11) کا عمومی جزو

$$p_n = (a_0c_n + a_1c_{n-1} + \cdots + z_nc_0)z^n$$

ہے۔اب عمومی تکونی عدم مساوات 14.26 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} |p_0| + |p_1| &= |a_0c_0| + |(a_0c_1 + a_1c_0)z| \le (|a_0| + |a_1z|)(|c_0| + |c_1z|), \\ |p_0| + |p_1| + |p_2| &\le (|a_0| + |a_1z| + \left|a_2z^2\right|)(|c_0| + |c_1z| + \left|c_2z^2\right|), \end{aligned}$$

جس کی تصدیق آپ دائیں ہاتھ ضرب حاصل کرتے ہوئے کر سکتے ہیں؛ اسی طرح درج ذیل عمومی عدم مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned} &|p_0| + |p_1| + \cdots + |p_n| \\ &\quad \le (|a_0| + |a_1z| + \cdots + |a_nz^n|)(|c_0| + |c_1z| + \cdots + |c_nz^n|) \end{aligned} \tag{18.13}$$

اگر z مساوات 18.10 میں ہر ایک تسلسل کے دائرہ ارتکاز کے اندر پایا جاتا ہو، تب عدم مساوات 18.13 کا دایاں ہاتھ محدود ہو گا لہٰذا جزوی مجموعوں کی ترتیب کا مجموعہ $|p_0| + |p_1| + \cdots$ بھی محدود ہو گا۔چونکہ $|p_n| \ge 0$ ہے لہٰذا یہ ترتیب یک سر بڑھتی ترتیب ہو گی اور مسئلہ 17.10 کے تحت مرتکز ہو گا۔یوں یہ تسلسل مرتکز ہے اور حاصل ضرب تسلسل (مساوات 18.11) مطلق مرتکز ہو گا۔

ہم اب مساوات 18.12 کو ثابت کرتے ہیں۔ ہم اس حقیقت کو برائے کار لاتے ہیں کہ مساوات 18.11 کی ہر ردوبدل ان z کے لئے مطلق مرتکز ہے اور اس کا مجموعہ مساوات 18.12 دیتی ہے (مسئلہ 17.20)۔ہم ان میں سے ایک مخصوص ردوبدل $p_0^* + p_1^* + \cdots$ پر غور کرتے ہیں جہاں p_n^* درج ذیل ہے (شکل 18.2)۔

$$(a_nc_0 + a_0c_n)z^n + (a_nc_1 + a_1c_n)z^{n+1} + \cdots + (a_nc_{n-1} + a_{n-1}c_n)z^{2n-1} + a_nc_nz^{2n}$$

$$
\begin{array}{cccc}
p_0^* & p_1^* & p_2^* & \cdots \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
a_0c_0 & a_0c_1z & a_0c_2z^2 & \cdots \\
 & \wr & \wr & \\
a_1c_0z \sim\sim & a_1c_1z^2 & a_1c_2z^3 & \cdots \\
 & & \wr & \\
a_2c_0z^2 \sim\sim & a_2c_1z^3 \sim\sim & a_2c_2z^4 & \cdots
\end{array}
$$

شکل 18.2: ثبوت مسئلہ 18.3

ظاہر ہے کہ

$$a_0c_0 = p_0^*, \quad (a_0 + a_1z)(c_0 + c_1z) = p_0^* + p_1^*$$

اور عمومی جزو

$$(a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n)(c_0 + c_1z + \cdots + c_nz^n) = p_0^* + p_1^* + \cdots p_n^*$$

ہیں۔اب n کو لامتناہی تک پہنچانے سے مساوات 18.12 حاصل ہوتی ہے۔یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 18.4: کوشی حاصل ضرب

ہندسی تسلسل $1 + z + z^2 + \cdots$ کا $|z| < 1$ کی صورت میں مجموعہ $\frac{1}{1-z}$ ہے (حصہ 17.5)۔مسئلہ 18.3 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} z^m = (1 + z + z^2 + \cdots)(1 + z + z^2 + \cdots) \\
&= 1 + 2z + 3z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \qquad (|z| < 1)
\end{aligned}
$$

□

سوالات

سوال 18.1: اگر ترتیب $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ ، جہاں $n = 1, 2, \cdots$ ہے، مرتکز ہو اور اس کا حد L ہو تب دکھائیں کہ طاقتی تسلسل (مساوات 18.1) کی ارتکاز کے دائرے کا رداس، $L > 0$ کی صورت میں $R = \frac{1}{L}$ ہو گا جبکہ $L = 0$ کی صورت میں $R = \infty$ ہو گا۔

سوال 18.2: اگر مساوات 18.2 میں دی گئی تسلسل کی ارتکاز کا رداس (جو متناہی تصور کیا گیا ہو) R ہے، تب دکھائیں کہ $\sum c_m z^{2m}$ کی ارتکاز کا رداس $\sqrt{R}$ ہو گا۔

سوال 18.3 تا سوال 18.18 میں ارتکاز کا رداس تلاش کریں۔

سوال 18.3: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z - i2)^n$

جواب: 1

سوال 18.4: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^n}$

سوال 18.5: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(\frac{z}{3})^n$

جواب: 3

سوال 18.6: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^n}{n!}$

سوال 18.7: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}$

جواب: ∞

سوال 18.8: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

سوال 18.9: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n$

جواب: ∞

سوال 18.10: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}z^n$

سوال 18.11: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 18.12: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

سوال 18.13: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

جواب: ∞

سوال 18.14: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

سوال 18.15: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 6^n (z-i)^n$

جواب: $\frac{1}{6}$

سوال 18.16: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n!)^2 z^n$

سوال 18.17: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{2n} z^n$

جواب: $\frac{1}{9}$

سوال 18.18: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{2^n} z^n$

سوال 18.19: اگر $\sum c_n z^n$ تمام متناہی z کے لئے مرتکز ہو تب دکھائیں کہ $n \to \infty$ کے لئے $\sqrt[n]{|c_n|} \to 0$ ہو گا۔ کوئی مثال پیش کریں۔

سوال 18.20: ارتکاز کے دائرے پر تسلسل مرتکز یا منفرج ہو سکتا ہے۔ ہندسی تسلسل کے لئے اس حقیقت کو دکھائیں۔

18.2 طاقتی تسلسل کی روپ میں تفاعل

اس حصے میں ہم دکھائیں گے کہ طاقتی تسلسل تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہیں (مسئلہ 18.8)۔اس کا الٹ یعنی ہر تحلیلی تفاعل کو طاقتی تسلسل (جس کو ٹیلر تسلسل کہتے ہیں) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے کو اگلے حصے میں ثابت کیا جائے گا۔ان دو وجوہات کی بنا طاقتی تسلسل مخلوط تجزیہ میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ اختیاری طاقتی تسلسل ہے جس کی ارتکاز کا رداس R غیر صفر ہے۔تب اس تسلسل کا مجموعہ z کا تفاعل ہو گا مثلاً $f(z)$ جس کو ہم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \qquad (|z| < R) \tag{18.14}$$

لکھتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ $f(z)$ کو طاقتی تسلسل ظاہر کرتی ہے۔مثال کے طور پر اکائی دائرہ $|z| = 1$ کے اندر ہندسی تسلسل تفاعل $f(z) = \frac{1}{1-z}$ کو ظاہر کرتی ہے (مسئلہ 17.13)۔

مسئلہ 18.4: استمرار
$R > 0$ کی صورت میں $z = 0$ پر مساوات 18.14 میں تفاعل $f(z)$ استمراری ہے۔

ثبوت: ہم درج ذیل دکھانا چاہتے ہیں۔

$$\lim_{z \to 0} f(z) = f(0) = c_0 \tag{18.15}$$

ہم اختیاری مثبت عدد $r < R$ منتخب کرتے ہیں۔چونکہ مساوات 18.14 میں دیا گیا تسلسل قرص $|z| < R$ میں مطلق مرتکز ہے لہٰذا درج ذیل تسلسل مرتکز ہو گا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n \qquad (0 < r < R)$$

فرض کریں کہ اس تسلسل کا مجموعہ K ہے۔تب ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$|f(z) - c_0| = \left| z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} \right| \le |z| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |z|^{n-1} \le |z| K \qquad (0 < |z| \le r)$$

اب دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے، ان تمام z پر جو $|z| < \sigma$ کو مطمئن کرتے ہوں جہاں σ ایسا حقیقی مثبت عدد ہے جو r اور $\frac{\epsilon}{K}$ دونوں سے چھوٹا ہو، $\left|f(z) - c_0\right| < \epsilon$ ہو گا۔یوں حد کی تعریف کی رو سے مساوات 18.15 مطمئن ہو گا لہٰذا مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب یکتائی پر غور کرتے ہیں۔ہم دکھائیں گے کہ ایک ہی تفاعل $f(z)$ کو ایک ہی مرکز والے دو مختلف طاقتی تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن نہیں ہو گا۔اگر $f(z)$ کو مرکز a کی طاقتی تسلسل سے ظاہر کیا جائے تب ایسا تسلسل یکتا ہو گا۔اس اہم حقیقت کی حقیقی اور مخلوط تجزیہ میں عموماً ضرورت پیش آتی ہے۔ہم اس کو درج ذیل مسئلہ میں پیش کرتے ہیں (جہاں عمومیت کھوئے بغیر $a = 0$ تصور کیا گیا ہے)۔

مسئلہ 18.5: **طاقتی تسلسل کا مسئلہ مماثلت**

فرض کریں کہ مثبت R کے لئے تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{اور} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$|z| < R$ پر مرتکز ہیں اور ان تمام z پر ان کا مجموعہ ایک جیسا ہے۔تب دونوں تسلسل مماثل ہوں گے یعنی تمام n کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$a_n = b_n \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{18.16}$$

ثبوت: ہم الکراجی ماخوذ کی مدد سے آگے بڑھتے ہیں۔ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \qquad (|z| < R) \tag{18.17}$$

z کو صفر تک پہنچانے سے مسئلہ 18.4 کے تحت $a_0 = b_0$ ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ $n = 0, 1, \cdots, m$ کے لئے $a_n = b_n$ ہیں۔تب مساوات 18.17 میں دونوں ہاتھ ابتدائی $m + 1$ اجزاء حذف کرنے کے بعد $z^{m+1}\ (\neq 0)$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$a_{m+1} + a_{m+2} z + a_{m+3} z^2 + \cdots = b_{m+1} + b_{m+2} z + b_{m+3} z^2 + \cdots$$

ملتا ہے۔ مسئلہ 18.4 کے تحت دونوں میں سے ہر ایک تسلسل $z=0$ پر استمراری تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔یوں $a_{m+1}=b_{m+1}$ ہو گا۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

آئیں اب طاقتی تسلسل کی جزو در جزو تفرق اور تکمل لینے پر غور کرتے ہیں۔تسلسل $c_1+c_1z+c_2z^2+\cdots$ کا تفرق لینے سے درج ذیل تسلسل حاصل ہوتی ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1} = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \cdots \tag{18.18}$$

اس کو طاقتی تسلسل کی **تفرقی تسلسل**[11] کہتے ہیں۔

مسئلہ 18.6: جزو در جزو تفرق
تفرقی تسلسل کی ارتکاز کا رداس اصل تسلسل کی ارتکاز کے رداس کے برابر ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ $nc_n=c_n^*$ ہے۔تب $\sqrt[n]{|c_n^*|}=\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|c_n|}$ ہو گا۔چونکہ $n\to\infty$ کرنے سے $\sqrt[n]{n}\to 0$ ہو گا لہٰذا یا دونوں ترتیب $\sqrt[n]{|c_n^*|}$ اور $\sqrt[n]{|c_n|}$ مرتکز ہوں گے اور ان کا ایک ہی حد ہو گا اور یا دونوں ترتیب منفرج ہوں گے۔اگر دونوں ترتیب منفرج ہوں، تب دونوں یا غیر محدود ہوں گے یا دونوں محدود ہوں گے۔اگر دونوں محدود ہوں تب ان کے سب سے بڑے تحدیدی نقطے ایک جیسے ہوں گے۔یوں اس سے اور مسئلہ 18.2 سے موجودہ مسئلے کا فقرہ ثابت ہوتا ہے۔

□

مثال 18.5: طاقتی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n$$

کی ارتکاز کا رداس $R=1$ ہے۔ہندسی تسلسل کا تفرق لے کر مسئلہ 18.6 کی اطلاق سے ایسا حاصل ہوتا ہے۔
□

derived series[11]

مسئلہ 18.7: جزو در جزو تکمل
تسلسل $c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$ کا جزو در جزو تکمل لینے سے حاصل تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}=c_0z+\frac{c_1}{2}z^2+\frac{c_2}{3}z^3+\cdots$$

کی ارتکاز کا رداس اصل تسلسل کی ارتکاز کے رداس کے برابر ہو گا۔

اس مسئلہ کا ثبوت مسئلہ 18.6 کی ثبوت کی طرح ہے۔

طاقتی تسلسل تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتی ہیں اور تفرقی تسلسل (جو تسلسل کا جزو در جزو تفرق لے کر حاصل کیا جاتا ہے) ان تفاعل کی تفرق کو ظاہر کرتی ہیں۔

مسئلہ 18.8: تحلیلی تفاعل۔ ان کے تفرق
غیر صفر رداس ارتکاز R والی طاقتی تسلسل دائرہ ارتکاز کے اندر ہر نقطہ پر تحلیلی تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔ان تفاعل کے بلند رتبی تفرق حاصل کرنے کی خاطر اصل طاقتی تسلسل کے جزو در جزو تفرق لیے جاتے ہیں؛یوں حاصل تمام تسلسلوں کی ارتکاز کا رداس اصل تسلسل کی ارتکاز کے رداس جیسا ہو گا۔

ثبوت: ہم پہلے ثابت کرتے ہیں کہ کسی بھی عددی صحیح $n\geq 2$ کے لئے

(18.19)

(الف) $$\frac{b^n-a^n}{b-a}-na^{n-1}=(b-a)A_n$$

ہو گا جہاں (ب) $$A_n=b^{n-2}+2ab^{n-3}+3a^2b^{n-4}+\cdots+(n-1)a^{n-2}$$

ہے۔ہم الکراجی ماخوذ کی مدد سے آگے بڑھتے ہیں۔سادہ حساب سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n=2$ کے لئے مساوات 18.19 مطمئن ہوتی ہیں۔فرض کریں کہ $n=k$ کے لئے مساوات 18.19 مطمئن ہوتی ہیں۔ہم دکھاتے ہیں کہ یہ $n=k+1$ کے لئے بھی یہ مساوات مطمئن ہوں گی۔ ہم $n=k+1$ کے لئے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{b-a}=\frac{b^{k+1}-ba^k+ba^k-a^{k+1}}{b-a}=b\frac{b^k-a^k}{b-a}+a^k$$

مساوات 18.19-الف کے تحت دایاں ہاتھ درج ذیل کے برابر ہو گا

$$b[(b-a)A_k + ka^{k-1}] + a^k$$

جس کو

$$(b-a)[bA_k + ka^{k-1}] + ka^k + a^k$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $n = k$ لیتے ہوئے چکور قوسین میں بند حصے کو مساوات 18.19-ب سے

$$b^{k-1} + 2ab^{k-2} + \cdots + (k-1)b^{k-2} + ka^{k-1} = A_{k+1}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ہمیں

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a} = (b-a)A_{k+1} + (k+1)a^k$$

ملتا ہوتا ہے جو $n = k+1$ لیتے ہوئے مساوات 18.19 ہے۔اس طرح کسی بھی $n \geq 2$ کے لئے مساوات 18.19 ثابت ہوتا ہے۔

ہم اب مسئلہ 18.8 کے فقروں کو ثابت کرتے ہیں۔درج ذیل روپ پر غور کریں۔

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

فرض کریں کہ اس کی ارتکاز کا رداس R غیر صفر ہے۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ کسی بھی مقررہ z جہاں $|z| < R$ ہے کے لئے $\Delta z \to 0$ کرنے سے $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ کی قیمت تفرقی تسلسل مساوات 18.18 تک پہنچتی ہے جس کو ہم $f_1(z)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔جزو در جزو مجموعہ لے کر

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \Big[\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - nz^{n-1}\Big]$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 18.19 میں $b = z + \Delta z$ ، $a = z$ اور $b - a = \Delta z$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ کا تسلسل

$$\Delta z \sum_{n=2}^{\infty} c_n [(z+\Delta z)^{n-2} + 2z(z+\Delta z)^{n-3} + \cdots + (n-1)z^{n-2}]$$

لکھا جا سکتا ہے اور $R_0 \leq |z|$ اور $|z + \Delta z| \leq R_0$ جہاں $R_0 < R$ ہے کے لئے اس کی مطلق قیمت درج ذیل سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے

$$|\Delta z| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \, n(n-1) R_0^{n-2} \tag{18.20}$$

جہاں عددی سر $1, 2, \cdots, n-1$ میں سب سے بڑا عددی سر $n-1$ ہے اور اجزاء کی تعداد n ہے۔ مساوات 18.20 میں دیا گیا تسلسل دوسری تفرقی تسلسل کے ساتھ R_0 پر قریبی تعلق رکھتا ہے۔ بلکہ اس تفرقی مساوات کے عددی سر c_n ہیں (جبکہ مساوات 18.20 کے تسلسل کے عددی سر $|c_n|$ ہیں) اور مسئلہ 18.6 اور مسئلہ 18.1 کے تحت $R_0 \, (< R)$ پر مطلق مرتکز ہے۔ اس سے مراد مساوات 18.20 کے تسلسل کی R_0 پر مرکوزیت ہے؛ فرض کریں کہ اس کی قیمت $K(R_0)$ ہے، تب ہمارا نتیجہ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left| \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_1(z) \right| \leq |\Delta z| \, K(R_0)$$

$\Delta \to 0$ لیتے ہوئے اور جانتے ہوئے کہ $R_0 \, (< R)$ اختیاری ہے، ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دائرہ ارتکاز کے اندر کسی بھی نقطہ پر $f(z)$ تحلیلی ہو گا اور اس کے تفرق کو تفرقی تسلسل ظاہر کرے گا۔ اس سے بلند رتبی تفرق کا فقرہ الکراجی ماخوذ سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ یوں مسئلہ 18.8 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مسئلہ 18.8 سے ہم دیکھتے ہیں کہ $f(z)$ (مساوات 18.14) کا m واں تفرق $f^{(m)}(z)$ درج ذیل ہو گا۔

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1) c_n z^{n-m} \quad (|z| < R) \tag{18.21}$$

اگلے حصے میں ہم دیکھیں گے کہ ہر تحلیلی تفاعل کو طاقتی تسلسل ظاہر کر سکتا ہے۔

سوالات

سوال 18.21: اگر مساوات 18.14 میں دیا گیا تسلسل جفت ہو تب ثابت کریں کہ طاق n کے c_n صفر ہوں گے۔ (مسئلہ 18.5 استعمال کریں۔)

سوال 18.22: اگر مساوات 18.14 میں دیا گیا تسلسل طاق ہو تب ثابت کریں کہ جفت n کے c_n صفر ہوں گے۔ مثال پیش کریں۔

سوال 18.23: مسئلہ 18.5 کا اطلاق $(1+z)^p(1+z)^q = (1+z)^{p+q}$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں جہاں p اور q مثبت عدد صحیح ہیں۔

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}\binom{q}{r-n}=\binom{p+q}{r}$$

سوال 18.24: ہندسی تسلسل کے لئے مسئلہ 18.6 اور مسئلہ 18.7 کی تصدیق کریں۔

ہندسی تسلسل پر مسئلہ 18.6 اور مسئلہ 18.7 کے اطلاق سے سوال 18.25 تا سوال 18.30 میں دیے تسلسل کی ارتکاز کا رداس تلاش کریں۔

سوال 18.25: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}(z-i)^n$

جواب: 5

سوال 18.26: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{n}$

سوال 18.27: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n}(z+i2)^n$

جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 18.28:

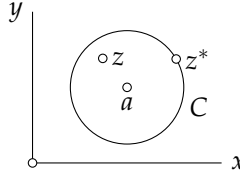
$$\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

سوال 18.29:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{n+k}{n}\right]^{-1}z^{n+k}$$

جواب: 1

سوال 18.30:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\binom{n+k}{n}\right]^{-1}\left(\frac{z}{3}\right)^n$$

شکل 18.3: شکل برائے مساوات 18.22

18.3 ٹیلر تسلسل

حقیقی احصاء میں ٹیلر تسلسل انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے۔ہم اب دیکھیں گے کہ مخلوط تجزیہ میں اس کی عمومی صورت پائی جاتی ہے جو اس سے بھی زیادہ اہم ہے۔

آئیں نقطہ $z = a$ کی پڑوس میں تحلیلی تفاعل $f(z)$ پر غور کرتے ہیں۔فرض کریں کہ اس پڑوس میں دائرہ C پایا جاتا ہے جس کا مرکز a ہے۔ہم z_0 اور z کی جگہ بالترتیب z اور z^* لکھتے ہوئے کوشی کا کلیہ تکمل (مساوات 16.31) استعمال کرتے ہیں

$$f(z) = \frac{1}{i2\pi} \int\limits_C \frac{f(z^*)}{z^* - z} \, \mathrm{d}z^* \tag{18.22}$$

جہاں C کے اندر z اختیاری مقررہ نقطہ ہے اور z^* مخلوط تکمل کا متغیرہ ہے (شکل 18.3)۔ہم اب مساوات 18.22 میں $\frac{1}{z^*-z}$ کی طاقتی تسلسل $z - a$ کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔ہم پہلے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - a - (z - a)} = \frac{1}{(z^* - a)\left(1 - \frac{z-a}{z^*-a}\right)} \tag{18.23}$$

چونکہ z^* دائرہ C پر پایا جاتا ہے جبکہ z دائرے کے اندر پایا جاتا ہے لہٰذا

$$\left| \frac{z - a}{z^* - a} \right| < 1 \tag{18.24}$$

ہو گا۔

ہندسی تسلسل سے

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad (q \neq 1)$$

لکھتے ہوئے

$$\frac{1}{1-q}=1+q+\cdots+q^n+\frac{q^{n+1}}{1-q}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں $q=\frac{z-a}{z^*-a}$ پر کرنے سے

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{z^*-a}}=1+\frac{z-a}{z^*-a}+\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^n+\frac{\left(\frac{z-a}{z^*-a}\right)^{n+1}}{\frac{z-a}{z^*-a}}$$

ملتا ہے۔ہم اس کو مساوات 18.23 میں پر کرنے کے بعد مساوات 18.23 کو مساوات 18.22 میں پر کرتے ہیں۔ چونکہ z اور a مستقل ہیں لہٰذا ہم $z-a$ کی طاقتوں کو تکمل کی علامت سے باہر نکال سکتے ہیں۔یوں مساوات 18.22 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$f(z)=\frac{1}{i2\pi}\int_C\frac{f(z^*)}{z^*-a}\,\mathrm{d}z^*+\frac{z-a}{i2\pi}\int_C\frac{f(z^*)}{(z^*-a)^2}\,\mathrm{d}z^*+\cdots+\frac{(z-a)^n}{i2\pi}\int_C\frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z^*+R_n(z) \tag{18.25}$$

جہاں آخری جزو درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$R_n(z)=\frac{(z-a)^{n+1}}{i2\pi}\int_C\frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}(z^*-z)}\,\mathrm{d}z^* \tag{18.26}$$

مساوات 16.36 استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 18.25 کو

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1!}f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(z) \tag{18.27}$$

لکھ سکتے ہیں جو کلیہ ٹیلر[12] کہلاتا[13] ہے جبکہ $R_n(z)$ کو باقی کہتے ہیں۔چونکہ تحلیلی تفاعل $f(z)$ کا ہر رتبہ کا تفرق پایا جاتا ہے لہٰذا ہم مساوات 18.27 میں n جتنا چاہیں بڑا لے سکتے ہیں۔مساوات 18.27 میں $n\to\infty$ کرنے سے

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m \tag{18.28}$$

---

[12] Taylor's formula

[13] انگلستانی ریاضی دان بروک ٹیلر [1685-1731]

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 18.28 کو $f(z)$ کا **ٹیلر تسلسل**[14] کہتے ہیں جس کا مرکز a ہے۔اس کی وہ مخصوص صورت جس میں $a=0$ ہو $f(z)$ کا **مکلارن تسلسل**[15] کہلاتا[16] ہے۔

ظاہر ہے کہ مساوات 18.28 میں دیا گیا تسلسل اس صورت مرتکز ہو گا اور $f(z)$ کو ظاہر کرے گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z)=0 \tag{18.29}$$

مساوات 18.29 کو ثابت کرنے کی خاطر ہم مساوات 18.26 پر غور کرتے ہیں۔چونکہ z^* دائرہ C پر ہے جبکہ z اس دائرے کے اندر ہے لہٰذا $|z^*-z|>0$ ہو گا۔چونکہ $f(z)$ دائرہ C پر اور اس دائرے کے اندر تحلیلی ہے لہٰذا $\frac{f(z^*)}{z^*-z}$ کی مطلق قیمت محدود ہو گی، مثلاً C پر تمام z^* کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\frac{f(z^*)}{z^*-z}\right|<\tilde{M}$$

فرض کریں کہ C کا رداس r ہے۔تب C پر تمام z^* کے لئے $|z^*-a|=r$ ہو گا جبکہ C کی لمبائی $2\pi r$ ہو گی۔یوں مساوات 18.26 پر مساوات 16.16 کا اطلاق کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
|R_n|&=\frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}(z^*-z)}\,\mathrm{d}z^*\right|\\
&<\frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\tilde{M}\frac{1}{r^{n+1}}2\pi r=\tilde{M}r\left|\frac{z-a}{r}\right|^{n+1}
\end{aligned}$$

ملتا ہے۔اب n کی قیمت لامتناہی تک پہنچانے سے دایاں ہاتھ، مساوات 18.24 کے تحت، صفر تک پہنچے گا۔یوں C کے اندر تمام z کے لئے مساوات 18.29 ثابت ہوتا ہے۔چونکہ مسئلہ 18.5 کے تحت $f(z)$ کا مساوات 18.28 کی روپ میں اظہار یکتا ہے، یعنی مساوات 18.28 وہ واحد طاقتی تسلسل ہے جس کا مرکز a ہے اور جو $f(z)$ کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا ہم حاصل نتیجہ کو درج ذیل مسئلہ کو صورت میں بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 18.9: مسئلہ ٹیلر
فرض کریں کہ دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہے اور D میں $z=a$ کوئی نقطہ ہے۔تب ایسا واحد ایک

[14] Taylor series
[15] Maclaurin series
[16] اسکاچی ریاضی دان کولن مکلارن [1698-1746]

طاقتی تسلسل موجود ہو گا جس کا مرکز a ہو اور جو $f(z)$ کو ظاہر کرتا ہو؛ اس تسلسل کی روپ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \tag{18.30}$$

ہے جہاں

$$b_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) \qquad n = 0, 1, \cdots$$

ہے؛ D میں اس بڑے سے بڑے کھلے قرص جس کا مرکز a ہو میں یہ تسلسل کارآمد ہو گا۔ مساوات 18.30 کے باقی $R_n(z)$ کو مساوات 18.26 ظاہر کرتی ہے۔ تسلسل کے عددی سر عدم مساوات

$$|b_n| \leq \frac{M}{r^n} \tag{18.31}$$

کو مطمئن کرتے ہیں جہاں دائرہ $|z-a| = r$ پر $|f(z)|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت M ہے۔

کوشی عدم مساوات 16.39 سے عدم مساوات 18.31 حاصل ہوتی ہے۔

عملاً مساوات 18.29 کہتی ہے کہ ان تمام z کے لئے جن پر مساوات 18.30 منفرج ہو، مساوات 18.30 کے n ویں جزوی مجموعہ کی قیمت $f(z)$ کی قیمت کے اتنی قریب ہو گی جتنا درکار ہو، پس ہمیں n اتنا بڑا لینا ہو گا۔

ہم مسئلہ ٹیلر سے دیکھتے ہیں کہ مساوات 18.30 کی ارتکاز کا رداس کم از کم a سے D کی سرحد تک کم سے کم فاصلہ جتنا ہو گا۔ اگرچہ رداس ارتکاز اس سے بڑا ہو سکتا ہے لیکن تب D کی ان تمام نقطوں پر جو ارتکاز کے دائرے کے اندر پائے جاتے ہوں پر ضروری نہیں ہے کہ تسلسل $f(z)$ کو ظاہر کرتا ہو۔

مخلوط تحلیلی تفاعل کی ایک انوکھی خاصیت یہ ہے کہ ان کی ہر رتبہ کے تفرق پائے جاتے ہیں اور اب ہم نے ان کی دوسری انوکھی خاصیت دریافت کی ہے کہ ان کو ہر صورت مساوات 18.30 میں دی گئی طاقتی تسلسل کی روپ میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ حقیقی تفاعل کے لئے عموماً ایسا درست نہ ہو گا۔ ایسے حقیقی تفاعل پائے جاتے ہیں جن کے ہر رتبہ کے تفرق پائے جاتے ہیں لیکن انہیں طاقتی تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن نہیں ہے؛ مثلاً $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ جب $x \neq 0$ ہو اور $f(z) = 0$ جب $x = 0$ ہو۔

ہماری موجودہ اور گزشتہ حصے کے طاقتی تسلسل کے تبصروں کے مابین درج ذیل مسئلہ تعلق پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 18.10: غیر صفر ارتکاز کے رداس والا ہر وہ طاقتی تسلسل جو تفاعل کو ظاہر کرتا ہے، اس تفاعل کا ٹیلر تسلسل ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ درج ذیل طاقتی تسلسل کا غیر صفر رداس ارتکاز R ہو۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

تب یہ قرص $|z-a| < R$ میں کسی تفاعل $f(z)$ کو ظاہر کرے گا یعنی:

$$f(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots$$

مسئلہ 18.8 کے تحت

$$f'(z) = b_1 + 2b_2(z-a) + \cdots$$

اور

$$f^{(n)}(z) = n!b_n + (n+1)n\cdots 3\cdot 2\cdot b_{n+1}(z-a) + \cdots$$

ہو گا اور یہ تمام تسلسل قرص $|z-a| < R$ میں مرتکز ہوں گے اور تحلیلی تفاعل کو ظاہر کریں گے۔یوں یہ تفاعل $z=a$ پر استمراری ہوں گے۔یوں $z=a$ لیتے ہوئے

$$f(a) = b_0, \quad f'(a) = b_1, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(a) = n!b_n, \cdots$$

ملتے ہیں۔ چونکہ یہ کلیات مسئلہ ٹیلر کے کلیات کے عین مطابق ہیں لہذا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

وہ نقطہ جس پر تفاعل $f(z)$ غیر تحلیلی صورت اختیار کرے $f(z)$ کا نادر نقطہ[17] کہلاتا ہے؛ ہم کہتے ہیں کہ اس نقطہ پر $f(z)$ کی ندرت[18] پائی جاتی ہے۔یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ وہ نقطہ $z=z_0$ جس پر $f(z)$ قابل تفرق نہ ہو لیکن z_0 کے ہر پڑوس میں $f(z)$ قابل تفرق ہو تب z_0 کو $f(z)$ کا نادر نقطہ کہیں گے۔

---

[17] singular point
[18] singularity

اس تصور کے تحت دائرہ ارتکاز[19] پر $f(z)$ (کی طاقتی تسلسل مساوات 18.30) کا کم از کم ایک نادر نقطہ پایا جائے گا۔

ٹیلر تسلسل کی عملی استعمال سے پہلے مختلف مرکزی نقطوں کے گرد تسلسل کی تصور اور تحلیلی استمرار کی تصور پر بھی بات کرتے ہیں۔ فرض کریں غیر صفر رداس ارتکاز R کے تفاعل $f(z)$ کا $z-a$ طاقتوں کا طاقتی تسلسل دیا گیا ہے جس کے مجموعہ کو ہم $f(z)$ سے ظاہر کرتے ہیں یعنی؛

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \tag{18.32}$$

مسئلہ 18.8 سے ہم جانتے ہیں کہ قرص $|z-a| < R$ میں $f(z)$ تحلیلی ہو گا۔ مسئلہ 18.10 کے تحت مساوات 18.32 تفاعل $f(z)$ کا ایسا ٹیلر تسلسل ہو گا جس کا مرکز a ہے۔ ہم اس قرص میں کوئی نقطہ b منتخب کرتے ہوئے مسئلہ ٹیلر کی مدد سے $f(z)$ کے لئے

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n \tag{18.33}$$

حاصل کرتے ہیں جس کے عددی سر مساوات 18.32 کے تفرق میں $z=b$ پر کرنے سے حاصل ہوں گے:

$$b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(b) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{n}{k} a_k (b-a)^{k-n}$$

یہ نئی تسلسل کم از کم قرص $|z-b| < R - |b|$ میں کارآمد ہو گی (شکل 18.4-الف)۔ البتہ کئی بار مساوات 18.33 کی ارتکاز کا رداس $R - |b|$ سے بڑا ہو گا (شکل 18.4-ب) لہٰذا مساوات 18.33 تفاعل $f(z)$ کو قرص $|z-a| < R$ کے باہر وسعت دے گی (شکل 18.4-ب میں سیاہ خطہ)۔ کسی ارتکازی خطے میں ایک تحلیلی تفاعل کی دی گئی طاقتی تسلسل کو اس خطے سے باہر وسعت دینے کو تحلیلی استمرار[20] کہتے ہیں۔

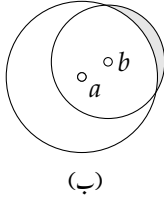
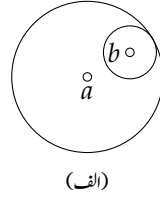
18.4 بنیادی تفاعل کے ٹیلر تسلسل

مثال 18.6: ہندسی تسلسل

فرض کریں کہ $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ہے۔ تب $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$ اور $f^{(n)}(0) = n!$ ہوں گے۔ یوں

---

[19] مساوات 18.30 کا رداس ارتکاز عموماً a سے $f(z)$ کے قریب ترین نادر نقطے تک فاصلے کے برابر ہو گا، لیکن اس سے زیادہ بھی ہو سکتا ہے؛ مثال کے طور پر $\operatorname{Ln} z$ منفی حقیقی محور پر نادر ہے اور $a=-1+i$ سے اس منفی محور تک فاصلہ 1 ہے لیکن $\operatorname{Ln} z$ کا ٹیلر تسلسل جس کا مرکز $a=-1+i$ ہو کی ارتکاز کا رداس $\sqrt{2}$ ہے۔

[20] analytic continuation

شکل 18.4: مختلف مرکز کے گرد طاقتی تسلسل کا حصول اور تحلیلی استمرار

$\frac{1}{1-z}$ کا مکلارن تسلسل درج ذیل ہندسی تسلسل ہو گا۔

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1) \tag{18.34}$$

$f(z)$ نقطہ $z = 1$ پر نادر ہے؛ یہ نقطہ ارتکاز کے دائرے پر واقع ہے۔ □

مثال 18.7: قوت نمائی تفاعل

ہم جانتے ہیں کہ قوت نمائی تفاعل e^z (حصہ 14.7) تمام z پر تحلیلی ہے اور $(e^z)' = e^z$ ہے لہٰذا $a = 0$ لیتے ہوئے مساوات 18.30 سے درج ذیل مکلارن تسلسل حاصل ہوتا ہے۔

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \tag{18.35}$$

یہی تسلسل e^x کے مکلارن تسلسل میں x کی جگہ z پر کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

آئیں اب مساوات 18.35 کی مدد سے قوت نمائی تفاعل کے حاصل ضرب کا کلیہ

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \tag{18.36}$$

دریافت کریں۔ ہم

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}$$

سے شروع کرتے ہیں۔چونکہ دونوں تسلسل مرتکز ہیں لہٰذا ہم انہیں جزو در جزو ضرب کر سکتے ہیں؛حاصل ضرب میں ان اجزاء کا مجموعہ جن کے لئے $k+m=n$ ہے درج ذیل ہے۔

$$\frac{z_1^n}{n!}+\frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\frac{z_2}{1!}+\cdots+\frac{z_1}{1!}\frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{z_2^n}{n!}$$
$$=\frac{1}{n!}[z_1^n+\binom{n}{1}z_1^{n-1}z_2+\binom{n}{2}z_1^{n-2}z_2^2+\cdots+z_2^n]=\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$$

یوں دونوں تسلسل کے حاصل ضرب کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=e^{z_1+z_2}$$

یوں مساوات 18.36 ثابت ہوتی ہے۔

مزید مساوات 18.35 میں $z=iy$ پر کرنے کے بعد مسئلہ 17.18 کی اطلاق سے

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ دائیں ہاتھ تسلسل حقیقی تفاعل $\cos y$ اور $\sin y$ کے مکلارن تسلسل ہیں لہٰذا ان سے کلیہ یولر

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \tag{18.37}$$

حاصل ہوتا ہے (مساوات 14.64)۔ مساوات 18.37 کو e^x سے ضرب دے کر مساوات 18.36 کا استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.60 حاصل ہو گا۔ مساوات 18.35 کو قوت نمائی تفاعل کی تعریف لیتے ہوئے ہم اس سے حصہ 14.7 کے تمام کلیات حاصل کر سکتے ہیں۔ □

مثال 18.8: **تکونیاتی اور ہذلولی تفاعل**

مساوات 18.35 کو مساوات 14.74 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\cos z&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-+\cdots\\ \sin z&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+\cdots\end{aligned}\tag{18.38}$$

$z = x$ کی صورت میں ان سے بالترتیب حقیقی تفاعل $\cos x$ اور $\sin x$ کی جانی پہچانی مکلارن تسلسل حاصل ہوتی ہیں۔اسی طرح مساوات 18.35 کو مساوات 14.84 میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \\
\sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots
\end{aligned} \tag{18.39}
$$

□

مثال 18.9: لوگارتھم

مساوات 18.30 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$
\operatorname{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \cdots \qquad (|z| < 1) \tag{18.40}
$$

z کی جگہ $-z$ لکھتے ہوئے دونوں اطراف کو -1 سے ضرب دے کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$
-\operatorname{Ln}(1-z) = \operatorname{Ln}\frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \qquad (|z| < 1) \tag{18.41}
$$

ان دونوں تسلسل کو جمع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$
\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z} = 2\Big(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\Big) \qquad (|z| < 1) \tag{18.42}
$$

□

سوالات

سوال 18.31: مساوات 18.35 کی استعمال سے $(e^z)' = e^z$ ثابت کریں۔

سوال 18.32: مساوات 18.38 اور مساوات 18.39 کو مساوات 18.35 سے حاصل کریں۔

سوال 18.33: مساوات 18.38 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\cos z$ جفت تفاعل ہے جبکہ $\sin z$ طاق تفاعل ہے۔

سوال 18.34: مساوات 18.39 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ تمام حقیقی $z = x$ کے لئے $\cosh z \neq 0$ ہو گا۔

سوال 18.35 تا سوال 18.46 میں دیے گئے تفاعل کا نقطہ $z = a$ کے گرد ٹیلر تسلسل حاصل کریں اور اس کا رداس ارتکاز R تلاش کریں۔

سوال 18.35: $\cos 2z,\ a = 0$
جواب: $1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - + \cdots,\ R = \infty$

سوال 18.36: $\sin z^2,\ a = 0$
جواب: $z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - + \cdots,\ R = \infty$

سوال 18.37: $e^{-z},\ a = 0$
جواب: $1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + - \cdots,\ R = \infty$

سوال 18.38: $e^z,\ a = 1$
جواب: $e[1 + (z-1) + \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{(z-1)^4}{4!} + \cdots]\ R = \infty$

سوال 18.39: $e^z,\ a = i\pi$
جواب: $-1 - (z - i\pi) - \frac{(z-i\pi)^2}{2!} - \frac{(z-i\pi)^3}{3!} - \cdots,\ R = \infty$

سوال 18.40: $\sin z,\ a = \frac{\pi}{2}$
جواب: $1 - \frac{1}{2}(z - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{24}(z - \frac{\pi}{2})^4 - \cdots,\ R = \infty$

سوال 18.41: $\cos z,\ a = -\frac{\pi}{4}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}[1 + (z + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(z + \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{3!}(z + \frac{\pi}{4})^3 + \cdots],\ R = \infty$

سوال 18.42: $\frac{1}{1-z},\ a = -1$
جواب: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z+1) + \frac{1}{8}(z+1)^2 + \frac{1}{16}(z+1)^3 + \cdots],\ R = 2$

سوال 18.43: $\frac{1}{z},\ a = -1$
جواب: $-1 - (z+1) - (z+1)^2 - (z+1)^3 - (z+1)^4 + \cdots],\ R = 1$
نقطہ $z = 0$ پر تفاعل $\frac{1}{z}$ نادر ہے۔ تسلسل کے مرکز $a = -1$ سے نقطہ نادر تک فاصلہ، ارتکاز کا رداس $R = 1$ ہے۔

سوال 18.44: $\frac{1}{1-z},\ a = i$
جواب: $\frac{1}{1-i}[1 + \frac{z-i}{1-i} + \frac{(z-i)^2}{(1-i)^2} + \frac{(z-i)^3}{(1-i)^3}] + \cdots],\ R = \sqrt{2}$
نقطہ $z = 1$ پر تفاعل $\frac{1}{1-z}$ نادر ہے۔ تسلسل کے مرکز $a = i$ سے نقطہ نادر تک فاصلہ، ارتکاز کا رداس $R = \sqrt{2}$ ہے۔

سوال 18.45: $\cos^2 z,\ a = i$
جواب: $\cos^2 z = \frac{1}{2}(1 + \cos 2z) = \frac{1}{2}(2 - \frac{2^2}{2!}z^2 + \frac{2^4}{4!}z^4 - + \cdots),\ R = \infty$

سوال 18.46: $\sin^2 z,\ a = i$
جواب: $z^2 - \frac{z^4}{3} + \frac{2z^6}{45} \cdots,\ R = \infty$

سوال 18.47 تا سوال 18.49 میں دیے گئے تفاعل کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی تین اجزاء اور اس کی رداس ارتکاز تلاش کریں۔

سوال 18.47: $\tan z$
جواب: $z + \frac{z^2}{3} + \frac{2z^5}{15} \cdots,\ R = \frac{\pi}{2}$
تفاعل $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ نقطہ $z = \pm\frac{\pi}{2}$ پر نادر ہے۔ تسلسل کے مرکز $a = 0$ سے نقطہ نادر کا فاصلہ $R = \frac{\pi}{2}$ ہے۔

سوال 18.48: $e^z \sin z$
جواب: $z + z^2 + \frac{z^3}{3} \cdots$

سوال 18.49: $z \cot z$
جواب: $1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{45} \cdots,\ R = \pi$

سوال 18.50 تا سوال 18.55 میں متکمل کے مکلارن تسلسل کا جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے تسلسل دریافت کریں۔

سوال 18.50: $\int_0^z \frac{e^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$
جواب:

$$\frac{e^t-1}{t} = \frac{1}{t}(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots) = 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \cdots$$
$$\int_0^z (1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \cdots)\,\mathrm{d}t = z + \frac{z^2}{2 \cdot 2!} + \frac{z^3}{3 \cdot 3!} + \frac{z^4}{4 \cdot 4!} + \cdots$$

سوال 18.51: $\int_0^z \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{z}{2!}-\frac{z^3}{3\cdot4!}+\frac{z^5}{5\cdot6!}\cdots,\quad R=\infty$

سوال 18.52: $\operatorname{erf} z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\operatorname{erf} z=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(2z-\frac{2z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{21}\cdots)$

سوال 18.53: $\operatorname{Si}(z)=\int_0^z \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\operatorname{Si}(z)=z-\frac{z^3}{3\cdot3!}+\frac{z^5}{5\cdot5!}-\frac{z^7}{7\cdot7!}\cdots,\quad R=\infty$

سوال 18.54: $\mathrm{S}(z)=\int_0^z \sin t^2\,\mathrm{d}t$
جواب: $\mathrm{S}(z)=\frac{z^3}{3}-\frac{z^7}{42}+\frac{z^{11}}{1320}\cdots$

سوال 18.55: $\mathrm{C}(z)=\int_0^z \cos t^2\,\mathrm{d}t$
جواب: $\mathrm{C}(z)=z-\frac{z^5}{10}+\frac{z^9}{216}\cdots,\quad R=\infty$

18.5 طاقتی تسلسل حاصل کرنے کے عملی تراکیب

عموماً عملی صورتوں میں مسئلہ ٹیلر میں دیے کلیہ کی مدد سے ٹیلر تسلسل کے عددی سر حاصل کرنا پیچیدہ ثابت ہو گا۔ایسے کئی دیگر نسبتاً سادہ تراکیب ہیں جن کی مدد سے ان عددی سروں کو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مسئلہ 18.5 کے تحت تفاعل کا طاقتی تسلسل یکتا ہو گا لہٰذا ہم بغیر فکر کیے جیسے چاہیں اس کو حاصل کر سکتے ہیں۔آئیں اس عمل کو چند مثالوں کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 18.10: متغیرہ کی تبدیلی
ہمیں تفاعل $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ کا مکلارن تسلسل تلاش کرنا ہے۔مساوات 18.34 میں $-z^2$ پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=1-z^2+z^4-z^6+\cdots\quad(|z|<1) \tag{18.43}$$

□

مثال 18.11: تکمل

فرض کریں کہ $f(z) = \tan^{-1} z$ ہے۔اب $f'(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ہے۔مساوات 18.43 کے تسلسل کا جزو در جزو تکمل لے کر اور $f(0) = 0$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \cdots \qquad (|z| < 1)$$

یہ تسلسل $w = u + iv = \tan^{-1} z$ کی صدر قیمت دیتا ہے جس کے لئے $|u| < \frac{\pi}{2}$ ہو گا۔ □

مثال 18.12: ہندسی تسلسل کا استعمال

ہمیں تفاعل $\frac{1}{c-bz}$ کا تسلسل $z - a$ کی طاقتوں میں تلاش کرنا ہے جہاں $c - ab \neq 0$ اور $b \neq 0$ ہیں۔ہم اس تفاعل کو

$$\frac{1}{c-bz} = \frac{1}{c-ab-b(z-a)} = \frac{1}{(c-ab)[1 - \frac{b(z-a)}{c-ab}]}$$

لکھتے ہیں۔اب $z = \frac{b(z-a)}{c-ab}$ لیتے ہوئے مساوات 18.34 سے نتیجہ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{1}{c-bz} &= \frac{1}{c-ab} \sum_{n=0}^{\infty} [\frac{b(z-a)}{c-ab}]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{(c-ab)^{n+1}} (z-a)^n \\ &= \frac{1}{c-ab} + \frac{b}{(c-ab)^2}(z-a) + \frac{b^2}{(c-ab)^3}(z-a)^2 + \cdots\end{aligned}$$

یہ تسلسل درج ذیل صورت میں مرتکز ہو گا۔

$$\left|\frac{b(z-a)}{c-ab}\right| < 1 \qquad \equiv |z-a| < \left|\frac{c-ab}{b}\right| = \left|\frac{c}{b} - a\right|$$

□

مثال 18.13: ثنائی تسلسل، جزوی کسری پھیلاو

درج ذیل تفاعل کا ٹیلر تسلسل دریافت کریں۔تسلسل کا مرکز $z = 1$ پر رکھیں۔

$$f(z) = \frac{2z^2 + 9z + 5}{z^3 + z^2 - 8z - 12}$$

کسی بھی ناطق تفاعل کا جزوی کسی پھیلاو حاصل کر کے ثنائی تسلسل

$$\frac{1}{(1+z)^m} = (1+z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} z^n = 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!}z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}z^3 + \cdots \tag{18.44}$$

کی مدد سے تسلسل حاصل کیا جا سکتا ہے۔چونکہ ہاتھ تفاعل $z = -1$ پر نادر ہے لہٰذا تسلسل قرص $|z| < 1$ میں مرتکز ہو گا۔موجودہ تفاعل کا جزوی کسری پھیلاو

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{2}{z-3} = \frac{1}{[3-(z-1)]^2} - \frac{2}{2-(z-1)} = \frac{\frac{1}{9}}{[1+\frac{1}{3}(z-1)]^2} - \frac{1}{\frac{1}{2}(z-1)}$$

ہے۔یوں ثنائی تسلسل کی مدد سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$f(z) = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \Big(\frac{z-1}{3}\Big)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{z-1}{2}\Big)^n$$

ہم ان دونوں تسلسل کو جزو در جزو جمع کر سکتے ہیں۔چونکہ پہلے تسلسل کا ثنائی عددی سر

$$\tfrac{(-2)(-3)\cdots(-[n+1])}{n!} = (-1)^n(n+1)$$

ہے لہٰذا دیے گئے تفاعل کا تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}} - \frac{1}{2^n}\Big](z-1)^n = -\frac{8}{9} - \frac{31}{54}(z-1) - \frac{23}{108}(z-1)^2 \cdots$$

چونکہ $f(z)$ کا مرکز $z = 1$ کے قریب ترین نادر نقطہ $z = 3$ ہے لہٰذا تسلسل قرص $|z-1| < 2$ میں مرتکز ہو گا۔ □

مثال 18.14: تفرقی مساوات کا استعمال

ہمیں تفاعل $f(z) = \tan z$ کا مکلارن تسلسل تلاش کرنا ہے۔چونکہ $f'(z) = \sec^2 z$ ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f'(z) = 1 + f^2(z), \quad f'(0) = 1$$

چونکہ $f(0)=0$ ہے لہٰذا لگاتار تفرق لے کر ابتدائی چند عددی سر درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
f'' &= 2ff', & f''(0) &= 0, \\
f''' &= 2f'^2 + 2ff'', & f'''(0) &= 2, \quad \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3}, \\
f^{(4)} &= 6f'f'' + 2ff''', & f^{(4)}(0) &= 0, \\
f^{(5)} &= 6f''^2 + 8f'f''' + 2ff^{(4)}, & f^{(5)}(0) &= 16, \quad \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{2}{15},
\end{aligned}$$

یوں مکلارن تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots \qquad (|z| < \frac{\pi}{2}) \tag{18.45}$$

□

مثال 18.15: نامعلوم عددی سر

$\cos z$ اور $\sin z$ کے تسلسل (حصہ 18.4) استعمال کرتے ہوئے $\tan z$ کا مکلارن تسلسل حاصل کریں۔ چونکہ $\tan z$ طاق تفاعل ہے لہٰذا اس کا تسلسل درج ذیل صورت کا ہو گا۔

$$\tan z = b_1 z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \cdots$$

ہم $\sin z = \tan z \cos z$ سے

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots = (b_1 z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \cdots)(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots)$$

لکھ سکتے ہیں۔ چونکہ $\tan z$ ماسوائے $z = \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \cdots$ پر تحلیلی ہے لہٰذا اس کا تسلسل قرص $\frac{\pi}{2}$ میں تحلیلی ہو گا اور قرص کے اندر z کے لئے ہم درج بالا کو جزو در جزو ضرب دے سکتے ہیں (حصہ 18.3) جس کو ہم z کی طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھتے ہیں۔ مسئلہ 18.5 کے تحت دونوں اطراف z کی ایک جیسے طاقتوں کے عددی سر یکساں ہوں گے۔ اس طرح

$$1 = b_1, \quad -\frac{1}{3!} = -\frac{b_1}{2!} + b_3, \quad \frac{1}{5!} = \frac{b_1}{4!} - \frac{b_3}{2!} + b_5, \quad \cdots$$

ملتے ہیں جن سے عددی سر $b_1 = 1$ ، $b_3 = \frac{1}{3}$ ، $b_5 = \frac{2}{15}$ حاصل ہوتے ہیں۔ □

مثال 18.16: قلم و کاغذ سے سادہ تقسیم

آپ $\frac{1}{1+z}$ کی تسلسل کا حصول دیکھ چکے ہیں۔آئیں اسی کو سادہ قلم و کاغذ سے تقسیم کی طریقے سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1-z+z^2-+ \\ 1+z\,\big)\,1 \qquad\qquad \\ \underline{1+z} \qquad\quad \\ -z \qquad\quad \\ \underline{-z-z^2} \\ +z^2 \end{array}$$

آپ اسی طرح $\frac{1}{1-z}$ ، $\frac{1}{1+z^2}$ اور $\frac{1}{1-z^2}$ کی تسلسل بھی حاصل کر سکتے ہیں۔ □

سوالات

سوال 18.56 تا سوال 18.56 میں دیے گئے تفاعل کا مکلارن تسلسل تلاش کریں۔

سوال 18.56: $\frac{1}{1+z^4}$

جواب: $1-z^4+z^8-z^12+-\cdots, \quad |z|<1$

سوال 18.57: $\frac{1}{1-z^3}$

جواب: $1+z^3+z^6+z^9+\cdots, \quad |z|<1$

سوال 18.58: $\frac{1}{1+z^3}$

جواب: $1-z^3+z^6-z^9+-\cdots, \quad |z|<1$

سوال 18.59: $\frac{1}{1-z^6}$

جواب: $1+z^6+z^{12}+z^{18}+\cdots, \quad |z|<1$
$1-2z^2+3z^4-4z^6+5z^8-+\cdots, \quad |z|<1$

سوال 18.60: $\frac{4z^2+30z+68}{(z+4)^2(z-2)}$

جواب: $-\frac{17}{8}-\frac{15}{16}z-\frac{67}{128}z^2-\frac{31}{128}z^3-\cdots, \quad |z|<2$
دیے گیے تفاعل کے نادر نقطے $z=-4$ اور $z=2$ ہیں۔تسلسل کے مرکز $a=0$ سے قریب ترین نادر نقطہ کا فاصلہ $R=2$ ہے لہٰذا تسلسل $|z|<2$ کی صورت میں تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔

سوال 18.61: $\cos z^2$
جواب: $1-\frac{z^4}{2!}+\frac{z^8}{4!}-\frac{z^{12}}{6!}+-\cdots, \quad \lvert z\rvert<1$

سوال 18.62: e^{z^2-z}
جواب: $1-z+\frac{3}{2}z^2-\frac{7}{6}z^3+\frac{25}{24}z^4-+\cdots$

سوال 18.63: e^{z^4}
جواب: $1+z^4+\frac{z^8}{2}+\cdots$

سوال 18.64 تا سوال 18.69 میں دیے گئے تفاعل کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی چند اجزاء تلاش کریں۔

سوال 18.64: $\frac{\cos z}{1-z^2}$
جواب: $1+\frac{1}{2}z^2+\frac{13}{24}z^4+\frac{389}{720}z^6+\cdots \quad \lvert z\rvert<1$

سوال 18.65: $e^{z^2}\sin z^2$
جواب: $z^2+z^4+\frac{z^6}{3}-\frac{z^{10}}{30}\cdots$

سوال 18.66: $\frac{e^{z^2}}{\cos z}$
جواب: $1+\frac{3}{2}z^2+\frac{29}{24}z^4+\frac{511}{720}z^6\cdots, \quad \lvert z\rvert<\frac{\pi}{2}$

سوال 18.67: $e^{\frac{1}{1-z}}$
جواب: $e(1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+\cdots), \quad \lvert z\rvert<1$

سوال 18.68: $\cos(\frac{z}{1-z})$
جواب: $1-\frac{1}{2}z^2-z^3-\frac{35}{24}z^4\cdots$

سوال 18.69: $e^{(e^z)}$
جواب: $e(1+z+z^2+\frac{5}{6}z^3+\cdots)$

سوال 18.70 تا سوال 18.75 میں دیے تفاعل کا ٹیلر تسلسل $z=a$ کے گرد دریافت کریں۔

سوال 18.70: $\frac{1}{2z-i}, \quad a=-1$
جواب: $-\frac{1}{2+i}-\frac{2(z+1)}{(2+i)^2}-\frac{4(z+1)^3}{(2+i)^3}-\cdots, \quad \lvert z+1\rvert<\frac{\sqrt{5}}{2}$
تفاعل $\frac{1}{2z-i}$ نقطہ $z=\frac{i}{2}$ پر نادر ہے۔یہ نقطہ ٹیلر تسلسل کے مرکز $a=-1$ سے $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$ فاصلہ پر ہے۔

سوال 18.71: $\frac{1}{4-3z}, \quad a=1+i$

جواب: $\frac{1}{1-i3}+\frac{3(z-1-i)}{(1-i3)^2}+\frac{9(z-1-i)}{(1-i3)^3}+\cdots, \quad \lvert z-1-i\rvert<\frac{\sqrt{10}}{3}$

تفاعل $\frac{1}{4-i3}$ نقطہ $z=\frac{4}{3}$ پر نادر ہے۔نقطہ نادر کا تسلسل کی مرکز $a=1+i$ سے فاصلہ $R=\frac{\sqrt{10}}{3}$ ہے۔

سوال 18.72: $\frac{2-3z}{2z^2-3z+1}, \quad a=-1$

جواب: $\frac{5}{6}+\frac{17}{36}(z+1)+\frac{59}{216}(z+1)^2+\cdots, \quad \lvert z+1\rvert<\frac{3}{2}$

دیا گیا تفاعل $z=1$ اور $z=\frac{1}{2}$ پر نادر ہے۔تسلسل کے مرکز سے قریب ترین نقطہ نادر کا فاصلہ $R=\frac{3}{2}$ ہے۔

سوال 18.73: $\frac{1}{(1+z)^2}, \quad a=-i$

جواب: $\frac{1}{(1-i)^2}-\frac{2(z+i)}{(1-i)^3}+\frac{3(z+i)^2}{(1-i)^4}-+\cdots, \quad \lvert z+i\rvert<\sqrt{2}$

سوال 18.74: $\frac{1}{(2+3z^3)^2}, \quad a=0$

جواب: $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}z^3+\frac{27}{16}z^6-\frac{27}{8}z^9\cdots \quad \lvert z\rvert<\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

سوال 18.75: $\tan z, \quad a=\frac{\pi}{4}$

جواب: $3+(z-\frac{\pi}{4})+2(z-\frac{\pi}{4})^2+\frac{8}{3}(z-\frac{\pi}{4})^3\cdots, \quad \left\lvert z-\frac{\pi}{4}\right\rvert<\frac{\pi}{4}$

سوال 18.76: تفاعل $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ کی مکلارن تسلسل کا جزو در جزو تکمل لے کر درج ذیل ثابت کریں۔

$$\sin^{-1} z=z+\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3}+\left(\tfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)\frac{z^5}{5}+\left(\tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)\frac{z^7}{7}+\cdots, \quad \lvert z\rvert<1$$

دکھائیں کہ یہ تسلسل $\sin^{-1} z$ کی صدر قیمت دیتا ہے (صفحہ 1087 پر سوال 14.255 میں تعریف بیان کی گئی ہے)۔

سوال 18.77: **یولر اعداد**

درج ذیل مکلارن تسلسل

$$\sec z=E_0-\frac{E_2}{2!}z^2+\frac{E_4}{4!}z^4-+\cdots \tag{18.46}$$

یولر اعداد[21] E_{2n} کی تعریف ہے۔دکھائیں کہ $E_0=1$ ، $E_2=-1$ ، $E_4=5$ ، $E_6=-61$ ہیں۔

[21] Euler numbers

سوال 18.78: برنولی اعداد
درج ذیل مکلارن تسلسل برنولی اعداد[22] B_n کی تعریف ہے۔

$$\frac{z}{e^z-1}1 + B_1 z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \frac{B_3}{3!}z^3 + \cdots \tag{18.47}$$

نامعلوم عددی سر کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$B_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad B_2 = \tfrac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \tfrac{1}{42}, \cdots \tag{18.48}$$

سوال 18.79: مساوات 14.74، مساوات 14.75 اور مساوات 18.47 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\tan z = \frac{i2}{e^{i2z}-1} - \frac{i4}{e^{i4z}-1} - i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n}\, z^{2n-1} \tag{18.49}$$

18.6 یکساں استمرار

فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ کسی خطہ R میں دیا گیا تسلسل استمراری ہے۔اب سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا پورے خطے میں استمرار کافی تیز ہے یا کہ خطے میں ایسے نقطے بھی پائے جاتے ہیں جہاں استمرار بہت کم ہے۔کمپیوٹر کی استعمال سے حساب کرنے کے نقطہ نظر سے یہ سوال اہم ہے، لیکن جیسا ہم دیکھیں گے خالصتاً نظریاتی نقطہ نظر سے یہ سوال مزید زیادہ اہم ہے۔اس حقیقت کو ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

مثال 18.17: فرض کریں کہ ہم وقفہ $0 \le x \le 1$ میں مثلاً $x = 0, 0.1, 0.2, \cdots$ پر حقیقی x کے تفاعل e^x کی قیمتوں کا ایسا جدول بنانا چاہتے ہیں جس میں مطلق قیمت کا خلل کسی مقررہ عدد ϵ ، مثلاً 0.5×10^{-6} سے کم ہو۔ہم مکلارن تسلسل کا موزوں جزوی مجموعہ

$$s_n = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

[22] Bernoulli numbers

لیتے ہیں۔یوں قیمت کی مطلق قیمت میں خلل $|R_n| = |s - s_n|$ ہو گا جہاں $s = e^x$ تسلسل کا مجموعہ ہے اور ہم نے ایسا n منتخب کرنا ہے کہ درج ذیل ہو۔

$$\left|s(x) - s_n(x)\right| < \epsilon\,(= 0.5 \times 10^{-6})$$

اب سوال 17.75 سے ہم جانتے ہیں کہ $x = 1$ کی صورت میں $n = 10$ یا کوئی بھی $n > N = 9$ ہمیں درکار درستگی کا جواب مہیا کرے گا۔اب $x\,(\geq 0)$ کے گھٹنے سے باقی کی مطلق قیمت گھٹتی ہے لہٰذا $n > N(\epsilon)(= 9)$ منتخب کرتے ہوئے اس خطے میں کسی بھی x کے لئے

$$\left|s(x) - s_n(x)\right| < \epsilon$$

ہو گا۔دھیان رہے کہ N کی قیمت ϵ پر منحصر ہے۔یوں اگر ہمیں زیادہ درست قیمتیں درکار ہوں تب ϵ مزید کم اور N مزید بڑا ہو گا۔ □

مثال 18.18: ہندسی تسلسل $1 + z + z^2 + \cdots$ کا باقی

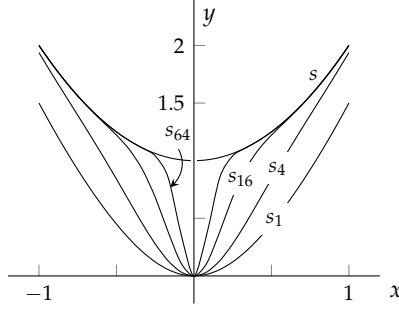
$$R_n(z) = s(z) - s_n(z) = \sum_{m=n+1}^{\infty} z^m = \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

ہے جو 1 کے کافی قریب کسی بھی حقیقی $z = x$ کے لئے بے قابو بڑا ہو گا۔یوں کسی بھی مقررہ ϵ کے لئے ہم صرف ϵ کا تابع ایسا N تلاش نہیں کر سکتے ہیں کہ وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر کسی بھی x کے لئے $n > N$ منتخب کر کے $\left|R_n(x)\right| = \left|s(x) - s_n(x)\right| < \epsilon$ حاصل ہو (سوال 17.74 دیکھیں)۔ یہ متوقع نتیجہ ہے چونکہ $z = 1$ پر تسلسل منفرج ہے۔آپ اگلے مثال میں حقیقتاً حیران کن صورت حال دیکھیں گے۔ □

مثال 18.19:
درج ذیل تسلسل پر غور کریں۔

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \cdots$$

ہندسی تسلسل کے مجموعے کی مساوات استعمال کرتے ہوئے آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ اس تسلسل کا n واں جزوی مجموعہ

$$s_n(x) = 1 = x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

شکل 18.5: مثال 18.19 کے چند جزوی مجموعے

ہو گا۔ان میں چند مجموعوں کو شکل 18.5 میں دکھایا گیا ہے۔یوں $x \neq 0$ کی صورت میں تسلسل کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$s(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x) = 1 + x^2$$

$x = 0$ کی صورت میں تمام n کے لئے $s_n = 0$ ہوں گے لہٰذا

$$s(0) = \lim_{n \to \infty} s_n(0) = 0$$

ہو گا۔اس سے ظاہر ہے کہ تمام x کے لئے تسلسل منفرج (بلکہ مطلق منفرج) ہے لیکن ہمیں اس حیران کن نتیجہ کا سامنا ہے کہ اگرچہ تسلسل کے اجزاء استمراری تفاعل ہیں، $x = 0$ پر مجموعہ غیر استمراری ہے۔مزید جب $x \neq 0$ ہو تب باقی کی مطلق قیمت

$$\left|R_n(x)\right| = \left|s(x) - s_n(x)\right| = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بھی مقررہ ϵ کے لئے ایسا N جو صرف ϵ پر منحصر ہو معلوم نہیں کیا جا سکتا ہے کہ $0 \le x \le 1$ پر تمام x کے لئے اور تمام $n > N(\epsilon)$ کے لئے، $|R_n| < \epsilon$ مطمئن ہو۔ □

اس مثال میں تسلسل کی صورت درج ذیل ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots \tag{18.50}$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ خطہ G میں تمام z کے لئے مساوات 18.50 مرتکز ہے۔فرض کریں کہ مساوات 18.50 کا مجموعہ $s(z)$ اور اس کا n واں جزوی مجموعہ $s_n(z)$ ہے۔ہم جانتے ہیں کہ نقطہ z پر مرکوزیت کا مطلب ہے کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا $N = N(\epsilon)$ تلاش کر سکتے ہیں کہ درج ذیل مساوات تمام $n > N(\epsilon, z)$ کے لئے مطمئن ہو گا۔

$$\left|s(z) - s_n(z)\right| < \epsilon \qquad n > N(\epsilon, z)$$

N کی قیمت ϵ پر اور عموماً زیر بحث منتخب نقطہ z پر منحصر ہو گی۔اب کسی دیے گئے $\epsilon > 0$ کی صورت میں عین ممکن ہے کہ ہم z کا غیر تابع ایسا $N(\epsilon)$ تلاش کر سکیں کہ G میں تمام z کے لئے اور $n > N(\epsilon)$ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\left|s(z) - s_n(z)\right| < \epsilon \qquad n > N(\epsilon), \quad \text{تمام } z$$

تب ہم کہتے ہیں کہ G میں تسلسل **یکساں مرتکز**[23] ہے۔

یوں یکساں ارتکاز ایسی خاصیت ہے جو z کے لامتناہی سلسلہ سے وابستہ ہے جبکہ تسلسل کی ارتکاز z کی مختلف مخصوص قیمتوں کے ساتھ وابستہ ہے جس کا z کی دیگر قیمتوں کے ساتھ کوئی تعلق نہیں ہو گا۔

مثال 18.17 میں وقفہ $0 \le x \le 1$ (بلکہ کسی بھی محدود وقفہ) پر تسلسل یکساں مرتکز ہے۔مثال 18.19 میں تسلسل ایسے کسی بھی وقفہ میں یکساں مرتکز نہیں ہے جس میں نقطہ 0 شامل ہو۔اس سے ظاہر ہے کہ مطلق مرتکز تسلسل بھی غیر یکساں مرتکز ہو سکتا ہے۔اسی طرح ضروری نہیں ہے کہ ایک یکساں مرتکز تسلسل، مطلق مرتکز بھی ہو۔درج ذیل مثال میں ایسی صورت پیش کی گئی ہے۔

مثال 18.20: **یکساں لیکن غیر مطلق مرتکز تسلسل**
درج ذیل تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+3} - + \cdots \qquad (\text{حقیقی } x)$$

تمام حقیقی x کے لئے یکساں مرتکز ہے لیکن یہ تسلسل مطلق مرتکز نہیں ہے (سوال 18.97)۔ □

عموماً طاقتی تسلسل مثال 18.18 کی طرز کے ہوں گے جن کی صورت حال بہت سادہ ہو گا (درج ذیل مسئلہ دیکھیں)۔

[23] uniform convergent

مسئلہ 18.11: طاقتی تسلسل
غیر صفر رداس ارتکاز R والا طاقتی تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{18.51}$$

رداس $r<R$ کے ہر دائری قرص $|z-a| \le r$ میں یکساں مرتکز ہو گا۔

ثبوت: $|z-a| \le r$ کے لئے

$$\left|c_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots+c_{n+p}z^{n+p}\right| \le |c_{n+1}|\, r^{n+1}+\cdots+\left|c_{n+p}\right| r^{n+p} \tag{18.52}$$

ہو گا۔چونکہ $|z-a|=r<R$ کے لئے مساوات 18.51 مطلق مرتکز ہے للہذا کوشی اصول مرکوزیت (حصہ 17.3) کے تحت دیے گئے $\epsilon>0$ کے لئے ہم ایسا $N(\epsilon)$ تلاش کر سکتے ہیں کہ $p=1,2,\cdots$ اور $n>N(\epsilon)$ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$|c_{n+1}|\, r^{n+1}+\cdots+\left|c_{n+p}\right| r^{n+p}<\epsilon$$

اس سے اور مساوات 18.52 سے ہر $p=1,2,\cdots$ ، ہر $n>N(\epsilon)$ اور قرص $|z-a| \le r$ میں ہر z کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\left|c_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots+c_{n+p}(z-a)^{n+p}\right|<\epsilon$$

$N(\epsilon)$ کی قیمت z کے غیر تابع ہے جو یکساں مرکوزیت کی نشانی ہے اور یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اگرچہ متناہی تعداد کے استمراری تفاعل کا مجموعہ استمراری ہو گا البتہ جیسا ہم نے مثال 18.19 میں دیکھا، اگر لامتناہی تعداد کی استمراری تفاعل کا مجموعہ مطلق مرتکز ہو تب بھی اس کا مجموعہ غیر استمراری ہو سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر ایک تسلسل یکساں مرتکز ہو تب ایسا نہیں ہو گا۔درج ذیل مسئلہ اسی حقیقت کو بیان کرتا ہے۔

مسئلہ 18.12: استمرار
فرض کریں کہ تسلسل

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z)=f_0(z)+f_1(z)+\cdots$$

خطہ G میں یکساں مرتکز ہے اور اس کا مجموعہ $F(z)$ ہے۔تب اگر G میں نقطہ z_0 پر ہر جزو $f_m(z)$ استمراری ہو تب z_0 پر تفاعل $F(z)$ استمراری ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں کہ تسلسل کا n واں جزوی مجموعہ $s_n(z)$ اور مطابقتی باقی $R_n(z)$ ہے:

$$s_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \quad R_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots$$

چونکہ تسلسل یکساں مرتکز ہے، دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا $n = n(\epsilon)$ تلاش کر سکتے ہیں کہ G میں تمام z کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\left|R_N(z)\right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (G \text{ میں تمام } z)$$

چونکہ $s_N(z)$ نقطہ z_0 پر استمراری تفاعل کی متناہی تعداد کا مجموعہ ہے لہٰذا z_0 پر یہ استمراری ہو گا۔یوں ہم ایسا σ تلاش کر سکتے ہیں کہ G میں ان تمام z کے لئے جن کے لئے $|z - z_0| < \sigma$ ہو درج ذیل مطمئن ہو گا۔

$$\left|s_N(z) - s_N(z_0)\right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (|z - z_0| < \sigma, \quad G \text{ میں تمام } z)$$

تکونی عدم مساوات (حصہ 14.2) کی مدد سے ان z کے لئے

$$\begin{aligned}\left|F(z) - F(z_0)\right| &= \left|s_N(z) + R_N(z) - [s_N(z_0) + R_N(z_0)]\right| \\ &\le \left|s_N(z) - s_N(z_0)\right| + \left|R_N(z)\right| + \left|R_N(z_0)\right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے مراد z_0 پر $F(z)$ کی استمرار ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اس مسئلے میں یکساں مرکوزیت کی شرط کافی ہے نا کہ لازمی۔درج ذیل مثال اس حقیقت کی وضاحت کرتی ہے۔

مثال 18.21: فرض کریں کہ

$$u_m(x) = \frac{mx}{1 + m^2x^2}, \quad f_m(x) = u_m(x) - u_{m-1}(x)$$

ہے۔ہم تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$$

پر غور کرتے ہیں۔ اس تسلسل کا n واں جزوی مجموعہ

$$s_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = u_n$$

ہو گا۔یوں اس کا مجموعہ

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0$$

ہو گا جو استمراری تفاعل ہے۔البتہ یہ تسلسل وقفہ $a \le x \le 0$ میں یکساں مرتکز نہیں ہے جہاں $0 < a$ ہے۔در حقیقت

$$\left|F(x) - s_n(x)\right| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \epsilon$$

سے ہمیں

$$\frac{nx}{\epsilon} < 1 + n^2x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad n^2x^2 - \frac{nx}{\epsilon} + 1 > 0$$

ملتا ہے جس سے

$$n > \frac{1}{2x\epsilon}(1 + \sqrt{1-4\epsilon^2})$$

حاصل ہوتا ہے۔مقررہ ϵ کے لئے $x \to 0$ کرنے سے دایاں ہاتھ لامتناہی تک پہنچتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ اس وقفہ میں تسلسل یکساں مرتکز نہیں ہے۔ □

ہم کس صورت میں تسلسل کا جزو در جزو تکمل لے سکتے ہیں؟

ہم ایک ایسی مثال پیش کرتے ہیں جس کا جزو در جزو تکمل لینا ممکن نہیں ہے۔

مثال 18.22: ایسا تسلسل جس کا جزو در جزو تکمل ممکن نہیں ہے

تفاعل

$$u_m(x) = mxe^{-mx^2}, \quad f_m(x) = u_m(x) - u_{m-1}(x)$$

پر مبنی تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$$

پر وقفہ $0 \leq x \leq 1$ میں غور کرتے ہیں۔اس تسلسل کا n واں جزوی مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$s_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = u_n$$

اس طرح اس تسلسل کا مجموعہ

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0 \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

ہو گا جس سے

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کے برعکس تسلسل کا جزو در جزو تکمل لینے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 f_m(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \int_0^1 f_m(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x)\,\mathrm{d}x$$

اب $s_n = u_n$ ہے لہٰذا دایاں ہاتھ

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1-e^{-n}) = \frac{1}{2}$$

دیتا ہے نا کہ صفر۔اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ اس تسلسل کا $x = 0$ تا $x = 1$ جزو در جزو تکمل حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ □

مثال 18.22 میں تسلسل دیے گئے وقفہ پر یکساں مرتکز نہیں ہے۔ہم اب دیکھیں گے کہ استمراری تفاعل پر مبنی یکساں مرتکز تسلسل کا جزو در جزو تکمل حاصل کرنا ممکن ہو گا۔

مسئلہ 18.13: جزو در جزو تکمل

فرض کریں کہ

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$$

خطہ G میں استمراری تفاعل کا یکساں مرتکز تسلسل ہے۔فرض کریں کہ G میں C کوئی راہ ہے۔ تب تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z=\int_C f_0(z)\,\mathrm{d}z+\int_C f_1(z)\,\mathrm{d}z+\cdots \tag{18.53}$$

مرتکز ہو گا اور اس کا مجموعہ $\int_C F(z)\,\mathrm{d}z$ ہو گا۔

ثبوت: مسئلہ 18.12 کے تحت $F(z)$ استمراری ہے۔فرض کریں کہ اس تسلسل کا n واں جزوی مجموعہ $s_n(z)$ اور مطابقتی باقی $R_n(z)$ ہے۔تب $F=s_n+R_n$ لہٰذا

$$\int_C F(z)\,\mathrm{d}z=\int_C s_n(z)\,\mathrm{d}z+\int_C R_n(z)\,\mathrm{d}z$$

ہو گا۔فرض کریں کہ C کی لمبائی l ہے۔چونکہ دیا گیا تسلسل یکساں مرتکز ہے، ہر دیے گئے $\epsilon>0$ کے لئے ہم ایسا N تلاش کر سکتے ہیں کہ تمام $n>N$ اور G میں تمام z کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\left|R_n(z)\right|<\frac{\epsilon}{l}\qquad (n>N,\ z \text{ میں تمام } G)$$

مساوات 16.16 کی اطلاق سے تمام $n>N$ کے لئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\left|\int_C R_n(z)\,\mathrm{d}z\right|<\frac{\epsilon}{l}l=\epsilon\qquad (n>N)$$

چونکہ $R_n=F-s_n$ ہے لہٰذا تمام $n>N$ کے لئے اس سے مراد

$$\left|\int_C F(z)\,\mathrm{d}z-\int_C s_n(z)\,\mathrm{d}z\right|<\epsilon\qquad (n>N)$$

ہے۔یوں مساوات 18.53 میں دیا گیا تسلسل مرتکز ہو گا اور اس کا مجموعہ وہی ہو گا جو مسئلہ میں دیا گیا ہے۔

□

مسئلہ 18.12 اور مسئلہ 18.13 یکساں مرتکز تسلسل کے دو اہم ترین خواص پیش کرتے ہیں۔

چونکہ تکمل اور تفرق آپس میں الٹ اعمال ہیں ہم مسئلہ 18.13 سے اخذ کر سکتے ہیں کہ مرتکز تسلسل کا جزو در جزو تفرق لینا ممکن ہو گا پس دیے گئے تسلسل کے اجزاء کی تفرق استمراری ہوں اور حاصل تسلسل یکساں مرتکز ہو۔درج ذیل مسئلہ اس کو بہتر بیان کرتا ہے۔

مسئلہ 18.14: جزو در جزو تفرق
فرض کریں کہ تسلسل $f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots$ خطہ G میں مرتکز ہے اور اس تسلسل کا مجموعہ $F(z)$ ہے۔فرض کریں کہ تسلسل $f_0'(z) + f_1'(z) + f_2'(z) + \cdots$ خطہ G میں یکساں مرتکز ہے اور اس کے اجزاء $f_0'(z)$ ، $f_1'(z)$ ، $\cdots$ خطہ G میں استمراری ہیں تب G میں تمام z کے لئے

$$F'(z) = f_0'(z) + f_1'(z) + f_2'(z) + \cdots \qquad (G \text{ میں تمام } z)$$

ہو گا۔

اس مسئلہ کا سادہ ثبوت آپ سے سوال 18.89 میں مانگا گیا ہے۔

عموماً یکساں ارتکاز کو تقابلی پرکھ کے ذریعہ پرکھا جاتا ہے جس کو وائنشٹراس کی پرکھ M کہتے ہیں۔

مسئلہ 18.15: وائنشٹراس پرکھ M
اگر خطہ G میں تمام z کے لئے مساوات 18.50 کی طرز کے تسلسل کی اجزاء کی مطلق قیمتیں بالترتیب مستقل اجزاء کی مرتکز تسلسل

$$M_0 + M_1 + M_2 + \cdots \tag{18.54}$$

کے اجزاء کے برابر یا ان سے کم ہو تب یہ تسلسل (مساوات 18.50) خطہ G میں یکساں مرتکز ہو گا۔

اس مسئلے کا سادہ ثبوت آپ سے سوال 18.90 میں مانگا گیا ہے۔

مثال 18.23: وائنشٹراس پرکھ M
تسلسل

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m^2} \qquad (x \text{ حقیقی}) \tag{18.55}$$

پر غور کرتے ہیں۔ چونکہ

$$\left| \frac{\sin mx}{m^2} \right| \le \frac{1}{m^2}$$

اور $\sum \frac{1}{m^2}$ مرتکز (مساوات 17.20) ہے لہٰذا وائنشٹراس پرکھ M کے تحت ہر وقفہ پر مساوات 18.55 میں دیا گیا تسلسل یکساں مرتکز ہو گا۔ □

سوالات

سوال 18.80 تا سوال 18.87 میں ثابت کریں کہ دیا گیا تسلسل دیے گئے خطے میں یکساں مرتکز ہے۔

سوال 18.80: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| \leq 0.99$

جواب: مسئلہ 18.11 سے اخذ ہوتا ہے۔

سوال 18.81: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| \leq 10^{30}$

سوال 18.82: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n, \quad |z| \leq 3.9$

جواب: چونکہ رداس ارتکاز 4 ہے لہٰذا مسئلہ 18.11 سے اخذ ہوتا ہے۔

سوال 18.83: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad |z| \leq 1$

سوال 18.84: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n|z|}{2^n}, \quad$ تمام z

جواب: $\left|\sin n|z|\right| \leq 1$ ہے اور $\sum \frac{1}{2^n}$ مرتکز ہے۔یوں مسئلہ 18.15 سے اخذ ہو گا۔

سوال 18.85: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n x}{n(n+1)}, \quad$ تمام حقیقی x

سوال 18.86: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n |z|}{n^2}, \quad$ تمام z

جواب: $\left|\cos^n |z|\right| \leq 1$ ہے اور $\sum \frac{1}{2^n}$ مرتکز ہے۔

سوال 18.87: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z|+n^2}, \quad$ تمام z

سوال 18.88: اگر مساوات 18.50 میں دیا گیا تسلسل خطہ G میں یکساں مرتکز ہو تب دکھائیں کہ یہ G کے کسی بھی حصے میں یکساں مرتکز ہو گا۔

سوال 18.89: مسئلہ 18.14 کا مسئلہ 18.13 سے اخذ کریں۔

سوال 18.90: مسئلہ 18.15 کا ثبوت پیش کریں۔

سوال 18.91: ایسا چھوٹے سے چھوٹا عدد صحیح n تلاش کریں کہ $z = x = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ کے لئے مثال 18.18 میں $|R_n| < 0.01$ ہو۔ ہندسی تسلسل کا مجموعہ $\frac{1}{1-x}$ جس میں خلل 0.01 سے کم ہو حاصل کرنے کی نقطہ نظر سے اس نتیجے کا کیا مطلب ہے۔

سوال 18.92: ایسا تسلسل تلاش کریں جس کا n واں جزوی مجموعہ $s_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$ ہو۔ s_1، s_2، s_3، s_4 اور تمام $x \geq 0$ کے لئے $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ترسیم کریں۔

جواب: $f_n = s_n - s_{n-1} = \frac{x}{nx+1}[(n-1)x+1]$

سوال 18.93: ثابت کریں کہ ایسے کسی بھی وقفہ میں جس میں نقطہ $x = 0$ شامل ہو، مثال 18.19 کا تسلسل یکساں مرتکز نہیں ہو گا۔

سوال 18.94: دکھائیں کہ $x \neq 0$ کے لئے $x^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 1$ ہے جبکہ $x = 0$ کے لئے یہ 0 کے برابر ہے۔ شکل 18.5 کی طرح چند جزوی مجموعوں کو ترسیم کریں۔

سوال 18.95: مثال 18.19 میں دیے تسلسل میں x کی جگہ z پر کرتے ہوئے اس کی ارتکاز کا خطہ ٹھیک ٹھیک تلاش کریں۔

سوال 18.96: دکھائیں کہ وقفہ $0 \leq x \leq 1$ میں $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ یکساں استمراری نہیں ہے۔ جزوی مجموعہ s_1، s_2، s_3 اور s_4 ترسیم کریں۔

سوال 18.97: مثال 18.22 میں دیا گیا فقرہ ثابت کریں۔

حراری مساوات: دکھائیں کہ مساوات 13.48 جس کے عددی سر مساوات 13.49 دیتی ہے، حراری مساوات کا $t > 0$ کے لئے حل ہے جہاں وقفہ $0 \leq x \leq l$ پر $f(x)$ استمراری فرض کیا گیا ہے اور اس وقفہ کے اندر اس کے تمام یک طرفہ تفرق پائے جاتے ہیں۔ یہ ثابت کرنے کی خاطر درج ذیل کرنا ہو گا۔

سوال 18.98: دکھائیں کہ $|B_n|$ محدود ہے مثلاً تمام n کے لئے $|B_n| < K$ ہے۔اس سے درج ذیل اخذ کریں۔

$$|u_n| < Ke^{-\lambda_n^2 t_0} \qquad (t \geq t_0 > 0)$$

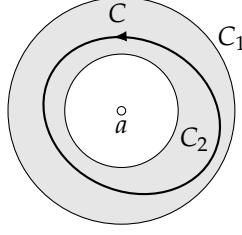
یوں وائشٹراس پرکھ M کے تحت x اور t کے لحاظ سے $t \geq t_0$ اور $0 \leq x \leq l$ کی صورت میں مساوات 13.48 کا تسلسل یکساں مرتکز ہو گا۔مسئلہ 18.12 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $t \geq t_0$ کی صورت میں $u(x,t)$ استمراری ہو گا لہٰذا $t \geq t_0$ کے لئے یہ مساوات 13.40 کی سرحدی شرائط مطمئن کرے گا۔

سوال 18.99: دکھائیں کہ $t \geq t_0$ کے لئے $\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < \lambda_n^2 Ke^{-\lambda_n^2 t_0}$ ہو گا اور تناسبی پرکھ کے تحت دایاں ہاتھ مرتکز ہو گا۔اس سے، پرکھ وائشٹراس سے اور مسئلہ 18.14 سے اخذ کریں کہ مساوات 13.48 میں دیا گیا تسلسل t کے لحاظ سے جزو در جزو قابل تفرق ہے جس سے حاصل تسلسل کا مجموعہ $\frac{\partial u}{\partial t}$ ہو گا۔ دکھائیں کہ x کے لحاظ سے مساوات 13.48 دو مرتبہ قابل تفرق ہے جس سے حاصل تسلسل کا مجموعہ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ہو گا۔اس سے اور سوال 18.98 سے اخذ کریں کہ تمام $t \geq t_0$ کے لئے مساوات 13.48 حراری مساوات کا حل ہے۔(ہم یہاں بغیر ثبوت پیش کئے بتانا چاہتے ہیں کہ مساوات 13.48 ابتدائی شرائط کو بھی مطمئن کرتا ہے۔)

18.7 لوغوں تسلسل

کئی مسائل میں تفاعل $f(z)$ کا تسلسل ایسا نقطوں کے گرد درکار ہو گا جہاں تفاعل نادر ہو گا۔ایسی صورت میں ٹیلر تسلسل قابل استعمال نہیں ہو گی۔ ایک نئی قسم کی تسلسل جسے لوغوں تسلسل کہتے ہیں کا استعمال یہاں ضروری ہو گا۔ایسا چھلا جو ہم مرکز دائرہ C_1 اور C_2 کے درمیان پایا جاتا ہو اور $f(z)$ اس چھلا میں اور C_1 اور C_2 کے ہر نقطہ پر تحلیلی ہو میں لوغوں تسلسل کارآمد ہو گا (شکل 18.6)۔ٹیلر تسلسل کی طرح، یہاں بھی $f(z)$ دائرہ C_1 کے باہر چند نقطوں پر نادر ہو سکتا ہے، اور اب لازمی نیا پہلو کے طور پر C_2 کے اندر بھی $f(z)$ چند نقطوں پر نادر ہو سکتا ہے۔

مسئلہ 18.16: مسئلہ لوغوں

اگر دو ہم مرکز دائروں C_1 اور C_2 جن کا مرکز a ہو پر $f(z)$ تحلیلی ہو اور ان دائروں کے درمیان چھلا

شکل 18.6: مسئلہ لوغوں

میں بھی $f(z)$ تحلیلی ہو تب $f(z)$ کو **لوغوں تسلسل**[24]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n} \tag{18.56}$$
$$= b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots$$

ظاہر[25] کر سکتا ہے جہاں عددی سر[26]

$$b_n = \frac{1}{i2\pi} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}z^*, \quad c_n = \frac{1}{i2\pi} \int_C (z^*-a)^{n-1} f(z^*) \, \mathrm{d}z^* \tag{18.57}$$

ہیں جہاں تکمل کو، چھلا کے اندر اور اندرونی دائرے کو گھیرتے ہوئے کسی بھی سادہ بند راہ C پر گھڑی کی الٹ رخ، حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 18.6)۔

یہ تسلسل مرتکز ہے اور $f(z)$ کو اس کھلے چھلا میں ظاہر کرتا ہے جو موجودہ چھلا کے دائرہ C_1 کو مسلسل اتنا بڑھا کر کہ $f(z)$ کا نادر نقطہ آن پہنچے اور C_2 کو مسلسل اتنا گھٹا کر کہ $f(z)$ کا نادر نقطہ آن پہنچے سے حاصل ہوتا ہے۔

ظاہر ہے کہ مساوات 18.56 اور مساوات 18.56 کی جگہ

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n \tag{18.58}$$

---

[24] Laurent series

[25] فرانسیسی ریاضی دان پیرّ الفنس لوغوں [1813-1854]

[26] چونکہ z کو $f(z)$ میں استعمال کیا گیا ہے لہٰذا ہم تکمل کے متغیرہ کو z^* لکھتے ہیں۔

جہاں

$$A_n = \frac{1}{i2\pi} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}} \, dz^* \tag{18.59}$$

ہے لکھا جا سکتا ہے۔

ثبوت: فرض کریں کہ دیے گئے چھلا میں z کوئی نقطہ ہے۔تب کوشی کلیہ تکمل (مساوات 16.33) کے تحت

$$f(z) = \frac{1}{i2\pi} \int\limits_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^*-z} \, dz^* - \frac{1}{i2\pi} \int\limits_{C_2} \frac{f(z^*)}{z^*-z} \, dz^* \tag{18.60}$$

ہو گا جہاں گھڑی کی الٹ رخ تکمل لیا جائے گا۔ہم حصہ 18.3 کی طرح ان تکملات کو تبدیل کرتے ہیں۔چونکہ z دائرہ C_1 کے اندر پایا جاتا ہے لہٰذا پہلا تکمل عین حصہ 18.3 کے تکمل کی طرح ہے۔حصہ 18.3 کی طرح اس کو پھیلا کر باقی کا تخمینہ لگاتے ہوئے

$$\frac{1}{i2\pi} \int\limits_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^*-z} \, dz^* = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \tag{18.61}$$

ملتا ہے جہاں عددی سر درج ذیل کلیہ دیتا ہے جہاں گھڑی کی الٹ رخ تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔

$$b_n = \frac{1}{i2\pi} \int\limits_{C_1} \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}} \, dz^* \tag{18.62}$$

چونکہ a چھلے کا حصہ نہیں ہے لہٰذا چھلا میں تفاعل $\frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}$ تحلیلی ہو گا۔یوں b_n کی قیمت تبدیل کیے بغیر ہم C_1 کی جگہ راہ C پر تکمل حاصل کر سکتے ہیں۔یوں تمام $n \geq 0$ کے لئے مساوات 18.57 کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

مساوات 18.60 کے دایاں تکمل میں صورت حال مختلف ہے۔چونکہ z دائرہ C_2 کے باہر پایا جاتا ہے لہٰذا مساوات 18.24 کی جگہ اب

$$\left| \frac{z^*-a}{z-a} \right| < 1 \tag{18.63}$$

ہو گا اور ہمیں $\frac{1}{z^*-z}$ کو $\frac{z^*-a}{z-a}$ کی طاقتوں میں پھیلانا ہو گا تا کہ حاصل تسلسل مرتکز ہو۔یوں

$$\frac{1}{z^*-z}=\frac{1}{z^*-a-(z-a)}=\frac{-1}{(z-a)\left(1-\frac{z^*-a}{z-a}\right)}$$

لکھ کر متناہی ہندسی تسلسل کے کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے

$$\frac{1}{z^*-z}=-\frac{1}{z-a}\left\{1+\frac{z^*-a}{z-a}+\left(\frac{z^*-a}{z-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z^*-a}{z-a}\right)^n\right\} -\frac{1}{z-z^*}\left(\frac{z^*-a}{z-a}\right)^{n+1}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کو $-\frac{f(z^*)}{i2\pi}$ سے ضرب دے کر C_2 پر تکمل لینے سے مساوات 18.60 کا دایاں تکمل حاصل ہو گا یعنی:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{i2\pi}\int_{C_2}\frac{f(z^*)}{z^*-z}\,\mathrm{d}z^* &=\frac{1}{i2\pi}\left\{\frac{1}{z-a}\int_{C_2}f(z^*)\,\mathrm{d}z^*+\frac{1}{(z-a)^2}\int_{C_2}(z^*-a)f(z^*)\,\mathrm{d}z^*+\cdots\right.\\&\left.\quad+\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\int_{C_2}(z^*-a)^n f(z^*)\,\mathrm{d}z^*\right\}+R_n^*(z)\end{aligned}$$

اس روپ میں آخری جزو درج ذیل ہو گا۔

$$R_n^*(z)=\frac{1}{i2\pi(z-a)^{n+1}}\int_{C_2}\frac{(z^*-a)^{n+1}}{z-z^*}f(z^*)\,\mathrm{d}z^* \tag{18.64}$$

کنگنی قوسین کے اندر تکملوں میں C_2 کی جگہ راہ C استعمال کی جا سکتی ہے جس سے تکمل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی ہے۔یوں اگر

$$\lim_{n\to\infty}R_n^*(z)=0 \tag{18.65}$$

ہو تب مسئلہ لوغوں ثابت ہوتا ہے۔

ہم مساوات 18.65 کو ثابت کرتے ہیں۔چونکہ $z-z^*\neq 0$ ہے اس لئے C_2 پر اور چھلا میں $f(z)$ تحلیلی

ہو گا اور C_2 پر تمام z کے لئے $\frac{f(z^*)}{z-z^*}$ کی مطلق قیمت محدود ہو گی مثلاً:

$$\left|\frac{f(z^*)}{z-z^*}\right| < \tilde{M} \qquad C_2 \text{ پر تمام } z$$

راہ C_2 کی لمبائی کو l لیتے ہوئے مساوات 18.64 پر مساوات 16.16 کے اطلاق سے

$$\left|R_n^*(z)\right| < \frac{1}{2\pi|z-a|^{n+1}}\left|z^*-a\right|^{n+1}\tilde{M}l = \frac{\tilde{M}l}{2\pi}\left|\frac{z^*-a}{z-a}\right|^{n+1}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 18.63 کی مدد سے ہم دیکھتے ہیں کہ n کی قیمت لامتناہی تک پہنچانے سے درج بالا میں دایاں جزو صفر تک پہنچتا ہے۔یوں مساوات 18.65 ثابت ہوتی ہے لہٰذا دیے گئے چھلا میں مساوات 18.56 ثابت ہوتی ہے جس کے عددی سر مساوات 18.57 دیتی ہے۔

آخر میں ہم کھلے چھلا میں مساوات 18.56 کی ارتکاز ثابت کرتے ہیں۔

ہم مساوات 18.57 میں اجزاء کے مجموعوں کو $g(z)$ اور $h(z)$ لکھتے ہیں، اور C_1 اور C_2 کے رداس کو بالترتیب r_1 اور r_2 لکھتے ہیں۔تب $f = g + h$ ہو گا۔ پہلا تسلسل طاقتی تسلسل ہے جو چھلا میں مرتکز ہے لہٰذا یہ تسلسل دائرہ C_1 کے اندر پورے قرص پر مرتکز ہو گا اور g اس قرص میں تحلیلی ہو گا۔

آخری تسلسل میں $Z = \frac{1}{z-a}$ لکھ کر Z کا طاقتی تسلسل حاصل ہوتا ہے اور چھلا $r_2 < |z-a| < r_1$ کا مطابقتی چھلا اب $\frac{1}{r_1} < |Z| < \frac{1}{r_2}$ ہو گا۔یہ طاقتی تسلسل اس چھلا میں مرتکز ہے لہٰذا یہ پورے قرص $|Z| < \frac{1}{r_2}$ میں مرتکز ہو گا۔چونکہ اس قرص کا مطابقتی خطہ $|z-a| > r_2$ یعنی C_2 کی بیرون ہے لہٰذا C_2 کے باہر تمام z کے لئے دیا گیا تسلسل مرتکز ہو گا اور h ان تمام z کے لئے مرتکز ہو گا۔

چونکہ $f = g + h$ ہے لہٰذا C_1 کے باہر ان تمام نقطوں پر g نادر ہو گا جن پر f نادر ہے اور C_2 کے اندر ان تمام نقطوں پر h نادر ہو گا جن پر f نادر ہے۔نتیجتاً پہلا تسلسل a کے گرد ان تمام z پر مرتکز ہو گا جو اس دائرے میں پائے جاتے ہوں جس کا مرکز a ہو اور جس کا رداس C_1 کے باہر f کے اس نقطہ نادر جو a کے قریب ترین ہو کا a تک فاصلہ کے برابر ہو۔اسی طرح دوسرا تسلسل a کے گرد ان تمام z پر مرتکز ہو گا جو اس دائرے کے باہر پائے جاتے ہوں جس کا مرکز a ہو اور جس کا رداس C_2 کے اندر f کے اس نقطہ نادر جو a سے دور ترین ہو کا a تک فاصلہ کے برابر ہو۔ان دونوں ارتکاز کے دائرہ کار کا مشترکہ دائرہ کار وہ کھلا چھلا ہو گا جس کا مسئلے کے آخر میں ذکر کیا گیا ہے۔یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

یوں اگر C_2 کے اندر $f(z)$ تحلیلی ہو تب لوغوں تسلسل گھٹ کر $f(z)$ کے ٹیلر تسلسل کی صورت اختیار کرے گا جس کا مرکز a ہو گا۔ بلکہ ایسی صورت میں آپ مساوات 18.57 پر کوشی کلیہ تکمل کے اطلاق سے دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 18.56 میں $z-a$ کی منفی طاقتوں کے تمام عددی سر صفر ہوں گے۔

مزید اگر C_2 میں $f(z)$ کا واحد نقطہ نادر $z=a$ ہو تب ماسوائے نقطہ $z=a$ کے C_1 کے اندر تمام z پر لوغوں تسلسل (مساوات 18.56) مرتکز ہو گا۔ ایسی صورت حال عموماً پائی جاتی ہے لہٰذا یہ خصوصاً اہم ہے۔ اس پر ہم جلد مزید غور کریں گے۔

چھلا ارتکاز کے اندر تفاعل $f(z)$ کا لوغوں تسلسل یکتا ہو گا (سوال 18.109)۔ البتہ دو مختلف چھلوں جن کا مرکز ایک ہی ہو میں $f(z)$ کے لوغوں تسلسل مختلف ہو سکتے ہیں (مثال 18.25)۔

چونکہ لوغوں تسلسل کے عددی سروں کو عموماً مساوات 18.57 سے حاصل نہیں کیا جاتا ہے لہٰذا لوغوں تسلسل کی یکتائی اہم ہے۔ لوغوں تسلسل کے حصول کے مختلف طریقے درج ذیل مثالوں میں پیش کیے گئے ہیں۔ اگر کسی بھی طریقے سے کوئی لوغوں تسلسل حاصل کیا جائے تب یقیناً چھلا کے اندر یہی تفاعل کا لوغوں تسلسل ہو گا۔

مثال 18.24: مساوات 18.35 میں z کی جگہ $\frac{1}{z}$ پر کرتے ہوئے تفاعل $z^2e^{\frac{1}{z}}$ کا لوغوں تسلسل جس کا مرکز 0 ہو حاصل کیا جا سکتا ہے؛

$$z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\left(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right)=z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\cdots \qquad (|z|>0)$$

□

مثال 18.25: **مختلف چھلا میں لوغوں تسلسل کا حصول**

ہم تفاعل $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$ کا لوغوں تسلسل تلاش کرتے ہیں جس کا مرکز $z=1$ ہو۔ اب $1-z^2=-(z-1)(z+1)$ لکھا جا سکتا ہے۔ ہندسی تسلسل

$$\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n \qquad (|q|<1)$$

استعمال کرتے ہوئے (یا مثال 18.16 میں استعمال کی گئی قلم و کاغذ سے تقسیم کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے)

$$\text{(الف)}\quad \frac{1}{z+1}=\frac{1}{2+(z-1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{[1-(-\frac{z-1}{2})]}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z-1}{2}\Big)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$$

حاصل ہوتا ہے جو قرص $\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$ یعنی $|z-1|<2$ میں مرتکز ہے (شکل 18.7)۔اسی طرح تسلسل

$$\text{(ب)}\quad \frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{(z-1)}\frac{1}{\Big(1+\frac{2}{z-1}\Big)}$$
$$=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{2}{z-1}\Big)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}}$$

خطہ $\left|\frac{2}{z-1}\right|<1$ یعنی $|z-1|>2$ میں مرتکز ہو گا (شکل 18.7)۔یوں (الف) سے تسلسل

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{-1}{(z-1)(z+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}\\ &=\frac{-\frac{1}{2}}{z-1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}(z-1)+\frac{1}{16}(z-1)^2-+\cdots \end{aligned} \tag{18.66}$$

حاصل ہو گا جو دائرہ کار $0<|z-1|<2$ میں مرتکز ہے۔اسی طرح (ب) سے تسلسل

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}}=-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}-\frac{4}{(z-1)^4}+-\cdots \tag{18.67}$$

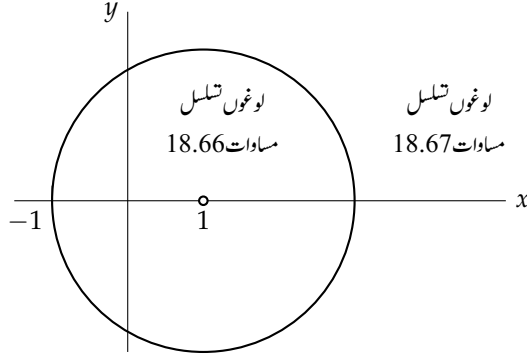
حاصل ہو گا جو دائرہ کار $|z-1|>2$ میں مرتکز ہے۔ □

مثال 18.26: سوال 18.49 کے نتیجہ سے ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\cot z=\frac{1}{z}-\frac{1}{3}z-\frac{1}{45}z^3-\frac{2}{945}z^5-\cdots\qquad (0<|z|<\pi)$$

□

اگر C_2 میں $f(z)$ کا واحد ایک نقطہ نادر $z=a$ ہو (شکل 18.6) تب خطہ

$$0<|z-a|<R \tag{18.68}$$

شکل 18.7: شکل برائے مثال 18.25

میں لوغوں تسلسل (مساوات 18.56) مرتکز ہو گا اور $z = a$ پر $f(z)$ کے نقطہ نادر کو **قطب**[27] یا **لازمی ندرت**[28] کہتے ہیں۔ اگر لوغوں تسلسل (وہ تسلسل جو $z = a$ کی پڑوس میں مرتکز لیکن عین $z = a$ پر منفرج ہو) میں منفی طاقت کے متناہی تعداد کے اجزاء ہوں تب اس نقطہ کو کہتے ہیں اور اگر ان اجزاء کی تعداد لا متناہی ہو تب اس کو **لازمی ندرت** کہتے ہیں۔ اگر متناہی سطح میں تحلیلی تفاعل کے ندرت صرف قطبین ہوں تب اس کو **جزوی شکلہ تفاعل**[29] کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر نقطہ $z = 1$ پر تفاعل $\frac{1}{1-z^2}$ (مثال 18.25) کی ندرت جاننے کی خاطر ہم لازمی طور پر مساوات 18.66 استعمال کریں گے نا کہ مساوات 18.67 چونکہ $a = 1$ لیتے ہوئے مساوات 18.68 طرز کے خطہ میں مساوات 18.66 مرتکز ہے۔ چونکہ مساوات 18.68 کا ایک منفی طاقت ہے لہٰذا اس نقطہ نادر کو قطب کہیں گے نا کہ لازمی ندرت (جو ہم مساوات 18.67 سے غلطی سے اخذ کرتے)۔ اگلے حصے میں اس پر تفصیلاً بحث کی جائے گی۔

سوالات

سوال 18.100 تا سوال 18.108 میں دیے تفاعل کا ایسا لوغوں تسلسل تلاش کریں جو خطہ $0 < |z| < R$ میں مرتکز ہو۔ ارتکاز کا خطہ ٹھیک معلوم کریں۔

---

[27] pole
[28] essential singularity
[29] meromorphic function

سوال 18.100: $\frac{e^{-z}}{z^3}$

جواب: $R=\infty$, $\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}-\frac{1}{6}+\frac{z}{24}-\frac{z^2}{10}-+\cdots$

سوال 18.101: $\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^6}$

جواب: $R=\infty$, $\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^8}+\frac{1}{2z^{10}}+\frac{1}{6z^{12}}+\cdots$

سوال 18.102: $\frac{\cos 2z}{z^2}$

جواب: $R=\infty$, $\frac{1}{z^2}-2+\frac{2}{3}z^2-\frac{4}{45}z^4+\frac{2}{315}z^6-+\cdots$

سوال 18.103: $\frac{1}{z^4(1+z)}$

جواب: $R=1$, $\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-z+z^2-z^3+-\cdots$

سوال 18.104: $\frac{1}{z^2(1-z)}$

جواب: $R=1$, $\frac{1}{z^2}+1+z^2+z^4+\cdots$

سوال 18.105: $\frac{1}{z^2(z-4)}$

جواب: $R=4$, $-\frac{1}{4z^2}-\frac{1}{16z}-\frac{1}{64}-\frac{z}{256}-\frac{z^2}{1024}-\cdots$

سوال 18.106: $\frac{\sinh 3z}{z^3}$

جواب: $R=\infty$, $\frac{3}{z^2}+\frac{9}{2}+\frac{81}{40}z^2+\frac{243}{560}z^4+\cdots$

سوال 18.107: $\frac{1}{z^8+z^4}$

جواب: $R=1$, $\frac{1}{z^4}-1+z^4\cdots$

سوال 18.108: $\frac{1}{z^2(1+z)^2}$

جواب: $R=1$, $\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+3-4z+5z^2-6z^3+-\cdots$

سوال 18.109: ثابت کریں کہ کسی مخصوص چھلا میں دیے گئے تحلیلی تفاعل کا لوغوں تسلسل یکتا ہو گا۔

سوال 18.110: کیا $\tan\frac{1}{z}$ کا خطہ $0<|z|<R$ میں مرتکز لوغوں تسلسل ہو گا؟

جواب: $\tan\frac{1}{z}=\frac{\sin\frac{1}{z}}{\cos\frac{1}{z}}$ کے نقطہ نادر وہ ہیں جن پر $\cos\frac{1}{z}=0$ ہو گا یعنی جب $\frac{1}{z}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$

ہو۔ان نقطوں $z_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ کا حد $z_n = 0$ جس پر دیا گیا تفاعل نادر (نقطہ a) ہے لہٰذا $R = 0$ ہے۔یوں ایسا کوئی خطہ $0 < |z| < R$ نہیں پایا جاتا ہے جس پر لوغوں تسلسل مرتکز ہو۔

سوال 18.111 تا سوال 18.119 میں مرکز $z = a$ کے گرد تمام ٹیلر تسلسل اور تمام لوغوں تسلسل تلاش کریں اور ارتکاز کا خطہ ٹھیک دریافت کریں۔

سوال 18.111: $\frac{1}{z^2+1}, \quad a = -i$

سوال 18.112: $\frac{1}{z^4}, \quad a = 1$
جواب:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} (z-1)^n, \; |z-1| < 1; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} \frac{1}{(z-1)^{n+4}}, \; |z-1| > 1$$

سوال 18.113: $\frac{1}{z^3}, \quad a = i$

سوال 18.114: $\frac{1}{z^2+1}, \quad a = i$
جواب:

$$\sum_{n=0}^{\infty} -\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} (z-i)^{n-1}, \; 0 < |z-i| < 2; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i2)^n}{(z-i)^{n+2}}, \; |z-i| > 2$$

سوال 18.115: $\frac{1}{1-z^4}, \quad a = -1$

سوال 18.116: $\frac{4z-1}{z^4-1}, \quad a = 0$
جواب:

$$(1-4z) \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}, \; |z| < 1; \quad \left(\frac{4}{z^3} - \frac{1}{z^4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{4n}}, \; |z| > 1$$

سوال 18.117: $\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{4})^3}, \quad a = \frac{\pi}{4}$

سوال 18.118: $\frac{e^z}{(z-1)^2}, \quad a = 1$
جواب:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (z-1)^{n-2}, \; |z-1| > 0;$$

سوال 18.119: $\frac{4z^2+2z-4}{z^3-4z}, \quad a = 2$

18.8 لامتناہی پر تحلیل پذیری۔ صفر اور ندرت

اس حصہ میں ہم تحلیلی تفاعل کے صفر اور ندرت پر غور کریں گے۔ہم دیکھیں گے کہ ندرت کی مختلف قسمیں پائی جاتی ہیں جنہیں لوغوں تسلسل کی مدد سے بیان کیا جا سکتا ہے۔

چونکہ ہم $z \to \infty$ پر بھی $f(z)$ کا رویہ دیکھنا چاہتے ہیں لہٰذا غور کے دوران مبسوط مخلوط سطح استعمال کی جائے گی۔جیسا حصہ 15.3 میں بتلایا گیا، مخلوط سطح کے ساتھ غیر مناسب نقطہ ∞ ("لامتناہی پر نقطہ") جوڑ کر مبسوط مخلوط سطح[30] حاصل ہوتی ہے۔ایسی صورت میں، پہچان کی خاطر، ہم مخلوط سطح کو متناہی مخلوط سطح کہیں گے۔حصہ 15.3 میں ہم نے دیکھا کہ نقطہ $z = \infty$ کا تبادل $w = \frac{1}{z}$ میں عکس $w = 0$ ہے (اور $w = \infty$ کا الٹ عکس $z = 0$ ہے) جس سے مبسوط مخلوط سطح کا تصور پیدا ہوا۔

اب بڑی $|z|$ کے لئے $f(z)$ پر غور کرنے کی خاطر ہم $w = \frac{1}{z}$ لیتے ہوئے $f(z) = f(\frac{1}{w}) \equiv g(w)$ پر $w = 0$ کی پڑوس میں غور کرتے ہیں۔ہم $g(0)$ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$g(0) = \lim_{w \to 0} g(w) \tag{18.69}$$

$w = 0$ پر $g(w)$ تحلیلی یا نادر ہونے کی صورت میں $z = \infty$ پر $f(z)$ کو بالترتیب تحلیلی[31] یا نادر[32] تصور کیا جاتا ہے۔ (ندرت کی تصور کے لئے حصہ 18.3 دیکھیں۔)

مثال 18.27: لامتناہی پر تحلیلی یا نادر تفاعل

تفاعل $f(z) = \frac{1}{z^2}$ لامتناہی پر تحلیلی ہے چونکہ $g(w) = f(\frac{1}{w}) = w^2$ نقطہ $w = 0$ پر تحلیلی ہے۔تفاعل $f(z) = z^3$ لامتناہی پر نادر ہے چونکہ $g(w) = f(\frac{1}{w}) = \frac{1}{w^3}$ نقطہ $w = 0$ پر نادر ہے۔قوت نمائی تفاعل $f(z) = e^z$ لامتناہی پر نادر ہے چونکہ $g(w) = f(\frac{1}{w}) = e^{\frac{1}{w}}$ نقطہ $w = 0$ پر نادر ہے۔اسی طرح تکونیاتی تفاعل $\sin z$ اور $\cos z$ لامتناہی پر نادر ہیں۔ □

اگر تفاعل $f(z)$ لامتناہی پر تحلیلی ہو تب، جیسا آگے درج ہے، ہم اس کا لوغوں تسلسل نہایت آسانی کے ساتھ حاصل کر سکتے ہیں۔فرض کریں کہ $f(z)$ دائرہ کار $|z-a| > R$ (رداس R کا دائرہ جس کا مرکز a

---
[30] extended complex plane
[31] analytic
[32] singular

ہے) میں اور لامتناہی پر تحلیلی ہے۔ہم

$$z = \frac{1}{w} + a \qquad \implies \qquad z - a = \frac{1}{w}$$

لیتے ہیں اور یوں درج ذیل تفاعل $h(w)$ قرص R $\left|z - a\right| = \left|\frac{1}{w}\right| > R$ یعنی $|w| < \frac{1}{R}$ میں تحلیلی ہو گا۔

$$h(w) = f\Big(\frac{1}{w} + a\Big) = f(z)$$

یوں $h(w)$ کا مکلارن تسلسل

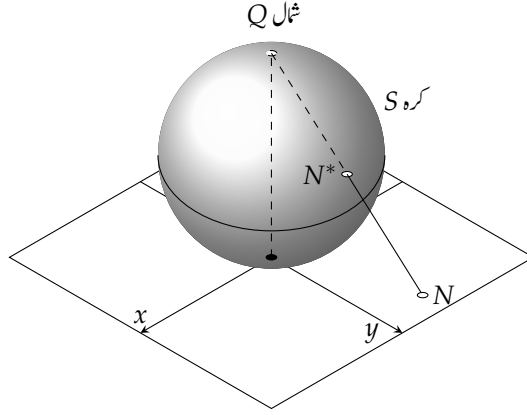
$$h(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n = c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \cdots \qquad (|w| < \frac{1}{R})$$

ہو گا۔اس میں $w = \frac{1}{z-a}$ پر کرتے ہوئے تفاعل کا درج ذیل لوغوں تسلسل حاصل ہو گا۔

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n} = c_0 + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots \qquad (|z-a| > R) \tag{18.70}$$

ریمان کرہ عدد

مخلوط اعداد کا مخلوط سطح پر اظہار اس وقت تک موزوں ثابت ہوتا ہے جب تک مخلوط عدد کی مطلق قیمت زیادہ بڑی نہ ہو۔بڑی $|z|$ کی صورت میں ایسا کرنے سے مشکلات پیدا ہوتی ہیں اور ہم مخلوط اعداد کو کرہ پر ظاہر کرنے کو ترجیح دیتے ہیں۔یہ تجویز ریمان کی ہے جس کو یوں حاصل کیا جاتا ہے (شکل 18.8)۔

فرض کریں S ایک کرہ ہے جس کا قطر 1 ہے اور جو مخلوط سطح کو مبدا پر چھوتا ہے (شکل 18.8)۔ فرض کریں کہ S کا شمالی قطب Q ہے (یوں جنوبی قطب عین مبدا پر ہو گا)۔فرض کریں کہ متناہی مخلوط سطح میں N کوئی نقطہ ہے۔یوں N سے Q تک سیدھی قطع S کو N^* پر قطع کرے گی۔ہم N اور N^* کو ایک دوسرے کے مطابقتی نقطے تصور کرتے ہیں۔یوں متناہی مخلوط سطح پر نقطوں اور S پر نقطوں کے مابین مطابقت پیدا ہوتی ہے۔اس نقش میں N کا عکس N^* ہو گا۔مخلوط اعداد جنہیں پہلے مخلوط سطح پر ظاہر کیا گیا تھا اب کرہ پر ظاہر کیے گئے ہیں۔ہر z کا S پر ایک مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے۔اسی طرح، ماسوائے نقطہ Q کے، S پر ہر نقطے کا متناہی مخلوط سطح پر ایک مطابقتی نقطہ پایا جاتا ہے۔متناہی مخلوط سطح میں Q کا کوئی مطابقتی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے۔البتہ غیر مناسب نقطہ $z = \infty$ متعارف کرتے اور اس کو Q کا مطابقتی نقطہ تصور کرتے ہوئے مبسوط مخلوط سطح اور

شکل 18.8: ریمان کرہ

S کے مابین ایک ایک مطابقتی نقش پیدا ہوتا ہے۔ کرہ S کو **ریمان کرہ اعداد**[33] کہتے ہیں۔ یہ مخصوص نقش جو ہم نے استعمال کی **مجسم نگارانہ تظلیل**[34] کہلاتی ہے۔

ظاہر ہے کہ اکائی دائرہ S کا نقش "خط استوا" ہو گا۔ اکائی دائرے کی اندرون "جنوبی نیم کرہ" کو ظاہر کرتا ہے جبکہ اس کی بیرون "شمالی نیم کرہ" کو ظاہر کرتا ہے۔ وہ اعداد جن کی مطلق قیمت بڑی ہو شمالی قطب Q کے قریب پائے جاتے ہیں۔ x اور y محور (بلکہ مبدا سے گزرتے تمام سیدھے خطوط) "خط طول بلد" پر نقش ہوں گے جبکہ وہ دائرے جن کا مرکز مبدا ہو "خط عرض بلد" پر نقش ہوں گے۔ ایسا ثابت کیا جا سکتا ہے کہ z سطح میں کوئی بھی دائرہ یا سیدھا خط S میں دائرے پر نقش ہو گا اور مزید کہ مجسم نگارانہ تظلیل محافظ زاویہ نقش ہے۔

صفر

اگر دائرہ کار D میں تفاعل $f(z)$ تحلیلی ہو اور D میں نقطہ $z = a$ پر تفاعل صفر ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $z = a$ پر $f(z)$ کا **صفر**[35] پایا جاتا ہے۔ اگر $z = a$ پر $f(z)$ کے ساتھ ساتھ تفرقات $f', \cdots f^{(n-1)}$ بھی صفر ہوں لیکن $f^{(n)} \neq 0$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $z = a$ پر $f(z)$ کے **صفر کا درجہ**[36] n ہے۔

---

[33] Riemann number sphere
[34] stereographic projection
[35] zero
[36] order

اگر $z=a$ پر $f(\frac{1}{z})$ کا ایسا صفر ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(z)$ کا لامتناہی پر n واں صفر ہے۔

مثال کے طور پر اگر $f(a)=0$ اور $f'(a)\neq 0$ ہوں تب $z=a$ پر f کا صفر ایک درجی یا سادہ صفر ہے۔اگر $f(a)=0$ ، $f'(a)=0$ ، $f''(a)\neq 0$ ہوں تب $z=a$ پر f کا صفر دو درجی ہے۔

مثال 18.28: صفر
تفاعل $\sin z$ کے سادہ صفر $z=0,\mp\pi,\mp 2\pi,\cdots$ پر پائے جاتے ہیں۔ تفاعل $(z-a)^3$ کا $z=a$ پر تین درجی صفر پایا جاتا ہے۔ تفاعل $1-\cos z$ کے دو درجی صفر $z=0,\mp 2\pi,\mp 4\pi,\cdots$ پر پائے جاتے ہیں۔تفاعل $\frac{1}{1-z}$ کا سادہ صفر لامتناہی پر پایا جاتا ہے۔ □

اگر $f(z)$ نقطہ $z=a$ کی پڑوس میں تحلیلی ہو اور اس کا $z=a$ پر n درجی صفر پایا جاتا ہو تب حصہ 18.3 میں مسئلہ ٹیلر کے تحت اس تفاعل کے ٹیلر تسلسل کے عددی سر b_0 تا b_{n-1} صفر ہوں گے۔ یوں اس کا ٹیلر تسلسل درج ذیل صورت کا ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(z) &= b_n(z-a)^n + b_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots \\ &= (z-a)^n[b_n+b_{n+1}(z-a)+b_{n+2}(z-a)^2+\cdots] \end{aligned} \qquad (b_n\neq 0) \tag{18.71}$$

نقطوں کے سلسلہ S میں اس نقطہ کو S کا تنہا نقطہ[37] کہتے ہیں جس کی پڑوس میں S کے دیگر نقطے شامل نہ ہوں۔نقطہ b کو S کا نقطہ اجتماع[38] (یا S کا تحدیدی نقطہ[39]) اس صورت کہیں گے جب b کے ہر پڑوس (جو چاہے جتنا چھوٹا کیوں نہ ہو) میں S کا کم از کم ایک نقطہ $\neq b$ پایا جاتا ہو (اور یوں S کے لامتناہی نقطے پائے جاتے ہوں)۔دھیان رہے کہ ضروری نہیں ہے کہ b از خود S کا حصہ ہو۔

مثال 18.29: تنہا اور غیر تنہا نقطے۔ تحدیدی نقطہ
نقطوں کے سلسلہ $z=n\,(n=1,2,\cdots)$ میں صرف تنہا نقطے پائے جاتے ہیں اور متناہی سطح میں اس کا کوئی تحدیدی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے۔

خیالی محور پر نقطوں کے سلسلہ $z=\frac{i}{n}\,(n=1,2,\cdots)$ میں صرف تنہا نقطے پائے جاتے ہیں اور اس کا واحد ایک تحدیدی نقطہ $z=0$ ہے۔یہ نقطہ سلسلے کا حصہ نہیں ہے۔

[37] isolated point
[38] accumulation point
[39] limit point

مخلوط نقطوں z کا سلسلہ جو $|z| < 1$ کو مطمئن کرتے ہوں میں کوئی تنہا نقطہ نہیں پایا جاتا ہے۔اس سلسلہ کے تمام نقطے اور اکائی دائرے پر تمام نقطے (جو اس سلسلہ کا حصہ نہیں ہیں)، اس سلسلہ کے تحدیدی نقطے (نقطہ اجتماع) ہیں۔ □

مسئلہ 18.17: صفر
تحلیلی تفاعل $f(z)\ (\not\equiv 0)$ کے صفر تنہا نقطے ہوں گے۔

ثبوت: ہم مساوات 18.71 پر غور کرتے ہیں۔فرض کریں کہ چکور قوسین میں بند تسلسل $[\cdots]$ تحلیلی تفاعل $g(z)$ ہے۔چونکہ $b_n \neq 0$ ہے لہٰذا $g(a) \neq 0$ ہو گا۔نتیجتاً، چونکہ $g(z)$ استمراری ہے لہٰذا $z = a$ کی پڑوس میں $g(z)$ صفر نہیں ہو گا۔یوں ماسوائے نقطہ $z = a$ کے، $f(z)$ اس پڑوس میں صفر نہیں ہو گا لہٰذا اس پڑوس میں $f(z)$ کا واحد صفر $z = a$ ہے لہٰذا یہ تنہا نقطہ ہو گا۔

□

ندرت

تحلیلی تفاعل کے نادر نقطوں کی نوعیت مختلف ہو سکتی ہیں[40]۔ ہم پہلے یادداشت تازہ کرتے ہیں۔ تحلیلی تفاعل $f(z)$ کے نادر نقطہ سے مراد وہ نقطہ ہے جس پر $f(z)$ تحلیلی نہ رہے (حصہ 18.3) اور ہم کہتے ہیں کہ اس نقطہ پر $f(z)$ نادر ہے یا کہ اس نقطہ پر $f(z)$ کی ندرت پائی جاتی ہے۔ اگر تفاعل $f(\frac{1}{z})$ نقطہ $z = 0$ پر نادر ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(z)$ لامتناہی پر نادر ہے۔

اگر $z = a$ پر $f(z)$ کا تنہا نقطہ نادر پایا جاتا ہو تب ہم اس تفاعل کو $z = a$ کی پڑوس میں (ماسوائے $z = a$ پر) لوغوں تسلسل

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n} \tag{18.72}$$

سے ظاہر کر سکتے ہیں (حصہ 18.7)۔ مساوات 18.72 میں دایاں تسلسل کو $z = a$ کے قریب $f(z)$ کا صدر حصہ[41] کہتے ہیں۔

---

[40] یاد رہے کہ تعریف کی رو سے واحد قیمت تعلق کو تفاعل کہتے ہیں۔ (حصہ 14.4)۔
[41] principal part

بعض اوقات کسی n سے آگے تمام عددی سر c_n صفر ہوں گے، مثلاً، $c_m \neq 0$ ہو گا اور تمام $n > m$ کے لئے $c_n = 0$ ہوں گے۔ایسی صورت میں مساوات 18.72 گھٹ کر درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n + \frac{c_1}{z-a} + \cdots + \frac{c_m}{(z-a)^m} \qquad (c_m \neq 0) \tag{18.73}$$

ایسی صورت میں جہاں صدر حصہ متناہی تعداد کے اجزاء پر مبنی ہو، $z = a$ پر f کی ندرت کو قطب[42] کہتے ہیں اور m کو اس قطب کا درجہ[43] کہتے ہیں۔یک درجی قطب کو سادہ قطب[44] بھی کہتے ہیں۔

اگر تحلیلی تفاعل f (مخلوط سطح میں واحد قیمت تعلق) کا قطب کے علاوہ کوئی ندرت پایا جاتا ہو تب اس کو لازمی ندرت[45] کہتے ہیں۔

تعریف کی رو سے قطبین سے مراد تنہا ندرت ہیں۔یوں وہ تمام ندرت جو تنہا نہ ہوں (مثلاً $z = 0$ پر $\tan \frac{1}{z}$ کی ندرت) لازمی ندرت ہوں گے۔لازمی ندرت تنہا یا غیر تنہا ہو سکتا ہے۔اگر مساوات 18.72 میں لامتناہی تعداد کے c_n غیر صفر ہوں، تب $z = a$ پر $f(z)$ کا ندرت، قطب نہیں بلکہ تنہا ندرت ہو گا۔

مثال 18.30: قطبین۔لازمی ندرت

تفاعل

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2}$$

کا $z = 0$ پر سادہ قطب پایا جاتا ہے جبکہ $z = 2$ پر اس کا پانچ درجی قطب پایا جاتا ہے۔تفاعل

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots \tag{18.74}$$

اور

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - + \cdots \tag{18.75}$$

کا $z = 0$ پر لازمی ندرت پایا جاتا ہے۔

---

[42] pole
[43] order
[44] simple pole
[45] essential singularity

تفاعل $\tan \frac{1}{z}$ کے قطبین

$$\frac{1}{z} = \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \cdots \quad \implies \quad z = \mp\frac{2}{\pi}, \mp\frac{2}{3\pi}, \cdots$$

پر پائے جاتے ہیں۔ان نقطوں کا تحدیدی نقطہ $z = 0$ ، یوں $\tan \frac{1}{z}$ کا غیر تنہا لازمی ندرت ہو گا۔ $\square$

مثال 18.31: **لامتناہی پر ندرت**

کثیر رکنی $f(z) = 2z + 6z^3$ کا تین درجی قطب لامتناہی پر پایا جاتا ہے، چونکہ

$$f(\frac{1}{z}) = \frac{2}{z} + \frac{6}{z^3}$$

کا ایسا قطب $z = 0$ پر پایا جاتا ہے۔عمومی طور پر n درجی کثیر رکنی کا لامتناہی پر n درجی قطب ہو گا۔

تفاعل e^z ، $\sin z$ اور $\cos z$ کا لامتناہی پر تنہا لازمی ندرت پایا جاتا ہے، چونکہ تفاعل $e^{\frac{1}{z}}$ ، $\sin \frac{1}{z}$ اور $\cos \frac{1}{z}$ کا $z = 0$ پر تنہا لازمی ندرت پایا جاتا ہے۔ $\square$

اگر تفاعل $f(z)$ جو نقطہ $z = a$ پر غیر تحلیلی ہو لیکن $z = a$ پر $f(z)$ کو کوئی قیمت مختص کرنے سے تحلیلی بنایا جا سکتا ہو، تب ہم کہتے ہیں کہ اس کی ندرت ہٹائی جا سکتی ہے۔ چونکہ انہیں ہٹایا جا سکتا ہے لہٰذا ایسی ندرت میں ہم دلچسپی نہیں رکھتے ہیں۔

ایسا تفاعل جو پورے متناہی سطح میں تحلیلی ہو **سالم تفاعل**[46] کہلاتا ہے۔

اگر ایسا تفاعل لامتناہی پر بھی تحلیلی ہو تب یہ تمام z کے لئے محدود ہو گا اور مسئلہ 16.6 کے تحت ایسا تفاعل مستقل ہو گا۔یوں ایسا سالم تفاعل جو غیر مستقل ہو لامتناہی پر یقیناً نادر ہو گا۔مثال کے طور پر (کم از کم ایک درجہ) کثیر رکنی، e^z ، $\sin z$ اور $\cos z$ سالم تفاعل ہیں اور لامتناہی پر نادر ہیں۔

ایسا تحلیلی تفاعل جس کے متناہی سطح پر ندرت قطبین ہوں کو **جزوی شکلہ تفاعل**[47] کہتے ہیں۔

---

[46] entire function
[47] meromorphic function

مثال 18.32: جزوی شکلہ تفاعل

ایسے ناطق تفاعل جن کے نسب نما غیر مستقل ہوں جزوی شکلہ تفاعل ہوں گے۔مثلاً $\tan z$ ، $\cot z$ ، $\sec z$ اور $\operatorname{cosec} z$ □

ندرت کی قطبین اور لازمی ندرت میں درجہ بندی محض با ضابطہ عمل نہیں ہے بلکہ لازمی ندرت کی پڑوس میں تفاعل کا رویہ قطب کی پڑوس میں تفاعل کے رویہ سے بالکل مختلف ہو گا۔

مثال 18.33: قطب کے قریب رویہ

تفاعل $f(z)=\frac{1}{z^2}$ کا $z=0$ پر قطب پایا جاتا ہے اور $z\to 0$ کرنے سے $\lvert f(z)\rvert\to\infty$ حاصل ہوتا ہے۔ □

یہ مثال درج ذیل مسئلہ دکھاتا ہے۔

مسئلہ 18.18: (قطبین)

اگر تفاعل $f(z)$ تحلیلی ہو اور $z=a$ پر اس کا قطب پایا جاتا ہو، تب جس طریقے سے بھی $z\to a$ کیا جائے، $\lvert f(z)\rvert\to\infty$ حاصل ہو گا۔(سوال 18.149)

مثال 18.34: لازمی ندرت کے قریب رویہ

تفاعل $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ کا $z=0$ پر لازمی ندرت پایا جاتا ہے۔خیالی محور پر پہنچتے ہوئے اس کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔حقیقی مثبت قیمتوں سے $z\to 0$ کرنے سے تفاعل لامتناہی ہو گا جبکہ حقیقی منفی قیمتوں سے $z\to 0$ کرنے سے تفاعل صفر دیتا ہے۔ $z=0$ کی اختیاری چھوٹی پڑوس میں اس کی کوئی بھی قیمت $c=c_0e^{i\alpha}\neq 0$ ممکن ہے۔بلکہ $z=re^{i\theta}$ لکھتے ہوئے ہم درج ذیل مساوات کو r اور θ کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{r}}=c_0e^{i\alpha}$$

مطلق قیمت اور دلیل (زاویہ) کو علیحدہ علیحدہ کرتے ہوئے $e^{\frac{\cos\theta}{r}}=c_0$ یعنی

$$\cos\theta=r\ln c_0 \quad \text{اور} \quad \sin\theta=-\alpha r$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان سے $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ لکھ کر

$$r^2=\frac{1}{(\ln c_0)^2+\alpha^2} \quad \text{اور} \quad \tan\theta=-\frac{\alpha}{\ln c_0}$$

حاصل ہو گا۔ یہاں c کو تبدیل کیے بغیر α کے ساتھ 2π کے مضرب جمع کرتے ہوئے r کو جتنا چاہیں چھوٹا بنایا جا سکتا ہے۔ □

یہ مثال درج ذیل مشہور مسئلہ پکاغ[48] دکھاتی ہے۔

مسئلہ 18.19: **مسئلہ پکاغ**[49]
اگر تحلیلی تفاعل $f(z)$ کا نقطہ a پر تنہا لازمی ندرت ہو، تب a کی انتہائی چھوٹی پڑوس میں، ماسوائے زیادہ سے زیادہ ایک خصوصی قیمت کے، یہ ہر قیمت دے گا۔

مثال 18.34 میں مخصوص قیمت $z=0$ ہے۔ اس مسئلے کا ثبوت پیچیدہ ہے جس کو اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

سوالات

سوال 18.120 تا سوال 18.128 میں کیا دیا گیا تفاعل لامتناہی پر تحلیلی ہے؟

سوال 18.120: z^2+z^{-2}
جواب: نہیں

سوال 18.121: $z^{-3}+z^{-1}$
جواب: ہاں

سوال 18.122: e^z
جواب: نہیں

---

[48] فرانسیسی ریاضی دان امیل پکاغ [1856-1941]
[49] Picard's theorem

سوال 18.123: $e^{\frac{1}{z}},\, e^{\frac{1}{z-1}}$
جواب: ہاں

سوال 18.124: $\cos z,\, \sin z$
جواب: نہیں

سوال 18.125: $ze^{\frac{1}{z}},\, \frac{1}{z}\sin z$
جواب: نہیں

سوال 18.126: $\tan z,\, \cot z$
جواب: نہیں

سوال 18.127: $\frac{7z^3-4}{z^3+2z}$
جواب: ہاں

سوال 18.128: $\frac{z^3-2z^2}{3z^5+\frac{1}{2}}$
جواب: ہاں

سوال 18.129 تا سوال 18.137 میں دیے گئے خطوں کا ریمان کرہ اعداد پر عکس کھینچیں۔ان عکس کو بیان کریں۔

سوال 18.129: خیالی $z \geq 0$

سوال 18.130: $|z| \geq 5$

سوال 18.131: $|z| \leq 2$

سوال 18.132: $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 2$

سوال 18.133: $|z| < 3, \quad \angle z < \frac{\pi}{4}$

سوال 18.134: $-\pi \leq$ خیالی $z \leq \pi$

سوال 18.135: $\angle z \leq \frac{3\pi}{4}$

سوال 18.136: $|z| > 1, \quad \angle z < \frac{\pi}{2}$

سوال 18.137: $-\frac{\pi}{4} < \angle z < \frac{3\pi}{4}$

سوال 18.138: مخلوط سطح میں اور ریمان کرہ پر z ، $-z$ ، $\bar{z}$ اور $-\bar{z}$ کا ایک دوسرے کے لحاظ سے مقام بیان کریں۔

سوال 18.139: مساوات 18.70 کے حصول میں استعمال کی گئی ترکیب کے ذریعہ $\frac{1}{z^4}$ کا لوغوں تسلسل $z-1$ کی منفی طاقتوں میں حاصل کریں۔

سوال 18.140 تا سوال 18.148 میں دیے گئے تفاعل کے صفر اور ان صفر کا درجہ معلوم کریں۔

سوال 18.140: z^2-1
جواب: $1, -1$ سادہ صفر

سوال 18.141: z^3
جواب: 0 تین درجی

سوال 18.142: $(z+i)^4$ جواب: $-i$ چار درجی

سوال 18.143: $\cos^2 z$
جواب: $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ دو درجی

سوال 18.144: $\sin^3 \pi z,$
جواب: $\mp 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$ تین درجی

سوال 18.145: $(\sin z - 1)^2$
جواب: $(4n+1)\frac{\pi}{2}$ دو درجی

سوال 18.146: $\cosh^2 z$
جواب: $n = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots \quad (2n+1)\frac{i\pi}{2},$ دو درجی

سوال 18.147: $z^2 e^z$
جواب: 0 دو درجی

سوال 18.148: $e^z - e^{2z}$
جواب: $n = 0, 1, \cdots \quad i2n\pi,$ سادہ

سوال 18.149: مسئلہ 18.18 کی تصدیق تفاعل $f(z) = z^{-2} + z^{-1}$ استعمال کرتے ہوئے کریں۔ مسئلہ 18.18 کو ثابت کریں۔

سوال 18.150: فرض کریں کہ $z = a$ پر $f(z)$ کا درجہ n صفر پایا جاتا ہے جہاں $n > 0$ ہے۔ دکھائیں کہ $f^2(z)$ کا صفر درجہ $2n$ کا ہے، تفرق $f'(z)$ کا صفر درجہ $n-1$ کا ہے اور $\frac{1}{f(z)}$ کا قطب درجہ n کا ہے۔
جواب: چونکہ f کا $z = a$ پر درجہ n صفر پایا جاتا ہے لہٰذا $f(z) = (z-a)^n g(z)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $g(a) \neq 0$ ہے۔ نتیجتاً $f^2(z) = (z-a)^{2n} g^2(z)$ ہو گا جس کا صفر درجہ $2n$ ہے، $\cdots$

سوال 18.151 تا سوال 18.159 میں دیے گئے تفاعل کی ندرت کی قسم اور ان کا مقام تلاش کریں۔

سوال 18.151: $z + z^{-1}$
جواب: 0 سادہ قطب

سوال 18.152: $\frac{1}{(z+a)^3}$
جواب: $-a$ درجہ تین قطب

سوال 18.153: $\sinh \pi z$
جواب: ∞ لازمی ندرت

سوال 18.154: $e^z + e^{\frac{1}{z}}$
جواب: $0, \infty$ لازمی ندرت

سوال 18.155: $\frac{z^7}{(1+z^2)^3}$
جواب: $\mp i$ تین درجی قطب، ∞ سادہ قطب

سوال 18.156: $\frac{e^{z^2}}{z^5}$
جواب: 0 درجہ پانچ قطب، ∞ لازمی ندرت

سوال 18.157: $(\cos z - \sin z)^{-1}$

سوال 18.158: $\sin \frac{1}{z^2}$
جواب: 0 لازمی ندرت

سوال 18.159: $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$

باب 19

تکمل بذریعہ ترکیب بقیہ

چونکہ مساوات 18.57 کے تکمل استعمال کیے بغیر لوغوں تسلسل (مساوات 18.56) کے عددی سر حاصل کرنے کے کئی تراکیب پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم c_1 کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے مخلوط تکمل کی قیمت کو با آسانی اور نفاست کے ساتھ حاصل کر سکتے ہیں۔ c_1 کو $z = a$ پر $f(z)$ کا بقیہ کہا جائے گا۔جیسا ہم حصہ 19.3 اور حصہ 19.4 میں دیکھیں گے، اس طاقتور ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے کئی اقسام کے اہم حقیقی تکمل بھی حل کیے جا سکتے ہیں۔

19.1 بقیہ

تفاعل $f(z)$ جو نقطہ $z = 0$ کی پڑوس میں تحلیلی ہو کے لئے کوشی مسئلہ تکمل سے اس پڑوس میں کسی بھی خط ارتفاع پر

$$\int_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0 \tag{19.1}$$

ہو گا۔البتہ اگر C کے اندر نقطہ $z = a$ پر $f(z)$ کا تنہا ندرت پایا جاتا ہو تب مساوات 19.1 میں دیا گیا تکمل عموماً غیر صفر ہو گا۔ایسی صورت میں $f(z)$ کو لوغوں تسلسل

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots \tag{19.2}$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو دائرہ کار $0 < |z-a| < R$ میں مرتکز ہو گا جہاں a سے $f(z)$ کی قریب ترین ندرت کا فاصلہ R ہے۔مساوات 18.57 سے ہم دیکھتے ہیں کہ عددی سر c_1 درج ذیل ہو گا

$$c_1 = \frac{1}{i2\pi}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

لہٰذا

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = i2\pi c_1 \tag{19.3}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تکمل کو گھڑی کے الٹ رخ، دائرہ کار $0 < |z-a| < R$ میں سادہ بند راہ C پر حاصل کیا جاتا ہے۔مساوات 19.2 میں c_1 کو نقطہ $z=a$ پر $f(z)$ کا بقیہ[1] کہتے ہیں جس کو ہم درج ذیل لکھ کر ظاہر کرتے ہیں۔

$$c_1 = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) \tag{19.4}$$

ہم دیکھ چکے ہیں کہ لوغوں تسلسل کے عددی سر کو، عددی سر کی تکمل کلیات کو استعمال کیے بغیر، مختلف تراکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ان میں سے کسی ایک ترکیب سے c_1 حاصل کرتے ہوئے ارتفاعی تکمل[2] کی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔

مثال 19.1: **تکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ بقیہ**
تفاعل $f(z) = z^{-4}\sin z$ کا اکائی دائرے پر گھڑی کی رخ تکمل حاسل کریں۔
مساوات 18.38 سے ہم لوغوں تسلسل

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7! + - \cdots}$$

حاصل کرت ہیں۔ہم دیکھتے ہیں کہ $z = 0$ پر $f(z)$ کا تین درجی قطب پایا جاتا ہے جس کا مطابقتی بقیہ $c_1 = -\frac{1}{3!}$ ہے لہٰذا مساوات 19.3 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_C \frac{\sin z}{z^4}\,\mathrm{d}z = i2\pi c_1 = -\frac{i\pi}{3}$$

---

residue[1]
contour integral[2]

$\square$

آگے بڑھنے سے پہلے قطب کی صورت مین بقیہ دریافت کرنے کا ایک منظم طریقہ سیکھتے ہیں۔

اگر نقطہ $z = a$ پر $f(z)$ کا سادہ قطب پایا جاتا ہو تب تفاعل کا مطابقتی لوغوں تسلسل (مساوات 19.2)

$$f(z) = \frac{c_1}{z-a} + b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots \qquad (0 < |z-a| < R)$$

ہو گا جہاں $c_1 \neq 0$ ہے۔دونوں اطراف کو $z-a$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$(z-a)f(z) = c_1 + (z-a)[b_0 + b_1(z-a) + \cdots] \tag{19.5}$$

اب $z \to 0$ کرنے سے دایاں ہاتھ c_1 تک پہنچتا ہے لہٰذا ہمیں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = c_1 = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) \tag{19.6}$$

یہ پہلا درکار نتیجہ ہے جو سادہ قطب کی صورت میں بقیہ دیتا ہے۔

سادہ قطب کی صورت میں بقیہ کا دوسرا کلیہ حاصل کرت ہیں۔اگر $f(z)$ کا نقطہ $z = a$ پر سادہ قطب ہو تب ہم

$$f(z) = \tfrac{p(z)}{q(z)}$$

لکھتے ہیں جہاں $p(z)$ اور $q(z)$ نقطہ $z = a$ پر تحلیلی ہیں، $p(a) \neq 0$ ہے اور $q(z)$ کا نقطہ $z = a$ پر سادہ صفر پایا جائے گا۔نتیجتاً $q(z)$ کو ٹیلر تسلسل

$$q(z) = (z-a)q'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}q''(a) + \cdots$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 19.6 سے

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{p(z)}{q(q)} = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)p(z)}{(z-a)[q'(a) + \frac{1}{2}(z-a)q''(a) + \cdots]}$$

یعنی

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=a}\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(a)}{q'(a)} \tag{19.7}$$

حاصل ہو گا جو سادہ قطب کی صورت میں بقیہ حاصل کرنے کا دوسرا کلیہ ہے۔

مثال 19.2: سادہ قطب کی صورت میں بقیہ
تفاعل $f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z}$ کا $z = 0$ اور $z = 1$ پر سادہ قطب پائے جاتے ہیں۔مساوات 19.7 کی مدد سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \left[\frac{4-3z}{2z-1}\right]_{z=0} = -4, \quad \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \left[\frac{4-3z}{2z-1}\right]_{z=1} = 1$$

□

آئیں اب بلند درجی قطبین کی بات کرتے ہیں۔اگر نقطہ $z = a$ پر $f(z)$ کے قطب کا درجہ $m > 1$ ہو تب تفاعل کا لوغوں تسلسل

$$f(z) = \frac{c_m}{(z-a)^m} + \frac{c_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \frac{c_1}{z-a} + b_0 + b_1(z-a) + \cdots$$

ہو گا جہاں $c_m \neq 0$ ہے اور نقطہ $z = a$ کی پڑوس میں، ماسوائے نقطہ $z = a$ پر، تسلسل مرتکز ہو گا۔ دونوں اطراف کو $(z-a)^m$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\begin{aligned}(z-a)^m f(z) = c_m + c_{m-1}(z-a) + \cdots + c_2(z-a)^{m-2} + c_1(z-a)^{m-1}\\ + b_0(z-a)^m + b_1(z-a)^{m+1} + \cdots\end{aligned}$$

ملتا ہے۔یوں نقطہ $z = a$ پر $f(z)$ کا بقیہ c_1 اب تفاعل $g(z) = (z-a)^m f(z)$ کا $z = a$ کے گرد ٹیلر تسلسل میں $(z-a)^{m-1}$ کا عددی سر ہے۔یوں مسئلہ ٹیلر (مسئلہ 18.9) کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$c_1 = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

یوں اگر نقطہ $z = a$ پر $f(z)$ کے قطب کا درجہ m ہو تب بقیہ درج ذیل (تیسرا) کلیہ دے گا۔

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \left\{ \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \right\} \tag{19.8}$$

مثال 19.3: بلند درجہ قطب پر بقیہ
تفاعل

$$f(z) = \frac{2z}{(z+4)(z-1)^2}$$

کا $z=1$ پر دو درجی قطب پایا جاتا ہے۔یوں مساوات 19.8 درج ذیل بقیہ دے گا۔

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z=1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z=1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{2z}{z+4}\right) = \frac{8}{25}$$

□

ظاہر ہے کہ ناطق تفاعل $f(z)$ کی صورت میں بقیہ کو $f(z)$ کی جزوی کسری پھیلاو سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 19.4:

$$f(z) = \frac{7z^4 - 13z^3 + z^2 + 4z - 1}{(z^3+z^2)(z-1)^2} = \frac{3}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{4}{z+1} - \frac{1}{(z-1)^2}$$

لکھتے ہوئے درج ذیل بقیہ حاصل ہوں گے۔

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 3, \quad \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = 4, \quad \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 0$$

□

سوالات

سوال 19.1 تا سوال 19.13 میں دیے تفاعل کا ندرت پر بقیہ تلاش کریں۔

سوال 19.1: $\frac{1}{1-z}$
جواب: نقطہ $z=1$ پر بقیہ -1 ہے۔

سوال 19.2: $\frac{z-3}{z+1}$
جواب: نقطہ $z=-1$ پر بقیہ -4 ہے۔

سوال 19.3: $\frac{1}{z^2}$
جواب: نقطہ $z=0$ پر بقیہ 0 ہے۔

سوال 19.4: $\frac{z}{z^2-1}$
جواب: نقطہ $z=1$ اور $z=-1$ پر بقیہ بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ ہیں۔

سوال 19.5: $\frac{1}{z^2+1}$
جواب: نقطہ $z=-i$ اور $z=i$ پر بقیہ بالترتیب $\frac{i}{2}$ اور $-\frac{i}{2}$ ہیں۔

سوال 19.6: $\frac{1}{(z^2+1)^2}$
جواب: نقطہ $z=-i$ اور $z=i$ پر بقیہ بالترتیب $\frac{i}{4}$ اور $-\frac{i}{4}$ ہیں۔

سوال 19.7: $\frac{1}{(z^2-1)^2}$
جواب: نقطہ $z=-1$ اور $z=1$ پر بقیہ بالترتیب $\frac{1}{4}$ اور $-\frac{1}{4}$ ہیں۔

سوال 19.8: $\frac{z}{z^4-1}$
جواب: نقطہ $z=-1,1,-i,i$ پر بقیہ اسی ترتیب سے $\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}$ ہیں۔

سوال 19.9: $\frac{1}{z^4-1}$
جواب: نقطہ $z=-1,1,-i,i$ پر بقیہ اسی ترتیب سے $-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{i}{4},\frac{i}{4}$ ہیں۔

سوال 19.10: $\frac{1}{1-e^z}$
جواب: نقطہ $z=\mp i2n\pi$ پر بقیہ -1 ہے۔

سوال 19.11: $\sec z$
جواب: نقطہ $z=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ اور $z=-\frac{\pi}{2}-2n\pi$ پر بقیہ بالترتیب -1 اور 1 ہے جہاں $n=0,1,2\cdots$ ہے۔

سوال 19.12: $\tan z$
جواب: نقطہ $z=\frac{\pi}{2}+n\pi$ پر بقیہ -1 ہے جہاں $n=\mp1,\mp2,\cdots$ ہے۔

سوال 19.13: $\cot z$
جواب: نقطہ $z=\mp n\pi$ پر بقیہ 1 ہے۔

سوال 19.14 تا سوال 19.18 میں دائرہ $|z|=1.5$ کے اندر ندرت پر تفاعل کا بقیہ تلاش کریں۔

سوال 19.14: $\frac{3z^2}{1-z^4}$
جواب: نقطہ $z=-1,1,-i,i$ پر بقیہ اسی ترتیب سے $\frac{3}{4},i\frac{3}{4}$ ہیں۔

سوال 19.15: $\frac{z-\frac{3}{4}}{z^2-3z+2}$
جواب: نقطہ $z=1$ پر بقیہ $-\frac{1}{4}$ ہے۔

سوال 19.16: $\frac{6z+1}{z^2-3z}$
جواب: نقطہ $z=0$ پر بقیہ $-\frac{1}{3}$ ہے۔

سوال 19.17: $\frac{z-1}{(z+1)(z^2+16)}$
جواب: نقطہ $z=-1$ پر بقیہ $-\frac{2}{17}$ ہے۔

سوال 19.18: $\frac{4+3z}{z^3-3z^2+2z}$
جواب: نقطہ $z=0,1$ پر اسی ترتیب سے بقیہ $2,-7$ ہیں۔

سوال 19.19 تا سوال 19.30 میں اکائی دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 19.19: $\int_C e^{\frac{1}{z}} \,\mathrm{d}z$
جواب: $i2\pi$

سوال 19.20: $\int_C ze^{\frac{1}{z}} \,\mathrm{d}z$

سوال 19.21: $\int_C \cot z \,\mathrm{d}z$
جواب: $i2\pi$

سوال 19.22: $\int_C \tan z \,\mathrm{d}z$

سوال 19.23: $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\sin z}$
جواب: $i2\pi$

سوال 19.24: $\int_C \frac{z}{2z+i} \,\mathrm{d}z$

سوال 19.25: $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z}$
جواب: 0

سوال 19.26: $\int_C \frac{z^2-4}{(z-2)^4} \,\mathrm{d}z$

سوال 19.27: $\int_C \frac{z^2+1}{z^2-2z} \,\mathrm{d}z$
جواب: $-i\pi$

سوال 19.28: $-i\pi \int_C \frac{\sin \pi z}{z^4} \,\mathrm{d}z$

سوال 19.29: $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{1-e^z} \,\mathrm{d}z$
جواب: $-i2\pi$

سوال 19.30: $\int_C \frac{z^2+1}{e^z \sin z} \,\mathrm{d}z$

19.2 مسئلہ بقیہ

گزشتہ حصے میں ہم نے ایسا ارتفاعی تکمل جس کے متکمل کا خط ارتفاع میں بند صرف ایک عدد ندرت پایا جاتا ہو کو حل کرنا سیکھا۔ہم اب دیکھیں گے کہ اسی ترکیب کو وسعت دے کر ان تکمل کو بھی حل کیا جا سکتا ہے جن کے متکمل کا خط ارتفاع میں بند ایک سے زیادہ تنہا ندرت پائے جاتے ہوں۔

مسئلہ 19.1: مسئلہ بقیہ
فرض کریں کہ تفاعل $f(z)$ سادہ بند راہ C پر اور C کے اندر تحلیلی ہے ماسوائے محدود تعداد کے نقطوں $a_1, a_2, \cdots, a_m$ پر جہاں $f(z)$ کے ندرت پائے جاتے ہیں۔تب درج ذیل ہو گا جہاں C پر تکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا جائے گا۔

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = i2\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z) \tag{19.9}$$

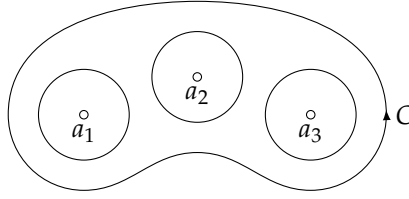
ثبوت: ہم ہر ندرت a_j کو انفرادی دائرہ C_j میں بند کرتے ہیں جس کا رداس اتنا چھوٹا رکھا جاتا ہے کہ تمام m عدد دائرے اور C ایک دوسرے کو نہ چھوئے (شکل 19.1)۔تب مضرب تعلق دائرہ کار D جس کے حدود C اور C_1 تا C_m ہوں پر اور D کی تمام سرحد پر $f(z)$ تحلیلی ہو گا۔کوشی مسئلہ تکمل سے

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_m} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{19.10}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تکمل کو C پر گھڑی کی الٹ رخ اور C_1 تا C_m پر تکمل کو گھڑی کی رخ حاصل کیا جاتا ہے (حصہ 16.3)۔ ہم اب C_1 تا C_m پر تکمل کا رخ الٹ کرتے ہیں جس سے ان تکمل کی قیمتوں کی علامت تبدیل ہو جائے گی لہٰذا مساوات 19.9 سے

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_m} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{19.11}$$

حاصل ہو گا جہاں تمام تکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیے جائیں گے۔ اب چونکہ مساوات 19.3 کے تحت

$$\int_{C_j} f(z)\,\mathrm{d}z = i2\pi \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z)$$

شکل 19.1: مسئلہ بقیہ

ہو گا لہٰذا مساوات 19.11 سے مساوات 19.9 حاصل ہو گا۔ یوں مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اس اہم مسئلے کی مختلف مخلوط اور حقیقی تکملات میں ضرورت پیش آتی ہے۔ہم چند مخلوط تکملات کی مثالیں پیش کرتے ہیں۔

مثال 19.5: تکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ

تفاعل $\frac{4-3z}{z^2-z}$ تحلیلی ہے ماسوائے نقطہ 0 اور 1 کے جہاں تفاعل کے سادہ قطب پائے جاتے ہیں جن کے بقیہ بالترتیب -4 اور 1 ہیں (مثال 19.2)۔یوں ہر اس راہ C کے لئے جو نقطہ 0 اور 1 دونوں کو گھیرتی ہے پر

$$\int_C \frac{4-3z}{z^2-z}\,\mathrm{d}z = i2\pi(-4+1) = -i6\pi$$

ہو گا جہاں تکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا جائے گا۔اسی طرح ہر اس راہ C پر جس کے اندر نقطہ $z=0$ پایا جاتا ہو جبکہ نقطہ $z=1$ اس کے باہر پایا جاتا ہو کے لئے

$$\int_C \frac{4-3z}{z^2-z}\,\mathrm{d}z = i2\pi(-4) = -i8\pi$$

ہو گا جہاں تکمل گھڑی کی الٹ رخ حاصل کیا جائے گا۔ □

مثال 19.6: متکمل کے بلند درجی قطبین پائے جاتے ہیں

دائرہ $|z-a|=1$ پر گھڑی کی الٹ رخ تفاعل $\frac{1}{(z^3-1)^2}$ کا تکمل تلاش کریں۔اس تفاعل کے نقطہ $z=1$

، $z=e^{i\frac{2\pi}{2}}$ اور $z=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ پر دو درجی قطب پائے جاتے ہیں۔ صرف نقطہ $z=1$ پر قطب دائرے کے اندر ہے۔ یوں

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)^2}=i2\pi \operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1}{(z^3-1)^2}=i2\pi\Big(-\frac{2}{9}\Big)=-\frac{i4\pi}{9}$$

ہو گا جہاں بقیہ کو مساوات 19.8 کی مدد سے حاصل کیا گیا ہے۔ □

مثال 19.7: پہلے حاصل کردہ نتیجے کی تصدیق
ہم تفاعل $\frac{1}{(z-a)^m}$ جہاں m مثبت عدد صحیح ہے کا گھڑی کی الٹ رخ تکمل ایسی سادہ بند راہ C پر حاصل کرتے ہیں جو نقطہ $z=a$ کو گھیرتی ہو۔ پہلے بقیہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{1}{z-a}=1,\quad \operatorname*{Res}_{z=a}\frac{1}{(z-a)^m}=0\quad (m=2,3,\cdots)$$

یوں نتیجہ عین مثال 16.3 کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^m}=\begin{cases} i2\pi & (m=1)\\ 0 & (m=2,3,\cdots)\end{cases}$$

□

سوالات

سوال 19.31 تا سوال 19.33 میں تفاعل $\frac{3z^2+2z-4}{z^3-4z}$ کا تکمل گھڑی کی الٹ رخ دی گئی راہ C پر تلاش کریں۔

سوال 19.31: $|z|=1$
جواب: $i2\pi$

سوال 19.32: $|z|=3$
جواب: $i6\pi$

سوال 19.33: $|z-4|=1$
جواب: 0

سوال 19.34 تا سوال 19.36 میں تفاعل $\frac{z+1}{z(z-1)(z-2)}$ کا تکمل گھڑی کی الٹ رخ دی گئی راہ C پر تلاش کریں۔

سوال 19.34: $|z-2|=\frac{1}{2}$
جواب: $-i3\pi$

سوال 19.35: $|z|=\frac{3}{2}$
جواب: $i3\pi$

سوال 19.36: $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$
جواب: 0

سوال 19.37 تا سوال 19.60 کا تکمل اکائی دائرہ C پر گھڑی کی الٹ رخ حاصل کریں۔

سوال 19.37: $\int_C \frac{3z}{3z-1}\,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{i2\pi}{3}$

سوال 19.38: $\int_C \frac{z}{4z^2-1}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.39: $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-2z}$
جواب: $-i\pi$

سوال 19.40: $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+4}$

سوال 19.41: $\int_C \frac{z+1}{4z^3-z}\,\mathrm{d}z$
جواب: 0

سوال 19.42: $\int_C \frac{z^5-3z^3+1}{(2z+1)(z^2+4)}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.43: $\int_C \frac{z}{1+9z^2}\,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{i2\pi}{9}$

سوال 19.44: $\int_C \frac{z+1}{z^4-2z^3}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.45: $\int_C \frac{(z+4)^3}{z^4+5z^3+6z^2}\,\mathrm{d}z$
جواب: $-\frac{i16\pi}{9}$

سوال 19.46: $\int_C \tan z\,\mathrm{d}z$

سوال 19.47: $\int_C \tan \pi z\,\mathrm{d}z$
جواب: $-i4$

سوال 19.48: $\int_C \frac{6z^2-4z+1}{(z-2)(1+4z^2)}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.49: $\int_C \tan 2\pi z\,\mathrm{d}z$
جواب: $-i4$

سوال 19.50: $\int_C \frac{\tan \pi z}{z^3}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.51: $\int_C \frac{e}{z^2-5z}\,\mathrm{d}z$
جواب: $-\frac{i2\pi}{5}$

سوال 19.52: $\int_C \frac{e^z}{\sin z}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.53: $\int_C \frac{e^z}{\cos z}\,\mathrm{d}z$
جواب: 0

سوال 19.54: $\int_C \frac{e^z}{\cos \pi z}\,\mathrm{d}z$

سوال 19.55: $\int_C \frac{\cosh z}{z^2-i3z}\,\mathrm{d}z$
جواب: $-\frac{i2\pi}{3}$

سوال 19.56: $\int_C \coth z\,\mathrm{d}z$

سوال 19.57: $\int_C \frac{\sinh z}{2z-i}\,\mathrm{d}z$
جواب: $-\pi \sin \frac{1}{2}$

سوال 19.58: $\int_C \cot z\,\mathrm{d}z$

سوال 19.59: $\int_C \frac{\cot z}{z}\,\mathrm{d}z$
جواب: 0

سوال 19.60: $\int_C \frac{e^{z^2}}{\cos \pi z}\,\mathrm{d}z$

19.3 حقیقی تکمل بذریعہ مسئلہ بقیہ

کئی پیچیدہ قسم کے حقیقی تکمل کو نہایت نفاست کے ساتھ مسئلہ بقیہ کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔بہت سی صورتوں میں تکمل حاصل کرنے کی اس ترکیب کو معمول بنایا جا سکتا ہے۔

$\cos\theta$ اور $\sin\theta$ کے ناطق تفاعل کے تکمل

ہم سب سے پہلے درج ذیل قسم کے تکمل پر غور کرتے ہیں

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{19.12}$$

جہاں R وقفہ $0 \le \theta \le 2\pi$ پر متناہی حقیقی ناطق تفاعل ہے جس کے متغیرات $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ ہیں۔ہم $e^{i\theta} = z$ لے کر

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{i2}(z - \frac{1}{z})$$

لکھتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ متکمل، z کا ناطق تفاعل مثلاً $f(z)$ بنتا ہے۔θ کو 0 تا 2π کرنے سے z اکائی دائرہ $|z| = 1$ پر گھڑی کی الٹ رخ ایک چکر کاٹتا ہے۔چونکہ $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = ie^{i\theta}$ ہے لہٰذا $\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$ ہو گا اور یوں تکمل درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے

$$I = \int_C f(z)\frac{\mathrm{d}z}{iz} \tag{19.13}$$

جہاں اکائی دائرے پر گھڑی کی الٹ رخ تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 19.8: حقیقی تکمل (قسم مساوات 19-13)

فرض کریں کہ p وقفہ $0 < p < 1$ میں کوئی مقررہ عدد ہے۔ہم درج ذیل پر غور کرتے ہیں۔

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2} = \int_C \frac{\frac{\mathrm{d}z}{iz}}{1 - 2p\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + p^2} = \int_C \frac{\mathrm{d}z}{i(1 - pz)(z - p)}$$

متکمل کے $z = \frac{1}{p} > 1$ اور $z = p < 1$ پر سادہ قطبین پائے جاتے ہیں۔ صرف $z = p$ پر قطب اکائی دائرہ C کے اندر پایا جاتا ہے جس کا بقیہ

$$\operatorname*{Res}_{z=p} \frac{1}{i(1-pz)(z-p)} = \left[\frac{1}{i(1-pz)}\right]_{z=p} = \frac{1}{i(1-p^2)}$$

ہے۔ یوں مسئلہ بقیہ کے تحت تکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} = i2\pi \frac{1}{i(1-p^2)} = \frac{2\pi}{1-p^2} \qquad (0 < p < 1)$$

□

ناطق تفاعل کے غیر مناسب تکمل

ہم اب درج ذیل قسم کے حقیقی تکمل پر غور کرتے ہیں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{19.14}$$

اس قسم کا تکمل جس میں تکمل کے حدود غیر متناہی ہوں کو **غیر مناسب تکمل**[3] کہتے ہیں اور اس سے مراد درج ذیل ہے۔

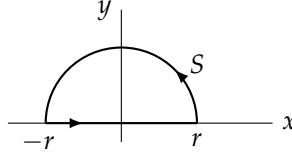
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{19.15}$$

اگر دونوں حد موجود ہوں تب دونوں راہ کو ایک ساتھ ملا کر ہم درج ذیل لکھتے ہیں[4]۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r=\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{19.16}$$

---

[3] improper integral

[4] مساوات 19.16 کا دایاں ہاتھ تکمل کی **کوشی صدر قیمت** کہلاتی ہے؛ جو مساوات 19.15 کے حد کی غیر موجودگی میں بھی موجود ہو سکتی ہے۔ مثال کے طور پر
$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} x\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}(\frac{r^2}{2}-\frac{r^2}{2}) = 0$ لیکن $\lim_{b\to\infty}\int_0^b x\,\mathrm{d}x = \infty$

شکل 19.2: ارتفاعی تکمل (مساوات 19.17) کی راہ

ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 19.14 میں تفاعل $f(x)$ حقیقی ناطق تفاعل ہے جس کا نسب نما تمام حقیقی x کے لئے غیر صفر ہے اور جس کا درجہ شمار کنندہ سے کم از کم 2 زیادہ ہے۔تب مساوات 19.15 کے حد موجود ہوں گے لہٰذا ہم مساوات 19.16 استعمال کر سکتے ہیں۔ہم مطابقتی ارتفاعی تکمل

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \tag{19.17}$$

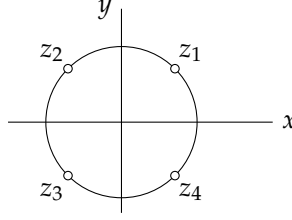
پر غور کرتے ہیں جس کی راہ C کو شکل 19.2 میں دکھایا گیا ہے۔چونکہ $f(x)$ ناطق ہے، بالائی نصف مستوی میں $f(z)$ کے قطبین کی تعداد متناہی ہے اور اگر ہم r کو کافی بڑا منتخب کریں تب C ان تمام قطبین کو گھیرے گی۔تب مسئلہ بقیہ کے تحت

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_S f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = i2\pi \sum \operatorname{Res} f(z)$$

ہو گا جہاں مجموعہ، بالائی نصف مستوی میں ان تمام نقطوں پر $f(z)$ کے بقیہ پر مشتمل ہے جہاں $f(z)$ کا قطب پایا جاتا ہو۔اس سے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int\limits_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = i2\pi \sum \operatorname{Res} f(z) - \int\limits_S f(z)\,\mathrm{d}z \tag{19.18}$$

ہم اب ثابت کرتے ہیں کہ $r \to \infty$ کرنے سے نصف دائرہ S پر تکمل کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے۔اگر ہم $z = re^{i\theta}$ لیں تب ہم S کو مستقل $r =$ سے ظاہر کریں گے اور جیسے جیسے z نصف دائرہ S پر چلتا ہے ویسے ویسے متغیرہ θ کی قیمت 0 سے 2π تک پہنچتی ہے۔چونکہ نسب نما کا درجہ شمار کنندہ کے درجہ سے کم از کم 2 زیادہ ہے لہٰذا کافی بڑے مستقل k اور r_0 کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\left|f(z)\right| < \frac{k}{|z|^2} \qquad (|z| = r > r_0)$$

شکل 19.3: شکل برائے مثال 19.9

مساوات 16.16 کی اطلاق سے

$$\left|\int_S f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \frac{k}{r^2}\pi r = \frac{k\pi}{r} \qquad (r > r_0)$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں جیسے r لامتناہی تک پہنچتا ہے ویسے ویسے S پر تکمل کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے لہٰذا مساوات 19.16 اور مساوات 19.18 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = i2\pi \sum \operatorname{Res} f(z) \tag{19.19}$$

جہاں بالائی نصف مستوی میں $f(z)$ کی تمام قطبین کے مطابقتی بقیہ کو مجموعہ میں شامل کیا جائے گا۔

مثال 19.9: 0 تا ∞ ایک غیر مناسب تکمل

مساوات 19.19 استعمال کرتے ہوئے ہم درج ذیل دکھانا چاہتے ہیں۔

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

تفاعل $\frac{1}{1+z^4}$ کے چار عدد قطبین درج ذیل نقطوں پر پائے جاتے ہیں۔

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_4 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ان میں سے z_1 اور z_2 پر قطبین بالائی نصف مستوی میں پائے جاتے ہیں (شکل 19.3)۔ مساوات 19.7 کی درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'}\right]_{z=z_1} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_1} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'}\right]_{z=z_2} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_2} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{9\pi}{4}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

یوں مساوات 14.74 اور مساوات 19.19 سے

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{i2\pi}{4}(-e^{-\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \pi \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \tag{19.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ $\frac{1}{1+x^4}$ جفت تفاعل ہے لہٰذا

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

ہو گا۔اس سے اور مساوات 19.20 سے درکار نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ □

سوالات

سوال 19.61 تا سوال 19.72 میں تکمل حل کریں۔یہ تکمل $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ پر مبنی ہیں۔

سوال 19.61: $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}$

جواب: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

سوال 19.62: $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\frac{1}{3}\cos\theta}$

سوال 19.63: $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{k+\cos\theta} \quad (k>1)$

جواب: $\frac{\pi}{\sqrt{k^2-1}}$

سوال 19.64: $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{25-24\cos\theta}$

سوال 19.65: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{5-3\cos\theta}$

جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 19.66: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{17-8\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 19.67: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$

جواب: 0

سوال 19.68: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13-12\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 19.69: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{5}{4}-\sin\theta}$

جواب: $\frac{8\pi}{3}$

سوال 19.70: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 19.71: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{26-10\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

جواب:

$$\cos 2\theta = \tfrac{1}{2}\left(z^2+\tfrac{1}{z^2}\right)$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{26-10\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{i20}\int_C \frac{(z^2+1)^2}{z(z^2-\frac{1}{5})(z^5-5)}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{20}$$

سوال 19.72: $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 19.73 تا سوال 19.84 کے غیر مناسب تکمل حاصل کریں۔

سوال 19.73: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

جواب: π

سوال 19.74: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

سوال 19.75: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$

جواب: $\frac{2\pi}{3}$

سوال 19.76: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+16}$

سوال 19.77: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$

جواب: $\frac{3\pi}{8}$

سوال 19.78: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(4+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 19.79: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{1+x^8}\,\mathrm{d}x$

جواب: 0

سوال 19.80: $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

سوال 19.81: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+9)}$

جواب: $\frac{\pi}{12}$

سوال 19.82: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$

سوال 19.83: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 19.84: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$

سوال 19.85: سوال 19.84، سوال 19.78 اور سوال 19.79 کو بنیادی طریقہ سے حل کریں۔

19.4 حقیقی تکمل کے دیگر اقسام

ایسے دیگر حقیقی تکمل پائے جاتے ہیں جنہیں مخلوط تکمل پر مسئلہ بقیہ کی اطلاق سے حل کیا جا سکتا ہے۔عملاً اس طرح کے تکمل اعلیٰ تفاعل کی اظہار یا تبادل تکمل سے حاصل ہوتے ہیں۔موجودہ حصہ میں ہم اس طرح کے دو اقسام کے تکمل پر غور کرتے ہیں۔ ان میں سے ایک فوریئر تکمل روپ (حصہ 12.9) میں اظہار کے لئے اہم ہے۔دوسری گروہ ایسی حقیقی تکمل پر مشتمل ہے جس کا متکمل وقفہ تکمل میں کسی ایک نقطہ پر لامتناہی ہو گا۔

فوریئر تکمل

درج ذیل صورت کے حقیقی تکمل

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx \,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx \,\mathrm{d}x \qquad (s \text{ حقیقی}) \tag{19.21}$$

فوریئر تکمل (حصہ 12.9) کے حصول میں پیش آتے ہیں۔

اگر $f(x)$ ناطق تفاعل ہو جو مساوات 19.14 کے حوالہ سے پیش شرائط کو مطمئن کرتا ہو تب مساوات 19.21 کو مساوات 19.14 کی طرز پر حل کیا جا سکتا ہے۔یوں ہم مطابقتی تکمل

$$\int_C f(z)e^{isz}\,\mathrm{d}z \qquad (s \text{ حقیقی مثبت})$$

پر غور کرتے ہیں جہاں تکمل کی راہ C کو شکل 19.3 میں دکھایا گیا ہے اور مساوات 19.19 کی جگہ ہمیں اب

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}\,\mathrm{d}x = i2\pi \sum \operatorname{Res}[f(z)e^{isz}] \qquad (s > 0) \tag{19.22}$$

حاصل ہو گا جہاں مجموعہ بالائی نصف مستوی میں $f(z)e^{isz}$ کے قطبین پر بقیہ پر مشتمل ہو گا۔ مساوات 19.22 کے حقیقی اور خیالی حصے علیحدہ علیحدہ کرنے سے درج ذیل ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,\mathrm{d}x &= -2\pi \sum \operatorname{Res}[f(z)e^{isz}]_{\text{خیالی}} \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,\mathrm{d}x &= 2\pi \sum \operatorname{Res}[f(z)e^{isz}]_{\text{حقیقی}}
\end{aligned} \qquad (s > 0) \tag{19.23}$$

آپ کو یاد ہو گا کہ مساوات 19.19 کی خاطر ہمیں ثابت کرنا پڑا کہ شکل 19.3 میں $r \to \infty$ کرنے سے نصف دائرہ S پر تکمل کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے۔ مساوات 19.22 کے لئے ہمیں موجودہ ارتفاعی تکمل کے لئے ایسا ہی ثبوت پیش کرنا ہو گا۔ آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔ چونکہ S بالائی نصف مستوی میں پایا جاتا ہے، $y \geq 0$ ہو گا اور $s > 0$ ہے۔ یوں

$$\left|e^{isz}\right| = \left|e^{isx}\right|\left|e^{-sy}\right| = e^{-sy} \leq 1 \qquad (s > 0, y \geq 0)$$

ہو گا جس سے درج ذیل عدم مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\left|f(z)e^{isz}\right| = \left|f(z)\right|\left|e^{isz}\right| \leq \left|f(z)\right| \qquad (s > 0, y \geq 0)$$

جس سے ہمارا موجودہ مسئلہ گزشتہ حصے کے مسئلہ کی صورت اختیار کرتا ہے۔ پہلے کی طرح آگے بڑھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $r \to \infty$ کرنے سے موجودہ تکمل کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے۔ اس طرح مساوات 19.22 کی درستگی طے ہوتی ہے۔

مثال 19.10: مساوات 19.23 کا استعمال

درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2 + x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{k} e^{-ks}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{k^2 + x^2} \, \mathrm{d}x = 0 \qquad (s > 0, \, k > 0)$$

حقیقتاً $\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}$ کا بالائی نصف مستوی میں واحد ایک قطب نقطہ $z = ik$ پر پایا جاتا ہے۔ مساوات 19.7 سے

$$\operatorname*{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} = \left[\frac{e^{isz}}{2z}\right]_{z=ik} = \frac{e^{-ks}}{i2k}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں درکار نتیجا

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{k^2 + x^2} \, \mathrm{d}x = i2\pi \frac{e^{-ks}}{i2k} = \frac{\pi}{k} e^{-ks}$$

حاصل ہوتا ہے (مساوات 12.80 دیکھیں)۔ □

حقیقی غیر مناسب تکمل کے دیگر اقسام

غیر مناسب تکمل کی ایک اور قسم ایسا قطعی تکمل

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x \tag{19.24}$$

ہے جس کا متکمل وقفہ تکمل پر کسی نقطہ a پر لامتناہی ہو:

$$\lim_{x\to a}\left|f(x)\right| = \infty$$

تب مساوات 19.24 کا مطلب

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to\infty}\int_A^{a-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^B f(x)\,\mathrm{d}x \tag{19.25}$$

لیا جاتا ہے جہاں ϵ اور η ایک دوسرے کے غیر تابع صفر تک مثبت قیمتوں کے ذریعہ پہنچتے ہیں۔ عین ممکن ہے کہ ایک دوسرے کے غیر تابع $\epsilon,\eta\to 0$ کرتے ہوئے ان میں سے کوئی بھی حد موجود نہ ہو لیکن

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big[\int_A^{a-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+\epsilon}^B f(x)\,\mathrm{d}x\Big] \tag{19.26}$$

موجود ہو؛ تب مساوات 19.26 تکمل کی کوشی صدر قیمت[5] کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر اگرچہ درج ذیل تکمل کا کوئی مطلب نہیں ہے لیکن اس کی کوشی صدر قیمت

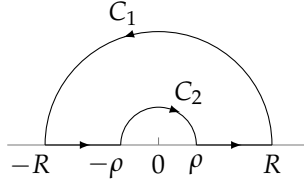
$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \lim_{\epsilon\to 0}\Big[\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x^3} + \int_{\epsilon}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}\Big] = 0$$

صفر کے برابر ہے۔ یہ تمام صورت گزشتہ حصے کے دوسرے نصف حصے کی طرح کا ہے۔

غیر مناسب تکمل جن کے متکمل کے قطبین حقیقی محور پر پائے جاتے ہوں کو حل کرنے کی خاطر ہم ایسی راہ منتخب کرتے ہیں جو ان ندرت کے قریب ایسی چھوٹی نصف دائروں پر سے گزرتی ہو جن کا مرکز نقطہ نادر ہو۔ یہ ترکیب ایک مثال کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

---

[5] Cauchy principal value

C_1, C_2, $-R$, $-\rho$, 0, ρ, R

شکل 19.4: شکل برائے مثال 19.11

مثال 19.11: منکمل کا حقیقی محور پر ندرت پایا جاتا ہے۔ سائن تکمل درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

(یہ $x \to \infty$ پر سائن تکمل $\operatorname{Si}(x)$ کی حد ہے۔ حصہ 12.9) ہم $\frac{\sin z}{z}$ پر غور نہیں کرتے ہیں چونکہ لامتناہی پر اس کا رویہ ٹھیک نہیں رہتا ہے۔ہم $\frac{e^{iz}}{z}$ پر غور کرتے ہیں جس کا $z = 0$ پر سادہ قطب پایا جاتا ہے اور شکل 19.11 میں دکھائے گئے خط ارتفاع پر تکمل حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $\frac{e^{iz}}{z}$ خط ارتفاع C پر اور اس کے اندر تحلیلی ہے لہٰذا کوشی مسئلہ تکمل سے

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = 0 \tag{19.27}$$

ہو گا۔

ہم دکھاتے ہیں کہ $R \to \infty$ کرنے سے بڑے نصف دائرہ C_1 پر تکمل کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے۔ ہم $z = Re^{i\theta}$ لیتے ہیں۔یوں $\mathrm{d}z = iRe^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{z} = i\,\mathrm{d}\theta$ ہو گا لہٰذا

$$\left|\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi e^{iz}\,i\,\mathrm{d}\theta\right| \le \int_0^\pi \left|e^{iz}\right|\mathrm{d}\theta \qquad (z = Re^{i\theta})$$

لکھا جا سکتا ہے۔دائیں ہاتھ منکمل

$$\left|e^{iz}\right| = \left|e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}\right| = \left|e^{iR\cos\theta}\right|\left|e^{-R\sin\theta}\right| = e^{-R\sin\theta}$$

کے برابر ہے جس کو پر کرتے ہوئے اور $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left|e^{iz}\right|\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\\=2\Big[\int_0^{\epsilon}e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta+\int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\Big]\end{aligned}$$

جہاں ϵ ایک مستقل ہے جس کی قیمت 0 اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان ہے۔چونکہ وقفہ تکمل پر متکمل θ کا یک سر گھٹتا تفاعل ہے لٰہذا دائیں ہاتھ پہلے اور دوسرے تکمل کی مطلق قیمت زیادہ سے زیادہ بالترتیب 1 اور $e^{-R\sin\theta}$ ہو سکتی ہے۔ یوں دایاں ہاتھ درج ذیل سے کم ہو گا۔

$$2\Big[\int_0^{\epsilon}\mathrm{d}\theta+e^{-R\sin\epsilon}\int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\Big]=2\Big[\epsilon+e^{-R\sin\epsilon}\Big(\frac{\pi}{2}-\epsilon\Big)\Big]<2\epsilon+\pi e^{-R\sin\epsilon}$$

یوں

$$\left|\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right|<2\epsilon+\pi e^{-R\sin\epsilon}$$

ہو گا۔ہم پہلے ϵ کو اختیاری چھوٹا لیتے ہیں۔تب مقررہ ϵ کے لئے ہم آخری جزو کو جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں پس ہمیں R کافی بڑا لینا ہو گا۔یوں جیسے جیسے R کی قیمت لامتناہی تک پہنچے، C_1 پر تکمل کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے۔

شکل 19.4 میں چھوٹے نصف دائرہ C_2 پر

$$\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z=\int_{C_2}\frac{\mathrm{d}z}{z}+\int_{C_2}\frac{e^{iz}-1}{z}\,\mathrm{d}z$$

ہو گا۔دائیں ہاتھ پہلے تکمل کی قیمت $-i\pi$ ہے۔دائیں ہاتھ دوسرا متکمل $z=0$ پر تحلیلی ہے لٰہذا $\rho\to 0$ کرنے سے اس کی مطلق قیمت محدود رہتی ہے۔ اس سے اور مساوات 16.16 سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\rho\to 0$ کرنے سے یہ تکمل صفر تک پہنچتا ہے۔ یوں مساوات 19.27 سے تکمل کی درج ذیل کوشی صدر قیمت ملتی ہے

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x=-\lim_{\rho\to 0}\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z=+i\pi\qquad\text{(کوشی صدر قیمت)}$$

اور دونوں اطراف خیالی جزو لیتے ہوئے درج ذیل کوشی صدر قیمت ملتی ہے۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi \qquad \text{(کوشی صدر قیمت)} \tag{19.28}$$

اب مساوات 19.28 میں متکمل $x = 0$ پر نادر نہیں ہے۔مزید چونکہ مثبت x کے لئے تفاعل $\frac{1}{x}$ گھٹتا ہے، دو قریبی صفر کے درمیان متکمل کی منحنی کے نیچے رقبہ یک سر گھٹتا ہے، یعنی درج ذیل تکمل کی مطلق قیمت I_n

$$I_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad n = 0, 1, \cdots$$

یک سر گھٹتی ترتیب $|I_0|, |I_1|, \cdots$ دے گی اور $n \to \infty$ پر $I_n \to 0$ ہو گا۔چونکہ ہر دو قریبی تکمل (مثلاً I_n اور I_{n+1}) کی علامت ایک دوسرے کی الٹ ہے لہٰذا لامتناہی سلسلہ $I_0 + I_1 + I_2 = \cdots$ لیبنٹز پرکھ (حصہ 17.4) کے تحت مرتکز ہو گا۔صاف ظاہر ہے کہ اس سلسلے کا مجموعہ تکمل

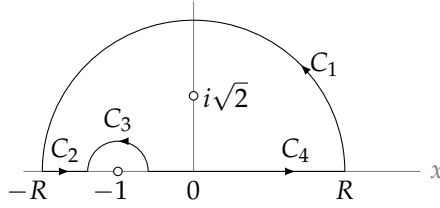
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

ہو گا جو یوں موجود ہے۔اسی طرح 0 تا $-\infty$ تکمل بھی موجود ہو گا۔اس طرح مساوات 19.28 میں کوشی صدر قیمت لینے کی ضرورت نہیں ہے اور

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi$$

چونکہ متکمل جفت تفاعل ہے لہٰذا درکار نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔ □

سوالات

سوال 19.86: مساوات 19.22 سے مساوات 19.23 حاصل کریں۔

شکل 19.5: شکل برائے سوال 19.95

سوال 19.87 تا سوال 19.93 میں دیا حقیقی تکمل تلاش کریں۔

سوال 19.87: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2} \, \mathrm{d}x$

سوال 19.88: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{\pi}{e}$

سوال 19.89: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{1+x^4} \, \mathrm{d}x$

سوال 19.90: $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos sx}{x^2+1} \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{\pi e^{-s}}{2}$

سوال 19.91: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+x+1} \, \mathrm{d}x$

سوال 19.92: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1} \, \mathrm{d}x$

جواب: $\frac{\pi e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} (\sin \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \frac{1}{\sqrt{2}})$

سوال 19.93: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)} \, \mathrm{d}x$

سوال 19.94: مستطیل جس کے کونے $-a$ ، a ، $a+ib$ اور $-a+ib$ ہیں کے گرد $a \to \infty$ کرتے ہوئے تفاعل e^{-z^2} کا گھڑی کی الٹ رخ تکمل حاصل کریں اور

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{استعمال کرتے ہوئے} \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

دکھائیں۔

سوال 19.95: شکل 19.5 میں دکھائی گئی خط ارتفاع پر $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+2)}$ کی کوشی صدر قیمت تلاش کریں۔

باب 20

مخلوط تحلیل تفاعل اور نظریہ مخفی قوہ

مساوات لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ انجینئری حساب میں اہم ترین جزوی تفرقی مساوات میں سے ایک ہے چونکہ یہ ثقلی میدان (حصہ 10.8)، ساکن برقی میدان (حصہ 13.11)، برقرار حال ایصال حرارت (حصہ 15.5)، داب نا پذیر بہاو سیال، وغیرہ کے مسئلوں میں پایا جاتا ہے۔ اس مساوات کے حل کو نظریہ مخفی قوہ[1] کہتے ہیں۔

دو بعدی صورت جہاں u کارتیسی محدد کے دو محور x اور y کے تابع ہو میں لاپلاس مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ہم جانتے ہیں کہ تب اس کے حل مخلوط تحلیلی تفاعل (حصہ 14.5) کے ساتھ گہرا تعلق رکھتے[2] ہیں۔ ہم اس تعلق پر اب تفصیلاً غور کرتے ہیں اور ماقوا حرکیات اور برقی سکون سے چند مثال بھی پیش کریں گے۔ ہم آگے دیکھیں گے کہ تحلیلی تفاعل کے نتائج کو استعمال کرتے ہوئے ہارمونی تفاعل کی مختلف عمومی خواص بیان کی جا سکتی ہیں (حصہ 20.3)۔ آخر میں ہم دائری قرص پر مساوات لاپلاس کے سرحدی مسائل کے حل کا ایک اہم عمومی کلیہ (پوسوں تکملی کلیہ) اخذ کریں گے۔

---

[1] potential theory

[2] تین بعدی صورت میں ایسا گہرا تعلق نہیں پایا جاتا ہے۔

20.1 ساکن برقی سکون

بار بردار ذرات کے مابین قوت کشش یا دفع کو کلیہ کولمب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہ قوت تفاعل u جس کو **برقی ساکن مخفی قوہ**[3] کہتے ہیں کی ڈھلوان ہے، اور بار سے پاک نقطوں پر u مساوات لاپلاس (حصہ 13.11)

$$\nabla^2 u = 0$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ سطحیں مستقل $= u$ کو ہم قوہ **سطحیں**[4] کہتے ہیں۔ہر نقطہ N پر u کی ڈھلوان نقطہ N پر سطح مستقل $= u$ کی قائمہ ہو گی، یعنی برقی قوت اور ہم قوہ سطح آپس میں قائمہ ہوں گے۔

مثال 20.1: **متوازی چادروں کے درمیان خطہ میں مخفی قوہ**

دو لامتناہی وسعت کی متوازی موصل چادر جنہیں بالترتیب U_1 اور U_2 برقی دباو پر رکھا گیا ہے کے درمیان مخفی قوہ تلاش کریں (شکل 20.1-الف)۔چادروں کی شکل سے ظاہر ہے کہ u صرف x کا تابع ہو گا لہٰذا مساوات لاپلاس $u'' = 0$ صورت اختیار کرتی ہے۔دو مرتبہ تکمل لے کر $u = ax + b$ حاصل ہوتا ہے جہاں مستقل a اور b کو چادروں پر برقی دباو u کی سرحدی شرائط سے حاصل کیا جاتا ہے۔مثال کے طور پر اگر چادر $x = -1$ اور $x = 1$ پر واقع ہوں تب حل

$$u(x) = \frac{1}{2}(U_2 - U_1)x + \frac{1}{2}(U_2 + U_1)$$

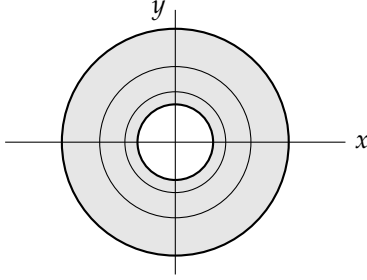
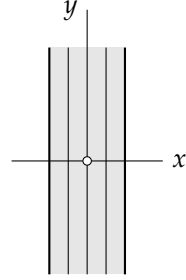
ہو گا۔ہم قوہ سطحیں چادروں کے متوازی سطحیں ہوں گی۔ □

مثال 20.2: **ہم محور نلکیوں کے درمیان خطہ میں مخفی قوہ**

دو لامتناہی لمبائی کی ہم محور موصل نلکیاں جنہیں بالترتیب U_1 اور U_2 مخفی قوہ پر رکھا گیا ہو کے درمیان مخفی قوہ تلاش کریں (شکل 20.1-ب)۔ یہاں تشاکل کی بنا u صرف $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ کا تابع ہو گا اور مساوات لاپلاس

$$ru'' + u' = 0 \qquad \text{(مساوات 13.97 دیکھیں)}$$

---

[3] electrostatic potential
[4] equipotential surfaces

(الف) متوازی چادروں کے درمیان مخفی قوہ

(ب) ہم محور موصل نلکیوں کے درمیان مخفی قوہ

شکل 20.1: اشکال برائے مثال 20.1 اور مثال 20.2

صورت اختیار کرتی ہے۔ علیحدگی متغیرات کے بعد تکمل لینے سے

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{r}, \quad \ln u' = -\ln r + \tilde{a}, \quad u' = \frac{a}{r}, \quad u = a \ln r + b$$

حاصل ہو گا جہاں مستقل a اور b کو ہم محوری نلکیوں پر u کی دی گئی قیمتوں سے حاصل کیا جائے گا۔ اگرچہ لامتناہی لمبائی کی موصل نلکی کہیں نہیں پائی جاتے ہے، ہماری حاصل کردہ مخفی قوہ کسی بھی لمبی موصل نلکی کے اندر، نلکی کی سروں سے دور، اصل مخفی قوہ کے بہت قریب مخفی قوہ دے گی۔ □

اگر مخفی قوہ صرف دو کارتیسی محدد x اور y پر منحصر ہو تب مساوات لاپلاس درج ذیل ہو گی۔

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{20.1}$$

مستوی xy میں ہم قوہ سطحیں مستقل $= u$ بطور ہم قوہ خطوط نظر آئیں گی۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ $u(x, y)$ ہارمونی ہے یعنی اس کے دو رتبی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ اب اگر $u(x, y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $v(x, y)$ ہو (حصہ 14.5) تب تفاعل

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

متغیرہ $z = x + iy$ کا تحلیلی تفاعل ہو گا۔ اس تفاعل کو حقیقی مخفی قوہ u کا مطابقتی مخلوط مخفی قوہ[5] کہتے ہیں۔ یاد رہے کہ u کا جوڑی دار، ماسوائے جمعی حقیقی جزو کے، یکتا ہو گا۔

---

[5] complex potential

چونکہ خطوط مستقل $= v$ ہم قوہ خطوط مستقل $= u$ کو قائمہ الزاویہ قطع کرتی ہیں [ما سوائے ان نقطوں پر جہاں $F'(z) = 0$ ہو] لہٰذا ان کی سمت اور برقی قوت کی سمت ایک ہو گی۔اسی لئے مستقل $= v$ کو خطوط قوت[6] کہتے ہیں۔

مثال 20.3: مخلوط مخفی قوہ
مثال 20.1 میں u کا جوڑی دار $v = ay$ ہے۔یوں مخلوط مخفی قوہ

$$F(z) = az + b = ax + b + iay$$

ہو گا اور خطوط قوت x محور کے متوازی سیدھی لکیریں ہوں گی۔ □

مثال 20.4: مخلوط مخفی قوہ
مثال 20.2 میں

$$u = a \ln r + b = a \ln|z| + b$$

ہے جس کا جوڑی دار $v = \underline{/z}$ ہے۔یوں مخلوط مخفی قوہ $F(z) = a \ln z + b$ ہو گا اور قوت کے خطوط مبدا سے گزرتی سیدھی لکیریں ہوں گی۔ $F(z)$ کو ایسی منبع لکیر کا مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے جس کا xy مستوی میں عکس مبدا ہو۔ □

عموماً خطی میل کی مدد سے زیادہ پیچیدہ مخفی قوہ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔درج ذیل مثال میں ایسا کیا گیا ہے۔

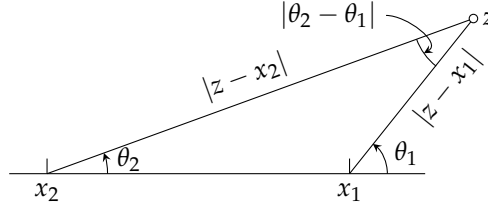
مثال 20.5: جوڑی منبع لکیروں کی مخلوط مخفی قوہ
$z = x_1$ اور $z = x_2$ پر یکساں لیکن مخالف علامت کی بار بردار منبع لکیریں پائی جاتی ہیں۔ان کا مخلوط مخفی قوہ تلاش کریں۔ مثال 20.2 اور مثال 20.2 سے ان منبع لکیروں کی مخفی قوہ

$$u_1 = -c \ln|z - x_1|\,, \quad u_2 = c \ln|z - x_2|$$

ہوں گی جو درج ذیل مخلوط مخفی قوہ کے حقیقی اجزاء ہیں۔

$$F_1(z) = -c \ln(z - x_1), \quad F_2(z) = c \ln(z - x_2)$$

---

[6] force lines

شکل 20.2: شکل برائے مثال 20.5

یوں دونوں منبع لکیروں کا مجموعی مخلوط مخفی قوہ

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) = c \ln \frac{z - x_2}{z - x_1} \tag{20.2}$$

ہو گا۔ ہم قوہ خطوط درج ذیل منحنیات

$$u = F(z)\ \text{حقیقی} = c \ln \frac{|z - x_2|}{|z - x_1|} = \text{مستقل}$$

ہوں گی جو دائرے ہیں۔ قوت کی لکیریں درج ذیل منحنیات

$$v = F(z)\ \text{خیالی} = c \angle \tfrac{z-x_2}{z-x_1} = c[\angle z - x_2 - \angle z - x_1] = \text{مستقل}$$

یعنی

$$v = c(\theta_2 - \theta_1) = \text{مستقل}$$

ہوں گی (شکل 20.2)۔ اب در حقیقت $|\theta_2 - \theta_1|$ نقطہ z سے x_1 اور x_2 تک لکیروں کے مابین زاویہ ہے۔ یوں قوت کی لکیریں ایسی منحنیات ہوں گی جن پر قطع $x_1 x_2$ کا زاویہ تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ مساوات 20.2 میں دیے گئے تفاعل کو ایسی غیر ہم محور نلکی برق گیر کے اندر کا مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے جس کے دونوں نلکیوں کے محور متوازی ہوں۔ □

سوالات

سوال 20.1 تا سوال 20.4 میں لامتناہی لمبائی کے دو ہم محور نلکیوں کے رداس r_1 اور $r_2\,(>r_1)$ ہیں جنہیں بالترتیب برقی دباو U_1 اور U_2 پر رکھا جاتا ہے۔ان نلکیوں کے درمیان خطہ میں مخفی قوہ u تلاش کریں۔

سوال 20.1: $r_1 = 1,\ r_2 = 5,\ U_1 = 0,\ U_2 = 100\,\text{V}$
جواب: $u = \frac{100}{\ln 5}\ln r = 62.13\ln r$

سوال 20.2: $r_1 = 0.5,\ r_2 = 2,\ U_1 = -110,\ U_2 = 110\,\text{V}$
جواب: $u = \frac{220}{\ln 4}\ln r$

سوال 20.3: $r_1 = 2,\ r_2 = 20,\ U_1 = 100,\ U_2 = 200\,\text{V}$
جواب: $u = \frac{100}{\ln 10}(\ln r + \ln 5)$

سوال 20.4: $r_1 = 3,\ r_2 = 6,\ U_1 = 100,\ U_2 = 50\,\text{V}$
جواب: $u = -\frac{50}{\ln 2}(\ln r - 50\ln 12)$

سوال 20.5: مخلوط مخفی قوہ $F(z) = \frac{1}{z}$ کی ہم قوہ خطوط تلاش کریں اور ان کی ترسیم کھینچیں۔
جواب: $(x - \frac{1}{2c})^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2}$

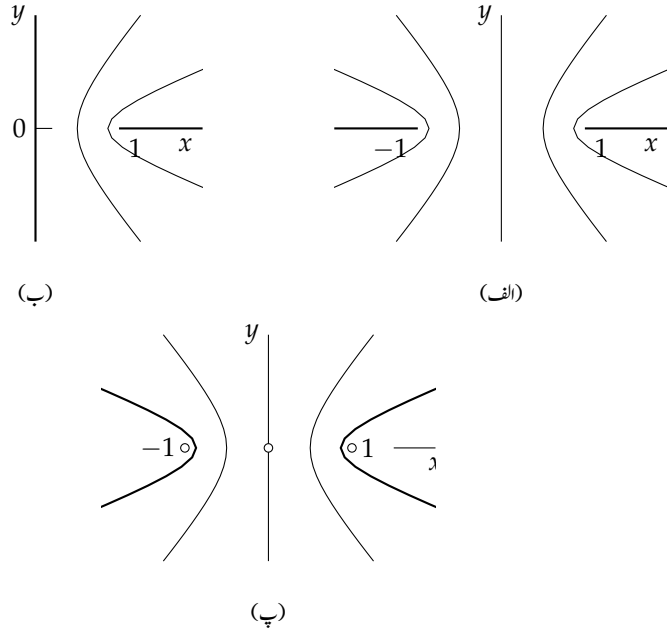
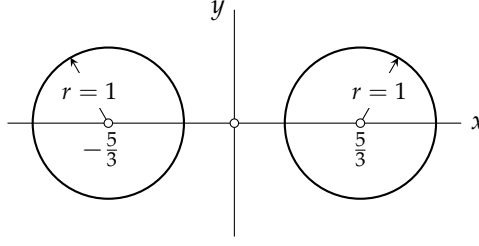
سوال 20.6: نقطہ $z = a$ اور $z = -a$ پر آپس میں الٹ علامتی بار سے بار بردار منبع کی لکیریں پائی جاتی ہیں۔ہم قوہ خطوط کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 20.7: نقطہ $z = a$ اور $z = -a$ پر یکساں علامتی بار سے بار بردار منبع کی لکیریں پائی جاتی ہیں۔ہم قوہ خطوط تلاش کریں۔
جواب: $u = c\ln(z^2 - a^2)$ حقیقی $= c\ln\left|z^2 - a^2\right|$

سوال 20.8: دکھائیں کہ $F(z) = \cos^{-1} z$ کو شکل 20.3 میں دکھائی گئی تینوں شکل کی موصل چادروں کی مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

(الف)

(ب)

(پ)

شکل 20.3: شکل برائے سوال 20.8

شکل 20.4: شکل برائے سوال 20.10

سوال 20.9: دکھائیں کہ $F(z)=\cosh^{-1} z$ کو دو ہم ماسکہ ترخیمی نلکیوں کا مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے۔
جواب:

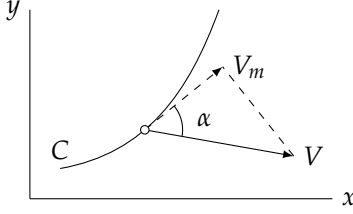
$$z=x+iy=\cosh(u+iv)=\cosh u\cos v+i\sinh u\sin v,\quad \frac{x^2}{\cosh^2 u}+\frac{y^2}{\sinh^2 u}=1$$

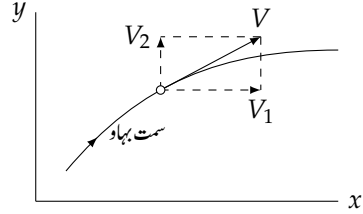
یوں ہم قوہ خطوط $u=$ مستقل ہم ماسکہ ترخیم ہیں۔

سوال 20.10: شکل 20.4 میں لامتناہی لمبائی کے دو نلکیاں دکھائی گئی ہیں۔ بایاں نلکی پر $u=-1$ اور دایاں نلکی پر $u=1$ ہے۔ نلکیوں کے درمیان خطہ میں مخفی قوہ u تلاش کریں۔ اشارہ۔ سوال 20.6 کا نتیجہ استعمال کریں۔

20.2 دو بعدی بہاو سیال

ہارمونی تفاعل بہاو سیال میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔آئیں غیر پچپچا سیال کا دو بعدی برقرار بہاو پر غور کرتے ہیں۔یہاں "دو بعدی" کا مطلب ہے کہ xy مستوی کے متوازی تمام سطحوں میں سیال کی حرکت یکساں ہے اور حرکت ان سطحوں کے متوازی ہے۔ایسی صورت میں صفر xy سطح میں حرکت پر غور کرنا کافی ہو گا۔"بر قرار" کا مطلب ہے کہ سمتی رفتار وقت کا تابع نہیں ہے۔

کسی بھی نقطہ (x,y) پر بہاو کی سمتی رفتار پائی جائے گی جس کو اس کی مقدار اور سمت سے ظاہر کیا جا سکتا ہے لہٰذا سمتی رفتار ایک سمتیہ ہو گا۔چونکہ مخلوط سطح میں کوئی بھی عدد a ایک سمتیہ کو ظاہر کرتا ہے (جو مبدا سے عدد a

(الف) سمتی رفتار

(ب) منحنی C کو سمتی رفتار کا مماسی جزو

شکل 20.5: سمت بہاو اور سمتی رفتار

کی مطابقتی مقام تک کا سمتیہ ہو گا) لہٰذا ہم بہاو کی سمتی رفتار کو مخلوط متغیرہ سے ظاہر کر سکتے ہیں مثلاً

$$V = V_1 + iV_2 \tag{20.3}$$

جہاں مخلوط سطح پر سمتی رفتار کے x اور y سمت میں اجزاء بالترتیب V_1 اور V_2 ہوں گے اور V حرکت کرتے ذرات کی راہ کو مماسی ہو گا۔ایسی راہ کو سمت بہاو[7] کہتے ہیں (شکل 20.5-الف)۔

اب کسی ایک ہموار منحنی C پر غور کریں جس کی لمبائی قوس کو ہم s سے ظاہر کرتے ہیں۔فرض کریں کہ C کو مماسی سمتی رفتار V کا جزو حقیقی متغیرہ V_m ہے (شکل 20.5-ب) تب C پر s کی بڑھتی رخ خطی تکمل

$$\int_C V_m \, \mathrm{d}s \tag{20.4}$$

کو C پر سیال کی دائری بہاو[8] کہتے ہیں۔دائری بہاو کو C کی لمبائی سے تقسیم کرنے سے منحنی C پر اوسط سمتی رفتار[9] حاصل ہوتی ہے۔اب شکل 20.5 سے

$$V_m = |V| \cos\alpha$$

---

[7] streamline

[8] circulation

[9] اوسط قیمتوں کی تعریفیں درج ذیل ہیں۔

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$ وقفہ $a \le x \le b$ پر f کی اوسط قیمت ہے۔

$\frac{1}{l}\int_C f(s)\,\mathrm{d}s = C$ پر f کی اوسط قیمت ہے جہاں C کی لمبائی l ہے۔

$\frac{1}{A}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = D$ میں f کی اوسط قیمت ہے جہاں D کا رقبہ A ہے۔

لکھا جا سکتا ہے۔ نتیجتاً C کے اکائی مماسی سمتیہ (حصہ 15.2)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + i\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

اور V کا اندرونی ضرب (حصہ 7.5) V_m ہو گا جہاں C کو $z(s) = x(s) + iy(s)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ اس طرح $V_m \, \mathrm{d}s$ کو

$$V_m \, \mathrm{d}s = V \cdot \mathrm{d}z = V_1 \, \mathrm{d}x + V_2 \, \mathrm{d}y \qquad (\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i \, \mathrm{d}y)$$

لکھا جا سکتا ہے۔ (یہاں اچھی طرح سمجھ لیں کہ یہ دو سمتیات کے مابین غیر سمتی ضرب ہے نا کہ مخلوط ضرب۔)

اب فرض کریں کہ C ایک بند منحنی ہے یعنی سادہ تعلق دائرہ کار D کا سرحد۔ تب اگر ایسا دائرہ کار جس میں D اور C شامل ہوں میں V کے استمراری جزوی تفرق پائے جاتے ہوں تب مسئلہ گرین (حصہ 11.4) کے تحت C پر دائری بہاو کو دوہرا تکمل

$$\int_C (V_1 \, \mathrm{d}x + V_2 \, \mathrm{d}y) = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{20.5}$$

کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ دائیں ہاتھ تکمل کے اندر تفاعل کا ایک سادہ طبعی مطلب ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ C ایک دائرہ ہے جس کا رداس r ہے۔ تب دائری بہاو کو $2\pi r$ سے تقسیم کرنے سے سیال کی C پر اوسط سمتی رفتار حاصل ہو گی جس کو r سے تقسیم کرتے ہوئے دائرے کی محور پر سیال کی زاویائی سمتی رفتار ω_0 حاصل ہوتی ہے۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\pi r^2} \iint_D \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{20.6}$$

دایاں ہاتھ قرص D جس کی سرحد C ہے پر درج ذیل تفاعل کی اوسط قیمت[10] ہے۔

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y} \right) \tag{20.7}$$

تفاعل ω گھومنا[11] کہلاتا ہے جبکہ 2ω کو حرکت کی گردابیت[12] کہتے ہیں۔ اگر $r \to 0$ ہو تب مساوات 20.6 کے دایاں ہاتھ کی حد، C کی مرکز پر ω کی قیمت دے گی۔ یوں اگر دائرہ C سکڑ کر نقطہ (x, y)

[10] اوسط کی تعریف کے لئے گزشتہ حاشیہ دیکھیں
[11] rotation
[12] vorticity

مانند رہ جائے تب سیال کے دائری ٹکڑے کی زاویائی سمتی رفتار کی تحدیدی قیمت $w(x, y)$ ہو گی۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر سیال کا کروی ٹکرا یک دم ٹھوس صورت اختیار کرے اور ساتھ ہی باقی تمام سیال ہٹا دیا جائے تب اس ٹکڑے کی زاویائی سمتی رفتار ω ہو گی (حصہ 10.11 دیکھیں)۔

ہم صرف ناگھومتے[13] سیال پر غور کرتے ہیں یعنی ایسا سیال جس کا ω پورے خطہ D پر صفر کے برابر ہو،

$$\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y} = 0$$

جہاں تفرق کی موجودگی اور استمرار فرض کی گئی ہے۔

ہم مزید فرض کرتے ہیں کہ سیال داب ناپذیر ہے۔تب ہر اس خطہ میں،جس میں ناکوئی منبع[14] (سوال 20.20) اور نا ہی کوئی گڑھا[15] پایا جاتا ہو یعنی جس میں سیال نا پیدا ہوتا ہو اور نا ہی غائب ہوتا ہو، مساوات 10.121 کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}y} = 0 \tag{20.8}$$

ہو گا۔

اگر D سادہ تعلق خطہ ہو اور بہاو ناگھومنے والی ہو تب مسئلہ 11.9 کے تحت خطی تکمل

$$\int_C (V_1\,\mathrm{d}x + V_2\,\mathrm{d}y) \tag{20.9}$$

D میں راہ کا تابع نہیں ہو گا۔یوں D میں مقررہ نقطہ (a, b) سے D میں متغیر نقطہ (x, y) تک تکمل حاصل کرنے سے نقطہ (x, y) کا تابع تفاعل مثلاً $\Phi(x, y)$ حاصل ہو گا:

$$\Phi(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} (V_1\,\mathrm{d}x + V_2\,\mathrm{d}y) \tag{20.10}$$

تفاعل $\Phi(x, y)$ کو حرکت کی سمتی رفتار مخفی قوہ[16] کہتے ہیں۔اب چونکہ درج بالا تکمل راہ کا تابع نہیں ہے لہٰذا $V_1\,\mathrm{d}x + V_2\,\mathrm{d}y$ قطعی تفرق (حصہ 11.12) ہو گا یعنی یہ تفاعل $\Phi(x, y)$ کا تفرق ہو گا:

$$V_1\,\mathrm{d}x + V_2\,\mathrm{d}y = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{20.11}$$

---

[13] irrotational
[14] source
[15] sink
[16] velocity potential

یوں

$$V_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{20.12}$$

ہو گا لہٰذا سمتی رفتار سمتیہ تفاعل $\Phi(x,y)$ کی ڈھلوان (حصہ 10.8) ہو گا۔

$$V = V_1 + iV_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{20.13}$$

منحنی $\Phi(x,y) =$ مستقل کو ہم قوہ خط[17] کہتے ہیں۔ چونکہ Φ کی ڈھلوان V ہے لہٰذا ($V \neq 0$ کی صورت میں) ہر نقطہ پر V اور اس نقطہ سے گزرتا ہم قوہ خط آپس میں قائمہ الزاویہ ہوں گے۔

مساوات 20.12 کو مساوات 20.8 میں پر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ Φ مساوات لاپلاس

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

کو مطمئن کرتا ہے۔ فرض کریں کہ $\Phi(x,y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $\Psi(x,y)$ ہو، تب [ماسوائے اس نقطہ پر جہاں (مساوات 20.14 میں دیا گیا) $F'(z) = 0$ ہو] ہر ایک نقطہ پر منحنیات

$$\Psi(x,y) = \text{مستقل}$$

اور ہم قوہ خطوط $\Phi(x,y) =$ مستقل آپس میں قائمہ الزاویہ ہوں گی۔ یوں منحنیات $\Psi(x,y) =$ مستقل کے مماس کی سمت اور سیال کی سمتی رفتار کی سمت ایک جیسی ہوں گی۔ نتیجتاً منحنیات $\Psi(x,y) =$ مستقل سیال کی سمت بہاو خط ہوں گے۔ تفاعل $\Psi(x,y) =$ مستقل کو بہاو کا تفاعل بہاو[18] کہتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ Φ اور Ψ دونوں کے استمراری دوہرا جزوی تفرق پائے جاتے ہیں۔ تب مخلوط تفاعل

$$F(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y) \tag{20.14}$$

بہاو کے خطہ میں تحلیلی ہو گا۔ اس تفاعل کو بہاو کی مخلوط مخفی قوہ[19] کہتے ہیں۔ Φ اور Ψ کے ساتھ علیحدہ علیحدہ کام کرنے سے مخلوط مخفی قوہ کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

---

[17] equipotential lines
[18] stream function
[19] complex potential

مساوات 20.14 کا تفرق لے کر اور مساوات کوشی ریمان استعمال کرتے ہوئے بہاو کی سمتی رفتار حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں

$$F'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_1 - iV_2$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$V = V_1 + iV_2 = \overline{F'(z)} \tag{20.15}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

اس طرح دو بعدی، نا گھومنے والی، داب نا پذیر سیال کی برقرار بہاو کو تحلیلی تفاعل کی صورت میں بیان کیا جا سکتا ہے اور مخلوط تجزیہ کے تراکیب، مثلاً محافظ زاویہ نقش، استعمال کیے جا سکتے ہیں۔

چونکہ وہ سرحد جس کو بہاو پار نہ کر سکتا ہو بہاو سمت ہو گا لہٰذا سرحدی شرائط مسائل میں بہاو سمت تفاعل Ψ نہایت اہم ثابت ہوتا ہے۔ زیر محافظ زاویہ نقش، بہاو سمت کا تبادل سطح عکس میں بہاو سمت پر ہو گا۔ پیچیدہ بہاو کے حصول اور ان پر غور کے لئے سادہ بہاو کا میل زیر استعمال لایا جا سکتا ہے۔ دو بہاو F_1 ، F_2 کا مجموعہ $F = F_1 + F_2$ دونوں بہاو کی سمتی رفتار کی سمتیات کا سمتی مجموعہ سے حاصل بہاو کا مخلوط مخفی قوہ ہو گا۔ چونکہ مساوات لاپلاس خطی اور متجانس ہے لہٰذا دو ہارمونی تفاعل کا مجموعہ بھی ہارمونی ہو گا۔

دھیان رہے کہ اگرچہ برقی سکون میں دی گئی سرحدیں (موصل سطحیں) ہم قوہ خطوط ہوں گی، ماقوا حرکیات میں یہ سرحدیں بہاو سمت ہوں گی اور ہم قوہ خطوط کے قائمہ الزاویہ ہوں گی۔

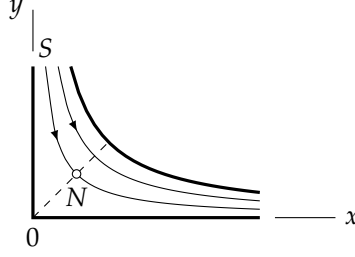
آئیں ایک عمومی مثال کو دیکھیں۔ مزید مسائل سوالات میں پیش کیے گئے ہیں۔

مثال 20.6: کونے کے ساتھ بہاو

مخلوط مخفی قوہ

$$F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy \tag{20.16}$$

ایسی بہاو کو ظاہر کرتا ہے جس کے ہم قوہ خطوط درج ذیل قطع زائد

$$\Phi = x^2 - y^2 = \text{مستقل}$$

شکل 20.6: کونے پر بہاو

اور بہاو سمت درج ذیل قطع زائد

$$\Psi = 2xy = \text{مستقل}$$

ہوں گی۔ مساوات 20.15 سے درج ذیل سمتی رفتار سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$V = 2\bar{z} = 2(x - iy), \quad \implies \quad V_1 = 2x, \quad V_2 = -2y$$

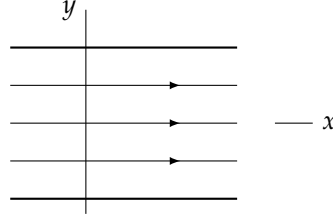
رفتار (سمتیہ کی مقدار) درج ذیل ہو گی۔

$$|V| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

اس بہاو کو ایسی ندی کی بہاو تصور کیا جا سکتا ہے جس کے اطراف کارتیسی محدد کے مثبت محور اور قطع زائد مثلاً $xy = 1$ ہو (شکل 20.6)۔ ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بہاو سمت S پر نقطہ N پر رفتار کم تر ہو گا۔ یہ وہ نقطہ ہے جہاں ندی کی عمودی تراش رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو گا۔ □

سوالات

سوال 20.11: **(متوازی بہاو)** دکھائیں کہ $F(z) = Kz$ (جہاں K مثبت حقیقی ہے) دائیں رخ یکساں بہاو کو ظاہر کرتی ہے جس کو دو متوازی لکیروں (تین بعدی فضا میں دو متوازی چادروں) کے درمیان یکساں بہاو تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 20.7)۔ سمتی رفتار سمتیہ، بہاو سمت اور ہم قوہ خطوط تلاش کریں۔

جواب: $V = V_1 = K, \ Ky = \text{مستقل}, \ Kx = \text{مستقل}$

شکل 20.7: یکساں متوازی بہاو

سوال 20.12: دکھائیں کہ کونے پر بہاو کو $F(z)=iz^2$ ظاہر کرتی ہے۔ بہاو سمت اور ہم قوہ خطوط تلاش کریں اور انہیں ترسیم کریں۔ سمتی رفتار سمتیہ V تلاش کریں۔

سوال 20.13: مثال 20.6 کی بہاو محافظ نقش کی استعمال سے سوال 20.11 سے حاصل کریں۔ آپ کو ربع اول کا نقش بالائی نصف مستوی پر کرنا ہو گا۔

سوال 20.14: مخلوط مخفی قوہ $F(z)=z^3$ کے بہاو سمت اور ہم قوہ خطوط تلاش کریں۔ انہیں ترسیم کریں۔ سمتی رفتار سمتیہ V تلاش کریں اور وہ تمام نقطے دریافت کریں جہاں یہ سمتیہ x محور کے متوازی ہے۔

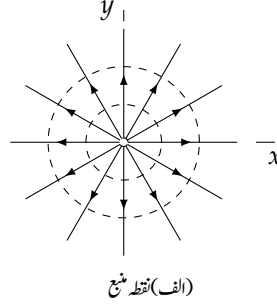
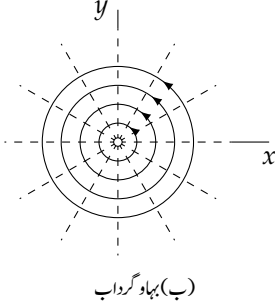
سوال 20.15 تا سوال 20.19 میں دی گئی مخلوط مخفی قوہ $F(z)$ پر غور کریں۔ ہم قوہ خطوط اور بہاو سمت کی ترسیم کھینچیں۔ سمتی رفتار سمتیہ V تلاش کریں اور وہ تمام نقطے دریافت کریں جہاں یہ سمتیہ x محور کے متوازی ہے۔

سوال 20.15: $F=iz$
جواب: منفی y محور کے رخ متوازی بہاو۔ $V=-i$

سوال 20.16: $F=-ikz$ k حقیقی عدد صحیح ہے۔

سوال 20.17: $F=(1+i)z$
جواب: $y=-x$ کی رخ متوازی بہاو۔ $V=1-i$

سوال 20.18: $F=z^2+z$

سوال 20.19: $F=iz^3$
جواب: $V=-6xy+3i(y^2-x^2)$ ؛ $y=x$ اور $y=-x$ پر $V_2=0$ ہے۔

شکل 20.8: اشکال برائے سوال 20.20 اور سوال 20.21

سوال 20.20: **(منبع اور گڑھا)** مخلوط مخفی قوہ $F(z) = \frac{c}{2\pi}\ln z$ پر غور کریں جہاں c حقیقی مثبت ہے۔ دکھائیں کہ $V = \frac{c}{2\pi r^2}(x + iy)$ ہو گا جہاں $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ یہ رداسی باہر رخ بہاو کو ظاہر کرتی ہے (شکل 20.8-الف)۔ یہ نقطہ $z = 0$ پر منبع[20] کا مخفی قوہ ہو گا (یعنی فضا میں $x = 0$ ، $y = 0$ پر منبع لکیر)۔ مستقل c کو منبع کا زور یا اخراج کہا جاتا ہے۔ اگر c منفی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $z = 0$ پر بہاو کا گڑھا[21] پایا جاتا ہے۔ اب بہاو رداسی اندر رخ کو ہے اور مخلوط مخفی قوہ کے نقطہ نادر $z = 0$ پر بہاو غائب ہو جاتی ہے۔

جواب: $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{c}{2\pi z} = \frac{c}{2\pi(x+iy)} = \frac{c(x-iy)}{2\pi(x^2+y^2)}, \quad V = \overline{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}} = \frac{c(x+iy)}{2\pi(x^2+y^2)}$

سوال 20.21: **(لکیر گرداب)** دکھائیں کہ $F(z) = -\frac{iK}{2\pi}\ln z$ جہاں K حقیقی ہے، مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ بہاو کو ظاہر کرتی ہے (شکل 20.8-ب)۔ نقطہ $z = 0$ گرداب[22] ہے۔ گرداب کے گرد ہر ایک چکر لگانے سے مخفی قوہ بڑھ جاتی ہے جہاں ہر مرتبہ بڑھنے کی مقدار K ہو گی۔

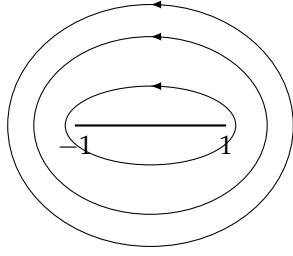
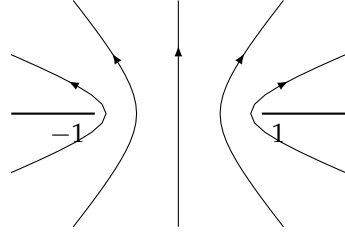
جواب: $F = -\frac{iK}{2\pi}\ln(re^{i\theta}) = -\frac{iK}{2\pi}(i\theta + \ln r) = \frac{K}{2\pi}(\theta - i\ln r) = \Phi + i\Psi$

سوال 20.22: نقطہ $z = -a$ پر اکائی زور کی منبع کے بہاو کا مخلوط مخفی قوہ تلاش کریں۔

سوال 20.23: دکھائیں کہ دو بہاو کے سمتی رفتار سمتیات کا سمتی مجموعہ حاصل کرنے سے ایسا بہاو حاصل ہو گا جس کا مخلوط مخفی قوہ ان بہاو کے مخلوط مخفی قوہ کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

سوال 20.24: سوال 20.22 اور سوال 20.23 کے مخفی قوہ جمع کرتے ہوئے بہاو سمت کی ترسیم کھینچیں۔

---

source[20]
sink[21]
vortex[22]

شکل 20.9: اشکال برائے سوال 20.26 اور سوال 20.27

سوال 20.25: $F(z) = \frac{1}{z}$ کے بہاو کی بہاو سمت تلاش کریں۔ دکھائیں کہ چھوٹے $|a|$ کے لئے سوال 20.24 کے بہاو سمت موجودہ بہاو سمت کی طرح ہیں۔

سوال 20.26: دکھائیں کہ $F(z) = \cosh^{-1} z$ کے بہاو سمت، ہم ماسکہ قطع زائد ہوں گی جن کے ماسکہ $z = \mp 1$ ہیں اور بہاو کو شگاف سے گزرتی بہاو تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 20.9-الف)۔

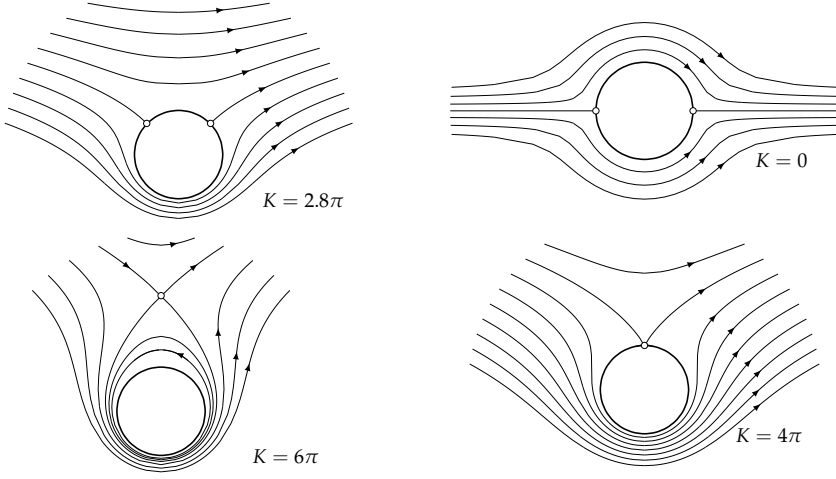
سوال 20.27: دکھائیں کہ $F(z) = \cos^{-1} z$ کو ترخیم یا چادر ($z = -1$ تا $z = 1$ سیدھی قطع) کے گرد بہاو کا مخلوط مخفی قوہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ دکھائیں کہ بہاو سمت ہم ماسکہ ترخیم ہیں جن کے ماسکہ $z = \mp 1$ پر ہیں (شکل 20.9-ب)۔

سوال 20.28: **(بیلن کے گرد بہاو)** $F(z) = z + z^{-1}$ پر غور کریں۔ $z = re^{i\theta}$ لیتے ہوئے دکھائیں کہ سمتی قوہ مستقل $= (r - r^{-1}) \sin\theta$ ہیں اور سمتی قوہ $(r - r^{-1}) \sin\theta = 0$ اکائی دائرہ اور x محور پر مشتمل ہے، اور بڑے $|z|$ کے لئے بہاو تقریباً یکساں اور متوازی ہے جس کو اکائی رداس کے بیلن کے گرد بہاو تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 20.10 میں $K = 0$ صورت)۔ بہاو کا نقطہ ٹھراو تلاش کریں (جہاں سمتی رفتار صفر ہو گی)۔

جواب: نقطہ $z = -1$ اور $z = 1$ پر $V = 1 - \bar{z}^{-1} = 0$ ہو گا۔

سوال 20.29: **(دائری بہاو کے ساتھ بیلن کے گرد بہاو)** سوال 20.21 اور سوال 20.28 کے مخفی قوہ جمع کرتے ہوئے دکھائیں کہ بیلن کی سطح $|z| = 1$ سمت بہاو ہے۔ سمتی رفتار تلاش کریں اور دکھائیں کہ نقطہ ٹھراو

$$z = \frac{iK}{4\pi} \mp \sqrt{-\frac{K^2}{16\pi^2} + 1}$$

$K = 2.8\pi$ $K = 0$ $K = 6\pi$ $K = 4\pi$

شکل 20.10: دائری بہاو کے ساتھ ($K \neq 0$) اور دائری بہاو کے بغیر ($K = 0$) بیلن کے گرد بہاو (سوال 20.28 اور سوال 20.29)

ہیں جو $K = 0$ کی صورت میں $z = \mp 1$ دیتی ہے۔ K بڑھانے سے دونوں نقطہ ٹھراو اکائی دائرہ پر اوپر رخ منتقل ہوں گے حتیٰ کہ $K = 4\pi$ پر دونوں $z = i$ پر آن ملیں گے۔ اگر $K > 4\pi$ کیا جائے تب ایک نقطہ ٹھراو خیالی محور پر بیلن کے باہر اور دوسرا خیالی محور پر بیلن کے اندر منتقل ہوتا ہے۔ بیلن کے اندر نقطہ ٹھراو کی کوئی طبعی معنی نہیں ہے۔ (شکل 20.10 میں $K = 0$ کے لئے نقطہ ٹھراو کو چھوٹے دائروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔)
جواب: سمت بہاو $\Psi_1 + \Psi_2 = \sin\theta(r - r^{-1}) + \frac{K}{2\pi}\ln r = c$ ہے جس کو شکل 20.10 میں مختلف K اور c کے لئے دکھایا گیا ہے۔

20.3 ہارمونی تفاعل کے عمومی خواص

اس حصہ میں ہارمونی تفاعل کی عمومی خواص کو مخلوط تحلیلی تفاعل کے نتائج سے حاصل کرنا دکھایا جائے گا۔

فرض کریں کہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں تفاعل $u(x, y)$ ہارمونی ہے۔ تب ہم کوشی ریمان کلیات کی مدد سے $u(x, y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $v(x, y)$ تلاش کیا جا سکتا ہے۔ یوں $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ دائرہ کار D میں تحلیلی ہو گا (حصہ 14.5 دیکھیں اور صفحہ 1107 پر حاشیہ دیکھیں)۔ یہ وہ تعلق ہے جس کو

استعمال کرتے ہوئے ہم تحلیلی تفاعل کے خواص سے ہارمونی تفاعل کے خواص اخذ کر سکتے ہیں۔چونکہ تحلیلی تفاعل کے ہر رتبہ کے تفرق پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم درج ذیل اخذ کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 20.1: (جزوی تفرق)
ایسا تفاعل $u(x, y)$ جو سادہ تعلق دائرہ کار D میں ہارمونی ہو کا D میں ہر رتبہ کا جزوی تفرق پایا جائے گا۔

مزید اگر سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ تحلیلی ہو تب کوشی کلیہ تکمل (مساوات 16.31) کے تحت

$$f(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \tag{20.17}$$

ہو گا جہاں D میں C ایک سادہ بند راہ ہے اور نقطہ z_0 اس راہ کے اندر پایا جاتا ہے۔ C کو دائرہ

$$z = z_0 + re^{i\phi}$$

منتخب کرتے ہوئے جس کا مرکز z_0 اور رداس r ہے، D میں

$$z - z_0 = re^{i\phi}, \quad \mathrm{d}z = ire^{i\phi} \, \mathrm{d}\phi$$

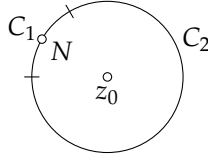
لکھا جا سکتا ہے اور یوں مساوات 20.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\phi}) \, \mathrm{d}\phi \tag{20.18}$$

دایاں ہاتھ دائرہ C پر f کی اوسط قیمت ہے (یعنی تکمل کی قیمت تقسیم راہ کی لمبائی)۔اس سے درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

مسئلہ 20.2: تحلیلی تفاعل کی اوسط قیمت
فرض کریں کہ سادہ تعلق دائرہ کار D میں f تحلیلی ہے۔تب D میں نقطہ z_0 پر $f(z)$ کی قیمت D میں ایسے کسی بھی دائرے پر $f(z)$ کی اوسط قیمت ہو گی جس کا مرکز z_0 ہو۔

تحلیلی تفاعل کی ایک اہم خاصیت درج ذیل ہے۔

C_1 N C_2 z_0

شکل 20.11: ثبوت مسئلہ 20.3

مسئلہ 20.3: تحلیلی تفاعل کی زیادہ سے زیادہ معیار کا مسئلہ
فرض کریں کہ D محدود خطہ ہے اور D میں اور D کی سرحد پر $f(z)$ تحلیلی اور غیر مستقل تفاعل ہے۔تب $\lvert f(z)\rvert$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت D کے اندر کسی بھی نقطہ پر نہیں ہو گی۔نتیجتاً $\lvert f(z)\rvert$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت D کی سرحد پر ہو گی۔اگر D میں $f(z) \neq 0$ تب یہی کچھ $\lvert f(z)\rvert$ کی کم سے کم قیمت کے لئے بھی درست ہو گا۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ D کے اندر نقطہ z_0 پر $\lvert f(z)\rvert$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ہم دیکھیں گے کہ اس مفروضہ سے تضاد پیدا ہوتا ہے۔فرض کریں کہ وہ زیادہ سے زیادہ قیمت $\lvert f(z_0)\rvert = M$ ہے۔چونکہ $f(z)$ غیر مستقل ہے لہٰذا $\lvert f(z)\rvert$ مستقل نہیں ہو گا۔نتیجتاً ہم ایسا دائرہ C جس کا اندرون D کے اندر ہو تلاش کر سکتے ہیں جس کا مرکز z_0 اور رداس r ہو،اور C پر کسی نقطہ N پر $\lvert f(z)\rvert$ کی قیمت M سے کم ہو۔چونکہ $\lvert f(z)\rvert$ استمراری ہے لہٰذا C پر ایسا قوس C_1 ، جس پر N پایا جاتا ہو، پایا جائے گا جس پر $f(z)$ کی قیمت M سے کم ہو گی مثلاً C_1 پر تمام z کے لئے $\lvert f(z)\rvert \le M-\epsilon\,(\epsilon>0)$ ہو گا (شکل 20.11)۔اگر C_1 کی لمبائی l_1 ہو تب متمم قوس C_2 کی لمبائی $2\pi r - l_1$ ہو گی۔ مساوات 16.16 کا اطلاق مساوات 20.17 پر کرتے ہوئے جہاں $\lvert z-z_0\rvert = r$ ہے درج ذیل

$$\begin{aligned}
M = \lvert f(z_0)\rvert &\le \frac{1}{2\pi}\left\lvert \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right\rvert + \frac{1}{2\pi}\left\lvert \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right\rvert \\
&\le \frac{1}{2\pi}(M-\epsilon)\frac{1}{r}l_1 + \frac{1}{2\pi}M\frac{1}{r}(2\pi r - l_1) = M - \frac{\epsilon l_1}{2\pi r} < M
\end{aligned}$$

حاصل ہو گا جس کے تحت $M < M$ ہے جو تضاد ہے۔یوں ہمارا مفروضہ درست نہیں تھا لہٰذا مسئلہ کا پہلا فقرہ ثابت ہوتا ہے۔

اب مسئلے کا آخری فقرہ ثابت کرتے ہیں۔اگر D میں $f(z) \neq 0$ ہو تب D میں $\frac{1}{f(z)}$ تحلیلی ہو گا۔جو فقرہ ہم ثابت کر چکے ہیں اس کے تحت D کی سرحد پر $\frac{1}{\lvert f(z)\rvert}$ پایا جائے گا۔اب $\frac{1}{\lvert f(z)\rvert}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت سے مراد $\lvert f(z)\rvert$ کی کم سے کم قیمت ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ان مسئلوں سے اب ہم ہارمونی تفاعل کے مطابقتی نتائج حاصل کرتے ہیں۔

مسئلہ 20.4: **(ہارمونی تفاعل)**
فرض کریں D ایک سادہ تعلق محدود دائرہ کار ہے جس کی سرحدی منحنی C ہے۔ اگر تفاعل $u(x,y)$ ایسے دائرہ کار میں ہارمونی ہو جس میں D اور C پائے جاتے ہوں تب $u(x,y)$ کے درج ذیل خواص ہوں گے۔
(الف) D میں نقطہ (x_0,y_0) پر $u(x,y)$ کی قیمت، D میں ایسے کسی بھی دائرہ پر $u(x,y)$ کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی جس کا مرکز (x_0,y_0) ہو۔
(ب) D میں نقطہ (x_0,y_0) پر $u(x,y)$ کی قیمت، D میں ایسے کسی بھی دائری قرص پر $u(x,y)$ کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی جس کا مرکز (x_0,y_0) ہو۔
(پ) **اصول زیادہ سے زیادہ قیمت** اگر $u(x,y)$ غیر مستقل ہو تب D میں $u(x,y)$ کی نا کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی کوئی کم سے کم قیمت پائی جائے گی۔ نتیجتاً $u(x,y)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت D کی سرحد پر پائی جائیں گی۔
(ت) اگر C پر $u(x,y)$ مستقل ہو تب $u(x,y)$ مستقل ہو گا۔
(ٹ) اگر D میں اور C پر $h(x,y)$ ہارمونی ہو اور اگر C پر $h(x,y)=u(x,y)$ ہو تب پورے D میں $h(x,y)=u(x,y)$ ہو گا۔

ثبوت: مساوات 20.18 کے دونوں اطراف حقیقی حصہ لے کر

$$u(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)_{\text{حقیقی}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\phi,y_0+r\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

پہلا فقرہ ثابت ہوتا ہے۔ ہم درج بالا کے دونوں اطراف کو r سے ضرب دے کر، r کے ساتھ 0 تا r_0 تکمل حاصل کرتے ہیں جہاں D میں دائری قرص جس کا مرکز (x_0,y_0) ہے کا رداس r_0 ہے۔ یوں بایاں ہاتھ $\frac{1}{2}r_0^2u(x_0,y_0)$ کے برابر حاصل ہو گا۔ اس طرح

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\phi,y_0+r\sin\phi)r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$$

حاصل ہوتا ہے جو دوسرے فقرے کا ثبوت ہے۔

اب تیسرا فقرہ ثابت کرتے ہیں۔فرض کریں کہ D میں $u(x,y)$ کا جوڑی دار ہارمونی تفاعل $v(x,y)$ ہے۔تب D میں $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی ہو گا اور D میں

$$F(z)=e^{f(z)}$$

بھی ہارمونی ہو گا۔اس کی مطلق قیمت

$$\left|F(z)\right|=e^{f(z)_{\text{حقیقی}}}=e^{u(x,y)}$$

ہو گی۔مسئلہ 20.3 کے تحت، $\left|F(z)\right|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت D کے اندر نہیں پائی جائے گی۔چونکہ e^u حقیقی متغیرہ u کا یک سر بڑھتا تفاعل ہے لہٰذا فقرہ-پ میں u کی زیادہ سے زیادہ قیمت کی بات اخذ ہوتی ہے جس میں u کی جگہ $-u$ استعمال کرتے ہوئے u کی کم سے کم قیمت کی بات بھی ثابت ہوتی ہے۔

اگر u مستقل ہو مثلاً $u=k$ تب فقرہ-پ کے تحت u کی زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت برابر ہوں گے جس سے فقرہ-ت اخذ ہوتا ہے۔

اگر C پر اور D میں u اور h ہارمونی ہوں تب C پر اور D میں $h-u$ بھی ہارمونی ہو گا لہٰذا مفروضہ کے تحت C پر ہر جگہ $h-u=0$ ہو گا۔یوں فقرہ-ت کے تحت پورے D میں $h-u=0$ ہو گا جس سے فقرہ-ٹ اخذ ہوتا ہے۔اس طرح مسئلہ کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مسئلہ 20.4 کا آخری فقرہ انتہائی اہم ہے۔اس کے تحت D کی سرحد پر ہارمونی تفاعل کی قیمت سے D کے اندر ہارمونی تفاعل یکتا طور پر تعین ہوتا ہے۔عموماً D میں $u(x,y)$ کا ہارمونی ہونا اور D کی سرحد پر $u(x,y)$ کا استمراری[23] ہونا ضروری ہو گا۔ایسی صورت میں بھی مسئلہ 20.4 کا فقرہ-پ کارآمد ہو گا۔دی گئی سرحدی قیمتوں سے $u(x,y)$ کی قیمتیں تعین کرنے کو دو بعدی متغیرات کی مساوات لاپلاس کا معمہ ڈرشلے[24] کہتے ہیں۔ مسئلہ 20.4 سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 20.5: معمہ ڈرشلے
اگر دیے گئے خطہ اور دیے گئے سرحد پر دو متغیرات کی مساوات لاپلاس کے معمہ ڈرشلے کا حل موجود ہو تب یہ حل یکتا ہو گا۔

---

[23] یعنی اگر D کی سرحد پر (x_0,y_0) اور D کے اندر (x,y) ہو تب $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u(x_0,y_0)$ ہو۔

[24] Dirichlet problem

سوالات

سوال 20.30: تفاعل $f(z)=(z+2)^2,\ z_0=1$ کے لئے مسئلہ 20.2 کی تصدیق کریں۔دائرے کا رداس 1 اور مرکز z_0 ہے۔

سوال 20.31: تفاعل $f(z)=z^2$ اور مستطیل $-2<x<2,\ -1<y<1$ کے لئے مسئلہ 20.3 کی تصدیق کریں۔

سوال 20.32: تفاعل $f(z)=e^z$ اور کسی بھی محدود دائرہ کار میں مسئلہ 20.3 کی تصدیق کریں۔اشارہ۔ $|e^z|=e^x$ یک سر ہے۔

سوال 20.33: تفاعل $f(x)=\cos x$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $x=0$ پر پائے جاتی ہے۔مسئلہ 20.3 کے تحت استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ مقیاسی سطح $f(z)=\cos z$ (حصہ 14.9) کی زیادہ سے زیادہ قیمت $z=0$ پر نہیں ہو سکتی ہے۔

سوال 20.34: سادہ تعلق دائرہ کار D میں $f(z)$ غیر مستقل اور تحلیلی تفاعل ہے اور بند منحنی $|f(z)|=c$ دائرہ کار D میں پائی جاتی ہے جہاں c مستقل ہے۔دکھائیں کہ $f(z)=0$ اس دائرے کے اندر کسی نقطہ پر ہو گا۔مثال پیش کریں۔

20.4 پوسوں کلیہ تکمل

دائری قرص کے لئے معمہ ڈرشلے کو کلیہ پوسوں کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے جو ہارمونی تفاعل کو قرص کی سرحدی دائرے پر تفاعل کی قیمتوں کی صورت میں پیش کرتا ہے۔ہم کوشی کلیہ تکمل

$$f(z)=\frac{1}{i2\pi}\int_C \frac{f(z^*)}{z^*-z}\,\mathrm{d}z^* \tag{20.19}$$

کی مدد سے اس کلیہ کو اخذ کرتے ہیں جہاں دائرہ C کو

$$z^*=Re^{i\phi} \qquad (0\le\phi\le 2\pi)$$

اور تفاعل کو

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta) \qquad (z = re^{i\theta})$$

روپ میں لکھا جائے گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ تفاعل اس سادہ تعلق خطہ میں تحلیلی ہے جس کی اندرون میں C واقع ہے۔

چونکہ $\mathrm{d}z^* = iRe^{i\phi}\,\mathrm{d}\phi = iz^*\,\mathrm{d}\phi$ ہے لہٰذا مساوات 20.19 کو

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z^*)\frac{z^*}{z^*-z}\,\mathrm{d}\phi \qquad (z^* = Re^{i\phi},\, z = re^{i\theta}) \tag{20.20}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر ہم C کے باہر کسی نقطہ Z ، مثلاً $Z = \frac{z^*\bar{z}^*}{\bar{z}}$ (جس کی مطلق قیمت $\frac{R^2}{r} > R$ ہے)، پر غور کیا جائے تب مساوات 20.19 کا متکمل قرص $|z| \le R$ میں تحلیلی ہو گا لہٰذا تکمل صفر کے برابر ہو گا۔

$$0 = \frac{1}{i2\pi}\int_C \frac{f(z^*)}{z^*-Z}\,\mathrm{d}z^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z^*)\frac{z^*}{z^*-Z}\,\mathrm{d}\phi$$

اس میں $Z = \frac{z^*\bar{z}^*}{\bar{z}}$ پر کرتے ہوئے کسر کی سادہ صورت اختیار کرنے سے

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z^*)\frac{\bar{z}}{\bar{z}-\bar{z}^*}\,\mathrm{d}\phi$$

حاصل ہو گا۔اس کو مساوات 20.20 سے منفی کر کے درج ذیل

$$\frac{z^*}{z^*-z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z}-\bar{z}^*} = \frac{z^*\bar{z}^* - z\bar{z}}{(z^*-z)(\bar{z}^*-\bar{z})} \tag{20.21}$$

استعمال کرتے ہوئے

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z^*)\frac{z^*\bar{z}^* - z\bar{z}}{(z^*-z)(\bar{z}^*-\bar{z})}\,\mathrm{d}\phi \tag{20.22}$$

حاصل ہو گا۔ z اور z^* کی قطبی روپ سے ہم دیکھتے ہیں کہ متکمل میں حاصل تقسیم درج ذیل کے برابر ہے۔

$$\frac{R^2 - r^2}{(Re^{i\phi} - re^{i\theta})(Re^{-i\phi} - re^{-i\theta})} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi) + r^2}$$

نتیجتاً مساوات 20.22 کے دونوں اطراف حقیقی حصہ لیتے ہوئے **پوسوں کلیہ تکمل**[25]

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\phi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\,\mathrm{d}\phi \tag{20.23}$$

حاصل ہو گا جو قرص $|z|\le R$ کی سرحدی دائرے پر ہارمونی تفاعل کی قیمت $u(R,\phi)$ کی صورت میں قرص کے اندر ہارمونی تفاعل u کو ظاہر کرتا ہے۔

عملاً مساوات 20.23 میں $u(R,\phi)$ کی جگہ کوئی بھی ایسا تفاعل استعمال کیا جا سکتا ہے جو وقفہ تکمل پر محض ٹکڑوں میں استمراری ہو۔تب مساوات 20.23 کھلا قرص $|z|<R$ میں ہارمونی اور دائرہ $|z|=R$ پر استمراری تفاعل $u(r,\theta)$ کو ظاہر کرے گا۔ اس دائرے پر تفاعل $u(R,\phi)$ کے برابر ہو گا ماسوائے ان نقطوں پر جہاں $u(R,\phi)$ غیر استمراری ہو۔اس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات 20.23 سے ہم u کی ایک اہم تسلسل حاصل کر سکتے ہیں جس کے اجزاء ہارمونی تفاعل ہوں گے۔مساوات 20.23 کے متکمل کو مساوات 20.21 سے حاصل کیا گیا ہے جس کا دایاں ہاتھ $\frac{z^*+z}{z^*-z}$ کا حقیقی حصہ ہے۔ہندسی تسلسل سے

$$\frac{z^*+z}{z^*-z}=\frac{1+\frac{z}{z^*}}{1-\frac{z}{z^*}}=\left(1+\frac{z}{z^*}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z^*}\right)^n=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{z^*}\right)^n \tag{20.24}$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ $z=re^{i\theta}$ اور $z^*=Re^{i\phi}$ ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned}\text{حقیقی}\left(\frac{z}{z^*}\right)^n&=\text{حقیقی}\left[\frac{r^n}{R^n}e^{in\theta}e^{-in\phi}\right]=\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos(n\theta-n\phi)\\&=\left(\frac{r}{R}\right)^n(\cos n\theta\cos n\phi+\sin n\theta\sin n\phi)\end{aligned} \tag{20.25}$$

ہو گا۔مساوات 20.24 اور مساوات 20.25 سے

$$\text{حقیقی}\frac{z^*+z}{z^*-z}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(\cos n\theta\cos n\phi+\sin n\theta\sin n\phi)$$

ملتا ہے جو، جیسا ہم پہلے ذکر کر چکے ہیں، مساوات 20.23 میں متکمل کے حاصل تقسیم کے برابر ہے۔ اس تسلسل کو مساوات 20.23 میں پر کرتے ہوئے

$$u(r,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \tag{20.26}$$

---

[25] Poisson's integral formula

حاصل ہو گا جس کے عددی سر

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\phi)\,\mathrm{d}\phi, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\phi)\cos n\phi\,\mathrm{d}\phi,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\phi)\sin n\phi\,\mathrm{d}\phi, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{20.27}$$

ہوں گے جو $u(R,\phi)$ کے جانے پہچانے فوریئر عددی سر ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $r = R$ کی صورت میں مساوات 20.26 تفاعل $u(R,\phi)$ کا فوریئر تسلسل ہو گا لہٰذا جب بھی $u(R,\phi)$ کا فوریئر تسلسل کی روپ میں ظاہر کرنا ممکن ہو، مساوات 20.26 کی روپ درست ہو گی۔

مثال 20.7: اکائی قرص کے لئے معمہ ڈرشلے
اکائی قرص $r < 1$ ، جس کی سرحد پر درج ذیل ہو، میں مخفی قوہ $u(r,\theta)$ تلاش کریں (شکل 20.12)۔

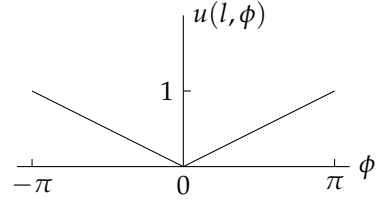
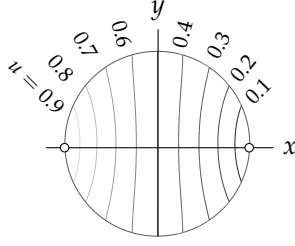
$$u(1,\phi) = \begin{cases} -\frac{\phi}{\pi} & -\pi < \phi < 0 \\ \frac{\phi}{\pi} & 0 < \phi < \pi \end{cases}$$

چونکہ $u(1,\phi)$ جفت ہے لہٰذا $b_n = 0$ ہو گا۔مساوات 20.27 سے $a_0 = \frac{1}{2}$ اور

$$a_n = \frac{1}{\pi}\Big[-\int_{-\pi}^{0} \frac{\phi}{\pi}\cos n\phi\,\mathrm{d}\phi + \int_0^{\pi} \frac{\phi}{\pi}\cos n\phi\,\mathrm{d}\phi\Big] = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$$

حاصل ہوں گے۔یوں جفت n کی صورت میں $a_n = 0$ اور طاق n کی صورت میں $a_n = -\frac{4}{n^2\pi^2}$ ہوں گے۔یوں مخفی قوہ درج ذیل ہو گی۔

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\Big[r\cos\theta + \frac{r^3}{3^2}\cos 3\theta + \frac{r^5}{5^2}\cos 5\theta + \cdots\Big]$$

□

شکل 20.12: سرحدی مخفی قوہ (مثال 20.7)

سوالات

سوال 20.35: مساوات 20.21 کی تصدیق کریں۔

سوال 20.36: دکھائیں کہ مساوات 20.26 کا ہر جزو قرص $r^2 < R^2$ میں ہارمونی تفاعل ہے۔

مساوات 20.26 استعمال کرتے ہوئے سوال 20.46 تا سوال 20.37 میں اکائی قرص $r < 1$ میں مخفی قوہ $u(r, \theta)$ تلاش کریں۔ قرص کی سرحد پر مخفی قوہ $u(1, \theta)$ ہے۔ تسلسل کے چند ابتدائی اجزاء کے مجموعہ سے u کی قیمت حاصل کرتے ہوئے ہم قوہ خطوط کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 20.37: $u(1, \theta) = \sin \theta$
جواب: $u = r \sin \theta$

سوال 20.38: $u(1, \theta) = 1 - \cos \theta$
جواب: $u = 1 - r \cos \theta$

سوال 20.39: $u(1, \theta) = \sin 3\theta$
جواب: $u = r^3 \sin 3\theta$

سوال 20.40: $u(1, \theta) = \cos 2\theta - \cos 4\theta$
جواب: $u = r^2 \cos 2\theta - r^4 \cos 4\theta$

سوال 20.41: $u(1, \theta) = 4 \sin^3 \theta$
جواب: $3r \sin \theta - r^3 \sin 3\theta$

سوال 20.42: $u(1,\theta)=\theta$
جواب: $\pi-2r\sin\theta-r^2\sin2\theta-\frac{2r^3}{3}\sin3\theta-\frac{r^4}{2}\sin4\theta-\cdots$

سوال 20.43: $0<\theta<\pi$ پر $u(1,\theta)=1$ ہے جبکہ اس وقفہ کے علاوہ $u(1,\theta)=0$ ہے۔
جواب: $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(r\sin\theta+\frac{r^3}{3}\sin3\theta+\frac{r^5}{5}\sin5\theta+\cdots)$

سوال 20.44: $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ پر $u(1,\theta)=\theta$ ہے جبکہ $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ پر $u(1,\theta)=\pi-\theta$ ہے۔
جواب: $\frac{4}{\pi}(r\sin\theta-\frac{r^3}{9}\sin3\theta+\frac{r^5}{25}\sin5\theta-\frac{r^7}{49}\sin7\theta\cdots)$

سوال 20.45: $-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2}$ پر $u(1,\theta)=-\frac{\pi}{2}$ ہے، $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ پر $u(1,\theta)=\theta$ ہے اور $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ پر $u(1,\theta)=\frac{\pi}{2}$ ہے۔
جواب: $(1+\frac{2}{\pi})r\sin\theta-\frac{r^2}{2}\sin2\theta+(\frac{1}{3}-\frac{2}{9\pi})r^3\sin3\theta-\frac{r^4}{4}\sin4\theta\cdots$

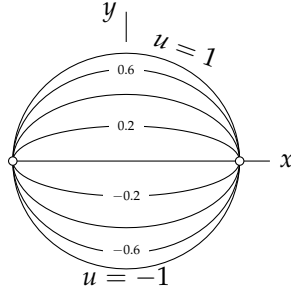
سوال 20.46: $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ پر $u(1,\theta)=1$ ہے، $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ پر $u(1,\theta)=-1$ ہے جبکہ باقی تمام θ پر $u(1,\theta)=0$ ہے۔
جواب: $\frac{2}{\pi}(r\cos\theta+r^2\sin2\theta-\frac{r^3}{3}\cos3\theta+\frac{r^5}{5}\cos5\theta\cdots)$

سوال 20.47: مساوات 18.42 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ سوال 20.46 کے نتیجہ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Ln}\frac{(1+iz)(1+z^2)}{(1-iz)(1-z^2)}\text{خیالی}$$

سوال 20.48: دکھائیں کہ سوال 20.42 کی مخفی قوہ کو $u(r,\theta)=2\operatorname{Ln}(1+z)$ خیالی لکھا جا سکتا ہے۔

سوال 20.49: مساوات 20.26 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اکائی قرص $r<1$ ، جس کا سرحدی مخفی قوہ

$$u(1,\theta)=\begin{cases}-1 & -\pi<\theta<0\\ 1 & 0<\theta<\pi\end{cases}$$

شکل 20.13: شکل برائے سوال 20.49

ہو، کے اندر مخفی قوہ $u(r,\theta)$ درج ذیل ہو گا۔

$$u(r,\theta)=\frac{4}{\pi}\left(r\sin\theta+\tfrac{r^3}{3}\sin 3\theta+\tfrac{r^5}{5}\sin 5\theta+\cdots\right)$$

اس تسلسل کے چند ابتدائی اجزاء استعمال کرتے ہوئے u کی قیمتیں حاصل کر کے چند ہم قوہ خطوط ترسیم کریں۔ قوت کی لکیروں (قائمہ الزاویہ خطوط) کو ترسیم کر کے ان کا شکل 20.13 کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 20.50: مساوات 18.42 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ سوال 20.49 کے نتیجہ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u(r,\theta)=\frac{2}{\pi}\,\text{خیالی}\,\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}=\frac{2}{\pi}\left(\underline{/1+z}-\underline{/1-z}\right)$$

سوال 20.51: جیومیٹری کے ایک بنیادی مسئلے کو سوال 20.50 کے نتیجے پر لاگو کرتے ہوئے دکھائیں کہ سوال 20.49 میں $u=$ مستقل دائری قوس ہیں۔

سوال 20.52: دکھائیں کہ بالائی نصف مستوی $v>0$ میں درج ذیل ہارمونی ہے اور وقفہ $-1<u<1$ پر اس کی قیمت -1 جبکہ باقی u محور پر اس کی قیمت $+1$ ہے۔

$$H=1+\frac{2}{\pi}\,\text{خیالی}\,\operatorname{Ln}\frac{w+1}{w-1}\qquad (w=u+iv)$$

سوال 20.53: دکھائیں کہ وہ خطی کسری تبادل جو -1 ، $w_1 = -1$ ، $w_2 = 0$ ، $w_3 = 1$ کو بالترتیب $z_1 = -1$ ، $z_2 = -i$ ، $z_3 = 1$ پر نقش کرتا ہو

$$z = \frac{w - i}{-iw + 1}$$

ہے۔اس کا الٹ تبادل $w = w(z)$ تلاش کرتے ہوئے سوال 20.52 میں دیے گئے H میں پر کرتے ہوئے دکھائیں کہ حاصل ہارمونی تفاعل سوال 20.50 کا ہارمونی تفاعل ہے۔

سوال 20.54: مسئلہ 20.1 کو پوسوں کلیہ تکمل مساوات 20.23 سے اخذ کریں۔

باب 21

اعدادی تجزیہ

انجینئری حساب کا نتیجہ آخر کار اعدادی ہوتا ہے لہٰذا انجینئری طالب علم کے لئے ایسی بنیادی **اعدادی تراکیب**[1] کا جاننا ضروری ہے جن کی مدد سے دیے گئے مواد سے اعدادی جوابات اخذ کرنا ممکن ہو۔ حساب کی وہ شاخ جو ایسی تراکیب بنانے سے تعلق رکھتی ہے کو **اعدادی تجزیہ**[2] کہتے ہیں۔

انجینئری مسائل کے عملی جوابات کے لئے ایسے تراکیب کا ہونا انتہائی اہم ہے۔ درحقیقت انجینئری حساب کے کئی مسئلوں کو صرف تخمینی طور پر حل کیا جا سکتا ہے۔ دیگر اوقات نظریہ سے حاصل جوابات عملاً قابل استعمال نہیں ہوتے ہیں، مثلاً اگر یک رتبی خطی تفرقی مساوات کے حل کے تکملی کلیہ (حصہ 1.5) میں تکمل کا حصول ناممکن ہو، خطی الجبرائی مساوات کے نظام کا مقطع کی مدد سے حل بذریعہ قاعدہ کریمر (حصہ 8.7)، وغیرہ۔ کئی بار نظریہ صرف حل کی وجودیت کی یقین دہانی کرتا ہے لیکن اصل حل حاصل کرنے کے بارے میں کوئی مدد فراہم نہیں کرتا ہے۔

اعدادی تراکیب کی اہمیت کمپیوٹر کی ایجاد کی نظر ہے۔ آج کل کے انجینئری حساب کا بیشتر حصہ **فوری حساب**[3] پر مشتمل ہے، جس میں نتائج فوراً درکار ہوتے ہیں (یعنی، جس میں فیصلہ کرنے کے لئے مواد موزوں وقت اور موزوں صورت میں مہیا کرنا لازم ہو گا)۔ اس کی مثال کیمیائی عمل کا تجزیہ کرتے ہوئے اس کو قابو کرنا یا ہوائی جہاز کی اڑان، وغیرہ ہیں۔

---

[1] numerical methods
[2] numerical analysis
[3] real time computing

ہم ان تراکیب کے نظریہ اور عملی استعمال پر غور کریں گے۔ تجزیہ خلل[4] پر بھی غور کیا جائے گا جو اعدادی تراکیب میں زیادہ اہمیت کے حامل ہے۔

21.1 خلل اور غلطیاں۔ کمپیوٹر

چونکہ اعدادی تراکیب میں متناہی تعداد کے اعداد استعمال کرتے ہوئے متناہی تعداد کے چال کے بعد جواب حاصل کیا جاتا ہے لہٰذا یہ تراکیب متناہی چال[5] ہیں جو اصل (نا معلوم) بالکل درست حل کی تخمین[6] پیش کرتے ہیں ماسوائے ان چند صورتوں میں جب اصل جواب کافی سادہ ناطق عدد ہو اور ہم کوئی ایسا اعدادی ترکیب استعمال کریں جو یہی بالکل درست جواب فراہم کرتا ہو۔

اگر کسی مقدار کی اندازاً قیمت a^* ہو اور اس کی اصل قیمت a ہو تب فرق $\epsilon = a^* - a$ کو a^* کا مطلق خلل یا مختصراً a^* کا خلل[7] کہتے ہیں۔ یوں

$$a^* = a + \epsilon, \qquad \text{تخمین} = \text{اصل قیمت} + \text{خلل}$$

ہو گا۔ a^* کی اضافی خلل[8] ϵ_r کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{r} = \frac{a^* - a}{a} = \frac{\text{خلل}}{\text{اصل قیمت}} \qquad (a \neq 0)$$

ظاہر ہے اگر $|\epsilon|$ کی قیمت $|a^*|$ کی قیمت سے بہت کم ہو تب $\epsilon_r \approx \frac{\epsilon}{a^*}$ ہو گا۔ ہم $\gamma = a - a^* = -\epsilon$ متعارف کرتے ہیں جس کو ہم درستگی[9] [10] (γ) کہیں گے۔ یوں

$$a = a^* + \gamma, \qquad \text{اصل قیمت} = \text{تخمین} + \text{درستگی}$$

ہو گا۔ آخر میں a^* کی حد خلل[11] سے مراد عدد β ہے جس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$|a^* - a| \leq \beta \qquad \Longrightarrow \qquad |\epsilon| \leq \beta$$

خلل کی تین قسمیں تجربی خلل، حذفی خلل اور پور و پور خلل ہیں۔ تجربی خلل[12] سے مراد مواد میں خلل ہے (جو

[4] error analysis
[5] finite processes
[6] approximation
[7] error
[8] relative error
[9] correction
[10] بعض اوقات خلل کی تعریف $\gamma = -\epsilon$ لی جاتی ہے۔
[11] error bound
[12] Experimental errors

تجربی ناپ کی وجہ سے ہو سکتے ہیں)۔ بالکل درست جواب تک پہنچنے کی خاطر متناہی (یا لا متناہی) تعداد کے حسابی چال (قدم) درکار ہوں گے۔ حقیقت میں کسی خاص تعداد کے چال بعد حساب روک دیا جاتا ہے اور یوں **حذفی خلل**[13] (مثال 12.1) پیدا ہو گا۔ ہر قدم پر حساب کے دوران کمپیوٹر متناہی تعداد کے اعداد استعمال کرتے ہوئے کمتر ہندسہ سے کم قیمتوں کو رد کرتا ہے جس سے **پور و پور خلل**[14] پیدا ہو گا جس پر ہم اب غور کرتے ہیں۔

اعشاری نظام میں ہر عدد کو متناہی یا لا متناہی تعداد کے اعشاری ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ کمپیوٹر لا متناہی تعداد کے ہندسوں کو ذخیرہ نہیں کر سکتا ہے لہٰذا کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کسی بھی عدد کو متناہی تعداد کی ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ان اعداد کو دو طریقوں سے کمپیوٹر میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ **مقررہ نقطہ**[15] نظام میں نقطہ اعشاریہ کے بعد مقررہ تعداد کے ہندسے پائے جاتے ہیں مثلاً 35.143 ، 5.000 ، 0.076 جبکہ **غیر مقررہ نقطہ**[16] نظام میں **معنی خیز ہندسوں**[17] کی تعداد متعین ہوتی ہے مثلاً 0.6723×10^2 ، -0.2354×10^{-4} اور -0.1000×10^1 جہاں معنی خیز ہندسوں کی تعداد چار ہے۔عدد c کے معنی خیز ہندسوں سے مراد c کا ہر ہندسہ ہے ماسوائے پہلے غیر صفر عدد کی بائیں جانب صفر جو اعشاریہ کا مقام تعین کرتا ہو۔ (یوں اس کے علاوہ ہر صفر بھی c کا معنی خیز ہندسہ ہو گا۔) مثال کے طور پر 5420 ، 1.340 اور 0.001460 میں سے ہر ایک میں چار معنی خیز ہندسے[18] ہیں۔

پور و پور خلل کا قاعدہ اب بیان کرتے ہیں۔(k معنی خیز ہندسوں تک قطع کرنے کی تعریف بھی یہی ہے پس اس میں ہندسہ کی جگہ معنی خیز ہندسہ پر کریں۔)

$k+1$ واں ہندسہ اور اس کے بعد تمام ہندسوں کو رد کریں۔اگر رد شدہ عدد، مقام k کی اکائی کی نصف سے کم ہو تب مقام k پر ہندسہ کو تبدیل نہ کریں ("نیچے پور و پور یا نیچے پورا کرنا")۔یوں 3.74 کو نیچے پورا کرتے ہوئے 3.7 لکھا جائے گا۔اگر رد شدہ عدد، مقام k کی اکائی کی نصف سے زیادہ ہو تب مقام k کی ہندسے کے ساتھ 1 جمع کریں (اوپر پور و پور یا اوپر پورا کرنا)۔یوں 5.46 کو اوپر پورا کرتے ہوئے 5.5 لکھا جائے گا۔اگر رد شدہ عدد مقام k کی اکائی کا نصف ہو تب اگر مقام k کا ہندسہ طاق ہو تو اس کو بڑھا کر جفت بنائیں۔(مثال کے طور پر 3.45 اور 3.55 کو اشاریہ کے بعد ایک ہندسہ تک قطع کرتے ہوئے بالترتیب 3.4 اور 3.6 حاصل ہو گا۔)

---

[13] Truncation error
[14] rounding error
[15] fixed point
[16] floating point
[17] significant digits
[18] ایسا جدول جو k معنی خیز ہندسے دیتا ہو میں، جب تک کہا نا جائے کہ ایسا نہیں ہے، ہم فرض کرتے ہیں کہ دیا گیا عدد a^* ، بالکل درست قیمت a سے آخری ہندسے کی ∓ 0.5 اکایاں مختلف ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر $a = 1.1996$ ہو تب چار معنی خیز ہندسوں کا جدول $a^* = 1.200$ دے گا۔

اس قاعدہ کا آخری حصہ یقینی بناتا ہے کہ عدد کا کمتر حصہ رد کرتے ہوئے اوسطاً برابر مرتبہ عدد بڑھایا اور گھٹایا جاتا ہے۔

اگر ہم 1.2535 کو 3 ، 2 اور 1 اشاریہ تک قطع کریں تب ہمیں بالترتیب 1.254 ، 1.25 اور 1.3 حاصل ہو گا لیکن، بغیر مزید معلومات کے، 1.25 کو ایک اشاریہ تک قطع کرنے سے ہمیں 1.2 ملتا ہے۔

پور و پور خلل کی وجہ سے کوئی بھی حساب مکمل غلط ہو سکتا ہے۔ عموماً چال کی تعداد بڑھانے سے یہ خلل بڑھتا ہے۔ یوں حسابی پروگرام کو اس خلل کی نقطہ نظر سے دیکھنا ضروری ہو گا اور اس خلل کو کم سے کم کرنا لازم ہو گا۔

21.2 دہرانے سے مساوات کا حل

ہمیں عموماً مساوات

$$f(x) = 0 \tag{21.1}$$

کے حل درکار ہوتے ہیں یعنی ایسے عدد X_0 کہ $f(X_0)$ صفر کے برابر ہو جہاں f دیا گیا تفاعل ہے۔ مثال کے طور پر $x^2 - 3x + 2 = 0$ ، $x^3 + x = 1$ ، $\sin x = 0.5x$ ، $\tan x = x$ ، $\cosh x = \sec x$ اور $\cosh x \cos x = -1$ کو مساوات 21.1 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ ان میں پہلے دو میں f کثیر رکنی ہے لہٰذا یہ دونوں الجبرائی مساوات[19] ہیں جن کے حل کو جذر[20] کہتے ہیں۔ باقی ماورائی مساوات[21] ہیں جن میں ماورائی تفاعل استعمال ہوئے ہیں۔ حقیقتاً صرف انتہائی سادہ صورتوں میں مکمل درست حل نکالنے والے کلیات موجود ہوں گے۔ عموماً ہم دہرانے کی ترکیب یا دیگر تراکیب سے اصل حل کا تخمینہ حاصل کریں گے۔

اعدادی دہرانے کے طریقہ میں ہم اختیاری x_0 منتخب کرتے ہوئے درج ذیل روپ کلیہ

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{21.2}$$

سے، بار بار حل کرتے ہوئے، ترتیب $x_0, x_1, x_2, \cdots$ حاصل کرتے ہیں جہاں g کسی ایسے وقفہ پر معین ہے جس پر x_0 پایا جاتا ہو اور g کا سعت اسی وقفہ پر ہے۔ یوں ہم یک بعد دیگرے $x_1 = g(x_0)$ ، $x_2 = g(x_1)$ ، $x_3 = g(x_2)$ ، $\cdots$ حاصل کرتے ہیں۔

---
[19] algebraic equations
[20] roots
[21] transcendental equations

اس حصہ میں دائرہ کار اور سعت $g(x)$ دونوں حقیقی لکیر پر ہوں گے۔زیادہ عمومی معمہ میں x یا g اور یا دونوں سمتیات ہو سکتے ہیں۔

دہرانے کے تراکیب اعدادی تجزیہ کے لئے انتہائی اہم ہیں۔

مساوات 21.1 کو حل کرنے کے لئے دہرانے کے تراکیب کئی طریقوں سے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ہم ان میں سے تین خصوصاً اہم طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

الجبرائی تبادل

ہم مساوات 21.1 کو الجبرائی طور پر تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل روپ حاصل کر سکتے ہیں

$$x = g(x) \tag{21.3}$$

جو مساوات 21.2 کی روپ میں ہے۔مساوات 21.3 کے حل کو g کا مقررہ نقطہ[22] کہتے ہیں۔دیے گئے مساوات 21.1 کے کئی مطابقتی مساوات 21.3 ہو سکتے ہیں جن کے ترتیب $x_0, x_1, \cdots$ مختلف (اور x_0 کے تابع) ہوں گے۔آئیں ایک سادہ مثال دیکھتے ہیں جس میں یہ حقائق ابھر کر سامنے آتے ہیں۔

مثال 21.1: دہرانے کی ترکیب

مساوات $f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$ کے لئے دہرانے کی ترکیب عمل میں لائیں۔چونکہ ہمیں اس مساوات کے حل

$$x = 1.5 \mp \sqrt{1.25}, \quad x_1 = 2.618\,034, \quad x_2 = 0.381\,966$$

معلوم ہیں، ہم دہرانے کے عمل کے دوران خلل کا رویہ دیکھ سکتے ہیں۔ہم دیے گئے مساوات سے

$$x = g_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1) \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 1) \tag{21.4}$$

لکھ سکتے ہیں۔یوں $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ترتیب ملتی ہے

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 0.667, \quad x_2 = 0.481, \quad x_3 = 0.411, \quad x_4 = 0.390, \cdots$$

---

[22] fixed point

جو چھوٹے جذر کی طرف گامزن ہے (شکل 21.1-الف)۔اگر ہم $x_0 = 3.000$ منتخب کریں تب درج ذیل ملتا ہے

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 3.333, \quad x_2 = 4.037, \quad x_3 = 5.766, \quad x_4 = 11.414, \cdots$$

جو منفرج ترتیب ہے (شکل 21.1-الف)۔دی گئی مساوات سے درج ذیل بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$x = g_2(x) = 3 - \frac{1}{x} \quad \implies \quad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \tag{21.5}$$

اب x_0 منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 2.000, \quad x_2 = 2.500, \quad x_3 = 2.600, \quad x_4 = 2.615, \cdots$$

حاصل ہوتا ہے جو بڑے جذر کی طرف گامزن ترتیب ہے (شکل 21.1-ب)۔اسی طرح $x_0 = 3$ منتخب کرتے ہوئے

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 2.667, \quad x_2 = 2.625, \quad x_3 = 2.619, \quad x_4 = 2.618, \cdots$$

حاصل ہوتا ہے (شکل 21.1-ب)۔شکل کو دیکھ کر واضح ہوتا ہے کہ مرکوزیت اس صورت ہو گی جب حل کی پڑوس میں منحنی $g(x)$ کی ڈھلوان سیدھے خط $y = x$ کی ڈھلوان سے کم ہو۔ہم اب دیکھتے ہیں کہ مرکوزیت کے لئے $|g'(x) < 1|$ کی شرط کافی ہے (جہاں خط $y = x$ کی ڈھلوان $y' = 1$ ہے)۔ $\square$

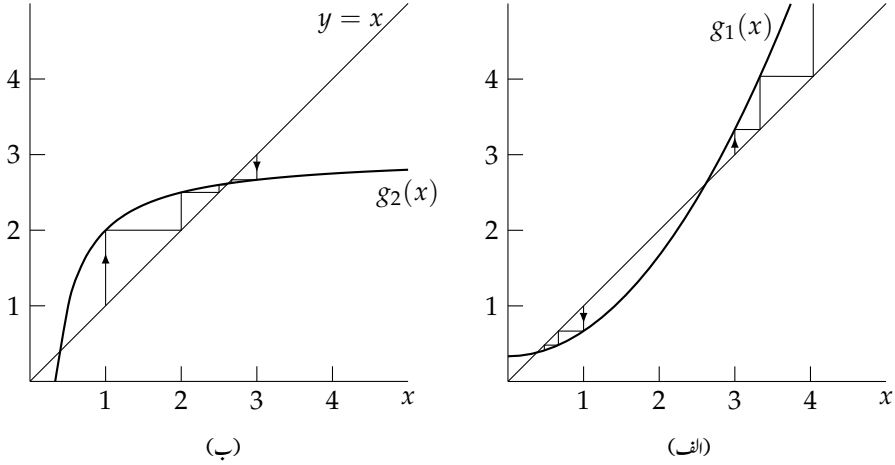
اگر x_0 کا مطابقتی مساوات 21.2 سے حاصل کردہ ترتیب $x_0, x_1, \cdots$ مرتکز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب مرتکز ہے۔

ارتکاز کے لئے کافی شرط درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کے کئی اہم عملی استعمال پائے جاتے ہیں۔

مسئلہ 21.1: (ارتکاز)
فرض کریں کہ $x = g(x)$ کا حل $x = s$ ہے اور فرض کریں کہ کسی ایسے وقفہ J ، جس میں s پایا جاتا ہو، پر $g(x)$ کا استمراری تفرق پایا جاتا ہے۔ اب اگر J میں $|g'(x)| \leq \alpha < 1$ ہو تب مساوات 21.2 میں دی گئی دہرانے کی ترکیب J میں ہر x_0 کے لئے مرتکز ہو گی۔

ثبوت: تفرقی احصاء کے مسئلہ اوسط قیمت کے تحت x اور s کے درمیان ایسا ξ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا،

$$g(x) - g(s) = g'(\xi)(x - s)$$

(ب) (الف)

شکل 21.1: اشکال برائے مثال 21.1

جہاں x وقفہ J میں پایا جاتا ہے۔ چونکہ $g(s) = s$ اور $x_1 = g(x_0)$ ، $x_2 = g(x_1)$ ، $\cdots$ ہیں لہٰذا ہمیں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}|x_n - s| &= \left|g(x_{n-1}) - g(s)\right| = \left|g'(\xi)\right|\left|x_{n-1} - s\right| \le \alpha|x_{n-1} - s| \\ &\le \alpha^2|x_{n-2} - s| \le \cdots \le \alpha^n|x_0 - s|\end{aligned}$$

چونکہ $\alpha < 1$ ہے لہٰذا $n \to \infty$ کرنے سے $\alpha^n \to 0$ اور $|x_n - s| \to 0$ ہوں گے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

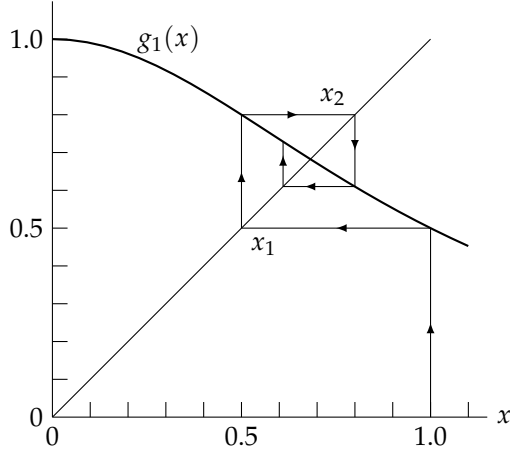
□

مثال 21.2: دہرانے کا طریقہ۔ مسئلہ 1-21

دہرانے کے طریقہ سے $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کا حل تلاش کریں۔اس مساوات کا جلدی سے خاکہ بنا کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کا جذر $x = 1$ کے قریب پایا جاتا ہے۔ ہم اس مساوات سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$x = g_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \implies \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n^2}$$

یوں کسی بھی x کے لئے $|g_1'(x)| = \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} < 1$ ہو گا لہٰذا تمام x پر مرکوزیت پائی جائے گی۔ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں (شکل 21.2)

$$x_1 = 0.500, \quad x_2 = 0.800, \quad x_3 = 0.610, \quad x_4 = 0.729, \quad x_5 = 0.653, \quad x_6 = 0.701, \cdots$$

شکل 21.2: شکل برائے مثال 21.2

جبکہ چھ ہندسوں تک درست اصل جذر $s = 0.682\,328$ ہے۔ ہم مساوات سے درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$x = g_2(x) = 1 - x^3, \quad \left|g_2'(x)\right| = 3x^2$$

جذر کے قریب $|g_2'|$ کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے للہذا ہم ارتکاز کی توقع نہیں کر سکتے ہیں۔آپ $x_0 = 1$ ، $x_0 = 0.5$ ، $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے اپنی تسلی کر سکتے ہیں۔ □

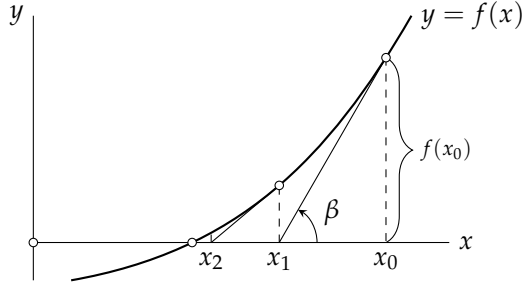
ترکیب نیوٹن

مساوات $f(x) = 0$ ، جہاں f قابل تفرق ہے، کو ترکیب نیوٹن سے بھی حل کیا جا سکتا ہے۔اس ترکیب میں ہم $f(x)$ کا تخمینہ اس کے موزوں مماس سے حاصل کرتے ہیں۔اس ترکیب میں ہم f کی ترسیم سے حاصل x_0 پر f کا مماس بناتے ہیں۔یہ مماس x محور کو x_1 پر قطع کرتا ہے (شکل 21.3)۔یوں

$$\tan\beta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \qquad \implies \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ہو گا۔اگلے قدم پر ہم

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

y $y = f(x)$ $f(x_0)$ β x x_2 x_1 x_0

شکل 21.3: ترکیب نیوٹن

حاصل کرتے ہیں۔اسی طرح چلتے ہوئے جذر تک پہنچا جاتا ہے۔یوں دہرانے کے طریقے کا عمومی کلیہ درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 0, 1, \cdots) \tag{21.6}$$

مثال 21.3: جذر المربع

کسی مثبت حقیقی عدد c کا جذر المربع حاصل کرنے کے لئے دہرانے کی ترکیب بنائیں۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے $c = 2$ کا جذر المربع تلاش کریں۔ہمارے پاس $\sqrt{c}$ یعنی $f(x) = x^2 - c = 0$ ہے لہٰذا $f'(x) = 2x$ ہو گا۔یوں مساوات 21.6 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

اب اس ترکیب سے $c = 2$ کا جذر المربع تلاش کرتے ہیں۔ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = 1.500\,000, \quad x_2 = 1.416\,667, \quad x_3 = 1.414\,216, \quad x_4 = 1.414\,214, \cdots$$

2 کا جذر المربع 1.414 213 562 ہے اور آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x_4 چھ معنی خیز ہندسوں تک درست جواب دیتا ہے۔ □

مثال 21.4: ماورائی مساوات کا دہرانے کی ترکیب سے حل

مساوات $x = 2\sin x$ کا مثبت حل تلاش کریں۔ہم $f(x) = x - 2\sin x$ لکھتے ہوئے $f'(x) =$

جدول 21.1: جدول برائے مثال 21.4

x_{n+1}	D_n	N_n	x_n	n
1.901	1.832	3.483	2.000	0
1.896	1.648	3.125	1.901	1
1.896	1.639	3.107	1.896	2

$1 - 2\cos x$ حاصل کرتے ہیں۔یوں مساوات 21.6 کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2\sin x_n}{1 - 2\cos x_n} = \frac{2(\sin x_n - x_n \cos x_n)}{1 - 2\cos x_n} = \frac{N_n}{D_n}$$

f کی ترسیم سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کا حل $x_0 = 2$ کے قریب ہے۔یوں ہم جدول 21.1 حاصل کرتے ہیں۔چار معنی خیز ہندسوں تک درست جواب 1.8955 ہے۔ □

مثال 21.5: **ترکیب نیوٹن کا الجبرائی مساوات پر اطلاق** مساوات $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کو ترکیب نیوٹن سے حل کریں۔مساوات 21.6 سے درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$

$x_0 = 1$ سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x_1 = 0.750\,000, \quad x_2 = 0.686\,047, \quad x_3 = 0.682\,340, \quad x_4 = 0.682\,328, \cdots$$

x_4 چھ معنی خیز ہندسوں تک درست ہے۔مثال 21.2 کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ مثال بہت تیزی کے ساتھ اصل حل پر مرکوز ہوتا ہے۔اس سے دہرانے کی ترکیب کے رتبہ کا تصور پیدا ہوتا ہے جس پر اب بات کی جائے گی۔ □

فرض کریں کہ مساوات $x = g(x)$ کا حل s ہے اور $x_{n+1} = g(x_n)$ ایک دہرانے کی ترکیب ہے جو اس حل کی تخمین x_n دیتی ہے۔تب $x_n = s + \epsilon_n$ ہو گا جہاں x_n میں خلل ϵ_n ہے۔فرض کریں کہ g متعدد بار قابل تفرق ہے لہٰذا ٹیلر کے کلیہ سے

$$\begin{aligned} x_{n+1} = g(x_n) &= g(s) + g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2}g''(s)(x_n - s)^2 + \cdots \\ &= g(s) + g'(s)\epsilon_n + \frac{1}{2}g''(s)\epsilon_n^2 + \cdots \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ جزو $g(s)$ کے بعد پہلی غیر صفر جزو میں ϵ کے قوت نما کو دہرانے کی ترکیب (جس کو g تعین کرتا ہے) کا رتبہ[23] کہتے ہیں۔ چونکہ $x_{n+1} - g(s) = x_{n+1} - s = \epsilon_{n+1}$ یعنی x_{n+1} کا خلل ہے، اور ارتکاز کی صورت میں بڑی n کے لئے ϵ_n چھوٹا ہو گا لہٰذا ترکیب کا رتبہ اس کی مرکوزیت کی ناپ ہے۔

ترکیب نیوٹن دو رتبی ہے
ترکیب نیوٹن کے لئے درج ذیل ہے

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad g'(x) = 1 - \frac{f'f' - ff''}{(f')^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

اور چونکہ $f(s) = 0$ ہے لہٰذا $g'(s) = 0$ ہو گا؛ یوں ترکیب نیوٹن کم از کم دو رتبی ہے۔ ایک اور تفرق کے بعد $g''(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)}$ ملتا ہے جو عموماً غیر صفر ہو گا۔ مثال 21.2 میں $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ اور $g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ہیں لہٰذا یہ یک رتبی دہرانے کی ترکیب ہے۔

$f(x) = 0$ کے حل کے قریب $f'(x) = 0$ ہونے کی صورت میں ترکیب نیوٹن مشکلات پیدا کرتا ہے لیکن حل کے قریب $f(x)$ کی ترسیم کو دیکھتے ہوئے، ترکیب نیوٹن کی جیومیٹریائی تصور کو مد نظر رکھتے ہوئے عموماً اس مشکل سے چھٹکارا حاصل کرنا ممکن ہو گا۔ اگر درکار حل کے قریب $f'(x) = 0$ ہو تب x_{n+1} کی بہتر قیمت حاصل کرنے کی خاطر $f(x_n)$ اور $f'(x_n)$ کے زیادہ درست قیمتیں حاصل کرنا ضروری ہو گا۔ ایسی مساوات کو بد خو[24] کہتے ہیں۔

$f(x) = 0$ کو حل کرنے کی تیسری ترکیب جس کو ترکیب مقام غیر حقیقی[25] کہتے ہیں پر اب غور کرتے ہیں۔ اس ترکیب میں ہم منحنی $f(x)$ کو تخمیناً ایک وتر سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 21.4)۔ یہ وتر محور x کو

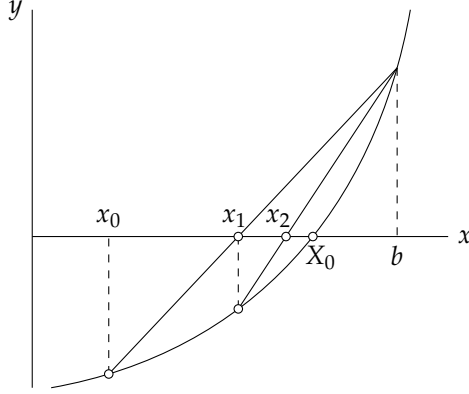
$$x_1 = \frac{x_0 f(b) - bf(x_0)}{f(b) - f(x_0)} \tag{21.7}$$

پر قطع کرتا ہے جو $f(x) = 0$ کے حل X_0 کے قریب ہو گا۔ اگلے قدم پر اس سے بہتر حل

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - bf(x_1)}{f(b) - f(x_1)} \tag{21.8}$$

حاصل کیا جاتا ہے۔ اسی طرح بتدریج بہتر حل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ b کو X_0 کے قریب کرنے سے ارتکاز کو بہتر بنایا جا سکتا ہے۔ عموماً قیاس کے ذریعہ ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

---

[23] order
[24] ill-conditioned
[25] method of false position

شکل 21.4: منحنی کا تخمینی وتر

مثال 21.6: مساوات $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ کا وہ جذر تلاش کریں جو $x = 1$ کے قریب واقع ہے (مثال 21.2)۔ چونکہ $f(0.5) = -0.375$ اور $f(1) = 1$ ہیں لہٰذا ہم $x_0 = 0.5$ اور $b = 1$ منتخب کر سکتے ہیں۔ مساوات 21.7 سے

$$x_1 = \frac{0.5 \cdot 1 - 1 \cdot (-0.375)}{1 - (-0.375)} = 0.64$$

حاصل ہو گا جبکہ مساوات 21.8 سے $x_2 = 0.672$ ملتا ہے۔ ہم اسی طرح بتدریج بہتر حل تلاش کر سکتے ہیں۔
□

سوالات

سوال 21.1: $x^3 - 3.9x^2 + 4.79x - 1.881 = 0$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0 = 1$ لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = 1.900\,000$

سوال 21.2: $x^3 - 1.2x^2 + 2x - 2.4 = 0$ کا جذر ترکیب نیوٹن میں $x_0 = 2$ لے کر تین قدم چلتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = 1.478\,261$

سوال 21.3: سوال 21.1 میں دیے گئے مساوات کے جذر 0.9 ، 1.1 اور 1.9 ہیں۔ اگرچہ $x_0 = 1$ جذر 0.9 اور 1.1 کے قریب ہے لیکن ترکیب نیوٹن ان کی جگہ جذر 1.9 تلاش کرتا ہے۔ ایسا

کیوں ہے؟ x_0 کی کوئی اور قیمت منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے جذر 1.1 حاصل کریں۔
جواب: تفاعل $f(x)$ کو $x_0 = 1$ پر مماس x محور کو عین $x = 1.9$ پر قطع کرتا ہے۔آپ $x_0 = 1.2$ یا کوئی اور عدد منتخب کر سکتے ہیں۔

سوال 21.4 تا سوال 21.7 میں دیے مساوات کی ترکیب نیوٹن کی مدد سے تمام جذر تلاش کریں۔

سوال 21.4: $\cos x = x$
جواب: 0.739

سوال 21.5: $x + \ln x - 2$
جواب: 1.577

سوال 21.6: $2x + \ln x - 1$
جواب: 0.687

سوال 21.7: $x^4 - 0.1x^3 - 0.82x^2 - 0.1x - 1.82$
جواب: 1.4, -1.3

سوال 21.8: دکھائیں کہ مثال 21.2 میں $\lvert g_1'(x) \rvert$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\tilde{x} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$ پر حاصل ہو گی اور کہ یہ قیمت $\lvert g'(\tilde{x}) \rvert = \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0.65$ کے برابر ہے۔

سوال 21.9: ایسا کیوں ہے کہ مثال 21.1 میں یک سر ترتیب حاصل ہوتی ہے لیکن مثال 21.2 میں ایسا نہیں ہوتا ہے؟

سوال 21.10: مثال 21.2 کی آخر میں دہرانے کی ترکیب سے حاصل قیمتوں کو از خود حاصل کریں اور شکل 21.2 کی طرز کا شکل بنائیں۔

سوال 21.11: مساوات $x^5 = x + 0.2$ کو مساوات 21.2 کی صورت میں لکھ کر $x_0 = 0$ سے شروع کرتے ہوئے اس کا جذر تلاش کریں۔
جواب: $x_1 = -0.2$ ، $x_2 = -0.200\,32$ ، $x_3 = -0.200\,323$

سوال 21.12: سوال 21.11 میں دیے گئے مساوات کا جذر $x = 1$ کے قریب پایا جاتا ہے۔مساوات کو $x = \sqrt[5]{x + 0.2}$ لکھ کر $x_0 = 1$ سے شروع کرتے ہوئے اس جذر کو تلاش کریں۔
جواب: 1.0447

سوال 21.13: سوال 21.12 میں اگر آپ $x = x^5 - 0.2$ لکھ کر $x_0 = 1$ سے شروع کریں تو کیا حاصل ہو گا؟
جواب: $-0.200\,322$

سوال 21.14: دہرانے کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کی مساوات $x = \tan x$ کا کم تر جذر تقریباً 4.49 ہے۔اشارہ۔ مساوات کی ترسیم سے اخذ کریں کہ جذر $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ کے قریب پایا جاتا ہے؛ مساوات کو $x = \pi + \tan^{-1} x$ (کیوں؟) لکھ کر آگے بڑھیں۔

سوال 21.15: $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے $\sqrt{5}$ کو مثال 21.3 کی ترکیب سے حاصل کرتے ہوئے x_1, x_2, x_3, x_4 تلاش کریں۔اب $\sqrt{5} = 2.236\,068$ استعمال کرتے ہوئے خلل حاصل کریں۔
جواب: $\epsilon_1 = 0.236\,068$ ، $\epsilon_2 = 0.013\,932$ ، $\epsilon_3 = 0.000\,043$ ، $\epsilon_4 = 0.000\,000$

سوال 21.16: دکھائیں کہ مثال 21.3 میں ہمارے پاس

$$x_{n+1}^2 - c = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{c}{x_n}\right)^2$$

ہے جو درستگی کی ناپ ہے۔دکھائیں کہ تخمیناً

$$\left|x_n - \sqrt{c}\right| \approx \frac{1}{2}\left|x_n - \frac{c}{x_n}\right|$$

ہو گا۔ اس کا اطلاق سوال 21.15 پر کریں۔

سوال 21.17: مثبت x محور پر ایسا وقفہ تلاش کریں کہ $c = 2$ لیتے ہوئے مسئلہ 21.1 کی شرط کو مثال 21.3 کے دہرانے کی ترکیب مطمئن کرتی ہو۔
جواب: $\alpha < 1$ ، $x \geq \sqrt{\frac{2}{1+2\alpha}}$

سوال 21.18: جذر الکعب کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے $x_0 = 2$ سے شروع کر کے تین قدم چل کر $\sqrt[3]{7}$ تلاش کریں۔

سوال 21.19: مثبت عدد c کا k واں جذر حاصل کرنے کے لئے ترکیب نیوٹن بنائیں۔
جواب: $f(x) = x^k - c, \quad x_{n+1} = (1 - \frac{1}{k})x_n + \frac{c}{kx_n^{k-1}}$

سوال 21.20: $x^4 = 2$ کا حقیقی جذر بذریعہ ترکیب غیر حقیقی مقام حاصل کریں۔
جواب: $0, \quad 1$

سوال 21.21: $x^4 = 2x$ کا حقیقی جذر بذریعہ ترکیب غیر حقیقی مقام حاصل کریں۔
جواب: $0, \quad 1.260$

سوال 21.22: $3\sin x = 2x$ کا حقیقی جذر بذریعہ ترکیب غیر حقیقی مقام حاصل کریں۔
جواب: $0, \quad 1.49$

سوال 21.23: سوال 21.20 میں حاصل کردہ مثبت جذر ہر صورت اصل جذر سے معمولی کم ہو گا۔ایسا کیوں ہے؟

سوال 21.24: ترکیب نیوٹن میں $f'(x)$ کا حساب کرنا ہوتا ہے۔ عملی استعمال میں کبھی کبھار یہ قدم کافی پیچیدہ ثابت ہو سکتا ہے۔ $f'(x)$ سے چھٹکارا حاصل کرنا کا ایک طریقہ یہ ہے کہ اس کی جگہ $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$ استعمال کیا جائے۔یوں حاصل کردہ کلیہ کا کلیہ غیر حقیقی مقام کے ساتھ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال 21.25: فرض کریں بند وقفہ I میں g استمراری ہے اور اس کا سعت بھی I میں پایا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات $x = g(x)$ کا کم از کم ایک حل اس وقفہ میں پایا جائے گا۔دکھائیں کہ اس وقفہ میں مساوات کے زیادہ جذر بھی ممکن ہیں۔

21.3 متناہی فرق

متناہی فرق کا استعمال اعدادی تجزیہ کے کئی شاخوں میں پایا جاتا ہے مثلاً دو قیمتوں کے درمیان قیمت کا تخمینہ لگانے میں، جدول کی جانچ پڑتال میں، تخمینہ لگانے میں، تفرق میں، اور تفرقی مساوات کے حل میں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمیں تفاعل f کی اعدادی قیمتوں $f_j = f(x_j)$ کا جدول دیا گیا ہے جہاں نقطے x_j ایک جیسے فاصلے پر ہیں۔

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h, \cdots \quad (h > 0, \text{مقررہ})$$

$f(x_j)$ کو عموماً کسی کلیہ یا تجربہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم جدول میں ہر $f(x)$ کو اگلی (بڑی) x کی مطابقتی قیمت سے تفریق کرتے ہوئے **پہلا فرق**[26] حاصل کرتے ہیں۔جدول 21.2 میں اس کی مثال پیش کی گئی ہے جہاں $f(x) = x^3, \ x = -3(1)3$ ہیں[27]۔یہی طریقہ پہلی فرق پر لاگو کرتے ہوئے f کا **دوسرا فرق**[28] حاصل کیا

---

[26] first difference
[27] $x = a(h)b$ کا مطلب ہے کہ تفاعل کی قیمتیں $x = a$ ، $x = x + h$ ، $x = a + 2h$ ، $\cdots$ ، $x = b$ پر دی گئی ہیں۔
[28] second difference

جدول 21.2: تفاعل $f(x)=x^3,\ x=-3(1)3$ کا جدول فرق

x	$f(x)=x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق	چوتھا فرق
-3	-27				
		19			
-2	-8		-12		
		7		6	
-1	-1		-6		0
		1		6	
0	0		0		0
		1		6	
1	1		6		0
		7		6	
2	8		12		
		19			
3	27				

جاتا ہے۔اسی طرح باقی فرق بھی حاصل کیے جاتے ہیں۔جدول فرق میں ہر فرق کو اپنی قطار میں گزشتہ قطار (جس سے فرق حاصل کیا گیا ہے) کی اندراج کی درمیان برابر مقام پر درج کیا جاتا ہے۔نقطہ اعشاریہ اور فرق کی بائیں صفروں کو نظر انداز کیا جاتا ہے (جدول 21.3)۔

جدول فرق میں فرق کو ظاہر کرنے کے تین مختلف طریقے رائج ہیں۔ان میں سے جو بھی طریقہ استعمال کیا جائے، جدول میں نہ کوئی فرق تبدیل ہو گا اور نا ہی اس کا مقام۔پہلی (اور غالباً اہم ترین) اظہار جس کو **وسطی فرق**[29] کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$
\begin{array}{llllll}
x_{-2} & f_{-2} & & & \\
 & & \delta f_{-3/2} & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \delta^2 f_{-1} & \\
 & & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{-1/2} \\
x_0 & f_0 & & \delta^2 f_0 & \\
 & & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{1/2} \\
x_1 & f_0 & & \delta^2 f_1 & \\
 & & \delta f_{3/2} & & \\
x_2 & f_2 & & &
\end{array}
$$

[29] central difference

جدول 21.3: تفاعل $f(x)=\frac{1}{x},\ x=1(0.2)2$ کا جدول فرق۔ معنی خیز ہندسوں کی تعداد چار ہے۔

x	$f(x)=x^3$	پہلا فرق	دوسرا فرق	تیسرا فرق
1.0	1.0000			
		-1667		
1.2	0.8333		477	
		-1190		-180
1.4	0.7143		297	
		-893		-98
1.6	0.6250		199	
		-694		-61
1.8	0.5556		138	
		-556		
2.0	0.5000			

جہاں $\delta f_{-3/2}=f_{-1}-f_{-2}$ اور $\delta f_{-1/2}=f_0-f_{-1}$ ہیں۔ وسطی فرق کا عمومی جزو

$$\delta f_{m+1/2}=f_{m+1}-f_m \tag{21.9}$$

ہے جہاں دائیں ہاتھ دو زیر نوشت کا مجموعہ بائیں ہاتھ کا زیر نوشت دے گا۔اسی طرح

$$\delta^2 f_m=\delta f_{m+1/2}-\delta f_{m-1/2}$$

ہو گا۔دیگر فرق بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ایک جیسی زیر نوشت والے اجزاء ایک ہی صف میں پائے جاتے ہیں۔(دھیان رہے کہ ضروری نہیں ہے کہ جدول میں x کی سب سے چھوٹی قیمت x_0 ہو۔مثال کے طور پر جدول 21.3 میں ہم $x_0=1.6$ لے سکتے ہیں؛ تب $f_0=0.6250$ ، $\delta f_{1/2}=-0.0694$ ، $\delta^2 f_0=0.0199$ ، $\cdots$ ہوں گے۔)

دوسری اظہار جس کو آگے فرق[30] کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{llllll}
x_{-2} & f_{-2} & & & \\
 & & \Delta f_{-2} & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \Delta^2 f_{-2} & \\
 & & \Delta f_{-1} & & \Delta^3 f_{-2} \\
x_0 & f_0 & & \Delta^2 f_{-1} & \\
 & & \Delta f_0 & & \Delta^3 f_{-1} \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & \\
 & & \Delta f_1 & & \\
x_2 & f_2 & & &
\end{array}$$

[30] forward difference

جس میں $\Delta f_{-2} = f_{-1} - f_{-2}$ ، $\Delta f_{-1} = f_0 - f_{-1}$ اور $\Delta f_0 = f_1 - f_0$ ہیں۔اس کا عمومی جزو

$$\Delta f_m = f_{m+1} - f_m \tag{21.10}$$

ہے۔اسی طرح

$$\Delta^2 f_m = \Delta f_{m+1} - \Delta f_m$$

ہو گا۔مثال کے طور پر اگر جدول 21.3 میں $x_0 = 1.6$ لیا جائے تب $f_0 = 0.6250$ ، $\Delta f_0 = -0.0694$ ، $\Delta^2 f_0 = 0.0138$ ہوں گے۔ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترچھی لکیروں نیچے کی رخ یا جدول میں آگے رخ لکیروں پر پائے جائیں گے۔

تیسری اظہار جس کو پیچھے فرق[31] کہتے ہیں درج ذیل ہے

$$\begin{array}{cccccc}
x_{-2} & f_{-2} & & & \\
 & & \nabla f_{-1} & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \nabla^2 f_0 & \\
 & & \nabla f_0 & & \nabla^3 f_1 \\
x_0 & f_0 & & \nabla^2 f_1 & \\
 & & \nabla f_1 & & \nabla^3 f_2 \\
x_1 & f_1 & & \nabla^2 f_2 & \\
 & & \nabla f_2 & & \\
x_2 & f_2 & & &
\end{array}$$

جہاں $\nabla f_{-1} = f_{-1} - f_{-2}$ ، $\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$ اور $\nabla f_1 = f_1 - f_0$ ہیں۔عمومی جزو

$$\nabla f_m = f_m - f_{m-1} \tag{21.11}$$

ہو گا۔اسی طرح

$$\nabla^2 f_m = \nabla f_m - \nabla f_{m-1}$$

ہو گا۔ باقی اجزاء بھی اسی طرح حاصل کیے جاتے ہیں۔ ایک جیسے زیر نوشت والے اجزاء ترچھی لکیروں پر اوپر رخ یا جدول میں پیچھے رخ لکیروں پر پائے جاتے ہیں۔ جدول کی آخر میں حساب کے دوران پیچھے فرق عموماً زیادہ مدد گار ثابت ہوتا ہے۔

جدول میں کسی بھی فرق کو اب تین مختلف علامتوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر جدول 21.3 میں ہم $x_0 = 1.6$ لیں تب $\nabla f_0 = \Delta f_{-1} = \delta f_{-1/2} = -0.0893$ ہو گا۔یوں عمومی طور پر

$$\delta^n f_m = \Delta^n f_{m-n/2} = \nabla^n f_{m+n/2}$$

[31] backward difference

جدول 21.4: غلطی تمام فرق میں پھیل جاتی ہے۔یہاں تفاعل $f(x) = \sqrt{x}, \; x = 2.0(0.1)2.6$ ہےاور معنی خیز ہندسے چار ہیں۔ غلطی $f(2.3)$ میں ہے۔

x	$\sqrt{x}$	فرق			$\sqrt{x}$	فرق			پھیلنا کا ϵ غلطی			
2.0	1.4142				1.41412							
		349				349						
2.1	1.4491		-8		1.4491		8					
		341		1		341		$\underline{11}$				ϵ
2.2	1.4832		-7		1.4832		$\underline{3}$				ϵ	
		334		-1		$\underline{344}$		$-\underline{31}$		ϵ		-3ϵ
2.3	1.5166		-8		$\underline{1.5176}$		$-\underline{28}$		ϵ		-2ϵ	
		326		1		$\underline{316}$		$\underline{31}$		$-\epsilon$		3ϵ
2.4	1.5492		-7		1.5492		$\underline{3}$				ϵ	
		319		2		319		$-\underline{8}$				$-\epsilon$
2.5	1.5811		-5		1.5811		$-\underline{5}$					
		314				314						
2.6	1.6125				1.6125							

ہو گا۔

جدول میں غلطیوں کی نشاندہی کرنے کے لئے فرق کا سہارا لیا جاتا ہے۔جیسا جدول 21.4 میں دکھایا گیا ہے، تفاعل میں خلل ϵ جلد تمام فرق میں پھیل جاتا ہے۔یوں فرق میں بہت زیادہ اتار چڑھاو تفاعل کی قیمت میں غلطی کو ظاہر کرتی ہے۔ظاہر ہے کہ کم تعداد کی معنی خیز ہندسوں کی بنا معمولی اتار چڑھاو ہر صورت پائی جائے گی۔

تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنے میں بھی فرق اہم کردار ادا کرتا ہے۔قدم h لیتے ہوئے n درجی کثیر رکنی $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ کے جدول فرق میں تمام n ویں فرق مستقل ($n!h^na_0$ کے برابر) ہوں گے اور ان سے بلند فرق صفر ہوں گے۔ایسا اس لئے ہو گا کہ پہلے فرق

$$p_n(x+h) - p_n(x) = a_0[(x+h)^n - x^n] + \cdots = a_0nhx^{n-1} + \cdots$$

کا درجہ $n-1$ ہے، دوسرے فرق کے کثیر رکنی کا درجہ $n-2$ ہو گا اور اس کے پہلے جزو کا عددی سر $a_0n(n-1)h^2$ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔یوں اگر تفاعل f کے جدول فرق میں n ویں فرق کسی سعت میں تقریباً مستقل ہوں تب جدول کی قیمتوں کو اس سعت میں n درجی کثیر رکنی p_n سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔آئیں دیے گیے f کی صورت میں کثیر رکنی p_n کے حصول کی ایک ترکیب دیکھیں۔

مثال 21.7: تفاعل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرنا
جدول 21.4 میں دوسرا فرق تقریباً مستقل (-7 کے برابر) ہیں۔یوں ہم دیے گئے تفاعل کی تخمینی دو درجی کثیر رکنی p_2 تلاش کر سکتے ہیں۔ہم پہلے جدول فرق بناتے ہیں۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ تمام دوسرے فرق ٹھیک ٹھیک -7 کے برابر ہیں ہم سعت کے وسط میں تفاعل کی کوئی قیمت اور پہلا فرق منتخب کرتے ہیں مثلاً 1.5166 اور 334 جس سے جدول 21.5 حاصل ہوتا ہے۔ p_2 کے پہلے عددی سر کو

$$\text{دوسرا فرق} = a_0 2! h^2 = a_0 \cdot 2 \cdot 0.1^2 = -0.0007$$

سے حاصل کیا جاتا ہے۔یوں $a_0 = -\frac{0.0007}{0.02} = -0.035$ ملتا ہے۔اس طرح

$$p_1(x) = p_2(x) + 0.035x^2$$

درجہ اول ہو گا اور جدول 21.5 سے ہم حساب لگا کر دیکھتے ہیں کہ اس کے پہلے صفر تقریباً مستقل (0.04915) ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ یہ a_h کے برابر ہے۔یوں $a_1 = \frac{0.04915}{0.1} = 0.4915$ حاصل ہوتا ہے۔آخر میں $p_1(x) - 0.4915x = a_2 = 0.5713$ ہو گا لہٰذا

$$p_2(x) = -0.0350x^2 + 0.4915x + 0.5713$$

ہو گا۔اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ فرق کو استعمال کرتے ہوئے تخمینی کثیر رکنی حاصل کرنے سے پہلے، تخمینی کثیر رکنی کی درستگی کا معیار جانا جا سکتا ہے۔ تخمینی کثیر رکنی کی حصول کے دیگر تراکیب پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

□

سوالات

سوال 21.26: قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے جدول 21.2 حاصل کریں۔

سوال 21.27: قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے جدول 21.3 حاصل کریں۔

سوال 21.28: جدول 21.3 میں $x_0 = 1.2$ منتخب کرتے ہوئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچھے فرق کے جدول مکمل کریں۔

جدول 21.5: تفاعل $f(x)=\sqrt{x}$ کو دو درجی کثیر رکنی p_2 سے ظاہر کرنا

x	$p_2(x)$	فرق	
2.0	1.4143		
		348	
2.1	1.4491		−7
		341	
2.2	1.4832		−7
		<u>334</u>	
2.3	<u>1.5166</u>		−7
		327	
2.4	1.5493		−7
		320	
2.5	1.5813		−7
		313	
2.6	1.6126		

سوال 21.29: $x_0=2$ منتخب کرتے ہوئے تفاعل $f(x)=x^3$ کا $x=0(1)5$ کے لئے (الف) وسطی فرق، (ب) آگے فرق اور (پ) پیچھے فرق کے جدول مکمل کریں۔

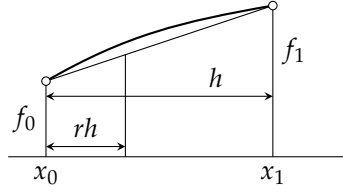
سوال 21.30: درج ذیل دکھائیں۔

$$\delta^2 f_m = f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}$$
$$\delta^3 f_{m+1/2} = f_{m+2} - 3f_{m+1} + 3f_m - f_{m-1}$$

سوال 21.31: $f(x)=\frac{1}{x+1}$ کی قیمتیں $x=0(0.2)1$ کے لئے (الف) دو معنی خیز ہندسوں، (ب) تین معنی خیز ہندسوں اور (پ) چار معنی خیز ہندسوں تک حاصل کریں۔ان کے مطابقتی جدول فرق میں پور و پور خلل کا آپس میں موازنہ کریں۔

سوال 21.32: $x=0(1)10$ کے لئے $f(x)=x^2$ کا جدول فرق مکمل کریں۔ایک اور جدول میں $f(5)=25$ کی جگہ 26 لکھتے ہوئے پہلا فرق، دوسرا فرق، تیسرا فرق اور چوتھا فرق تلاش کریں۔جدول میں غلطی کا پھیلنا دیکھیں۔

سوال 21.33: فرق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل جدول کی جانچ پڑتال کریں۔

x	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
$f(x)$	0.250	0.244	0.242	0.233	0.227	0.222

شکل 21.5: خطی باہمی تحریف

سوال 21.34: مثال 21.7 میں کی گئی تمام حساب خود کریں۔

21.4 باہمی تحریف

عموماً تفاعل $f(x)$ کی قیمتوں کا جدول دیا گیا ہو گا اور ہمیں ان x پر تفاعل کی قیمت درکار ہو گی جو جدول میں دیے گئے x کی قیمتوں کے درمیان پائے جاتے ہوں۔ایسی قیمتوں کے حصول کی عمل کو ہم **باہمی تحریف**[32] کہیں گے۔اس عمل میں $f(x)$ کی استعمال ہونے والی قیمتوں کو **چول قیمتیں**[33] کہتے ہیں۔باہمی تحریف کی ترکیب اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ نقطہ x کے قریب تفاعل $f(x)$ کو کثیر رکنی p سے ظاہر کرنا ممکن ہے لہٰذا x کے قریب کسی بھی نقطے پر p کی قیمت کو اس نقطے پر تفاعل کی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔

سادہ ترین طریقہ **خطی باہمی تحریف**[34] ہے۔اس ترکیب میں جدول میں درکار x کی دونوں جانب درج نقطوں x_0 اور x_1 کے مابین سیدھی قطع سے اس خطہ میں $f(x)$ کو ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 21.5)۔یوں جیسا ہم چھوٹی جماعتوں کی حساب سے جانتے ہیں، نقطہ $x = x_0 + rh$ پر f کی قیمت تخمیناً

$$f(x) \approx p_1(x) = f_0 + r(f_1 - f_0) = f_0 + r\Delta f_0 \qquad (r = \frac{x - x_0}{h},\ 0 \le r \le 1) \tag{21.12}$$

ہو گی۔یوں اگر $\ln 9.0 = 2.197$ اور $\ln 9.5 = 2.251$ ہوں تب $\ln 9.2$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $r = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$ حاصل کر کے

$$\ln 9.2 = \ln 9.0 + 0.4(\ln 9.5 - \ln 9.0) = 2.219$$

---

[32] interpolation
[33] pivotal values
[34] linear interpolation

حاصل کرتے ہیں۔

خطی باہمی تحریف اس صورت تسلی بخش ہو گی جب جدول میں x کی قیمتیں اتنی قریب قریب ہوں کہ ان کے مابین منحنی سے سیدھی قطعات کی انحراف کم ہو، مثلاً ہر x_0 اور x_1 کے درمیان ہر x کے لئے انحراف جدول میں آخری ہندسہ کی اکائی کی نصف ($\frac{1}{2}$) سے کم ہو۔

دو درجی باہمی تحریف[35] میں ہم x_0 اور $x_2 = x_0 + 2h$ کے درمیان منحنی f کو ایسی دو درجی قطع مکافی سے ظاہر کرتے ہیں جو نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) اور (x_2, f_2) سے گزرتی ہو۔یوں بہتر کلیہ

(21.13)
$$f(x) \approx p_2(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f_0 \qquad \left(r = \frac{x - x_0}{h},\ 0 \le r \le 2\right)$$

اخذ ہوتا ہے جہاں $x = x_0 + rh$ ہے۔یوں $x = x_0\ (r = 0)$ کے لئے دایاں ہاتھ f_0 کے برابر ہو گا؛ $x = x_1\ (r = 1)$ کے لئے بایاں ہاتھ $f_0 + \Delta f_0 = f_1$ کے برابر ہو گا اور $x = x_2\ (r = 2)$ کے لئے اس کی قیمت

$$f_0 + 2(f_1 - f_0) + [(f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)] = f_2$$

ہو گی۔

مثال 21.8: *خطی اور دو درجی باہمی تحریف*

اگر $\ln 9.0 = 2.1972$ اور $\ln 9.5 = 2.2513$ ہوں تب مساوات 21.12 سے $\ln 9.2 = 2.2188$ حاصل ہوتا ہے جو تین معنی خیز ہندسوں تک درست ہے جبکہ $\ln 10.0 = 2.3026$ لیتے ہوئے مساوات 21.13

$$\ln 9.2 = 2.1972 + 0.4 \cdot 0.0541 + \frac{0.4 \cdot (-0.6)}{2}(-0.0028) = 2.2192$$

دیتی ہے جو چار معنی خیز ہندسوں تک درست جواب ہے۔ □

مزید بہتر جوابات حاصل کرنے کی خاطر زیادہ بلند درجی کثیر رکنی استعمال کرنی ہو گی۔ $n + 1$ مختلف نقطوں پر قیمتوں سے یکتا n درجی کثیر رکنی حاصل ہو گی۔ہمیں یہاں ایسی کثیر رکنی p_n درکار ہے کہ

$$p_n(x_0) = f_0, \cdots, p_n(x_n) = f_n$$

---
[35] quadratic interpolation

ہوں جہاں $f_0 = f(x_0)$ ، $\cdots$ ، $f_n = f(x_n)$ جدول میں f کی قیمتیں ہیں۔یہ کثیر رکنی آگے فرق، باہمی تحریف کلیہ نیوٹن[36]

$$f(x) \approx p_n(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \tag{21.14}$$

$$\left(x = x_0 + rh,\ r = \frac{x - x_0}{h},\ 0 \le r \le n\right)$$

دیتی ہے۔اس کلیہ میں $n = 1$ پر کرنے سے مساوات 21.12 اور $n = 2$ پر کرنے سے مساوات 21.13 حاصل ہوتا ہے۔ہمیں اب $p_n(x_k) = f_k \ (k = 0, 1, \cdots, n)$ ثابت کرنا ہو گا۔ مساوات 21.14 کے دائیں ہاتھ سے

$$f_k = \binom{k}{0} f_0 + \binom{k}{1}\Delta f_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{k}{k}\Delta^k f_0 \tag{21.15}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں ثنائی عددی[37] سر درج ذیل ہیں جہاں $s! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s$ کے برابر ہے۔

$$\binom{k}{0} = 1, \quad \binom{k}{s} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-s+1)}{s!} \quad (s \ge 0, \text{عدد صحیح}) \tag{21.16}$$

در حقیقت مساوات 21.14 میں $r = k$ پر کرنے سے مساوات 21.14 کا دایاں ہاتھ اور مساوات 21.15 بالکل ایک جیسے ہوں گے۔مساوات 21.15 کو الکرا جی ماخوذ سے ثابت کرتے ہیں۔

ثبوت: $k = 0$ کے لئے مساوات 21.15 درست ہے۔فرض کریں کہ یہ $k = q$ کے لئے بھی درست ہے۔تب مساوات 21.15 میں $k = q$ استعمال کر کے، Δ کی اطلاق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} f_{q+1} &= f_q + \Delta f_q \\ &= \binom{q}{0} f_0 + \binom{q}{1}\Delta f_0 + \binom{q}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{q}{q}\Delta^q f_0 \\ &\quad + \binom{q}{0}\Delta f_0 + \binom{q}{1}\Delta^2 f_0 + \binom{q}{2}\Delta^3 f_0 + \cdots + \binom{q}{q}\Delta^{q+1} f_0 \end{aligned}$$

اس کلیہ میں $\Delta^s f_0$ کا عددی سر (مساوات 21.16)

$$\binom{q}{s} + \binom{q}{s-1} = \binom{q+1}{s}$$

---

[36] Newton's forward-difference interpolation formula
[37] binomial coefficients

ہے جو $k = q + 1$ کے لئے مساوات 21.15 دیتا ہے۔یوں الکراجی ماخوذ کے ذریعہ ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مساوات 21.14 کی طرح ایسا کلیہ جو پیچھے فرق پر مبنی ہو، **پیچھے فرق، باہمی تحریف کلیہ نیوٹن**[38]

$$f(x) \approx p_n(x) = f_0 + r\nabla f_0 + \frac{r(r+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \cdots + \frac{r(r+1)\cdots(r+n-1)}{n!}\nabla^n f_0 \tag{21.17}$$

ہے جہاں مساوات 21.14 کی طرح $x = x_0 + rh,\ r = \frac{x-x_0}{h},\ 0 \le r \le n$ ہیں۔

باہمی تحریف کے کلیات اور استعمال پر کثیر مواد پایا جاتا ہے۔مثال کے طور پر صرف جفت رتبہ فرق پر مبنی کلیات پائے جاتے ہیں۔اس طرز کا ایک انتہائی اہم اور سادہ ترین **کلیہ ایورٹ**[39] درج ذیل ہے۔

$$f(x) \approx (1-r)f_0 + rf_1 + \frac{(2-r)(1-r)(-r)}{3!}\delta^2 f_0 + \frac{(r+1)r(r-1)}{3!}\delta^2 f_1 \tag{21.18}$$

جہاں $r = \frac{x-x_0}{h},\ 0 \le r \le 1$ ہیں۔

مثال 21.9: **کلیہ ایورٹ کا استعمال**

تفاعل $e^{1.24}$ کی قیمت مساوات 21.18 میں دیے گئے کلیہ ایورٹ اور درج ذیل جدول سے حاصل کریں۔

x	e^x	δ^2
1.2	3.3201	333
1.3	3.6693	367

اب $r = \frac{0.04}{0.1} = 0.4$ ہے لٰہذا مساوات 21.18 درج ذیل دے گی

$$\begin{aligned} e^{1.24} \approx 0.6 \cdot 3.3201 + 0.4 \cdot 3.6693 + \frac{1.6 \cdot 0.6 \cdot (-0.4)}{6} \cdot 0.0333 \\ + \frac{1.4 \cdot 0.4 \cdot (-0.6)}{6} \cdot 0.0367 \\ = 3.4598 - 0.0021 - 0.0021 = 3.4556 \end{aligned}$$

---

[38] Newton's backward-difference interpolation formula
[39] Everett formula

جو چار معنی خیز ہندسوں تک درست جواب ہے۔دھیان رہے کہ خطی باہمی تحریف 3.4598 دیتی ہے جو صرف دو معنی خیز ہندسوں تک درست جواب ہے۔ (آپ $e^{1.1} = 3.0042$ اور $e^{1.4} = 4.0552$ استعمال کرتے ہوئے دوسرے فرق کی جانچ پڑتال کر سکتے ہیں۔) $\square$

عمومی کلیہ ایورٹ[40] درج ذیل ہے

$$f(x) = qf_0 + rf_1 + \binom{q+1}{3}\delta^2 f_0 + \binom{r+1}{3}\delta^2 f_1 + \binom{q+2}{5}\delta^4 f_0 + \binom{r+2}{5}\delta^4 f_1 + \cdots \tag{21.19}$$

جہاں $r = \frac{x-x_0}{h}$, $0 \le r \le 1$ اور $q = 1 - r$ ہیں۔اس کلیہ میں $\delta^4 f_0$ اور $\delta^2 f_0$ کے عددی سروں کی نسبت

$$\frac{\binom{q+2}{5}}{\binom{q+1}{3}} = \frac{q^2-4}{20}$$

ہے۔اسی طرح $\delta^4 f_1$ اور $\delta^2 f_1$ کے عددی سروں کی نسبت $\frac{r^2-4}{20}$ ہے۔یہ دونوں نسبت وقفہ 0 تا 1 میں بہت کم تبدیل ہوتے ہیں۔یوں اگر ان کی جگہ ان کی کوئی موزوں اوسط قیمت μ منتخب کی جائے تب **تبدیل شدہ دوسرے فرق**[41]

$$\delta_m^2 f = \delta^2 f + \mu\delta^4 f, \quad \mu = -0.18393 \tag{21.20}$$

استعمال کرتے ہوئے چوتھی فرق کے اثر کو مساوات 21.18 میں سمویا جا سکتا ہے، جہاں μ کی دی گئی قیمت ایک موزوں قیمت ہے۔

ہم بغیر ثبوت پیش کیے بتلانا چاہتے ہیں کہ اگر $x_0, x_1, \cdots, x_n$ کے آپس میں فاصلے اختیاری ہوں تب n درجی کثیر رکنی جو (x_0, f_0)، $\cdots$، (x_n, f_n) سے گزرتا ہو، جہاں $f_j = f(x_j)$ ہے، **منقسم فرق باہمی تحریف کلیہ نیوٹن**[42]

$$f(x) \approx f_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \cdots + (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,\cdots,x_n] \tag{21.21}$$

---

[40] Everett formula
[41] modified second differences
[42] Newton's divided difference interpolation formula

کا دایاں ہاتھ ہو گا جہاں منقسم فرق[43] درج ذیل دہرانے کے تعلقات دیتے ہیں۔

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},\quad f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0},\cdots$$
$$f[x_0,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0} \tag{21.22}$$

اگر $x_k=x_0+kh$ (یکساں فاصلے) ہو تب $f[x_0,\cdots,x_k]=\frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$ ہو گا اور مساوات 21.21 سے مساوات 21.14 حاصل ہو گی۔

باہمی تحریف کی مختلف تراکیب فرق میں ہم فرق معلوم کرتے ہیں جس کو جدول کی درستگی کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔البتہ کس درجہ کی باہمی تحریف استعمال کی جائے، عموماً اس سوال کا جدول میں جواب نہیں دیا جاتا ہے۔لیگرینج باہمی تحریف[44] کی ترکیب لیگرینج باہمی تحریف کے کلیہ

$$f(x)\approx \mathrm{L}_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}f_k \tag{21.23}$$

پر مبنی ہے جہاں ضروری نہیں ہے کہ $x_0,\cdots,x_n$ برابر فاصلوں پر ہوں اور

$$\begin{aligned}l_0(x)&=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\\ l_k(x)&=(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n),\quad 0<k<n\\ l_n(x)&=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned} \tag{21.24}$$

ہیں۔ مساوات 21.23 کو $n+1$ نقطوں کا کلیہ لیگرینج کہتے ہیں۔چونکہ مساوات 21.24 سے $j\neq k$ کی صورت میں $l_k(x_j)=0$ اور $x=x_k$ کی صورت میں $\frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}=f_k$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا $\mathrm{L}_n(x_k)=f_k$ ہو گا۔اس ترکیب میں فرق حاصل کرنے کی ضرورت نہیں ہے اور ہم مختلف f_k کے اثرات کو سیدھ و سیدھ دیکھ سکتے ہیں۔ ہاں اب حساب زیادہ مشکل ضرور ہو گا اور جدول میں غلطی کی جانچ پڑتال ممکن نہیں ہو گی۔اس لئے ضروری ہے کہ یہ ترکیب صرف مستند جدول پر لاگو کیا جائے۔

مثال 21.10: لیگرینج کلیہ باہمی تحریف کا استعمال

$\ln 9.2$ کی قیمت مساوات 21.23 اور درج ذیل قیمتوں کی مدد سے تلاش کریں۔

x	9.0	9.5	10.0	11.0
$\ln x$	2.197 22	2.251 29	2.302 59	2.397 90

---

[43] divided difference
[44] Lagrangian interpolation

جدول 21.6: جدول برائے سوال 21.36 تا سوال 21.41

x	$\sin x$	پہلا فرق	دوسرا فرق
0.0	0.000 00		
		19 867	
0.2	0.198 67		−792
		19 075	
0.4	0.389 42		−1553
		17 522	
0.6	0.564 64		−2250
		15 272	
0.8	0.717 36		−2861
		12 411	
1.0	0.841 47		

ہمارے پاس $l_0(x) = (x-9.5)(x-10)(x-11)$ ، $l_1(x) = (x-9)(x-10)(x-11)$ ، ... ہیں۔ یوں

$$\ln 9.2 = \frac{-0.43200}{-1.00000} \cdot 2.19722 + \frac{0.28800}{0.37500} \cdot 2.25129 + \frac{0.10800}{-0.50000} \cdot 2.30259 + \frac{0.04800}{3.00000} \cdot 2.39790 = 2.21920$$

ہو گا جو پانچ معنی خیز ہندسوں تک درست جواب ہے۔ □

سوالات

سوال 21.35: دکھائیں کہ مساوات 21.13 میں دیا گیا قطع مکافی نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتا ہے۔

جدول 21.6 کو سوال 21.36 تا سوال 21.41 میں استعمال کریں۔

سوال 21.36: $\sin 0.26$ کی قیمت خطی باہمی تحریف (مساوات 21.12) سے تلاش کریں۔ دکھائیں کہ اعشاریہ کے بعد پہلے دو ہندسے بالکل ٹھیک ہیں۔

سوال 21.37: $\sin 0.26$ کی قیمت دو درجی باہمی تحریف یعنی مساوات 21.13 کی مدد سے حاصل کریں۔ دکھائیں پہلے تین معنی خیز ہندسے بالکل درست ہیں۔
جواب: 0.257 53

سوال 21.38: جدول 21.6 میں تیسرے فرق اور چوتھے فرق شامل کرتے ہوئے $\sin 0.26$ کی قیمت مساوات 21.14 کی مدد سے (الف) $n=3$ اور (ب) $n=4$ لیتے ہوئے حاصل کریں۔نتائج کا موازنہ پانچ معنی خیز ہندسوں تک درست جواب $\sin 0.26 = 0.257\,08$ کے ساتھ کریں۔آپ دیکھیں گے کہ $n=3$ سے تین معنی خیز ہندسوں تک اور $n=4$ سے پانچ معنی خیز ہندسوں تک درست جواب حاصل ہو گا۔

سوال 21.39: $\sin 0.26$ کو مساوات 21.17 کی مدد سے (الف) $n=1$ لے کر اور (ب) $n=2$ لے کر حاصل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ دونوں صورتوں میں پہلے دو معنی خیز ہندسے درست ہوں گے۔یوں موجودہ نتیجہ سوال 21.36 کے نتیجہ سے کم درست ہے۔ کیوں؟
جوابات: (الف) $0.258\,27$ ، (ب) $0.258\,27$

سوال 21.40: جدول 21.6 کو وسیع کرتے ہوئے (الف) $n=3$ لے کر، (ب) $n=4$ لے کر اور (پ) $n=5$ لے کر مساوات 21.17 کی مدد سے $\sin 0.26$ کی قیمت تلاش کریں۔آپ کو $x=-0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2$ پر $\sin x$ کی قیمتیں درکار ہوں گی اور مطابقتی فرق درکار ہوں گے۔سائن تفاعل کی کون سی خاصیت اس وسعت کو آسان بناتی ہے۔موجودہ نتائج سوال 21.38 کے نتائج سے کیوں کم ٹھیک ہیں؟
جوابات: (الف) $0.257\,09$ ، (ب) $0.257\,05$ اور (پ) $0.257\,08$ ؛ جواب (پ) پانچ معنی خیز ہندسوں تک درست ہے۔

سوال 21.41: دکھائیں کہ بہت کم محنت کے ساتھ کلیہ ایورٹ (مساوات 21.18) استعمال کرتے ہوئے $\sin 0.26 = 0.257\,07$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 21.42: مثال 21.9 میں کی گئی حساب کی تصدیق کریں۔

سوال 21.43: $f(2.0) = 1.414\,214$ ، $f(2.3) = 1.516\,575$ اور $f(2.6) = 1.612\,452$ استعمال کرتے ہوئے تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کی دو درجی باہمی تحریف کریں۔نتائج کا جدول 21.5 کے ساتھ موازنہ کریں۔
جوابات: $f(x) \approx 0.566\,106 + 0.496\,098x - 0.036\,022x^2$

سوال 21.44: درج ذیل دکھائیں۔

$$\Delta^k f_n = \binom{k}{0} f_{n+k} - \binom{k}{1} f_{n+k-1} + - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} f_n$$

سوال 21.45: $f(1)=2$ ، $f(2)=11$ اور $f(4)=77$ استعمال کرتے ہوئے عمومی کلیہ لیگرینج (مساوات 21.23) سے $f(3)$ تلاش کریں۔
جواب: $8x^2-15x+9,\quad 36$

سوال 21.46: $\ln 8.5=2.140\,07$ لیں جبکہ $\ln 9.0$ ، $\ln 9.5$ ، $\ln 10$ کی قیمتیں مثال 21.10 میں دی گئی ہیں۔ $\ln 9.2$ کو (الف) $n=3$ اور $x_0=8.8$ لیتے ہوئے مساوات 21.14 سے حاصل کریں؛ (ب) $n=3$ اور $x_0=10$ لیتے ہوئے مساوات 21.17 سے حاصل کریں۔

سوال 21.47: $\ln 8.5=2.140\,07$ لیں جبکہ $\ln 9$ ، $\ln 10$ اور $\ln 11$ مثال 21.10 میں دی گئی ہیں۔اب $n=3$ لیتے ہوئے مساوات 21.23 سے $\ln 9.2$ کی قیمت تلاش کریں۔حاصل جواب کا مثال 21.10 کے نتیجہ سے موازنہ کریں۔
جواب: 2.219 21 جو کم درست ہے چونکہ آخری ہندسہ میں 1 اکائی کا خلل ہے۔

سوال 21.48: سوال 21.46 میں دی گئی مواد استعمال کرتے ہوئے $\ln 9.2$ کی قیمت (الف) مساوات 21.18 استعمال کرتے ہوئے، (ب) $n=3$ لیتے ہوئے مساوات 21.23 استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 21.49: فرض کریں کہ $x_1=x_0+h$ ، $x_2=x_0+2h$ ، $x_3=x_0+3h$ ہیں اور $r=\frac{x-x_0}{h}$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $n=3$ کے لئے ہم مساوات 21.23 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x)\approx-\binom{r-1}{3}f_0+\frac{r(r-2)(r-3)}{2}f_1-\frac{r(r-1)(r-3)}{2}f_2+\binom{r}{3}f_3$$

سوال 21.50: سوال 21.49 کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے سوال 21.48-ب کا نتیجہ دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 21.51: (فرق کی جانچ پڑتال) دکھائیں کہ قطار میں دیے گئے اندراجات کا مجموعہ گزشتہ قطر کی آخری اور پہلی اندراج کے فرق کے برابر ہو گا۔اس جزوی پرکھ کی جدول 21.3 پر اطلاق کریں۔

21.5 لچکدار منحنیات

ٹکڑوں میں تخمینی کثیر رکنی کو لچکدار منحنی کہتے ہیں۔اس کا مطلب ہے کہ وقفہ $a \le x \le b$ پر ہم دیے گیے تفاعل $f(x)$ کا تخمینی تفاعل $g(x)$ حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ظاہر ہے کہ ہم چاہیں گے کہ تخمینی تفاعل اصل تفاعل کے قریب سے قریب تر نمائندگی کرے۔ہم $g(x)$ کو حاصل کرنے کی خاطر وقفہ $a \le x \le b$ کو چھوٹے خانوں (ٹکڑوں)

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \tag{21.25}$$

میں تقسیم کرتے ہیں جہاں خانوں کے سروں کو جوڑ[45] کہا جاتا ہے۔ہر خانے پر $g(x)$ کو ایک ایسی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ خانے کی سروں پر $g(x)$ بار بار قابل تفرق ہو۔یوں پورے وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل $f(x)$ کو تخمینی کثیر رکنی سے ظاہر کرنے کی بجائے ہم اس کو n عدد کثیر رکنی سے ظاہر کرتے ہیں۔یوں حاصل تخمینی $g(x)$ باہمی تحریف میں بہتر ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر وقفہ $a \le x \le b$ کے ہر ایک خانے میں کثیر رکنی سے $g(x)$ کا ارتعاشی کم ہو گا۔ یوں حاصل تفاعل $g(x)$ کو **لچکدار منحنیات**[46] کہتے ہیں۔

ہم ہر خانے کا تخمینی خطی تفاعل استعمال کر سکتے ہیں لیکن ایسا تفاعل خانہ کی جوڑوں پر غیر استمراری ہو گا۔ایسا تفاعل جو وقفہ $a \le x \le b$ کے ہر نقطہ پر کئی بار قابل تفرق ہو بہتر ثابت ہوتا ہے۔

ہم کعبی لچکدار منحنیات پر غور کرتے ہیں جو عملی استعمال کے نقطہ نظر سے غالباً اہم ترین ہیں۔تعریف کی رو سے وقفہ $a \le x \le b$ پر مساوات 21.25 میں دیے گئے خانوں کے لحاظ سے **کعبی لچکدار منحنی**[47] $g(x)$ سے مراد استمراری تفاعل $g(x)$ ہے جس کے استمراری یک رتبی اور دو رتبی تفرق پورے وقفہ پر پائے جاتے ہوں اور جس کو ہر خانہ پر ایسی کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہو جس کا درجہ تین سے زیادہ نہ ہو۔یوں ہر خانہ میں $g(x)$ کو ایک کعبی کثیر رکنی سے ظاہر کیا جائے گا۔

اگر وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہو اور اس وقفہ کے خانے (مساوات 21.25) منتخب کیے گئے ہوں تب، گزشتہ حصہ کی طرح، $f(x)$ کی تخمینی کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوئے حاصل ہو گی۔

$$g(x_0) = f(x_0), \quad g(x_1) = f(x_1), \cdots \quad, g(x_n) = f(x_n) \tag{21.26}$$

---

[45] nodes
[46] splines or flexible curves
[47] cubic spline

ہم فرض کرتے ہیں کہ ایسا کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ پایا جاتا ہے جو مساوات 21.26 کو مطمئن کرتا ہو۔اب اگر $g(x)$ درج ذیل بھی شرائط

$$g'(x_0)=k_0,\quad g'(x_n)=k_n \tag{21.27}$$

(جہاں k_0 اور k_n دیے گئی عدد ہیں) پر بھی پورا اترتا ہو تب $g(x)$ یکتا ہو گا۔درج ذیل مسئلہ لچکدار منحنی کی موجودگی اور یکتائی کو بیان کرتا ہے۔

مسئلہ 21.2: کعبی لچکدار منحنیات

فرض کریں کہ وقفہ $a\le x\le b$ پر تفاعل $f(x)$ دیا گیا ہے اور اس وقفہ کے خانے مساوات 21.25 میں دیے گئے ہوں اور فرض کریں کہ k_0 اور k_n کوئی دو عدد ہوں۔تب مساوات 21.25 کے لحاظ سے ایسا صرف اور صرف ایک کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ موجود ہو گا جو مساوات 21.26 اور مساوات 21.27 کو مطمئن کرتا ہو۔

ثبوت: تعریف کی رو سے ہر خانہ I_j میں، جس کو $x_j\le x\le x_{j+1}$ ظاہر کرتا ہے، لچکدار منحنی $g(x)$ اور کعبی کثیر رکنی $p_j(x)$ ایک جیسے ہوں گے اور درج ذیل کو مطمئن کریں گے۔

$$p_j(x_j)=f(x_j),\quad p_j(x_{j+1})=f(x_{j+1}) \tag{21.28}$$

ہم $\frac{1}{x_{j+1}-x_j}=c_j$ اور

$$p_j'(x_j)=k_j,\quad p_j'(x_{j+1})=k_{j+1} \tag{21.29}$$

لکھتے ہیں جہاں a_0 اور a_n دیے گئے ہیں جبکہ $k_1,\cdots,k_{n-1}$ بعد میں حاصل کیے جائیں گے۔ $p_j(x)$ کو مساوات 21.28 اور مساوات 21.29 میں دیے چار شرائط کو مطمئن کرنا ہو گا۔سیدھے حساب سے ہم تصدیق کر سکتے ہیں کہ ایسا کعبی کثیر رکنی $p_j(x)$ جو ان شرائط کو مطمئن کرتا ہو درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}p_j(x)=&f(x_j)c_j^2(x-x_{j+1})^2[1+2c_j(x-x_j)]\\&+f(x_{j+1})c_j^2(x-x_j)^2[1-2c_j(x-x_{j+1})]\\&+k_jc_j^2(x-x_j)(x-x_{j+1})^2\\&+k_{j+1}c_j^2(x-x_j)^2(x-x_{j+1})\end{aligned} \tag{21.30}$$

اس کا دو رتبی تفرق درج ذیل دیگا۔

$$p_j''=-6c_j^2f(x_j)+6c_j^2f(x_{j+1})-4c_jk_j-2c_jk_{j+1} \tag{21.31}$$

$$p_j''(x_{j+1})=-6c_j^2f(x_j)+6c_j^2f(x_{j+1})+2c_jk_j+4c_jk_{j+1} \tag{21.32}$$

تعریف کی رو سے $g(x)$ کی استمراری دو رتبی تفرق پائے جاتے ہیں۔اس سے درج ذیل شرط حاصل ہوتا ہے۔

$$p''_{j-1}(x_j) = p''_j(x_j) \qquad j = 1, 2, \cdots, n-1$$

مساوات 21.32 میں j کی جگہ $j-1$ اور مساوات 21.31 استعمال کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ $n-1$ عدد مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں

$$c_{j-1}k_{j-1} + 2(c_{j-1} + c_j)k_j + c_j k_{j+1} = 3[c_{j-1}^2 \nabla f_j + c_j^2 \nabla f_{j+1}] \tag{21.33}$$

جہاں $\nabla f_j = f(x_j) - f(x_{j-1})$ اور $\nabla f_{j+1} = f(x_{j+1}) - f(x_j)$ ہیں جبکہ $j = 1, \cdots, n-1$ ہے۔ اس $n-1$ عدد مساوات کے نظام کا حل $k_1, \cdots, k_{n-1}$ یکتا ہو گا چونکہ اس نظام کے تمام عددی سر غیر منفی ہیں اور مرکزی وتر پر ہر جزو، مطابقتی صف کے باقی اجزاء کے مجموعہ سے زیادہ ہے لہٰذا عددی سر قالب صفر نہیں ہو سکتا ہے۔اس طرح ہم جوڑ پر $g(x)$ کی یک رتبی تفرق کے یکتا $k_1, \cdots, k_{n-1}$ حاصل کرتے ہیں۔اس طرح ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

آئیں اس مسئلے کو ایک مثال کی مدد سے دیکھیں۔

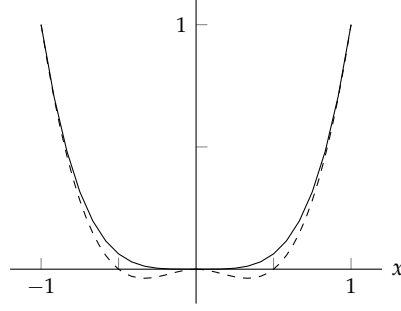
مثال 21.11: تخمینی لچکدار منحنی

وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر $x_0 = -1$ ، $x_1 = 0$ اور $x_2 = 1$ لیتے ہوئے $f(x) = x^4$ کی ایسی تخمینی کعبی لچکدار منحنی تلاش کریں جو مساوات 21.26 کو مطمئن کرتی ہو اور $g'(-1) = f'(-1)$ ، $g'(1) = f'(1)$ ہوں۔

حل: ہمیں درج ذیل کے عددی سر تلاش کرنے ہوں گے۔

$$p_0(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$p_1(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$p_0(0) = p_1(0) = f(0) = 0$ سے $a_0 = b_0 = 0$ ملتے ہیں جبکہ $p'_0(0) = p'_1(0)$ سے $a_1 = b_1$ اور $p''_0(0) = p''_1(0)$ سے $a_2 = b_2$ حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$p_0(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$$
$$p_1(x) = b_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$$

شکل 21.6: تفاعل $f(x)$ اور (نقطہ دار) کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ (مثال 21.11)

ہو گا۔ باقی چار عددی سروں کو باقی چار شرائط سے حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
p_0(-1) &= -a_3 + a_2 - a_1 = f(-1) = 1 \\
p_1(1) &= b_3 + a_2 + a_1 = f(1) = 1 \\
p_0'(-1) &= 3a_3 - 2a_2 + a_1 = f'(-1) = -4 \\
p_1'(1) &= 3b_3 + 2a_2 + a_1 = f'(1) = 4
\end{aligned}
\tag{21.34}
$$

اس نظام کا حل $a_1 = 0$ ، $a_2 = -1$ ، $a_3 = -2$ ، $b_3 = 2$ ہے۔ یوں درکار لچکدار منحنی

$$
g(x) = \begin{cases} -2x^3 - x^2 & -1 \le x \le 0 \\ 2x^3 - x^2 & 0 \le x \le 1 \end{cases}
\tag{21.35}
$$

ہو گی (شکل 21.6 میں نقطہ دار منحنی)۔ □

لچکدار منحنیات کی ایک دلچسپ کمتر خوبی ہے جس کو اب اخذ کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ مسئلہ 21.2 میں وقفہ $a \le x \le b$ پر $f(x)$ استمراری ہے اور اس وقفہ پر $f(x)$ کے یک رتبی اور دو رتبی استمراری تفرق پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ مساوات 21.27 کی صورت درج ذیل ہے (مثال 21.11 کی طرح)۔

$$
g'(a) = f'(a), \quad g'(b) = f'(b)
\tag{21.36}
$$

تب a اور b پر $f' - g'$ صفر ہو گا۔ تکمل بالحصص سے

$$
\int_a^b g''(x)[f''(x) - g''(x)]\,\mathrm{d}x = -\int_a^b g'''(x)[f'(x) - g'(x)]\,\mathrm{d}x
$$

حاصل ہو گا۔چونکہ وقفہ کے ہر چھوٹے حصے پر $g'''(x)$ مستقل ہے لہٰذا دائیں ہاتھ تکمل کو کسی ایک ٹکڑے پر حاصل کرتے ہوئے $c[f(x) - g(x)]$ ملتا ہے جہاں c مستقل ہے اور تکمل کی یہ قیمت ٹکڑے کے سروں پر حاصل کی جائے گی جو مساوات 21.26 کی بنا صفر حاصل ہو گی۔چونکہ ہر ٹکڑے پر تکمل صفر ہے لہٰذا پورے وقفے پر تکمل صفر ہو گا۔اس طرح درج ذیل ثابت ہوتا ہے۔

$$\int_a^b f''(x)g''(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g''(x)^2\,\mathrm{d}x$$

نتیجتاً

$$\begin{aligned}\int_a^b [f''(x) - g''(x)]^2\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f''(x)^2\,\mathrm{d}x - 2\int_a^b f''(x)g''(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g''(x)^2\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f''(x)^2\,\mathrm{d}x - \int_a^b g''(x)^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ہو گا۔بائیں ہاتھ متکمل غیر منفی ہے لہٰذا تکمل بھی غیر منفی ہو گا جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int_a^b f''(x)^2\,\mathrm{d}x \ge \int_a^b g''(x)^2\,\mathrm{d}x \tag{21.37}$$

اس نتیجہ کو درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 21.3: کعبی لچکدار منحنی کی کمتر خاصیت
فرض کریں کہ وقفہ $a \le x \le b$ پر تفاعل $f(x)$ اور اس کے یک رتبی اور دو رتبی تفرق استمراری ہوں۔فرض کریں کہ اس وقفہ کے خانوں (مساوات 21.25) کے لحاظ سے $g(x)$ مطابقتی کعبی لچکدار منحنی ہو جو مساوات 21.26 اور مساوات 21.36 کو مطمئن کرتی ہو۔تب $f(x)$ اور $g(x)$ مساوات 21.37 کو مطمئن کریں گے جس میں علامت مساوات $(=)$ اس صورت کو ظاہر کرتی ہے جب $f(x)$ کعبی لچکدار منحنی $g(x)$ ہو۔

سوالات

سوال 21.52: تصدیق کریں کہ مساوات 21.30 میں دیا گیا $p_j(x)$ مساوات 21.28 اور مساوات 21.29 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 21.53: مساوات 21.31 اور مساوات 21.32 کو مساوات 21.30 سے اخذ کریں۔

سوال 21.54: مثال 21.11 پر غور کریں۔ دکھائیں کہ مثال میں دی گئی شرائط کے تحت مساوات 21.30 درج ذیل دے گی

$$\begin{aligned} p_0(x) &= -2x^3 - x^2 + k_1 x(x+1)^2 \\ p_1(x) &= \quad 2x^3 - x^2 + k_1 x(x-1)^2 \end{aligned}$$

جبکہ مساوات 21.33 سے $k_1 = 0$ حاصل ہو گا اور یوں مساوات 21.35 حاصل ہو گی۔

سوال 21.55: مثال 21.11 میں کعبی لچکدار منحنی کا موازنہ پورے وقفہ پر دو درجی تخمینی کثیر رکنی $p(x)$ کے ساتھ کریں۔ $f(x)$ سے $g(x)$ اور $p(x)$ کی زیادہ سے زیادہ انحراف کتنی ہیں۔

سوال 21.56: مساوات 21.34 میں دیے گئے نظام کا حل تلاش کریں۔

سوال 21.57: دکھائیں کہ وقفہ کے خانوں کے لحاظ سے کعبی لچکدار منحنیات سمتی فضا (حصہ 7.4) بناتے ہیں۔

سوال 21.58: دکھائیں کہ وقفہ کے دیے گئے خانوں (مساوات 21.25) کے لحاظ سے $n+1$ یکتا کعبی لچکدار منحنیات $g_0(x), \cdots, g_n(x)$ موجود ہوں گی جو $g_j'(a) = g_j'(b) = 0$ اور

$$g_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

کو مطمئن کریں گی۔
جواب: مسئلہ 21.2 سے ایسا اخذ ہوتا ہے۔

سوال 21.59: دکھائیں کہ اگر ایک لچکدار منحنی تین بار قابل تفرق ہو تب یہ ضرور کثیر رکنی ہو گا۔

سوال 21.60: ایسا ممکن ہے کہ وقفہ $a \leq x \leq b$ کی دو قریبی خانوں کی لچکدار منحنیات ایک جیسی ہوں۔ اس طرز کی لچکدار منحنیات دیکھنے کی خاطر وقفہ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ کی خانوں $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ ، $x_1 = 0$ ، $x_2 = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \sin x$ کی ایسی لچکدار منحنیات تلاش کریں جو $g'(-\frac{\pi}{2}) = f'(-\frac{\pi}{2})$ اور $g'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2})$ کو مطمئن کرتی ہوں۔
جواب: $g(x) = -\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{3}{\pi}x$

سوال 21.61: مساوات 21.37 کی جیومیٹریائی مطلب کچھ یوں ہے۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ لچکدار منحنی، مربع انحنا کے تکمل کی قیمت کو کم کرنے کی کوشش کرتی ہے۔ اس پر بحث کریں۔

21.6 اعدادی تکمل اور تفرق

اعدادی تکمل[48] سے مراد قطعی تکمل

$$J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{21.38}$$

کی اعدادی قیمت کی تلاش ہے جہاں a اور b دیے گئے ہوں گے اور f دیا گیا تفاعل یا تفاعل کی قیمتوں کا جدول ہو گا۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ہم ایسا قابل تفرق تفاعل F تلاش کر سکیں جس کا تفرق f ہو تب J کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

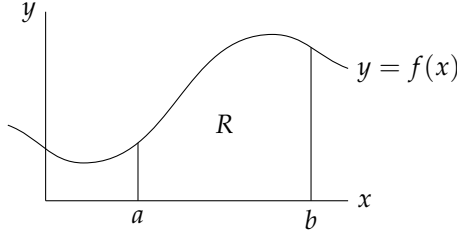
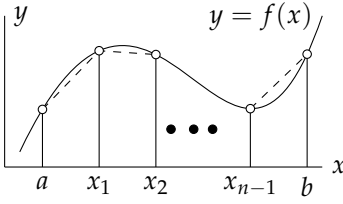
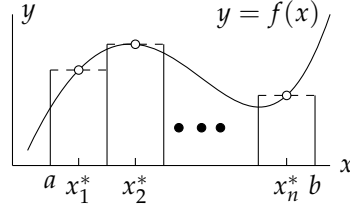
$$J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad [F'(x) = f(x)]$$

انجینئری میں عموماً ایسے تکمل پائے جاتے ہیں جن کا متکمل جدول کی صورت میں ہو گا یا تکمل کو متناہی تعداد کے بنیادی تفاعل کی صورت میں ظاہر کرنا نا ممکن ہو گا اور یا F کی صریح صورت پیچیدہ اور غیر مفید ثابت ہو گی۔ ایسی صورتوں میں اعدادی تکمل کارآمد ثابت ہوتا ہے۔

چونکہ وقفہ $a \le x \le b$ میں تفاعل $f(x)$ کے نیچے خطہ R کا رقبہ J ہے (شکل 21.7) لہٰذا ہم گتے سے R کی شکل کاٹ کر، گتے کی اس ٹکڑے کے وزن کو اکائی رقبہ گتے کی وزن سے تقسیم کرتے ہوئے R کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں۔ ہم کاغذ ترسیم[49] پر R کی شکل بنا کر ڈبے گن کر بھی R کا رقبہ دریافت کر سکتے ہیں۔ رقبہ کی بہتر ناپ کے لئے سطح پیما[50] کا استعمال ضروری ہو گا۔

متکمل کو کثیر رکنی سے ظاہر کرتے ہوئے اعدادی تراکیب بنائے جا سکتے ہیں۔ سادہ ترین کلیہ اخذ کرنے کی خاطر ہم تکمل کے وقفہ کو $h = \frac{b-a}{n}$ لمبائی کے n عدد برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر ٹکڑے پر تفاعل کو مستقل تفاعل $f(x_j^*)$ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں x_j^* ٹکڑے کا وسطی نقطہ ہے (شکل 21.8-الف)۔ یوں f

---

[48] numerical integration
[49] graph paper
[50] planimeter

شکل 21.7: قطعی تکمل کی جیومیٹریائی معنی

(الف) مستطیل قاعدہ

(ب) ذوزنقہ قاعدہ

شکل 21.8: اعدادی تکمل

کو **سیڑھی تفاعل**[51] (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ظاہر کرے گی۔ شکل 21.8-الف کے n مستطیلوں کے انفرادی رقبے $hf(x_1^*), \cdots, hf(x_n^*)$ ہیں جن کا مجموعہ اعدادی تکمل کا **مستطیل قاعدہ**[52]

$$J = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \approx h[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)], \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right) \tag{21.39}$$

دیتی ہے۔

step function[51]
rectangular rule[52]

تفاعل f کو ٹکڑوں میں خطی قطعات (شکل 21.8-ب) سے ظاہر کرنے سے اعدادی تکمل کا **ذوزنقہ قاعدہ**[53]

$$J = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h[\tfrac{1}{2}f(a) + f(x_1) + f(x+2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(b)] \tag{21.40}$$

حاصل ہو گا جہاں $h = \frac{b-a}{n}$ ہے اور $x_0\,(=a), x_1, x_2, c\ldots, x_{n-1}, x_n\,(=b)$ وہی نقطے ہیں جو مساوات 21.40 میں استعمال کیے گئے ہیں۔یوں $x_j = x_0 + jh$ ہو گا۔شکل 21.8-ب کے n ذوزنقہ کے انفرادی رقبے

$$\tfrac{1}{2}[f(a)+f(x_1)]h, \quad \tfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]h, \quad \cdots, \tfrac{1}{2}[f(x_{n-1})+f(b)]h$$

ہیں جن کا مجموعہ مساوات 21.40 کا دایاں ہاتھ دے گا۔

J^* میں خلل (حصہ 21.1) ϵ درج ذیل ہو گا۔

$$\epsilon = J^* - J$$

اگر $f(x)$ خطی تفاعل ہو تب $\epsilon = 0$ ہو گا اور تمام x کے لئے f' مستقل اور f'' صفر ہو گا۔عین ممکن ہے کہ کسی عمومی تفاعل f (جس کا استمراری دو رتبی تفرق پایا جاتا ہو) کی صورت میں ہم **حد خلل**[54] (یعنی خلل ϵ کی حد) تلاش کر سکیں جو f'' پر منحصر ہو۔اس خاطر ہم b کی جگہ متغیر t لیتے ہوئے مساوات 21.40 کا اطلاق $n = 1$ کے لئے کرتے ہیں۔تب مطابقتی خلل

$$\epsilon(t) = \frac{t-a}{2}[f(a)+f(t)] - \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔ہم دیکھتے ہیں کہ $\epsilon(a) = 0$ ہے جو ایک غیر دلچسپ نتیجہ ہے۔تفرق لینے سے

$$\epsilon'(t) = \frac{1}{2}[f(a)+f(t)] + \frac{t-a}{2}f'(t) - f(t)$$

حاصل ہو گا۔ہم دیکھتے ہیں کہ $\epsilon'(a) = 0$ ہے۔مزید ایک بار تفرق لینے سے

$$e''(t) = \frac{1}{2}(t-a)f''(t)$$

---

[53] trapezoidal rule
[54] error bound

حاصل ہو گا جس میں وقفہ $a \le x \le b$ پر f'' کی کم سے کم قیمت M_2^* اور زیادہ سے زیادہ قیمت M_2 پر کرنے سے وقفے پر تمام t کے لئے حد خلل

$$\frac{1}{2}(t-a)M_2^* \le \epsilon''(t) \le \frac{1}{2}(t-a)M_2$$

حاصل ہوتا ہے۔ a تا t تکمل لینے سے

$$\frac{1}{4}(t-a)^2M_2^* \le \epsilon'(t) - \epsilon'(a) \le \frac{1}{4}(t-a)^2M_2$$

حاصل ہو گا جس میں $\epsilon'(a) = 0$ اور $\epsilon(a) = 0$ پر کرتے ہوئے دوبارہ تکمل لے کر $t = a + h$ لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{1}{12}h^3M_2^* \le \epsilon(a+h) \le \frac{1}{2}h^3M_2$$

باقی $n-1$ ٹکڑوں کے خلل کے لئے اسی طرح کے $n-1$ عدد مطابقتی عدم مساوات حاصل ہوں گے۔ان تمام n عدم مساوات کا مجموعہ a تا b تکمل کے لئے خلل ϵ کی عدم مساوات دے گا۔چونکہ $h = \frac{b-a}{n}$ ہے لہٰذا ہمیں

$$KM_2^* \le \epsilon \le KM_2, \qquad [K = \frac{(b-a)^3}{12n^2}] \tag{21.41}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں تکمل کے وقفہ پر f'' کی کم سے کم قیمت M_2^* اور زیادہ سے زیادہ قیمت M_2 ہے۔

مثال 21.12: **ذوزنقہ قاعدہ۔ تخمینہ خلل**

$n = 10$ لیتے ہوئے تکمل $J = \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت مساوات 21.40 کی مدد سے حاصل کریں۔جدول 21.7 سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$J \approx 0.1(0.5 \cdot 1.367\,879 + 6.778\,167) = 0.746\,211$$

چونکہ $f''(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$ ہے لہٰذا

$$M_2^* = f''(0) = -2, \quad M_2 = f''(1) = 0.735\,759$$

ہوں گے۔مزید $K = \frac{1}{1200}$ ہے لہٰذا مساوات 21.41 کے تحت

$$-0.001\,667 \le \epsilon \le 0.000\,614$$

جدول 21.7: جدول برائے مثال 21.12

J	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$	
0	0	0	1.000 000	
1	0.1	0.01		0.990 050
2	0.2	0.04		0.960 789
3	0.3	0.09		0.913 931
4	0.4	0.16		0.852 144
5	0.5	0.25		0.778 801
6	0.6	0.36		0.697 676
7	0.7	0.49		0.612 626
8	0.8	0.64		0.527 292
9	0.9	0.81		0.444 858
10	1.0	1.00	0.367 879	
		مجموعہ	1.367 879	6.778 167

ہو گا۔یوں J کی درست قیمت

$$0.746\,211 - 0.000\,614 = 0.745\,597 \quad \text{اور} \quad 0.746\,211 + 0.001\,667 = 0.747\,878$$

کے درمیان ہو گی۔ (چھ معنی خیز ہندسوں تک درست جواب 0.746 824 ہے۔) □

f کی ٹکڑوں میں مستقل تخمین سے مستطیل قاعدہ (مساوات 21.39) حاصل ہوا جبکہ f کی ٹکڑوں میں خطی تخمین سے ذوزنقہ قاعدہ (مساوات 21.40) حاصل ہوا۔ ٹکڑوں میں دو درجی تخمین سے قاعدہ سمسن[55] اخذ ہو گا جو، سادہ ہونے کے باوجود، عموماً مسئلوں کا کافی درست جواب دیتا ہے۔ قاعدہ سمسن اخذ کرنے کی خاطر ہم وقفہ $a \le x \le b$ کو ایک جیسی لمبائیوں کے جفت تعداد کی ٹکڑوں، مثلاً $2n$ ، میں تقسیم کرتے ہیں۔اس طرح $h = \frac{b-a}{2n}$ اور $x_0\,(a), x_1, \cdots, x_{2n-1}, x_{2n}\,(b)$ ہوں گے۔ہم پہلی دو ٹکڑوں کو لیتے ہیں اور $f(x)$ کو وقفہ $x_0 \le x \le x_0 + 2h$ میں نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتی لیگرینج کثیر رکنی

[55] برطانوی ریاضی دان طامس سمسن [1710-1761]

$p_2(x)$ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں f_j سے مراد $f(x_j)$ ہے۔ مساوات 21.23 سے

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2 \tag{21.42}$$

ہو گا جہاں نسب نما $2h^2$، $-h^2$ اور $2h^2$ کے برابر ہیں۔ $s = \frac{x-x_1}{h}$ لکھتے ہوئے $x - x_0 = (s+1)h$، $x - x_1 = sh$ اور $x - x_2 = (s-1)h$ ہوں گے۔یوں

$$p_2(x) = \frac{1}{2}s(s-1)f_0 - (s+1)(s-1)f_1 + \frac{1}{2}(s+1)sf_2 \tag{21.43}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اب ہم x کے ساتھ x_0 تا x_2 تکمل لیتے ہیں جو s کے ساتھ -1 تا 1 تکمل کے مترادف ہے۔چونکہ $\mathrm{d}x = h\,\mathrm{d}s$ ہے لہٰذا

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)\,\mathrm{d}x = h\Big(\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2\Big)$$

ہو گا۔اگلے دو ٹکڑوں، x_2 تا x_4، اور باقی دو دو ٹکڑوں کے لئے بھی اسی طرح کے نتائج حاصل ہوں گے۔ان تمام n عدد نتائج کا مجموعہ قاعدہ سمسن[56]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}) \tag{21.44}$$

دے گا جہاں $h = \frac{b-a}{2n}$ اور $f_j = f(x_j)$ ہیں۔تکمل کے وقفہ میں f کے چار رتبی تفرق کی موجودگی اور استمرار فرض کرتے ہوئے مساوات 21.44 کی حد خلل ϵ_S کو ذوزنقہ قاعدہ (مساوات 21.40) کے خلل کی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔نتیجہ درج ذیل ہے

$$CM_4^* \le \epsilon_S \le CM_4 \qquad \Big[C = \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}\Big] \tag{21.45}$$

جہاں تکمل کے وقفہ پر f کی چار رتبی تفرق کی زیادہ سے زیادہ قیمت M_4 اور کم سے کم قیمت M_4^* ہے۔

مثال 21.13: قاعدہ سمسن۔ تخمینہ حد خلل

$2n = 10$ لیتے ہوئے تکمل $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت قاعدہ سمسن سے حاصل کریں۔حد خلل کا تخمینہ بھی حاصل کریں۔چونکہ $h = 0.1$ ہے، جدول 21.8 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$J \approx \frac{0.1}{3}(1.367\,879 + 4 \cdot 3.740\,266 + 2 \cdot 3.037\,901) = 0.746\,825$$

---

[56] Simpson's rule

جدول 21.8: جدول برائے مثال 21.44

j	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$		
0	0.0	0.00	1.000 000		
1	0.1	0.01		0.990 050	
2	0.2	0.04			0.960 789
3	0.3	0.09		0.913 931	
4	0.4	0.16			0.852 144
5	0.5	0.25		0.778 801	
6	0.6	0.36			0.697 676
7	0.7	0.49		0.612 626	
8	0.8	0.64			0.527 292
9	0.9	0.81		0.444 858	
10	1.0	1.00	0.367 879		
مجموعہ			1.367 879	3.740 266	3.037 901

تخمینہ حد خلل: چار رتبی تفرق $f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$ ہے جس کی وقفہ تکمل میں کم سے کم قیمت $M_4^* = f^{(4)}(x^*) = -7.359$ پر $x = x^* = 2.5 + 0.5\sqrt{10}$ اور زیادہ سے زیادہ قیمت $M_4 = f^{(4)}(0) = 12$ پر $x = 0$ حاصل ہوتی ہیں۔چونکہ $2n = 10$ اور $b - a = 1$ ہیں لہٰذا $C = \frac{1}{800\,000} = 0.000\,000\,56$ ہو گا۔یوں

$$-0.000\,004 \le \epsilon_S \le 0.000\,006 \quad \text{اور} \quad 0.746\,818 \le J \le 0.746\,830$$

ہوں گے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ تخمین سے کم از کم چار معنی خیز ہندسوں تک درست جواب حاصل ہوتا ہے۔حقیقت میں موجودہ جواب پانچ معنی خیز ہندسوں تک درست ہے چونکہ چھ معنی خیز ہندسوں تک درست جواب $J = 0.746\,824$ ہے۔

غور کریں کہ مثال 21.12 میں حاصل نتیجہ سے موجودہ نتیجہ بہت زیادہ بہتر ہے اگرچہ ہمیں دونوں مثالوں میں تقریباً ایک جتنا کام کرنا پڑا ہے۔ □

قاعدہ سمسن سے حاصل نتائج کی درستگی عموماً انجینئری مسئلوں کے لئے کافی ہوتی ہیں۔اسی لئے کمپیوٹر سے اعدادی تکمل کے حصول میں زیادہ درستگی کے کلیوں کی بجائے ترکیب سمسن کو زیادہ ترجیح دی جاتی ہے۔ زیادہ طاقت کی کثیر رکنی استعمال کرتے ہوئے زیادہ درستگی کے کلیات حاصل کیے جاتے ہیں۔ہم یہاں دو ایسی کلیات کا ذکر کرتے ہیں جو بعض

اوقات مفید ثابت ہوتی ہیں۔ نقطہ (x_0, f_0) ، (x_1, f_1) ، (x_2, f_2) سے گزرتی کعبی سے قاعدہ آٹھ میں سے تین

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \tag{21.46}$$

حاصل[57] ہوتا ہے جو کعبی کثیر رکنی کی صورت (مثلاً قاعدہ سمسن) میں بالکل درست ثابت ہوتا ہے۔مزید وقفہ کی طاق ٹکڑوں (جو 3 سے قابل تقسیم ہو) پر اس قاعدہ کو لاگو کیا جا سکتا ہے۔ چھ درجی کثیر رکنی جو (x_0, f_0) تا (x_6, f_6) سے گزرتی ہو سے پیچیدہ عددی سر والا کلیہ حاصل ہوتا ہے البتہ اسی قسم کا ایک اور کلیہ جس کی درستگی نسبتاً کم ہے اور جس کو قاعدہ ویڈل[58] کہتے ہیں درج ذیل ہے۔

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,\mathrm{d}x =\approx \frac{3h}{10}(f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6) \tag{21.47}$$

تکمل کے جن اعدادی کلیات پر بحث کی گئی ان میں تکمل کے وقفہ کو برابر ٹکڑوں میں تقسیم کیا گیا اور یہ تراکیب کسی مخصوص طاقت تک کثیر رکنی کی صورت میں بالکل درست جواب حاصل کرتے ہیں۔ خطی تبادل پیما استعمال کرتے ہوئے a اور b کو بالترتیب -1 اور 1 پر منتقل کرتے ہوئے زیادہ عمومی طور پر

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=1}^{n} A_j f_j \qquad [f_j = f(x_j)] \tag{21.48}$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں ہم ایسے $2n$ مستقل A_1 تا A_n اور x_1 تا x_n حاصل کر سکتے ہیں کہ کثیر رکنی کا درجہ m جتنا چاہیں بڑا ہو، مساوات 21.48 بالکل درست جواب دے۔ چونکہ درجہ $2n-1$ کثیر رکنی کے عددی سروں کی تعداد $2n$ ہے لہٰذا $m \le 2n-1$ ہو گا۔گاوس کے تحت اس صورت درجہ $2n-1$ کثیر رکنی کے لئے بالکل درست جواب حاصل ہو گا جب $x_1, \cdots, x_n$ درجہ n لیژانڈر کثیر رکنی[59] (حصہ 5.2)

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!}x^{n-2} + \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!}x^{n-4} - + \cdots$$

---

[57] three-eight's rule
[58] Weddle's rule
[59] Legendre polynomial

یعنی

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \cdots$$

کے n صفر ہوں اور A_j کی موزوں قیمتیں منتخب کی جائیں۔ ایسی صورت میں مساوات 21.48 کو **گاوسی کلیہ تکمل**[60] کہتے ہیں۔ اگرچہ یہ کلیہ بہت درست نتائج دیتا ہے لیکن اس میں $x_1, \cdots, x_n$ کی غیر یکساں فاصلے دشواری کا سبب بنتے ہیں۔

چونکہ مساوات 21.48 میں مستعمل آخری سر -1 اور 1 کثیر رکنی $P_n(x)$ کے صفر نہیں ہیں (یہ دونوں $x_1, \cdots, x_n$ میں شامل نہیں ہیں) لہٰذا گاوسی کلیہ تکمل کھلا کلیہ[61] کہلاتا ہے۔ یوں بند کلیہ[62] میں وقفہ تکمل کے سر بھی شامل ہوں گے (مثال کے طور پر مساوات 21.40، مساوات 21.44، مساوات 21.46 اور مساوات 21.47 بند کلیات ہیں)۔

باہمی تحریف کی طرح اعدادی تکمل کو بھی فرق سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ایک انتہائی موثر کلیہ درج ذیل **گاوسی وسطی فرق کلیہ**[63] ہے۔

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\Big(f_0 + f_1 - \frac{\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1}{12} + \frac{11(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1)}{720}\Big) \tag{21.49}$$

اعدادی تفرق

جدول کی صورت میں دیے تفاعل کے تفرق کا تخمینہ اعدادی طریقہ سے حاصل کرنے کو **اعدادی تفرق**[64] کہتے ہیں۔ جہاں ممکن ہو وہاں اعدادی تفرق سے گریز کریں چونکہ اعدادی تفرق کی درستگی جدول میں دیے قیمتوں کی درستگی سے کم ہو گی۔ در حقیقت تفرق کے حصول میں ہم دو بڑی قیمتوں کے فرق کو ایک چھوٹی قیمت سے تقسیم کرتے ہیں۔؛ مزید اگر تفاعل کثیر رکنی p کی صورت میں دیا گیا ہو تب تفاعل کی قیمتوں میں فرق کم ہو سکتا ہے جبکہ تفرق کی قیمت بہت مختلف ہو سکتی ہے۔ یوں اعدادی تفرق ایک نازک عمل ہے۔ اس کے برعکس اعدادی تکمل ہمواری کا عمل ہے لہٰذا اعدادی تکمل پر تفاعل کی قیمتوں میں خلل کا بہت زیادہ اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

---

[60] Gaussian integration formula
[61] open formula
[62] closed formula
[63] central-difference formula by Gauss
[64] numerical differentiation

ہم $f'_j = f'(x_j)$ ، $f''_j = f''(x_j)$ ، . . . لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ہم تفرق کا تخمینہ درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

اس کو دیکھ کر ہم یک رتبی تفرق کے لئے

$$f'_{1/2} \approx \frac{\delta f_{1/2}}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h} \tag{21.50}$$

لکھتے ہیں۔اسی طرح دو رتبی تفرق کو

$$f''_1 \approx \frac{\delta^2 f_1}{h^2} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} \tag{21.51}$$

لکھا جا سکتا ہے۔بلند رتبی تفرق کے لئے اسی طرح کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

موزوں لیگرینج کثیر رکنی کی تفرق سے تفرق کا بہتر تخمینہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 21.42 کا تفرق لینے سے

$$f(x) \approx p'_2(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} f_0 - \frac{2x - x_0 - x_2}{h^2} f_1 + \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} f_2$$

حاصل ہوتا ہے جہاں یاد رہے کہ مساوات 21.42 کے نسب نما $2h^2$ ، $-h^2$ ، $2h^2$ ہیں۔اس کی قیمت x_0 ، x_1 اور x_2 پر حاصل کرتے ہوئے **تین نقاطی کلیہ**[65]

$$\begin{aligned}
&(\text{الف}) \quad f'_0 \approx \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2)\\
&(\text{ب}) \quad f'_1 \approx \frac{1}{2h}(-f_0 + f_2)\\
&(\text{پ}) \quad f'_2 \approx \frac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2)
\end{aligned} \tag{21.52}$$

حاصل ہوتا ہے۔پانچ نقاطی لیگرینج کثیر رکنی سے اسی طرح بالخصوص درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$f'_2 \approx \frac{1}{12h}(f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4) \tag{21.53}$$

---

[65] three point formula

سوالات

تکمل کے کلیات کی یاد دہانی کی خاطر سوال 21.62 تا سوال 21.70 حل کریں۔

سوال 21.62: $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$

سوال 21.63: $\int \cos^2 \omega x \, \mathrm{d}x$

سوال 21.64: $\int e^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x$

سوال 21.65: $\int e^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x$

سوال 21.66: $\int \tan kx \, \mathrm{d}x$

سوال 21.67: $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

سوال 21.68: $\int \frac{\mathrm{d}x}{k^2+x^2}$

سوال 21.69: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

سوال 21.70: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2+1)^2}$

سوال 21.71: $n = 5$ لیتے ہوئے مساوات 21.39 کی مدد سے مثال 21.12 حل کریں۔

سوال 21.72: $n = 5$ لیتے ہوئے مستطیل قاعدہ مساوات 21.39 کی مدد سے $\int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x$ حل کریں۔ خلل کتنا ہو گا؟
جواب: $0.245, \; \epsilon = -0.005$

سوال 21.73: $n = 5$ لیتے ہوئے سوال 21.72 کو ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 سے حل کریں۔ مساوات 21.41 سے حد خلل کیا حاصل ہوں گے؟ نتائج کے حقیقی حد خلل کیا ہیں؟ ان میں فرق کیوں ہے؟

سوال 21.74: $2n = 4$ لیتے ہوئے سمسن قاعدہ سے $\ln 2 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ کا تخمینہ حاصل کریں۔ حد خلل کا تخمینہ مساوات 21.45 سے حاصل کریں۔
جواب:

$$\ln 2 \approx 0.693\,25,\ M_4^* = 0.75, M_4 = 0.24,\ 0.000\,016 < \epsilon_S < 0.000\,53,$$
$$0.692\,72 < \ln 2 < 0.693\,24$$

سوال 21.75: $2n = 10$ لیتے ہوئے سمسن قاعدہ سے $\int_0^1 x^5 \,\mathrm{d}x$ کا تخمینہ حاصل کریں۔ حد خلل کا تخمینہ مساوات 21.45 سے حاصل کریں۔ نتیجے کی اصل حد خلل کیا ہے؟

سوال 21.76 تا سوال 21.79 میں $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x$ کا تخمینہ حاصل کریں۔ سائن تفاعل کی پانچ معنی خیز ہندسوں تک درست قیمتیں استعمال کریں۔

سوال 21.76: مستطیل قاعدہ مساوات 21.39 استعمال کریں اور $n = 5$ لیں۔
جواب: 0.9466

سوال 21.77: ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 استعمال کریں اور $n = 5$ لیں۔

سوال 21.78: ذوزنقہ قاعدہ مساوات 21.40 استعمال کریں اور $n = 10$ لیں۔
جواب: 0.9458

سوال 21.79: $2n = 2$ اور $2n = 10$ لیتے ہوئے قاعدہ سمسن استعمال کریں۔

سوال 21.80: ایسے α اور β تلاش کریں کہ ایک درجی کثیر رکنی کے لئے

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) \,\mathrm{d}x \approx h[\alpha f(x_n) + \beta f(x_{n+1})], \qquad h = x_{n+1} - x_n$$

بالکل درست ہو۔ کونسا کلیہ اخذ ہوتا ہے؟
جواب: $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ذوزنقہ قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 21.81: اگر $f(x)$ دو درجی کثیر رکنی ہو تب دکھائیں کہ مساوات 21.50 بالکل درست ہے۔ اس کا کیا جیومیٹریائی مطلب ہے؟

سوال 21.82: مساوات 21.52 حاصل کریں۔

سوال 21.83: مساوات 21.53 اخذ کریں۔

سوال 21.84: $x_0 = 0$ ، $x_1 = 0.2$ ، $x_2 = 0.4$ ، $x_3 = 0.6$ ، $x_4 = 0.8$ کے لئے $f(x) = x^4$ پر غور کریں۔مساوات 21.52-الف، ب اور پ سے f_2' حاصل کریں۔خلل تلاش کریں۔
جواب: 0.080, 0.320, 0.176, 0.256

سوال 21.85: تفرق کا چار نقطی کلیہ درج ذیل ہے۔

$$f_2' \approx \frac{1}{6h}(-2f_1 - 3f_2 + 6f_3 - f_4)$$

$x_0 = 0$ ، $x_1 = 0.2$ ، $x_2 = 0.4$ ، $x_3 = 0.6$ ، $x_4 = 0.8$ کے لئے $f(x) = x^4$ پر اس کلیہ کو لاگو کریں۔حد خلل تلاش کریں۔مساوات 21.53 سے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 21.86: $f'(x)$ کو پہلا فرق اور مزید زیادہ بلند درجی فرق سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + - \cdots)$$

r کے ساتھ مساوات 21.14 کا تفرق لیتے ہوئے اس کلیہ کو حاصل کریں۔ مساوات 21.14 کا r کے ساتھ تفرق

$$hf'(x) \approx \Delta f_0 + \frac{2r-1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{3r^2 - 6r + 2}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots$$

ہے، جہاں $x = x_0 + rh$ ہے، اور آپ کو $r = 0$ پر کرنا ہو گا۔ (الف) پہلے فرق تک، (ب) دوسرے فرق تک، (پ) تیسرے فرق تک، (ت) چوتھے فرق تک شامل کرتے ہوئے اس کلیہ سے سوال 21.84 کے $f'(0.4)$ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: 0.52, 0.080, 0.304, 0.256

21.7 متقارب اتساع

متقارب اتساع (عموماً منفرج) تسلسل ہوں گے جو بڑی x پر تفاعل $f(x)$ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے انتہائی اہم ہیں۔ تفاعل $f(x)$ کی مکلارن تسلسل، اگر موجود ہو، اس مقصد کے لئے موزوں نہیں ہے چونکہ کسی بھی معنی خیز ہندسہ تک درست نتائج حاصل کرنے کی خاطر درکار اجزاء کی تعداد، x کے بڑھنے کے ساتھ بہت تیزی سے

بڑھتی ہے۔ ٹیلر تسلسل جس کا مرکز a ہو کے لئے $|x-a|$ کی بڑی قیمت کے لئے صورت بھی حال بالکل ایسی ہی ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ x جتنا بڑا ہو، کسی مخصوص درستگی کے لئے درکار اجزاء کی تعداد متقارب اتساع کی صورت میں اتنی ہی کم ہو گی۔ دوسری جانب متقارب اتساع سے زیادہ درستگی حاصل نہیں ہو گی اور چھوٹی x کی صورت میں درستگی مزید کم ہو گی۔ یوں متقارب اتساع صرف بڑی x کی صورت میں قابل استعمال ہو گا۔

اس حصہ میں جو متغیر اور تفاعل استعمال کیے جائیں گے انہیں حقیقی تصور کیا جائے گا۔

درج ذیل روپ کا تسلسل

$$c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots \qquad (c_0, c_1, \cdots \text{مستقل})$$

(جو ضروری نہیں کہ کسی بھی x کے لئے مرتکز ہو) تفاعل $f(x)$ کا **متقارب اتساع**[66] یا **متقارب تسلسل** کہلاتا ہے جو ہر کافی بڑی x کے لئے اس صورت معین ہو گا جب ہر مقررہ $n=0,1,2,\cdots$ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو،

$$[f(x)-(c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots+\frac{c_n}{x^n})]x^n \to 0 \qquad (x\to 0) \tag{21.54}$$

اور تب ہم

$$f(x)\sim c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots$$

لکھتے ہیں۔

اگر کسی تفاعل کا متقارب تسلسل پایا جاتا ہو، تب چونکہ اس تسلسل کے عددی سر $c_0, c_1, \cdots$ مساوات 21.54 سے یکتا طور پر حاصل ہوں گے لہٰذا یہ تسلسل یکتا ہو گا۔ یقیناً مساوات 21.54 سے درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} f(x)-c_0\to 0 \quad &\implies \quad c_0=\lim_{x\to\infty} f(x)\\ \Big[f(x)-c_0-\frac{c_1}{x}\Big]x\to 0 \quad &\implies \quad c_1=\lim_{x\to\infty}[f(x)-c_0]x, \quad \cdots \end{aligned} \tag{21.54*}$$

مختلف تفاعل کا ایک جیسے متقارب تسلسل ممکن ہے۔ یوں $f(x)=e^{-x}$ کی صورت میں $x\to\infty$ پر $e^{-x}\to 0$ ، $xe^{-x}\to 0$ ، $\cdots$ کی بنا مساوات *21.54 سے $c_0=0$ اور $c_1=0$ ، $\cdots$ حاصل ہوں گے لہٰذا

$$e^{-x}\sim 0+\frac{0}{x}+\cdots$$

---

[66] asymptotic expansion

ہو گا۔یوں اگر $g(x)$ کا متقارب تسلسل پایا جاتا ہو تب $g(x)+e^{-x}$ کا بھی یقیناً یہی متقارب تسلسل ہو گا۔

عملاً جب بھی

$$\frac{f(x)-g(x)}{h(x)} \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots$$

ہو تب متذکرہ بالا تعریف (کی رو برقرار رکھتے ہوئے اس) کو وسعت دے کر

$$f(x) \sim g(x) + h(x)(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots)$$

لکھنا مفید ثابت ہوتا ہے۔

مساوات * 21.54 سے متقارب تسلسل کے عددی سر شاذ و نادر حاصل کیے جاتے ہیں۔عموماً دیگر ترکیب زیادہ بہتر ثابت ہوں گے، مثلاً مسلسل تکمل بالحصص۔

مثال 21.14: **تفاعل خلل کا متقارب تسلسل** تفاعل خلل $\operatorname{erf} x$ کی تعریف

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{21.55}$$

جبکہ **متمم تفاعل خلل**[67] کی تعریف

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^\infty e^{-\tau}\tau^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\tau \tag{21.56}$$

ہے جہاں $t^2=\tau$ اور $\operatorname{erf}\infty = 1$ ہیں۔بار بار تکمل بالحصص سے درج ذیل روپ کے تکمل حاصل ہوں گے۔

$$F_n(x) = \int_{x^2}^\infty e^{-\tau}\tau^{-(2n+1)/2}\,\mathrm{d}\tau \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{21.57}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\operatorname{erfc} x = \frac{F_0(x)}{\sqrt{\pi}}$ ہو گا۔تکمل بالحصص سے

$$F_n(x) = -e^{-\tau}\tau^{-(2n+1)/2}\Big|_{x^2}^\infty - \frac{2n+1}{2}\int_{x^2}^\infty e^{-\tau}\tau^{-(2n+3)/2}\,\mathrm{d}\tau$$

---

[67] complementary error function

حاصل ہو گا۔دائیں ہاتھ کا تکمل در حقیقت $F_{n+1}(x)$ ہے لہٰذا

$$e^{x^2}F_n(x) = \frac{1}{x^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2}e^{x^2}F_{n+1}(x), \qquad n = 0, 1, \cdots$$

ہو گا۔اس کلیہ کو بار بار استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$e^{x^2}F_0(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}e^{x^2}F_1(x)$$

$$\cdots$$

$$= \Big[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2x^5} - + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}x^{2n-1}}\Big] + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot(2n-1)}{2^n}e^{x^2}F_n(x) \tag{21.58}$$

ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ اس طرح حاصل کردہ تسلسل در حقیقت متقارب تسلسل

$$e^{x^2}F_0(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2x^5} - + \cdots \tag{21.59}$$

ہو گا۔مساوات 21.58 کے چکور قوسین میں بند تعلق کو S_{2n-1} لکھتے ہوئے مساوات 21.58 سے

$$[e^{x^2}F_0(x) - S_{2n-1}]x^{2n-1} = K_n e^{x^2}x^{2n-1}F_n(x) \tag{21.60}$$

حاصل ہو گا جہاں $K_n = (-2)^{-n}1\cdot 3\cdots(2n-1)$ ہے۔ہم نے دکھانا ہو گا کہ $x \to \infty$ پر ہر مقررہ $n = 1, 2, \cdots$ کے لئے دایاں ہاتھ صفر تک پہنچتا ہے۔ مساوات 21.57 میں $\tau \geq x^2$ کے لئے

$$\frac{1}{\tau^{(2n+1)/2}} \leq \frac{1}{x^{2n+1}} \qquad (\tau \geq x^2)$$

ہو گا لہٰذا ہمیں عدم مساوات

$$F_n(x) = \int_{x^2}^{\infty}\frac{e^{-\tau}}{\tau^{(2n+1)/2}}\,\mathrm{d}\tau < \frac{1}{x^{2n+1}}\int_{x^2}^{\infty}e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}} \tag{21.61}$$

حاصل ہو گا جس کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$|K_n|\,e^{x^2}x^{2n-1}F_n(x) < \frac{|K_n|}{x^2} \to 0, \qquad (x \to \infty)$$

اس سے ثابت ہوا کہ مساوات 21.59 کا تسلسل، بائیں ہاتھ تفاعل کا متقارب تسلسل ہے۔چونکہ

$$\operatorname{erf} x = 1 - \operatorname{erfc} x = 1 - \frac{F_0(x)}{\sqrt{\pi}}$$

ہے لہٰذا تفاعل خلل کا متقارب تسلسل

$$\operatorname{erf} x \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + - \cdots \right) \tag{21.62}$$

ہو گا جس سے زیادہ بڑی x کے لئے درج ذیل سادہ کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\operatorname{erf} x \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \tag{21.62*}$$

مساوات 21.60 اور مساوات 21.61 سے

$$\left| e^{x^2} F_0(x) - S_{2n-1} \right| = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} e^{x^2} F_n(x) < \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \frac{1}{x^{2n+1}}$$

حاصل ہو گا جس کا دایاں ہاتھ، کافی بڑی x کے لئے، بہت چھوٹا ہو گا۔یوں بڑی x کے لئے $e^{x^2} F_0(x)$ کا اچھا تخمین S_{2n-1} ہو گا لہٰذا بڑی x کے لئے تفاعل خلل کی بہت درست قیمت مساوات 21.61 سے حاصل کی جا سکتی ہے۔حقیقت میں نسبتاً چھوٹی $|x|$ کے لئے بھی مساوات *21.62 بہترین نتائج دیتی ہے۔مثال کے طور پر

$$\operatorname{erf} 5 \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-25}}{5} = 0.999\,999\,999\,998\,433$$

ہے جو 13 اعشاریہ تک درست قیمت ہے۔تفاعل خلل کے لئے نسبتاً چھوٹی x کے لئے متقارب تسلسل سے بہترین نتائج حاصل ہوئے ہیں البتہ عین ممکن ہے کہ دیگر تفاعل کی متقارب تسلسل سے درست نتائج زیادہ بڑی x، مثلاً $x \geq 20$، پر حاصل ہوں۔ □

عملی استعمال کے لئے یہ جاننا ضروری ہے کہ متقارب تسلسل کا جزو در جزو جمع، ضرب اور کچھ شرائط کے ساتھ تفرق اور تکمل حاصل کیا جا سکتا ہے۔آئیں ان خواص کو بہتر انداز میں پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 21.4: (جمع اور ضرب)
اگر

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots \quad \text{اور} \quad g(x) \sim b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots$$

ہوں تب تفاعل $Af + Bg$ کا متقارب تسلسل

$$Af(x) + Bg(x) \sim Aa_0 + Bb_0 + \frac{Aa_1 + Bb_1}{x} + \frac{Aa_2 + Bb_2}{x^2} + \cdots \tag{21.63}$$

ہو گا جہاں A اور B مستقل ہیں۔اسی طرح fg کا متقارب تسلسل

$$f(x)g(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots \tag{21.64}$$

ہو گا جس کے عددی سر درج ذیل ہیں۔

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

ثبوت : مساوات 21.63 کا ثبوت انتہائی آسان ہے لٰہذا اس کو آپ کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔ہم مساوات 21.64 کو ثابت کرتے ہیں۔ہم نے ثابت کرنا ہو گا کہ کسی بھی غیر منفی مقررہ عددی صحیح n کے لئے

$$(fg - S_n)x^n \to 0 \qquad (x \to \infty) \tag{21.65}$$

ہو گا جہاں

$$S_n(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n}$$

ہے جس کے عددی سر $c_0, \cdots, c_n$ مسئلہ میں دیے گئے ہیں۔

ہم کوئی بھی مقررہ n منتخب کر کے

$$f(x) = s_n(x) + \frac{h(x)}{x^n}, \qquad s_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$$

لکھتے ہیں۔یوں

$$[f(x) - s_n(x)]x^n = h(x)$$

ہو گا۔اس سے اور متقارب اتساع کی تعریف سے $x \to \infty$ پر $h(x) \to 0$ حاصل ہو گا۔اسی طرح

$$g(x) = s_n^*(x) + \frac{l(x)}{x^n}, \qquad s_n^*(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_n}{x^n}$$

لکھتے ہوئے $x \to \infty$ پر $l(x) \to 0$ حاصل ہو گا۔ان روپ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$fg = s_n s_n^* + \frac{h + l}{x^n} + \frac{hl}{x^{2n}}$$

جزو در جزو ضرب دے کر x کے ایک جیسے طاقت کو جمع کرتے ہوئے

$$s_n s_n^* = S_n + T_n$$

حاصل ہو گا جہاں T_n وہ اجزاء ہیں جن میں $\frac{1}{x^{n+1}}, \cdots, \frac{1}{x^{2n}}$ پائے جاتے ہوں۔ ظاہر ہے کہ $x \to \infty$ پر $x^n T_n \to 0$ ہو گا۔ اب مساوات 21.65 میں

$$fg - S_n = T_n + \frac{h+l}{x^n} + \frac{hl}{x^{2n}}$$

ہو گا۔ ہم دونوں اطراف کو x^n سے ضرب دیتے ہیں۔ تب $x \to \infty$ پر $x^n T_n \to 0$، $l \to 0$، $h \to 0$ کی بنا دایاں ہاتھ صفر تک پہنچتا ہے لہٰذا مساوات 21.65 کا بایاں ہاتھ بھی صفر تک پہنچے گا۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مسئلہ 21.5: (تکمل)
فرض کریں کہ تمام کافی بڑی x کے لئے درج ذیل $f(x)$ استمراری ہے۔

$$f(x) \sim \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \cdots$$

تب ان x کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\int_x^\infty f(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{2x^2} + \frac{c_4}{3x^3} + \cdots \tag{21.66}$$

ثبوت: مساوات 21.66 کے تکمل کو $F(x)$ سے ظاہر کریں جبکہ

$$s_n(x) = \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_n}{x^n}$$

کے تکمل کو S_{n-1} سے ظاہر کریں یعنی:

$$S_{n-1}(x) = \int_x^\infty s_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{2x^2} + \cdots + \frac{c_n}{(n-1)x^{n-1}}$$

متقارب اتساع کی تعریف کی رو سے ہر $n = 0, 1, \cdots$ کے لئے

جب $x \to \infty$ ہو تب $\qquad \left|f(x) - s_n(x)\right| x^n \to 0$

ہو گا۔ f استمراری ہونے کی بنا کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لئے ہم ایسا x_0 تلاش کر سکتے ہیں کہ تمام $x > x_0$ کے لئے

$$\left|f(x) - s_n(x)\right| x^n < \epsilon \qquad \implies \qquad \left|f(x) - s_n(x)\right| < \frac{\epsilon}{x^n}$$

ہو۔اس سے تمام $x > x_0$ کے لئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\left|F(x) - S_{n-1}(x)\right| &= \left|\int_x^\infty f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^\infty s_n(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_x^\infty [f(t) - s_n(t)]\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \int_x^\infty \left|f(t) - s_n(t)\right| \mathrm{d}t < \epsilon \int_x^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \frac{\epsilon}{(n-1)x^{n-1}}\end{aligned}$$

دونوں اطراف کو مثبت مقدار x^{n-1} سے ضرب دے کر

$$\left|F(x) - S_{n-1}(x)\right| x^{n-1} < \frac{\epsilon}{n-1} \qquad x > x_0(\epsilon)$$

حاصل ہو گا۔چونکہ $\epsilon\,(> 0)$ کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا منتخب کر سکتے ہیں لہٰذا

$$\left|F(x) - S_{n-1}(x)\right| x^{n-1} \to 0 \qquad \text{کرنے سے } x \to \infty$$

ہو گا۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اگر کافی بڑی x کے لئے $f(x)$ استمراری ہو جہاں $f(x)$ درج ذیل ہے

$$f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots$$

تب مسئلہ 21.5 سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ

$$\int_x^\infty \left[f(t) - c_0 - \frac{c_1}{t}\right] \mathrm{d}t \sim \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{2x^2} + \frac{c_4}{3x^3} + \cdots \tag{21.67}$$

ہو گا۔

اگر $f(x)$ کا متقارب تسلسل پایا جاتا ہو، ہم نہیں کہہ سکتے ہیں کہ اس کے تفرق $f'(x)$ کا بھی متقارب تسلسل پایا جاتا ہو گا۔مثال کے طور پر مساوات *21.54 سے ہم

$$f(x) = e^{-x}\sin(e^x) \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \cdots$$

حاصل کرتے ہیں جبکہ $f(x)$ کے تفرق

$$f'(x) = -e^{-x}\sin(e^x) + e^{-x}\cos(e^x)e^x = -f(x) + \cos(e^x)$$

کا کوئی متقارب تسلسل نہیں پایا جاتا ہے۔ (کیوں؟) البتہ اگر تفاعل $f(x)$ کے تفرق $f'(x)$ کا متقارب تسلسل پایا جاتا ہو تب $f(x)$ کے متقارب تسلسل کا جزو در جزو تفرق لیتے ہوئے اسے تلاش کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 21.6: (تفرق)
اگر

$$f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots \tag{21.68}$$

ہو اور $f(x)$ کے استمراری تفرق $f'(x)$ کا متقارب تسلسل بھی پایا جاتا ہو تب یہ تسلسل

$$f'(x) \sim -\frac{c_1}{x^2} - \frac{2c_2}{x^3} - \frac{3c_3}{x^4} - \cdots \tag{21.69}$$

ہو گا۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots \tag{21.70}$$

ہے۔ہمیں اب دکھانا ہو گا کہ عددی سر a_n یوں ہوں گے کہ مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 مماثل ہوں گے۔ہم پہلے دکھاتے ہیں کہ $a_0 = 0$ اور $a_1 = 0$ ہیں۔مساوات 21.68 اور متقارب اتساع کی تعریف سے ہم

$$\text{(الف)} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = c_0, \qquad \text{(ب)} \quad \lim_{x\to\infty}[f(x) - c_0]x = c_1 \tag{21.71}$$

لکھ سکتے ہیں۔اس کے مطابقتی تعلق مساوات 21.70 کے لئے درج ذیل ہیں۔

$$\text{(الف)} \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = a_0, \qquad \text{(ب)} \quad \lim_{x\to\infty}[f'(x) - a_0]x = a_1 \tag{21.72}$$

$f(x)$ اور $f'(x)$ کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t + k \qquad [k \text{ اور } x_0\,(>0) \text{ مستقل}] \tag{21.73}$$

اس سے اور مساوات 21.71-الف سے

$$\lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t + k = c_0$$

حاصل ہو گا۔اب مساوات 21.72-الف کے تحت اگر a_0 صفر نہ ہو تب تکمل کا حد موجود نہیں ہو گا لہٰذا $a_0 = 0$ ہے۔تب مساوات 21.72-ب درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔

$$\lim_{x\to\infty} xf'(x) = a_1 \tag{21.72* ب}$$

حاصل ہو گا۔تعریف کی رو سے اس کا مطلب ہے کہ کسی بھی $\epsilon > 0$ اور کافی بڑی x کے لئے

$$a_1 - \epsilon < xf'(x) < a_1 + \epsilon \qquad \implies \qquad \frac{a_1 - \epsilon}{x} < f'(x) < \frac{a_1 + \epsilon}{x} \tag{21.74}$$

ہو گا۔مساوات 21.71-ب اور مساوات 21.73 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t + k - c_0 \Big) x = c_1$$

مساوات 21.74 سے ہم دیکھتے ہیں کہ $a_1 \neq 0$ کی صورت میں یہ حد موجود نہیں ہو گا لہٰذا $a_1 = 0$ ہے اور مساوات 21.70 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$f'(x) \sim \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots$$

نتیجتاً مساوات 21.73 اور مسئلہ 21.5 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x_0}^{\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x}^{\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t + k \\ &\sim \int_{x_0}^{\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t + k - \frac{a_2}{x} - \frac{a_3}{2x^3} - \cdots \end{aligned} \tag{21.75}$$

دائیں ہاتھ پہلا تکمل مستقل ہے۔اگر ایک تفاعل کا متقارب تسلسل پایا جاتا ہو تب یہ تسلسل یکتا ہو گا لہٰذا ہم مساوات 21.68 اور مساوات 21.75 کے مطابقتی اجزاء کا آپس میں موازنہ کرتے ہوئے $a_2 = -c_1$ ، $a_3 = -2c_2$

، . . . حاصل کرتے ہیں۔ان عددی سر کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 21.69 اور مساوات 21.70 میں دیے گئے تسلسل مماثل ہوں گے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 21.15: قوت نمائی تکمل

قوت نمائی تکمل $\operatorname{Ei}(x)$ کی تعریف درج ذیل کلیہ ہے۔

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0)$$

$\operatorname{Ei}(x)$ کا متقارب تسلسل حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل

$$y = f(x) = e^x \operatorname{Ei}(x) = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0)$$

پر غور کرتے ہیں۔اس کا تفرق لے کر ہم دیکھتے ہیں کہ $f(x)$ درج ذیل خطی تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

$$y' - y + \frac{1}{x} = 0 \tag{21.76}$$

ہم بلا واسطہ ثابت کر سکتے ہیں کہ اس تفرقی مساوات کا صرف ایک حل y پایا جاتا ہے اور کہ y اور y' مثبت x کے لئے موجود ہیں اور ان کے متقارب تسلسل پائے جاتے ہیں۔ مساوات 21.68 اور مساوات 21.69 کو مساوات 21.76 میں پر کر کے x کے ایک جیسے طاقتوں کے عددی سروں کو آپس میں برابر پر کرتے ہوئے

$$-c_0 = 0, \quad -c_1 + 1 = 0, \quad -c_1 - c_2 = 0, \quad \cdots, \quad -nc_n - c_{n+1} = 0, \cdots$$

یعنی

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = -1, \cdots, c_{n+1} = (-1)^n n! \quad \cdots$$

حاصل ہو گا۔اس طرح قوت نمائی تکمل کا متقارب تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$\operatorname{Ei}(x) = e^{-x} f(x) \sim e^{-x}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + - \cdots\Big) \tag{21.77}$$

□

سوالات

سوال 21.87: دکھائیں کہ تسلسل $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}+\cdots$ [جو $|x|>0$ کے لئے مرتکز ہے اور $e^{\frac{1}{x}}$ کو ظاہر کرتا ہے] $e^{\frac{1}{x}}$ کا متقارب تسلسل ہے۔
جواب: مساوات 21.54 استعمال کریں۔

سوال 21.88: دکھائیں $\cdots+-\frac{1}{5!x^5}+\frac{1}{3!x^3}-\frac{1}{x}\sim\sin\frac{1}{x}$ ہے۔

سوال 21.89 تا سوال 21.93 میں تکمل بالحصص سے مطابقتی متقارب تسلسل تلاش کریں۔

سوال 21.89: $\operatorname{ci}(x)=\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ (کوسائن تکمل)
جواب: $\operatorname{ci}(x)\sim\sin x(-\frac{1}{x}+\frac{2!}{x^3}-\frac{4!}{x^5}+-\cdots)+\cos x(\frac{1}{x^2}-\frac{3!}{x^4}+\frac{5!}{x^6}-+\cdots)$

سوال 21.90: $\operatorname{si}(x)=\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (متمم سائن تکمل)

سوال 21.91: $\mathrm{c}(x)=\int_x^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t$ (متمم فرسنل تکمل)
جواب: $\mathrm{c}(x)\sim-\frac{1}{2}\sin x^2(\underbrace{\frac{1}{x}-\frac{1\cdot3}{4x^5}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{16x^9}-+\cdots}_{A(x)})+\frac{1}{2}\cos x^2(\underbrace{\frac{1}{2x^3}-\frac{1\cdot3\cdot5}{8x^7}+-\cdots}_{B(x)})$

سوال 21.92: $\mathrm{s}(x)=\int_x^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t^2$ (متمم فرسنل تکمل)

سوال 21.93: $\mathrm{Q}(\alpha,x)$ (غیر مکمل گیما تفاعل)
جواب: $\mathrm{Q}(\alpha,x)\sim x^\alpha e^{-x}[\frac{1}{x}-\frac{1-\alpha}{x^2}+-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{x^n}+\cdots]$

سوال 21.94 تا سوال 21.96 میں سوال 21.90، سوال 21.91 اور سوال 21.93 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے متقارب تسلسل تلاش کریں۔

سوال 21.94: $\operatorname{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ جہاں $\operatorname{si}(0)=\frac{\pi}{2}$ ہے۔ (سائن تکمل)

سوال 21.95: $\mathrm{C}(x)=\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t$ جہاں $\mathrm{c}(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ہے۔ (فرسنل تکمل)
جواب: $\mathrm{C}(x)\sim\pi^{1/2}2^{-3/2}+\frac{1}{2}A(x)\sin x^2-\frac{1}{2}B(x)\cos x^2$ سوال 21.91 میں $A(x),B(x)$ دیے گئے ہیں۔

سوال 21.96: $P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt$ (غیر مکمل گیما تفاعل)

سوال 21.97: یہ دکھا کر کہ $y = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{x^2} \operatorname{erfc} x$ کو $y' - 2xy + 1 = 0$ مطمئن کرتا ہے، تفاعل خلل $\operatorname{erf} x$ کا متقارب تسلسل حاصل کریں۔

سوال 21.98: یہ دکھا کر کہ $y = e^x \sqrt{x}\, Q(\frac{1}{2}, x)$ کو $y' = (\frac{1}{2}x + 1)y - 1$ مطمئن کرتا ہے، غیر مکمل گیما تفاعل $Q(\frac{1}{2}, x)$ کا متقارب تسلسل حاصل کریں۔

سوال 21.99: $y = e^x x^{1-\alpha} Q(\alpha, x)$ کے تفرقی مساوات سے $Q(\alpha, x)$ کا متقارب تسلسل حاصل کریں۔

سوال 21.100: درج ذیل دکھا کر

$$\operatorname{Ei}(x) = e^{-x} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u+x}\, du$$

$\frac{1}{u+x}$ کی اتساع $\frac{1}{x}$ کے طاقتوں میں حاصل کرتے ہوئے درج بالا سے مساوات 21.77 میں دی گئی تسلسل حاصل کریں۔

سوال 21.101: دکھائیں کہ $\operatorname{Ei}(ix) = \operatorname{ci}(x) - i \operatorname{si}(x)$ ہے۔اس کے بعد مساوات 21.77 میں x کی جگہ ix پر کر کے حقیقی اور خیالی اجزاء کو علیحدہ کریں؛دکھائیں کہ اس سے $\operatorname{ci}(x)$ اور $\operatorname{si}(x)$ کے متقارب تسلسل حاصل ہوتے ہیں جنہیں بالترتیب سوال 21.89 اور سوال 21.90 میں حاصل کیا گیا ہے۔

باب 22

خطی الجبرا کے اعدادی تراکیب

اس باب میں ہم خطی الجبرائی مساوات کے نظام کے حل، مناسب سیدھی لکیروں کا حصول اور قالبی امتیازی اقدار کے حصول کے اہم ترین تراکیب پر غور کریں گے۔ یہ تراکیب اور اس سے ملتے جلتے تراکیب عملاً انتہائی اہم ثابت ہوتے ہیں جو انجینئری یا دیگر شعبوں (مثلاً شماریات) کے مسائل حل کرنے میں کام آتے ہیں۔

22.1 خطی مساوات کا نظام۔ گاوسی اسقاط، معکوس قالب

n نامعلوم متغیرات $x_1, \cdots, x_n$ کے m خطی مساوات کے نظام (یا m ہمزاد خطی مساوات) سے مراد درج ذیل روپ کی مساوات

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{22.1}
$$

کا سلسلہ ہے جہاں عددی سر a_{jk} اور b_j معلوم اعداد ہیں۔ تمام b_j صفر ہونے کی صورت میں یہ نظام متجانس[1] کہلاتا ہے ورنہ اس کو غیر متجانس[2] کہتے ہیں۔ اگر آپ قالبی ضرب (حصہ 8.2) سے آشنا ہوں تب آپ دیکھ سکتے ہیں

homogeneous[1]
nonhomogeneous[2]

کہ نظام 22.1 کو ایک سمتی مساوات

$$Ax = b \tag{22.2}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں عددی سر قالب $A = [a_{ik}]$ درج ذیل $m \times n$ قالب ہے

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

جبکہ x اور b سمتیہ قطار ہیں۔نظام 22.1 کے حل سے مراد اعداد $x_1, \cdots, x_n$ کا سلسلہ ہے جو ان تمام m مساوات کو مطمئن کرتے ہیں اور نظام 22.1 کے حل سمتیہ سے مراد سمتیہ x ہے جس کے اجزاء نظام 22.1 کے حل ہیں۔

زیادہ تعداد کی مساوات کے نظام کا حل بذریعہ قاعدہ کریمر (حصہ 8.7) قابل عمل نہیں ہے۔زیادہ بہتر ترکیب گاوسی اسقاط ہے جس کو ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

مثال 22.1: گاوسی اسقاط
درج ذیل نظام کو حل کریں۔

$$\begin{aligned} 2w + x + 2y + z &= 6 \\ 6w - 6x + 6y + 12z &= 36 \\ 4w + 3x + 3y - 3z &= -1 \\ 2w + 2x - y + z &= 10 \end{aligned}$$

حل: پہلا قدم: ہم پہلی مساوات کے مضرب کو باقی مساوات سے منفی کرتے ہوئے ان سے w حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} -9x \qquad +9z &= 18 \\ x - y \ -5z &= -13 \\ x - 3y \qquad &= 4 \end{aligned}$$

دوسرا قدم: ان میں پہلی مساوات کے مضرب باقی مساوات سے منفی کرتے ہوئے ان سے x حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} -y - 4z &= -11 \\ -3y + z &= 6 \end{aligned}$$

تیسرا قدم: ان میں پہلی مساوات کے مضرب کو باقی مساوات سے منفی کرتے ہوئے ان سے y حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$13z = 39$$

آخری قدم: ہم اب واپس پر کرتے ہوئے تمام نا معلوم متغیرات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 13z &= 39 & z &= 3 \\ -y - 4 \cdot 3 &= -11 & y &= -1 \\ -9x \quad + 9 \cdot 3 &= 18 & x &= 1 \\ 2w + 1 + 2 \cdot (-1) + 3 &= 6 & w &= 2 \end{aligned} \tag{22.3}$$

□

مثال 22.1 میں $a_{11} \neq 0$ تھا۔ اگر ایسا نہ ہوتا تب ہم باقی مساوات سے w حذف کرنے میں ناکام ہوتے۔ یوں $a_{11} = 0$ کی صورت میں نظام میں مساوات کی ترتیب بدلی جائے گی تاکہ نظام میں پہلی مساوات کا پہلا عددی سر غیر صفر ہو (اور ہو سکتا ہے کہ نا معلوم متغیرات کی ترتیب بھی بدلنی پڑے)۔ باقی قدم پر بھی ایسا ہی کرنا پڑ سکتا ہے۔ اس طرح درج ذیل ترکیب حاصل ہوتی ہے جس کی اطلاق کے بعد حاصل قیمتیں پر کرتے ہوئے تمام متغیرات حاصل کیے جاتے ہیں۔

الخوارزمی: گاوسی اسقاط[3]

مساوات 22.2 میں $m = n$ کی صورت میں $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}$ کے ساتھ بطور آخری صف $\boldsymbol{b}$ شامل کرتے ہوئے $n \times (n+1)$ قالب $\boldsymbol{B} = [b_{jk}]$ حاصل ہو گا جس کے لئے گاوسی اسقاط کی الکراجی[4] درج ذیل ہے۔

$k = 1$ تا $k = n - 1$ کے لئے کریں:
ایسا کم تر $j \geq k$ تلاش کریں کہ $b_{jk} \neq 0$ ہو۔
اگر ایسا کوئی j نہیں پایا جاتا ہو تب بتائیں کہ $\boldsymbol{A}$ نادر ہے اور حساب روک دیں،
ورنہ $\boldsymbol{B}$ کے صف j اور صف k کے اجزاء کا آپس میں تبادلہ کرتے ہوئے چلتے رہیں۔
$j = k + 1$ تا $j = n$ کے لئے کریں:

---

[3] algorithm
[4] algorithm

$q : \frac{b_{jk}}{b_{kk}}$
$p = k+1$ تا $p = n+1$ کے لئے کریں:
$b_{jp} : b_{jp} - q b_{kp}$
اگر $b_{nn} = 0$ ہو تب بتائیں کہ $\boldsymbol{A}$ نادر ہے اور حساب روک دیں۔

ہر قدم پر پہلی مساوات کے پہلی متغیر کے عددی سر کو **چول عددی سر**[5] کہتے ہیں جس کا غیر صفر ہونا ضروری ہے۔اگر چول عددی سر کی قیمت کم ہو تب ہمیں مطابقتی مساوات کا بڑا مضرب باقی مساوات سے منفی کرنا ہو گا جس سے پور و پور خلل بڑھتے ہوئے نتائج متاثر کرے گا۔اس سے بچنے کی ترکیب سمجھنے سے پہلے آئیں ایک مثال سے ایسا ہوتے دیکھیں۔

مثال 22.2: کم چول عددی سر سے پیدا مشکلات
درج ذیل نظام

$$
\begin{aligned}
0.0004x_1 + 1.402x_2 &= 1.406 \\
0.4003x_1 - 1.502x_2 &= 2.501
\end{aligned}
$$

کا حل $x_1 = 10$ ، $x_2 = 1$ ہے۔ہم چار ہندسی غیر مقررہ نقطہ نظام استعمال کرتے ہوئے اس کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہیں۔

(الف) پہلی مساوات کو مساوات چول لیتے ہوئے ہم اس کو $q = \frac{0.4003}{0.0004} = 1001$ سے ضرب دے کر دوسری مساوات سے منفی کر کے

$$
-1405x_2 = -1404
$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں $x_2 = \frac{-1404}{-1405} = 0.9993$ ہو گا اور یوں پہلی مساوات سے $x_1 = 10$ کی بجائے

$$
x_1 = \frac{1}{0.0004}(1.406 - 1.402 \cdot 0.9993) = \frac{0.005}{0.0004} = 12.5
$$

حاصل ہو گا۔اس ناکامی کی وجہ $|a_{12}|$ کے لحاظ سے $|a_{11}|$ کی کم قیمت ہے جو x_2 میں پور و پور خلل کی قلیل قیمت سے x_1 کی قیمت میں بہت زیادہ خلل پیدا کرتا ہے۔

---

[5] pivotal coefficient

(ب) آئیں اب دوسری مساوات کو چول مساوات لے کر اس کو $\frac{0.0004}{0.4003} = 0.0009993$ سے ضرب دے کر پہلی مساوات سے منفی کرتے ہوئے

$$1.404x_2 = 1.404$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں $x_2 = 1$ حاصل ہو گا جس کو دوسری مساوات میں پر کرتے ہوئے $x_1 = 10$ ملتا ہے۔یہاں $|a_{22}|$ کے لحاظ سے $|a_{21}|$ بہت کم نہیں ہے لہٰذا x_2 میں معمولی پور و پور خلل x_1 کی قیمت میں بڑا خلل پیدا نہیں کرتا ہے۔یہی ہماری کامیابی کی وجہ ہے۔یقیناً $x_2 = 1.002$ کی صورت میں بھی دوسری مساوات سے $x_1 = \frac{2.501+1.505}{0.4003} = 10.01$ حاصل ہوتا جو بہت بہتر نتیجہ ہے۔ □

وہ مساوات جس کے x_1 کا عددی سر باقی مساواتوں کے x_1 کے عددی سر سے بڑا ہو کو پہلی مساوات منتخب کرتے ہوئے اور اسی طرح دوسری قدم پر x_2 کے لحاظ سے مساوات منتخب کرتے ہوئے نظام میں پہلی، دوسری، تیسری، . . .مساوات منتخب کی جا سکتی ہے۔اس عمل کو **جزوی چول**[6] کہتے ہیں۔ **مکمل چول**[7] میں ہم پورے نظام میں سب سے بڑے مطلق عددی سر کو چول عددی سر لیتے ہوئے باقی مساوات میں سے اس کا مطابقتی متغیر حذف کرتے ہیں۔اگلی قدم میں اسی ترکیب کو دہراتے ہیں اور اسی طرح آخر تک چلتے ہیں۔عملاً مکمل چول کی ترکیب زیادہ مہنگی ثابت ہوتی ہے لہٰذا جزوی چول کی ترکیب ہی استعمال کی جاتی ہے۔

ہم پوری مساوات کو بڑی عدد سے ضرب دے کر کسی بھی عددی سر کی قیمت بڑھا سکتے ہیں لیکن ایسا کرنے سے نتائج پر کوئی اثر نہیں پڑتا ہے۔مساوات کو جزو ضربی سے ضرب دینے کو **تبدیلی پیما صف**[8] کہتے ہیں۔عملاً ہم 10 (یا کمپیوٹر کی اساس β) کی طاقت سے مساوات کو ضرب دے کر عددی سر کی سب سے بڑی مطلق قیمت کو 0.1 اور 1 (یعنی β^{-1} اور 1) کے بیچ لاتے ہیں۔

عملاً ہم تبدیل پیما جزوی چول استعمال کرتے ہیں یعنی حذف کی k ویں قدم (جہاں $k = 1, 2, \cdots$ ہو گا) میں ہم باقی میسر $n - k$ مساواتوں میں سے اس کو مساوات چول منتخب کرتے ہیں جس کے متغیر x_k کے عددی سر اور اس مساوات میں سب سے بڑی مطلق قیمت کے عددی سر کے حاصل تقسیم کی مطلق قیمت سب سے زیادہ ہو۔

گاوسی اسقاط میں پیدا ہونے والے خلل پر اس کتاب میں غور نہیں کیا جائے گا۔

---

[6] partial pivoting
[7] total pivoting
[8] scaling

ترکیب گاوس میں ترمیم

ترکیب گاوسی کے کئی ترامیم ممکن ہیں۔ہم شولسکی[9] کے ایک قاعدہ پر مبنی ترمیم پیش کرتے ہیں۔ شولسکی[10] کا قاعدہ کہتا ہے کہ مطلق مثبت چکور قالب A کو

$$A = LU \tag{22.4}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں L اور U بالترتیب نچلا تکونی قالب اور بالائی تکونی قالب ہیں۔ L اور U عملاً یکتا ہوں گے۔ہم مساوات کو حل کیے بغیر L اور U کو حاصل کر سکتے ہیں (نیچے مثال دیکھیں)۔ n متغیرات کے n مساوات کا نظام $Ax = b$ حل کرنے کے لئے ہم مساوات 22.4 کا سہارا لیتے ہوئے نظام کو

$$LUx = b$$

لکھتے ہیں۔اس کو بائیں طرف L^{-1} سے ضرب دے کر

$$Ux = z \qquad z = L^{-1}b \tag{22.5}$$

حاصل ہو گا جو اس نظام کی تکونی صورت ہے۔ہم پہلے z کو درج ذیل تعلق

$$Lz = b \tag{22.6}$$

سے حاصل کر کے بعد میں

$$Ux = z \tag{22.7}$$

سے x حاصل کریں گے۔بہت سی اہم مسائل میں A تشاکل قالب ہو گا جس کی بنا $U = L^T$ ہو گا (درج ذیل مثال دیکھیں)۔

مثال 22.3: ترکیب شولسکی
آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ نظام

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 14 \\ 2x + 3y + 4z &= 20 \\ 3x + 4y + z &= 14 \end{aligned}$$

---

[9] فرانسیسی ریاضی دان اندرِلوئی شولسکی [1875-1918]
[10] Cholesky

کا حل $x = 1$ ، $y = 2$ ، $z = 3$ ہے۔ہم اس حل کو ترکیب شولسکی سے حاصل کرتے ہیں۔عددی سر قالب تشاکلی ہے لہٰذا $U = L^T$ ہو گا۔ ہم ضرب قالب کی تعریف استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

کے دونوں اطراف مطابقتی اجزاء کو برابر پر کرتے ہوئے U کے اجزاء حاصل کرتے ہیں۔ایسا کرنے سے ہمیں بالترتیب $a_{11}^2 = 1$ مثلاً $a_{11} = 1$ جس سے $a_{11}a_{12} = a_{12} = 2$ ، $a_{11}a_{13} = a_{13} = 3$ ، $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 4 + a_{22}^2 = 3$ مثلاً $a_{22} = i\,(\sqrt{-1})$ اور اس سے

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} = 6 + ia_{23} = 4, \quad a_{23} = i2$$

اور آخر میں

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 9 - 4 + a_{33}^2 = 1$$

سے مثلاً $a_{33} = i2$ حاصل ہو گا۔یوں مساوات 22.6

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & i & 0 \\ 3 & i2 & i2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \\ 14 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ i8 \\ i6 \end{bmatrix}$$

دے گا۔آخر میں ہم مساوات 22.7 حل کرتے ہیں یعنی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & i & i2 \\ 0 & 0 & i2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ i8 \\ i6 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

□

گاوسی اسقاط کی دوسری ترمیم کو گاوس جارڈن اسقاط کہتے ہیں۔اس ترکیب میں قالب کو "تکونی صورت" کی بجائے مزید چال چلتے ہوئے "وتری صورت" میں تبدیل کرتے ہوئے قیمتوں کے واپس پر کرنے کے عمل سے چھٹکارا حاصل کیا جاتا ہے۔ان اضافی چال کی بنا مساوات کا نظام حل کرنے میں کوئی آسانی پیدا نہیں ہوتی ہے۔البتہ معکوس قالب حاصل کرنے میں صورت حال مختلف ہے جہاں ترکیب گاوس اور ترکیب گاوس جارڈن دونوں میں n^3 ضرب درکار ہیں۔

معکوس قالب

غیر نادر چکور قالب A کا معکوس اب اصولی طور پر n عدد نظام

$$Ax = b_j \qquad (j = 1, \cdots, n) \tag{22.8}$$

کے حل سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $n \times n$ اکائی قالب کا j واں قطار b_j ہے۔

البتہ اکائی قالب I پر ترکیب گاوس جارڈن کی طرح عمل کرتے ہوئے A کی تخفیف سے I حاصل کرتے ہوئے A^{-1} کے حصول کو ترجیح دی جاتی ہے (سوال 22.15)۔

سوالات

سوال 22.1 تا سوال 22.11 کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔ سوال 22.1:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

جوابات: $x = 2,\ y = 1$

سوال 22.2:

$$\begin{aligned} -2x + y &= 5 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

جوابات: $x = -2,\ y = 1$

سوال 22.3:

$$\begin{aligned} -3x - y &= -3 \\ 5x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

جوابات: $x = 0,\ y = 3$

سوال 22.4:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ 2x + y - 3z &= -3 \\ 3x + 2y + z &= 7 \end{aligned}$$

جوابات: $x=-1,\ y=1,\ z=2$

سوال 22.5:

$$\begin{aligned} x+y+z&=-2\\ -2x+y-3z&=13\\ -3x+2y-z&=10 \end{aligned}$$

جوابات: $x=-1,\ y=2,\ z=-3$

سوال 22.6:

$$\begin{aligned} 2x-y+4z&=2\\ x+y-3z&=11\\ -3x+y-z&=-3 \end{aligned}$$

جوابات: $x=4,\ y=10,\ z=1$

سوال 22.7:

$$\begin{aligned} x-2y+z&=1\\ 3x-2y-z&=-1 \end{aligned}$$

جوابات: $x=y,\ z=y+1$

سوال 22.8:

$$\begin{aligned} x-2y+z&=0\\ 2x-2z&=-4 \end{aligned}$$

جوابات: $x=y-1,\ z=y+1$

سوال 22.9:

$$\begin{aligned} 4x-3y+3z&=0\\ 8x+7y-7z&=0 \end{aligned}$$

جوابات: $x=0,\ z=y$

سوال 22.10:

$$\begin{aligned} 2w-4x+3y-z&=3\\ w-2x+5y-3z&=0\\ 3w-6x-y-z&=0 \end{aligned}$$

جوابات: $w=2x+1, y=1, z=2$

سوال 22.11:

$$\begin{aligned} 3w-x+8y-2z&=-2\\ -w+2x-13y+3z&=3\\ 4w+3x-9y+z&=1 \end{aligned}$$

جوابات: $w=0,\ x=2y,\ z=3y+1$

سوال 22.12: **(تعداد قدم)** کسی بھی اعدادی ترکیب کی کارکردگی کی ناپ اس ترکیب سے حل نکالنے کے لئے درکار کل حسابی اعمال کی تعداد ہے۔ دکھائیں کہ $m=n$ کی صورت میں، واپس پر کرنے کے عمل کے علاوہ، مساوات 22.1 کو گاوسی اسقاط سے حل کرنے کے لئے $\frac{1}{2}n(n-1)$ تقسیم، $\frac{1}{3}n(n^2-1)$ ضرب اور $\frac{1}{3}n(n^2-1)$ جمع حاصل کرنے ہوں گے۔ یوں بڑی n کی صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\frac{n^3}{3}$ ضرب اور جمع درکار ہوں گے۔ تقسیم کی تعداد کم ہونے کی بنا رد کی جا سکتی ہے۔

سوال 22.13: دکھائیں کہ $m=n$ کی صورت میں گاوسی اسقاط سے مساوات 22.1 حل کرنے کے دوران واپس پر کرنے کے عمل میں $\frac{1}{2}n(n-1)$ ضرب، $\frac{1}{2}n(n-1)$ جمع اور n تقسیم درکار ہوں گے۔

سوال 22.14: قلم و کاغذ سے حل کرتے ہوئے ہم عموماً صرف عددی سر لکھ کر ان پر حسابی عمل کرتے ہیں۔ یوں مثال 22.1 میں پہلے قدم کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں S_1 سے مراد پہلی صف ہے۔ یوں S_2-3S_1 سے مراد دوسری صف سے پہلی صف کی تین گنا کی تفریق ہے۔

$$\begin{array}{rrrrrrl} 2 & 1 & 2 & 1 & 6 & 12 & S_1\\ 0 & -9 & 0 & 9 & 18 & 18 & S_2-3S_1\\ 0 & 1 & -1 & -5 & -13 & -18 & S_3-2S_1\\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 & 2 & S_4-S_1 \end{array}$$

سوال 22.4 میں اس طرح تمام قدم لکھیں۔

سوال 22.15: **(گاوس جارڈن اسقاط)** مثال 22.1 میں گاوسی اسقاط درج ذیل دیتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
2w \ +x+2y\ +z &= \ \ 6 && \text{(الف)}\\
-9x \qquad +9z &= \ 18 && \text{(ب)}\\
-y\ -4z &= -11 && \text{(پ)}\\
13z &= \ 39 && \text{(ت)}
\end{aligned}
$$

5 گاوس جارڈن اسقاط میں ہم (ب) استعمال کرتے ہوئے (الف) سے x حذف کرتے ہیں۔اس کے بعد (پ) کی مدد سے (الف) اور (ب) سے y حذف کرتے ہیں[(ب) سے حذف کی یہاں ضرورت نہیں ہے] اور آخر میں (ت) کی مدد سے (الف)، (ب)، (پ) سے z حذف کرتے ہیں۔دکھائیں کہ ایسا کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
2w \qquad\qquad &= 4\\
-9x \qquad &= -9\\
-y \quad &= 1\\
13z &= 39
\end{aligned}
$$

ان مساوات کو حل کرتے ہوئے $w=2$ ، $x=1$ ، $y=-1$ اور $z=3$ حاصل کریں۔

سوال 22.16: گاوس جارڈن اسقاط سے سوال 22.5 حل کریں۔

سوال 22.17: درج ذیل نظام پر مثال 22.2 کی طرح بحث کریں۔

$$
\begin{aligned}
0.0003x_1+3.0000x_2 &= 2.0001\\
1.0000x_1+1.0000x_2 &= 1.0000
\end{aligned}
$$

22.2 خطی مساوات کا نظام: حل بذریعہ اعادہ

گزشتہ حصہ میں گاوسی اسقاط پر غور کیا گیا جو خطی مساوات کے نظام کو حل کرنے کی بلا واسطہ تراکیب میں سے ایک ہے۔ان تراکیب میں ہم پہلے سے بتا سکتے ہیں کہ حل حاصل کرنے کی خاطر کتنی حساب درکار ہو گی۔اس کے برعکس بالواسطہ ترکیب یا اعادہ[11] میں ہم تخمینی قیمت سے شروع کر کے، بار بار حساب دہراتے ہوئے، حل کی بہتر سے بہتر تخمین کی طرف بڑھتے ہیں۔یوں جتنی زیادہ درستگی درکار ہو اتنا زیادہ حساب درکار ہو گا۔

[11] iterative method

اعادہ کی تراکیب ہم اس صورت استعمال کرتے ہیں جب ارتکاز کی شرح زیادہ ہو اور یوں بلا واسطہ تراکیب سے زیادہ جلدی حل حاصل ہو۔ عملی استعمال کی ایک اہم ترکیب اعادہ کو گاوس زائڈل اعادہ[12] کہتے ہیں۔ جس کو ہم ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں۔درج ذیل نظام پر غور کریں۔

$$\begin{aligned} w \quad -0.25x - 0.25y \quad &= 50\\ -0.25w \quad +x \quad -0.25z &= 50\\ -0.25w \quad +y \quad -0.25z &= 25\\ -0.25x - 0.25y \quad +z &= 25 \end{aligned} \tag{22.9}$$

(اس قسم کے نظام جزوی تفرقی مساوات کے حل اور لچکدار منحنی کی باہمی تحریف کے دوران پیش آتے ہیں۔) ہم اس نظام کو درج ذیل صورت میں

$$\begin{aligned} w &= \quad 0.25x + 0.25y \quad + 50\\ x &= 0.25w \quad +0.25z + 50\\ y &= 0.25w \quad +0.25z + 25\\ z &= \quad 0.25x \quad +0.25y + \ + 25 \end{aligned} \tag{22.10}$$

لکھ کر انہیں اعادہ میں استعمال کرتے ہیں یعنی ہم تمام متغیرات کی تخمینی قیمتوں مثلاً $w_0 = 100$ ، $x_0 = 100$ ، $y_0 = 100$ ، $z_0 = 100$ سے ابتدا کرتے ہوئے بہتر تخمین

$$\begin{aligned} w_1 &= \quad 0.25x_0 + 0.25y_0 \quad + 50 = 100.00\\ x_1 &= 0.25w_1 \quad +0.25z_0 + 50 = 100.00\\ y_1 &= 0.25w_1 \quad +0.25z_0 + 25 \ = 75.00\\ z_1 &= \quad 0.25x_1 \quad +0.25y_1 + \ + 25 \ = 68.75 \end{aligned} \tag{22.11}$$

حاصل کرتے ہیں۔مساوات 22.10 کے دائیں ہاتھ تازہ ترین قیمتیں پر کرتے ہوئے مساوات 22.11 حاصل کی گئی ہیں۔ہر مرتبہ متغیر کی تازہ ترین قیمت استعمال کی جاتی ہے۔یوں دوسری مساوات میں میں w_0 کی بجائے (w کی تازہ ترین قیمت) w_1 استعمال کی جائے گی۔اسی طرح آخری مساوات میں x_1 اور y_1 استعمال کیے گئے ہیں۔اگلے قدم میں مزید بہتر نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} w_2 &= \quad 0.25x_1 + 0.25y_1 \quad + 50 = 93.75\\ x_2 &= 0.25w_2 \quad +0.25z_1 + 50 = 90.62\\ y_2 &= 0.25w_2 \quad +0.25z_1 + 25 = 65.62\\ z_2 &= \quad 0.25x_2 \quad +0.25y_2 + \ + 25 = 64.06 \end{aligned}$$

---

[12] Gauss-Seidel iteration

آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ درست حل $w = x = 87.5$ ، $y = z = 62.5$ ہے۔

ہم ثبوت پیش کیے بغیر بتانا چاہتے ہیں کہ ترکیب گاوس زائڈل ہر ابتدائی تخمینی قیمتوں کے لئے صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب قالبِ اعادہ[13] C (مساوات 22.13 دیکھیں) کے ہر امتیازی قدر کی مطلق قیمت 1 سے کم ہو اور ارتکاز کی شرح رداسِ طیف (یعنی ان مطلق قیمتوں میں سب سے زیادہ قیمت) پر منحصر ہے۔ قالب C کو اب حاصل کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ درج ذیل n خطی مساوات کا نظام ہے

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

جہاں سمتیہ قطار $\boldsymbol{x}$ کے اجزاء نا معلوم متغیرات $x_1, \cdots, x_n$ ہیں۔ فرض کریں کہ ابتدائی تخمین $\boldsymbol{x}_{(0)}$ کے لحاظ سے $\boldsymbol{x}_{(0)}, \boldsymbol{x}_{(1)}, \cdots$ گاوس زائڈل اعادہ سے یک بعد دیگرے حاصل تخمینی نتائج کی ترتیب ہے۔ اگر یہ ترتیب نظام کے حل کو مرتکز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ یہ ترکیب $\boldsymbol{x}_{(0)}$ کے لحاظ سے مرتکز ہے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ $j = 1, \cdots, n$ کے لئے $a_{jj} = 1$ ہے (نظام کی ایسی صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم مساواتوں کو یوں ترتیب دیتے ہیں کہ تمام وتری جزو غیر صفر ہوں اور وتری جزو سے مطابقتی مساوات تقسیم کرتے ہیں)۔ ہم اب $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} + \tilde{\boldsymbol{L}} + \tilde{\boldsymbol{U}}$ لکھ سکتے ہیں جہاں $\tilde{\boldsymbol{U}}$ اور $\tilde{\boldsymbol{L}}$ بالترتیب بالائی تکونی قالب اور نچلا تکونی قالب ہیں جن کے مرکزی وتر کے اجزاء صفر ہیں جبکہ $\boldsymbol{I}$ اکائی قالب ہے جو n صف پر مشتمل ہے۔ $\boldsymbol{A}$ کی اس صورت کو $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ میں پر کرتے ہوئے $(\boldsymbol{I} + \tilde{\boldsymbol{L}} + \tilde{\boldsymbol{U}})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ حاصل ہو گا۔ روایتی طور پر $\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U}$ اور $\tilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L}$ لکھا جاتا ہے۔ یوں

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \implies \quad (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}$$

ہو گا جس سے کلیہ گاوس زائڈل

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})\boldsymbol{x}_{(m+1)} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_{(m)} \qquad (m = 0, 1, \cdots) \tag{22.12}$$

اخذ ہوتا ہے۔ درحقیقت $\boldsymbol{U}$ بالائی تکونی قالب ہے جس کے غیر صفر اجزاء ان مقامات کے مطابقتی ہیں جن کی تازہ ترین تخمینی قیمتیں ابھی حاصل نہیں کی گئی ہیں۔ اس کے برعکس $\boldsymbol{L}$ نچلا تکونی قالب ہے جس کے غیر صفر اجزاء ان مقامات کے مطابقتی ہیں جن کی تازہ ترین تخمینی قیمتیں $\boldsymbol{x}_{(m+1)}$ ہم حاصل کر چکے ہیں۔ مساوات 22.12 کو $\boldsymbol{x}_{(m+1)}$ کے لئے حل کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{x}_{(m+1)} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{(m)}, \qquad \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} \tag{22.13}$$

[13] iteration matrix

حاصل ہو گا۔اعادہ گاوس زائڈل کی ارتکاز، قالب اعادہ C کی امتیازی اقدار کی مشروط ہے۔

ہم $\boldsymbol{x}_{(m)} = [x_j^{(m)}]$ لکھ کر اعادہ گاوسی زائڈل کو درج ذیل بیان کر سکتے ہیں۔

الخوارزمی: اعادہ گاوس زائڈل

نظام $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ جہاں $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ میں $j = 1, \cdots, n$ کے لئے $a_{jj} \neq 0$ ہے، دیا گیا ہے۔

منتخب کریں کوئی $\boldsymbol{x}_{(0)}$

حاصل کریں $v_{jk} = -\frac{a_{jk}}{a_{jj}}$ جب $j \neq k$ ہو؛ $j, k = 1, \cdots, n$

حاصل کریں $\tilde{b}_j = \frac{b_j}{a_{jj}}$

m کے لئے 0 تا اختتام کریں: $j = 1, \cdots, n$ کے لئے کریں

$$x_j^{(m+1)} := \sum_{k=1}^{j-1} v_{jk} x_k^{(m+1)} + \sum_{k=j+1}^{n} v_{jk} x_k^{(m)} + \tilde{b}_j$$

اختتام کی تصدیق کریں۔

یہاں اختتام کی تصدیق سے مراد ایسی صورت ہے جہاں مطلوبہ درستگی حاصل ہو جائے، یا قدموں کی درکار تعداد پوری ہو جائے یا مزید لاگو شرائط مطمئن ہوں۔

اعادہ یعقوبی

اعادہ گاوس زائڈل **مسلسل اصلاح** کی ترکیب ہے جس میں تازہ ترین نئی تخمینی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔اگر نئی قیمتوں کو صرف اس وقت حساب کے لئے استعمال کیا جائے جب تمام متغیرات کی نئی قیمتیں حاصل کر لی جائیں تب **بیک وقت اصلاح** کی ترکیب حاصل ہو گی۔**اعادہ یعقوبی** اس قسم کی ایک ترکیب ہے۔ یہ ترکیب اعادہ گاوس زائڈل کی طرح ہے پس اس میں نئی قیمتیں صرف اس صورت پر کی جاتی ہیں جب تمام متغیرات کی قیمتیں حاصل کر لی جائیں۔یوں $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ کو $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ صورت میں لکھ کر اعادہ یعقوبی کی قالبی اظہار

$$\boldsymbol{x}_{(m+1)} = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_{(m)} \tag{22.14}$$

ہو گی۔ یہ ترکیب زیادہ تر نظریاتی اہمیت رکھتی ہے۔یہ $\boldsymbol{x}_{(0)}$ کی ہر منتخب قیمت کے لئے صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گی جب $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ کا رداس طیف 1 سے کم ہو؛ یہاں بھی $j = 1, \cdots, n$ کے لئے $a_{jj} = 1$ فرض کیا جاتا ہے۔

نظام $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ کی صورت میں ہم بقیہ[14] $\boldsymbol{r}$ متعارف کر سکتے ہیں جس کی تعریف

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}$$

ہے۔ظاہر ہے کہ $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $\boldsymbol{x}$ نظام کا حل ہو۔یوں تخمینی حل کی صورت میں $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}$ ہو گا۔اعادہ گاوس زائڈل میں ہم ہر منزل پر تخمینی حل کے ایک جزو میں ترمیم یا اسے ڈھیل دیتے ہوئے $\boldsymbol{r}$ کے ایک جزو گھٹا کر صفر کرتے ہیں۔یوں اعادہ گاوس زائڈل ان تراکیب میں سے ایک ہے جنہیں تراکیب ڈھیل[15] کہتے ہیں۔

غیر نادر چکور قالب کا معکوس بھی اعادہ کے ذریعہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔آئیں اس ترکیب کو دیکھیں۔عدد a کے معکوس x سے مراد ایسا عددی ہے جو $ax=1$ کو مطمئن کرتا ہو۔ترکیب نیوٹن کو تفاعل $f(x)=x^{-1}-a$ پر لاگو کرتے ہوئے تقسیم کے عمل کے بغیر x حاصل کیا جا سکتا ہے۔چونکہ $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ہے لہٰذا اعادہ نیوٹن

$$x_{m+1}=x_m-(x_m^{-1}-a)(-x_m^2)=x_m(2-ax_m)$$

ہو گا۔اس کو دیکھ کر ہم $\boldsymbol{A}$ کے معکوس $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}$ کے لئے درج ذیل کلیہ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{X}_{(m+1)}=\boldsymbol{X}_{(m)}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AX}_{(m)}) \tag{22.15}$$

یہ عمل صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا (یعنی $m\to\infty$ کرنے سے $\boldsymbol{A}^{-1}$ دے گا) جب $\boldsymbol{X}_{(0)}$ کی ایسی قیمت منتخب کی جائے کہ $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AX}_{(0)}$ کے ہر امتیازی قدر کی مطلق قیمت 1 سے کم ہو۔یہ ترکیب اس صورت موزوں ثابت ہوتی ہے جب پیش آنے والے ضرب آسان ہوں (مثلاً جب $\boldsymbol{A}$ میں بہت سارے صفر ہوں)۔عملاً $\boldsymbol{X}_{(0)}$ کی موزوں قیمت منتخب کرنا اگر نا ممکن نہیں تو مشکل ضرور ثابت ہوتا ہے۔اسی لئے کسی دوسرے ترکیب سے حاصل معکوس کو اس ترکیب سے صرف زیادہ درست بنایا جاتا ہے۔

سوالات

سوال 22.18 تا سوال 22.21 کو اعادہ گاوس زائڈل سے حل کریں۔ابتدائی قیمتیں $1,1,1$ لیں۔ تین قدم تک چلیں۔

---

[14] residual
[15] relaxation methods

سوال 22.18:

$$\begin{aligned} 10x + y \quad +z &= 6 \\ x + 10y \quad +z &= 6 \\ x + y \quad +10z &= 6 \end{aligned}$$

جواب: درست حل $0.5, 0.5, 0.5$ ہے۔

سوال 22.19:

$$\begin{aligned} 4x + y \quad &= -8 \\ 4y \quad +z &= 2 \\ 2z &= 2 \end{aligned}$$

سوال 22.20:

$$\begin{aligned} 10x - y - z &= 13 \\ x + 10y + z &= 36 \\ -x - y + 10z &= 35 \end{aligned}$$

جواب: درست حل $2, 3, 4$ ہے۔

سوال 22.21:

$$\begin{aligned} 4x + 2y + z &= 14 \\ x + 5y - z &= 10 \\ x + y + 8z &= 20 \end{aligned}$$

سوال 22.22: (الف) $0, 0, 0$ اور (ب) $10, 10, 10$ سے ابتدا کرتے ہوئے سوال 22.18 کے نظام کو اعادہ گاوس زائڈل سے حل کریں۔ تین قدم تک چلیں۔

سوال 22.23: $1, 1, 1$ سے ابتدا کرتے ہوئے سوال 22.18 کے نظام کو تین قدم تک اعادہ گاوس زائڈل اور اعادہ یعقوبی سے حل کریں۔ نتائج کا آپس میں موازنہ کریں۔

سوال 22.24: مساوات 22.9 میں دی گئی نظام کا حل کتاب میں دیا گیا ہے۔اس حل کی تمام قدموں کی تصدیق کریں۔اس نظام کو گاوسی اسقاط سے حل کریں۔

سوال 22.25: کتاب میں مساوات 22.9 کے اعادہ گاوس زائڈل کے مزید دو قدم چلیں۔

سوال 22.26: مساوات 22.9 کے نظام کے لئے مساوات 22.13 کی مدد سے C تلاش کریں۔
جواب:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0.0625 & 0.25 \\ 0 & 0.0625 & 0.0625 & 0.25 \\ 0 & 0.03125 & 0.03125 & 0.125 \end{bmatrix}$$

سوال 22.27: $w_0 = 100$ ، $x_0 = 100$ ، $y_0 = 100$ ، $z_0 = 100$ سے ابتدا کرتے ہوئے اعادہ یعقوبی سے مساوات 22.9 کے نظام کا حل دو قدم تک حاصل کریں۔کتاب میں دیے گئے حل کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 22.28: $0, 0, 0$ سے ابتدا کرتے ہوئے دکھائیں کہ درج ذیل نظام کے لئے اعادہ گاوس زائڈل مرتکز ہے جبکہ اعادہ یعقوبی منفرج ہے۔

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= 4 \\ x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

جواب: اعادہ یعقوبی $0, 0, 0$ کے بعد $2, 2, 2$ اور اس کے بعد $0, 0, 0$ ، ... دیتا ہے۔اعادہ گاوس زائڈل کی اعادہ قالب C کے تمام جزو کی مطلق قیمت 1 سے کم ہے لہٰذا یہ اعادہ مرتکز ہو گا۔یہاں C درج ذیل ہے۔

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.25 & -0.25 \\ 0 & 0.125 & 0.375 \end{bmatrix}$$

سوال 22.29: عین ممکن ہے کہ ہم سوچیں کہ اعادہ یعقوبی سے اعادہ گاوس زائڈل بہتر ہے۔حقیقت میں ان اعادہ کا آپس میں موازنہ کرنا ممکن نہیں ہے۔اس حیران کن حقیقت کو دیکھنے کی خاطر درج ذیل نظام کو دونوں

اعادہ سے حل کریں۔آپ دیکھیں گے کہ اعادہ یعقوبی مرتکز ہو گا جبکہ اعادہ گاوس زائڈل منفرج ہو گا۔(اشارہ۔ امتیازی اقدار کا سہارا لیں)

$$\begin{aligned} x \qquad +z &= 2 \\ -x+y \qquad &= 0 \\ x+2y-3z &= 0 \end{aligned}$$

سوال 22.30: قالب A کے تخمینی معکوس $X_{(0)}$ پر غور کریں جہاں

$$X_{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.4 & 0.3 & -1.5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

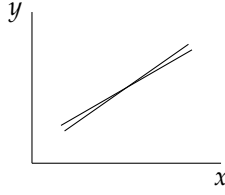
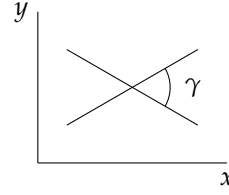
ہیں۔مساوات 22.15 کی مدد سے $X_{(1)}$ حاصل کریں۔ A^{-1} تلاش کرتے ہوئے دکھائیں کہ $X_{(0)}$ کا ہر جزو A^{-1} کے مطابقتی جزو سے زیادہ سے زیادہ 0.1 انحراف کرتا ہے جبکہ $X_{(1)}$ کا مطابقتی جزو 0.03 انحراف کرتا ہے۔
جواب:

$$X_{(1)} = \begin{bmatrix} 0.49 & -0.1 & 0.51 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.51 & 0.3 & -1.47 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.5 & 0.3 & -1.5 \end{bmatrix}$$

سوال 22.31: درج ذیل $X_{(0)}$ اور A کے لئے مساوات 22.15 کے ارتکاز کی تصدیق کرتے ہوئے دو قدم چل کر درست حل کے ساتھ موازنہ کریں۔

$$X_{(0)} = \begin{bmatrix} 2.9 & -0.9 \\ -4.9 & 1.9 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

سوال 22.32: $X_{(m)} = A^{-1}$ سے مساوات 22.15 کے ذریعہ $X_{(m+1)} = A^{-1}$ حاصل کریں۔

سوال 22.33: دکھائیں کہ مساوات 22.9 میں w اور x آپس میں بدلنے اور y اور z کو آپس میں بدلنے سے نظام میں کوئی تبدیلی پیدا نہیں ہوتی ہے۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے اس نظام کو گھٹا کر دو نا معلوم متغیرات کی دو مساوات کا نظام حاصل کریں۔

شکل 22.1: دو متغیرات کے دو خطی مساوات کے نظام

22.3 خطی مساوات کا نظام: بدخوئی

وہ خطی مساوات کا نظام جس کے عددی سروں میں معمولی خلل کی بنا یا حل کرنے کے دوران معمولی خلل پیدا ہونے سے حل پر معمولی اثر پڑتا ہو کو خوش خو[16] کہتے ہیں۔ ایسی صورت میں مساوات، حل کی پر زور نشاندہی کرتے ہیں۔

وہ خطی مساوات کا نظام جس کے عددی سروں میں معمولی خلل یا دوران حل معمولی خلل نتائج پر بڑا اثر ڈالتے ہوں بدخو[17] کہلاتا ہے۔ایسی صورت میں مساوات، حل کی کمزور نشاندہی کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر، دو سیدھی لکیروں کو دو متغیرات کے دو خطی مساوات ظاہر کریں گے۔ایسا نظام صرف اور صرف اس صورت بدخو ہو گا جب ان لکیروں کے مابین زاویہ γ چھوٹا ہو یعنی صرف اور صرف جب لکیریں آپس میں تقریباً متوازی ہوں (شکل 22.1)۔ایسی صورت میں معمولی خلل سے نقطہ تقاطع میں بہت زیادہ تبدیلی رونما ہو گی۔اگرچہ زیادہ تعداد کی مساواتوں کے بڑے نظام کے لئے ایسی سادہ جیومیٹریائی مثال پیش نہیں کی جا سکتی ہے، بہر حال بڑی نظام کے لئے بھی صورت حال اصولی طور پر ایسی ہی ہو گی۔

مثال 22.4: بدخو نظام

درج ذیل نظام

$$\begin{aligned} 0.9999x - 1.0001y &= 1 \\ x \qquad\quad - y &= 1 \end{aligned}$$

---

[16] well-conditioned

[17] ill-conditioned

کا حل $x = 0.5$ ، $y = -0.5$ ہے جبکہ نظام

$$\begin{aligned} 0.9999x - 1.0001y &= 1 \\ x \qquad - y &= 1 + \epsilon \end{aligned}$$

کا حل $x = 0.5 + 5000.5\epsilon$ ، $y = -0.5 + 4999.5\epsilon$ ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نظام بد خو ہے۔دائیں ہاتھ میں ϵ تبدیلی سے نتائج میں تخمیناً 5000ϵ تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔ □

ندرت تک پہنچنے کے عمل کو بد خوئی تصور کیا جا سکتا ہے۔دوران حساب ملحوظ ہندسوں کے کھوئے جانے سے بد خوئی عیاں ہوتی ہے۔یوں درست منعکس یا حل کا حصول زیادہ دشوار ثابت ہوتا ہے۔

بد خوئی کی صورت میں (اگر پور و پور خلل پایا جاتا ہو تب) کسی مقررہ اعشاریہ تک درست نتائج حاصل کرنے کی خاطر حساب میں نسبتاً بہت زیادہ اعشاریہ تک اعداد استعمال کرنے ہوں گے۔اگر بد خو نظام کا دایاں ہاتھ اور عددی سر کسی کلیہ سے حاصل کیے جا سکتے ہوں تب ہم انہیں جتنی درستگی تک چاہیں حاصل کر سکتے ہیں لہٰذا بد خوئی کا مسئلہ اتنا سنگین نہیں ہو گا۔اس کے برعکس اگر نظام کا دایاں ہاتھ اور اس کے عددی سر تجربہ سے حاصل کیے گئے ہوں تب (چونکہ کسی حد سے بہتر تجرباتی نتائج حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے لہٰذا) ان میں خلل کی گنجائش کو رد نہیں کیا جا سکتا ہے اور صورت حال زیادہ سنگین ہو گی۔ہمیں ماننا ہو گا کہ نظام کے مواد میں خلل کی بنا، بد خو نظام کے حل میں بہت زیادہ خلل پایا جائے گا۔ایسی صورت میں بہتر ہو گا کہ ہم نظام کو کسی ایسی مساواتوں سے ظاہر کریں جو نسبتاً زیادہ خوش خو ہوں۔

بد خوئی کی چند علامتیں کچھ یوں ہیں۔نظام کے دائیں ہاتھ اجزاء اور زیادہ سے زیادہ $\left|a_{jk}\right|$ کے لحاظ سے $\left|\text{مقطع}\, \boldsymbol{A}\right|$ چھوٹا ہو گا۔کم درست تخمینی حل بہت کم بقیہ پیدا کرتا ہو گا (نیچے دیکھیں)۔حل کے اجزاء کی مطلق قیمتوں کی نسبت $\boldsymbol{A}^{-1}$ کے اجزاء کی مطلق قیمتیں بڑی ہوں گی۔

مرکزی وتر کے اجزاء کی مطلق قیمت باقی اجزاء کی مطلق قیمت سے زیادہ ہونے کی صورت میں خوش خو نظام پایا جائے گا۔اگر چکور قالب جس کے بڑے اجزاء 0.1 اور 10 کے بیچ ہوں کے معکوس کے بڑے اجزاء بھی لگ بھگ انہیں حدود میں پائے جاتے ہوں تب ان سے منسلک مساوات کا نظام خوش خو ہو گا۔

بد خوئی کی صورت میں ہم

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{22.16}$$

کے تخمینی حل $\boldsymbol{x}_{(1)}$ سے بہتر حل تلاش کرنا چاہیں گے۔ $\boldsymbol{x}_{(1)}$ کے لحاظ سے اس نظام کا مطابقتی بقیہ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{r}_{(1)}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)}$$

یوں

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{(1)}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r}_{(1)}$$

لہٰذا

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{(1)})=\boldsymbol{r}_{(1)} \tag{22.17}$$

ہو گا۔اس سے ظاہر ہے کہ مساوات 22.17 کے حل کو بطور $\boldsymbol{r}_{(1)}$ کی درستگی استعمال کرتے ہوئے مساوات 22.16 کا حل حاصل ہو گا۔جب تک نظام بہت زیادہ بد خو نہ ہو، $\boldsymbol{r}_{(1)}$ کے اجزاء $\boldsymbol{b}$ کے اجزاء سے کم ہوں گے۔

سوالات

سوال 22.34: مثال 22.4 میں نظام کو سب سے بڑی مطلق قیمت والے عددی سر سے تقسیم کرتے ہوئے حاصل نظام کے قالب کا مقطع حاصل کریں۔تبصرہ کریں۔کیا بد خو نظام کے قالب کے مقطع کی قیمت بڑی ہو سکتی ہے؟
جواب: -0.0002

سوال 22.35: $\xi=x+y+1$ اور $\eta=x-y-1$ پر کرتے ہوئے مثال 22.4 سے دوسرا بد خو نظام حاصل کریں۔

سوال 22.36: درج ذیل دونوں نظام کو حل کریں۔ان کے حل کا آپس میں موازنہ کریں۔نتائج پر تبصرہ کریں۔

$$\begin{aligned} 2x+1.4y&=1.4 \\ 1.4x+y&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x+1.4y&=1.44 \\ 1.4x+y&=1 \end{aligned}$$

جواب: $x=0,y=1;\quad x=1,y=-0.4$

سوال 22.37: درج ذیل دونوں نظام کو حل کریں۔ان حل کا آپس میں موازنہ کریں۔نتائج پر تبصرہ کریں۔

$$\begin{aligned} 5x-7y&=-2 \\ -7x+10y&=3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5x-7y&=-2 \\ -7x+10y&=3.1 \end{aligned}$$

سوال 22.38: دکھائیں کہ دو لکیروں

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

کے مابین زاویہ γ درج ذیل تعلق دیتا ہے۔

$$\tan\gamma = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}$$

بد خوئی کے نقطہ سے اس کلیہ پر تبصرہ کریں۔

سوال 22.39: مثال 22.4 اور سوال 22.36 کے نظام کے لئے زاویہ γ سوال 22.38 کی مدد سے حاصل کریں۔ نتائج پر تبصرہ کریں۔

سوال 22.40: دکھائیں کہ درج ذیل نظام کا حل $x_1 = 1$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = 1$ ہے۔

$$6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 21$$
$$7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24$$
$$8x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 26$$

نظام کا مقطع تلاش کریں اور $x_1 = -0.8$ ، $x_2 = 2.9$ ، $x_3 = 0.7$ کے لحاظ سے نظام کا بقیہ حاصل کریں۔
جواب: $-0.1, 0.1, 0 \quad 1;$

سوال 22.41: دکھائیں کہ

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.01 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 111 & -100 \\ -110 & 100 \end{bmatrix}$$

کا $\boldsymbol{AB}$ تقریباً اکائی قالب کے برابر ہے جبکہ $\boldsymbol{BA}$ ایسا نہیں ہے۔ تبصرہ کریں۔

سوال 22.42: (قالب ہلبرٹ) گاوسی اسقاط سے نظام

$$x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{3}z = 1$$
$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{4}z = 0$$
$$\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{5}z = 0$$

کا حل $x = 9$ ، $y = -36$ ، $z = 30$ تلاش کریں۔اب ایک وقت میں صرف دو ملحوظ ہندسے استعمال کرتے ہوئے اس نظام کو دوبارہ حل کریں۔نتائج کا موازنہ کریں اور ان پر تبصرہ کریں۔(اس نظام کے عددی سر قالب کو 3×3 قالب ہلبرٹ کہتے ہیں۔)
جواب: پہلی قدم میں $0.08y + 0.09z = -0.50$ ، $0.08y + 0.09z = -0.33$ حاصل ہو گا جہاں 0.165 کو دو ملحوظ ہندسوں میں عمومی قاعدہ کے تحت 0.16 لکھا گیا ہے۔دوسری قدم میں $0 = 0.17$ حاصل ہو گا جو کوئی معنی نہیں رکھتا ہے۔اگر ہم 0.165 کو 0.17 لکھیں تب $z = 17$ ، $y = -23$ ، $x = 7.0$ حاصل ہو گا۔نظام بد خو ہے۔

سوال 22.43: تعریف کی رو سے $n \times n$ قالب ہلبرٹ $\boldsymbol{H}_n = [h_{jk}]$ کے اجزاء $h_{jk} = \frac{1}{j+k-1}$ ہوں گے۔ n بڑھانے سے معکوس $\boldsymbol{H}_n^{-1}$ کے اجزاء کی مطلق قیمتیں بہت زیادہ شرح سے بڑھتی ہیں۔اس حقیقت کو دیکھنے کی خاطر $\boldsymbol{H}_2^{-1}$ ، $\boldsymbol{H}_3^{-1}$ ، $\boldsymbol{H}_4^{-1}$ تلاش کریں۔

22.4 ترکیب کمتر مربع

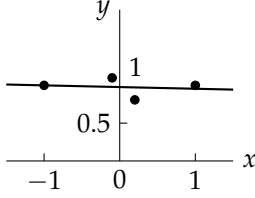
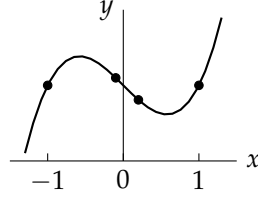
دیے گئے n عدد نقطوں (عددی جوڑیاں)

$$(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$$

پر منحنی بٹھانا[18] سے مراد ایسے تفاعل $f(x)$ کی تلاش ہے جو $j = 1, \cdots, n$ کے لئے $f(x_j) \approx y_j$ پر پورا اترتا ہو۔اس عمل میں دیے گئے نقطوں کے لحاظ سے موافق منحنی تلاش کی جاتی ہے لہٰذا اس کو موافقت منحنی بھی کہتے ہیں۔تفاعل کی قسم (مثلاً کثیر رکنی، قوت نمائی تفاعل، سائن تفاعل، کوسائن تفاعل) کے بارے میں معلومات مسئلے کی نوعیت (یعنی طبعی وجوہات) سے حاصل کی جا سکتی ہے۔عموماً صورتوں میں کسی مخصوص درجے کی کثیر رکنی سے موزوں منحنی حاصل کرنا ممکن ہو گا۔

اگر ہمیں سختی سے مکمل برابری $f(x_1) = y_1, \cdots, f(x_n) = y_n$ درکار ہو تب باہمی تحریف کے کلیات استعمال کرتے ہوئے ہم کافی زیادہ درجے کی کثیر رکنی $f(x)$ حاصل کر سکتے ہیں۔البتہ کئی بار ایسا کرنے سے قابل قبول نتائج حاصل نہیں ہوتے ہیں۔مثال کے طور پر ان تراکیب کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل چار نقطوں

$$(-1.0, 1.000), \quad (-0.1, 1.099), \quad (0.2, 0.808), \quad (1.0, 1.000) \tag{22.18}$$

---
[18] curve fitting

(ب) چار نقطوں سے گزرتی ہوئی سیدھی لکیر

(الف) چار نقطوں سے گزرتی ہوئی کثیر رکنی

شکل 22.2: تلاش موافق منحنی

سے گزرتی لیگرینج کثیر رکنی $f(x) = x^3 - x + 1$ تلاش کی جا سکتی ہے جس کو شکل 22.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔البتہ شکل 22.2-ب کو دیکھ کر صاف ظاہر ہوتا ہے کہ یہ نقطے تقریباً ایک سیدھی لکیر پر پائے جاتے ہیں۔اگر یہ نقطے کسی تجربہ سے حاصل کیے گئے ہوں تب ظاہر ہے کہ ان نقطوں میں خلل پایا جائے گا اور سیدھی لکیر پر پائے جانے والے نقطے اسی (شکل) طرح دکھائی دیں گے۔اب اگر تجربے کی طبیعیات کہتی ہے کہ نتائج سیدھی لکیر پر آنے چاہیے تب ہم سیدھی لکیر کو درست تصور کریں گے۔ایسی موزوں (حاصل کردہ) منحنی سے کسی دوسری x کے لئے بھی قیمتیں اخذ کی جا سکتی ہیں۔عموماً صورتوں میں آنکھ سے دیکھ کر موزوں سیدھی لکیر تلاش کی جا سکتی ہے البتہ بہت زیادہ بکھرے ہوئے نقطوں کی صورت میں ایسا کرنا قابل اعتماد نہیں ہو گا اور حسابی تراکیب استعمال کرنا بہتر ہو گا۔ایسی ایک اہم ترکیب جو گاوس نے پیش کی ترکیب کمتر مربع[19] کہلاتی ہے۔

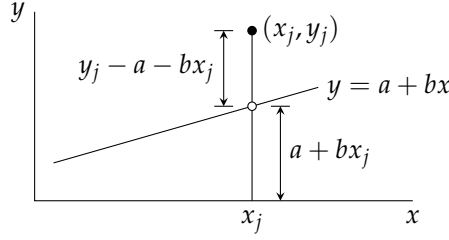
ترکیب کمتر مربع

ہمیں سیدھی لکیر

$$y = a + bx$$

کو نقطوں $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ کے بیچ یوں رکھنا ہے کہ نقطوں سے لکیر تک فاصلوں کے مربع کا مجموعہ کم سے کم ہو جہاں فاصلہ عمودی رخ (y کے متوازی) ناپا جاتا ہے۔

شکل 22.3 میں نقطہ (x_j, y_j) اور لکیر $y = a + bx$ دکھائے گئے ہیں۔ $(x_j, 0)$ سے لکیر تک انتصابی فاصلہ $a + bx_j$ ہے۔یوں (x_j, y_j) سے لکیر تک انتصابی فاصلہ $\left|y_j - a - bx_j\right|$ ہو گا۔یوں تمام دیے گئے

[19] method of least squares

شکل 22.3: نقطہ کا لکیر سے انتصابی فاصلہ

نقطوں کا لکیر سے انتصابی فاصلوں کے مربع کا مجموعہ

$$q=\sum_{j=1}^{n}(y_j-a-bx_j)^2$$

ہو گا جہاں q کی قیمت a اور b کے تابع ہو گی۔ q کی کم سے کم قیمت تلاش کرنے کے شرائط درج ذیل ہیں (جہاں ہم $j=1$ تا $j=n$ مجموعہ لیتے ہیں۔)

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial a}&=-2\sum(y_j-a-bx_j)=0\\ \frac{\partial q}{\partial b}&=-2\sum x_j(y_j-a-bx_j)=0\end{aligned} \tag{22.19}$$

یوں

$$\begin{aligned}an+b\sum x_j&=\sum y_j\\ a\sum x_j+b\sum x_j^2&=\sum x_jy_j\end{aligned} \tag{22.20}$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں ہمارے مسئلے کی **عمودی مساوات**[20] کہتے ہیں۔

مثال 22.5: سیدھی لکیر

ترکیب کمتر مربع استعمال کرتے ہوئے مساوات 22.18 میں دیے گئے چار نقطوں پر سیدھی لکیر بٹھائیں۔

حل: یہاں

$$n=4,\quad \sum x_j=0.1,\quad \sum x_j^2=2.05,\quad \sum y_j=3.907,\quad \sum x_jy_j=0.0517$$

---

[20] normal equations

ہیں لہٰذا عمودی مساوات

$$\begin{aligned} 4a + 0.10b &= 3.9070 \\ 0.1a + 2.05b &= 0.0517 \end{aligned}$$

ہوں گے جن کا حل $a = 0.9773$ ، $b = -0.0224$ ہے۔یوں درج ذیل سیدھی لکیر (شکل 22.2-ب) حاصل ہو گی۔

$$y = 0.9773 - 0.0224x$$

□

ہم نقطوں پر سیدھی لکیر $y = a + bx$ کی بجائے درجہ m کی موزوں کثیر رکنی

$$p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

بٹھا سکتے ہیں جہاں $m \le n - 1$ ہے۔تب q کی صورت

$$q = \sum_{j=1}^{n} (y_j - p(x_j))^2$$

ہو گی جو $m + 1$ عدد متغیر معلوم $b_0, \cdots, b_m$ کا تابع ہے۔اب مساوات 22.19 کی جگہ ہمارے پاس درج ذیل $m + 1$ شرائط ہوں گے

$$\frac{\partial q}{\partial b_0} = 0, \cdots, \frac{\partial q}{\partial b_m} = 0$$

جو $m + 1$ عمودی مساوات کا نظام ہے۔دو درجی کثیر رکنی

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \tag{22.21}$$

کی صورت میں آپ تسلی کر لیں کہ عمودی مساوات (1 تا n کا مجموعہ)

$$\begin{aligned} b_0 n \qquad &+ b_1 \sum x_j + b_2 \sum x_j^2 = \sum y_j \\ b_0 \sum x_j &+ b_1 \sum x_j^2 + b_2 \sum x_j^3 = \sum x_j y_j \\ b_0 \sum x_j^2 &+ b_1 \sum x_j^3 + b_2 \sum x_j^4 = \sum x_j^2 y_j \end{aligned} \tag{22.22}$$

ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ نظام تشاکلی ہے۔حصہ 22.1 اور حصہ 22.2 میں دی گئی تراکیب سے اس نظام کو حل کیا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 22.44 تا سوال 22.50 میں دیے گئے نقطوں پر سیدھی لکیر (الف) آنکھ سے دیکھ کر، (ب) ترکیب کمتر مربع استعمال کرتے ہوئے بٹھائیں۔

سوال 22.44: $(5, 10.0), (10, 8.9), (15, 8.2), (20, 7.0)$
جواب: $y = 10.96 - 0.194x$

سوال 22.45: $(0, 0), (1, 1.1), (2, 1.9), (3, 3.1)$
جواب: $y = 0.01 + 1.01x$

سوال 22.46: $(4, -17), (15, -4), (30, -7), (100, 50), (200, 70)$
جواب: $y = -13.503 + 0.457x$

سوال 22.47: $(2, 0), (3, 4), (4, 10), (5, 16)$
جواب: $y = -11.4 + 5.4x$

سوال 22.48:

خام دھات	$x\,[\mathrm{g\,cm^{-3}}]$	3.4	3.3	3.2	3.2	3.2	3.1	3.0	2.9	2.8
لوہا کی مقدار	$y\,[\%]$	33	36	37	35	33	31	33	26	30

جواب: $y = -5.05 + 12.1x$

سوال 22.49:

فی منٹ چکر	x	750	700	600	500	400
انجن کی طاقت	$y\,[\mathrm{kW}]$	2100	1880	1420	1030	580

سوال 22.50: سیدھی سڑک پر ایک گاڑی مستقل رفتار $v = b_1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے چلتے ہوئے وقت $t\,[\mathrm{s}]$ میں $y = b_0 + b_1 t$ فاصلہ طے کرے گی۔ مختلف لمحات پر درج ذیل فاصلے ناپے جاتے ہیں۔

وقت	$t\,[\mathrm{s}]$	10	8	5	3	0
فاصلہ	$y\,[\mathrm{m}]$	190	170	140	130	100

ان نقطوں کو ty سطح پر کھینچیں۔ان نقطوں پر سیدھی لکیر (الف) آنکھ سے دیکھتے ہوئے، (ب) ترکیب کمتر مربع کی استعمال سے بٹھائیں۔اس سیدھی لکیر سے رفتار کی تخمینی قیمت حاصل کریں۔
جواب: $y = 100.127 + 8.822t, \quad v = 8.822\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 22.51 تا سوال 22.55 میں ترکیب کمتر مربع کی مدد سے مساوات 22.21 استعمال کرتے ہوئے نقطوں پر قطع مکافی بٹھائیں۔

سوال 22.51: $(0,3), (1,1), (2,0), (4,1), (6,4)$

سوال 22.52: $(-1,0), (0,-2), (0,-1), (1,0)$
جواب: $y = -1.5 + 1.5x^2$

سوال 22.53: $(1.09, 1.35), (1.28, 1.58), (1.36, 1.68), (1.44, 1.85), (1.60, 2.23), (1.65, 2.38)$

سوال 22.54: معمولی ڈھلوان پر چلتے ہوئے ٹریکٹر کی رفتار بالمقابل بوجھ دیا گیا ہے۔

رفتار	$x\,[\mathrm{km\,h^{-1}}]$	4.0	3.0	2.3	1.8	1.4
کمیت	$y\,[\mathrm{kg}]$	7200	7500	7600	7500	7400

جواب: $y = 6642 + 762.3x - 156.1x^2$

سوال 22.55:

مزدور کا کام کرنے کا دورانیہ	$x\,[\mathrm{h}]$	6	5	4	3	2	1
رد عمل میں دیری	$y\,[\mathrm{s}]$	1.55	1.72	1.65	1.75	1.48	1.50

سوال 22.56: ترکیب شولسکی سے سوال 22.52 کو حل کریں۔

سوال 22.57: تین درجی کثیر رکنی کی صورت میں عمودی مساوات حاصل کریں۔

سوال 22.58: ہم ترکیب کمتر مربع میں کثیر رکنی

$$b_0 + b_1x_j + b_2x_j^2 + \cdots, +b_mx_j^m = y_j, \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

کو مطمئن کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ایسا قالب $\boldsymbol{C}$ متعارف کریں کہ اس کثیر رکنی کو ہم $\boldsymbol{Cb} = \boldsymbol{y}$ لکھ سکیں۔دکھائیں کہ تب عمودی مساوات $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Cb} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{y}$ لکھے جا سکتے ہیں۔
جواب: $\boldsymbol{C} = [c_{jk}],\ c_{jk} = x_j^{k-1},\ \boldsymbol{b}^T = [b_0 \cdots b_m]$

سوال 22.59: نمو آبادی کے مسئلہ میں عموماً موزوں قوت نمائی تفاعل $y = b_0e^{bx}$ کو ترکیب کمتر مربع کی استعمال سے حاصل کرنا ہو گا۔دکھائیں کہ دونوں ہاتھ لوگارتھم لے کر اس مسئلہ کو سیدھی لکیر بٹھانے کے مسئلہ میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔
جواب: $y^* = a^* + bx, \quad y^* = \ln y,\ a^* = \ln b_0$

22.5 قالب کے امتیازی اقدار کی شمول

n صف پر مشتمل (حقیقی یا مخلوط) چکور قالب $A = [a_{jk}]$ کے **امتیازی اقدار** یا **آئگن اقدار** سے مراد ایسا عدد λ ہے جس کے لئے

$$Ax = \lambda x \tag{22.23}$$

کا غیر صفر حل یعنی $x \neq 0$ پایا جاتا ہو جو اس λ کے لحاظ سے A کا **امتیازی سمتیہ** یا **آئگن سمتیہ** کہلاتا ہے۔ A کے تمام امتیازی اقدار کے سلسلہ کو A کا **طیف** کہتے ہیں۔ A کے امتیازی اقدار درج ذیل امتیازی مساوات

$$D(\lambda) = \text{مقطع}\,(A - \lambda I) = 0 \tag{22.24}$$

کے جذر ہوں گے جہاں I اکائی قالب ہے جو n صف پر مشتمل ہے۔ $D(\lambda)$ کو **امتیازی مقطع** کہتے ہیں جس کو λ کے n درجی کثیر رکنی کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جو A کا مطابقتی **امتیازی کثیر رکنی** کہلاتا ہے۔یوں A کا کم از کم ایک امتیازی قدر اور زیادہ سے زیادہ n منفرد امتیازی اقدار ممکن ہوں گے۔

کسی بھی A کے امتیازی کثیر رکنی کے عددی سر حاصل کر کے کثیر رکنی کا جذر تلاش کیا جا سکتا ہے۔البتہ بڑی n کی صورت میں کثیر رکنی کے عددی سر تلاش کرنا اور کثیر رکنی کا جذر تلاش کرنا خاصہ لمبا کام ثابت ہو گا لہٰذا بہتری اسی میں ہے کہ کوئی بہتر ترکیب استعمال کی جائے۔ حقیقتاً ایسے دو قسم کے تراکیب پائے جاتے ہیں۔

- امتیازی اقدار کے حدود تلاش کرنے کے تراکیب۔
- امتیازی اقدار کے تخمینی قیمتیں تلاش کرنے کے تراکیب۔

ہم دونوں ترکیب کو مثالوں کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

درج ذیل دلچسپ مسئلہ گرشگرین[21] ایسی دائری اقراص پر مشتمل خطہ دیتا ہے جس میں دیے گئے قالب کے تمام امتیازی اقدار پائے جاتے ہیں۔درحقیقت ہر $k = 1, \cdots, n$ کے لئے اس مسئلہ[22] میں دیا گیا عدم مساوات ایک دائری قرص کو ظاہر کرتی ہے جس کا مرکز، مخلوط λ سطح میں a_{kk} ہے اور جس کا رداس، عدم مساوات کا دایاں ہاتھ دیتا ہے؛ اور یہ مسئلہ کہتا ہے کہ A کا ہر ایک امتیازی قدر ان n عدد اقراص میں سے کسی نا کسی ایک میں پایا جائے گا۔

---

[21] Gershgorin's theorem

[22] روسی ریاضی دان سمیون ارانووچ گرشگرین [1901-1933]

مسئلہ 22.1: (مسئلہ گرشگرین)
فرض کریں کہ کسی $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A} = [a_{jk}]$ کا امتیازی قدر λ ہے۔تب کسی عدد صحیح $k\,(1 \le k \le n)$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$|a_{kk} - \lambda| \le |a_{k1}| + |a_{k2}| + \cdots + |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + \cdots + |a_{kn}| \tag{22.25}$$

ثبوت: فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ کے اس امتیازی قدر λ کا مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{x}$ ہے۔تب

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad \implies \quad (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{22.26}$$

ہو گا۔فرض کریں کہ $\boldsymbol{x}$ کے اجزاء میں سب سے زیادہ مطلق قیمت والا جزو x_k ہے۔تب

$$\tfrac{x_m}{x_k} \le 1 \qquad (m = 1, \cdots, n)$$

ہو گا۔سمتی مساوات 22.26 درحقیقت n مساوات کا نظام ہے جو مساوات کے دونوں اطراف سمتیات کے n اجزاء پر مشتمل ہے۔ان میں سے k ویں مساوات

$$a_{k1}x_1 + \cdots + a_{k,k-1}x_{k-1} + (a_{kk} - \lambda)x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n = 0$$

ہو گی جس سے

$$a_{kk} - \lambda = -a_{k1}\frac{x_1}{x_k} - \cdots - a_{k,k-1}\frac{x_{k-1}}{x_k} - a_{k,k+1}\frac{x_{k+1}}{x_k} - \cdots - a_{kn}\frac{x_n}{x_k}$$

حاصل ہو گا۔اس کے دونوں اطراف مطلق قیمتیں لے کر تکونی عدم مساوات $|a+b| \le |a| + |b|$ (جہاں a اور b کوئی بھی مخلوط اعداد ہو سکتے ہیں) کی اطلاق سے اور

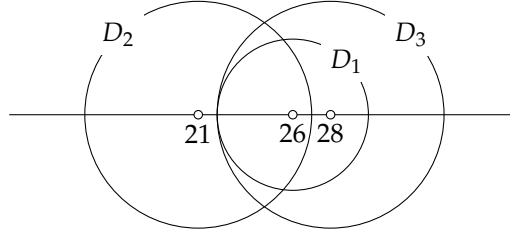
$$\left|\frac{x_1}{x_k}\right| \le 1, \cdots, \quad \left|\frac{x_n}{x_k}\right| \le 1$$

کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 22.25 حاصل ہو گا۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 22.6: مسئلہ گرشگرین کا اطلاق
قالب

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 26 & -2 & 2 \\ 2 & 21 & 4 \\ 4 & 2 & 28 \end{bmatrix}$$

کے امتیازی اقدار مسئلہ 22.1 کے تحت درج ذیل تین اقراص میں پائے جائیں گے (شکل 22.4)۔

شکل 22.4: شکل برائے مثال 22.6

- D_1 : رداس $|-2|+2=4$ اور مرکز 26 ،
- D_2 : رداس $2+4=6$ اور مرکز 21 ،
- D_3 : رداس $4+2=6$ اور مرکز 28

آپ تسلی کر لیں کہ امتیازی اقدار 30 ، 25 اور 20 ہیں۔ □

امتیازی اقدار کی مطلق قیمتوں کا حد درج ذیل مسئلہ شُر[23] دیتا ہے۔ مسئلہ شُر کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مسئلہ 22.2: (مسئلہ شُر)[24]
فرض کریں کہ $n \times n$ قالب $\boldsymbol{A}=[a_{jk}]$ کے امتیازی اقدار $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ہیں۔تب درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i\right|^2 \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{jk}\right|^2 \qquad \text{(عدم مساوات شُر)} \tag{22.27}$$

مساوات 22.27 میں صرف اور صرف اس صورت برابری کا نشان استعمال ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$\bar{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{A}}^T \tag{22.28}$$

---

[23] Schur's theorem
[24] روسی ریاضی دان اسائے شُر [1875-1941]

مساوات 22.28 کو مطمئن کرنے والا قالب **عمودی**[25] کہلاتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر مشی، منحرف ہر مشی اور اکہرا قالب عمودی ہوں گے۔اسی طرح حقیقی تشاکلی، منحرف تشاکلی اور معیاری عمودی قالب بھی عمودی ہوں گے۔

فرض کریں کہ مسئلہ 22.2 میں قالب $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی قدر λ_m ہے تب $|\lambda_m|^2$ کی قیمت مساوات 22.27 کے بائیں ہاتھ کے برابر یا اس سے کم ہو گی لہٰذا دونوں اطراف جذر لیتے ہوئے

$$\lambda_m \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{jk}\right|^2} \tag{22.29}$$

حاصل ہو گا جس کے دائیں ہاتھ کو عموماً $\boldsymbol{A}$ کا **معیار فروبنیوس**[26] یا **معیار شُر**[27] کہتے ہیں۔

مثال 22.7: **شُر عدم مساوات سے امتیازی اقدار کے حدود کا حصول**

مساوات 22.29 سے مثال 22.6 کی قالب $\boldsymbol{A}$ کے لئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$|\lambda| \le \sqrt{1949} < 44.2$$

($\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار 30 ، 25 ، 20 ہیں لہٰذا $30^2+25^2+20^2=1925<1949$ ہے۔درحقیقت $\boldsymbol{A}$ عمودی نہیں ہے۔) □

مسئلہ گرشگرین اور مسئلہ شُر ہر حقیقی چکور قالب اور ہر مخلوط چکور قالب کے لئے درست ہیں۔کچھ مسئلے صرف مخصوص قسم کے قالب کے لئے درست ہوں گے۔درج ذیل **مسئلہ پیغوں فروبنیوس**[28]، جس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا، اسی نوعیت کا ہے۔

مسئلہ 22.3: **(مسئلہ پیغوں فروبنیوس)**[29]

فرض کریں کہ $\boldsymbol{A}$ ایک حقیقی چکور قالب ہے جس کے تمام اجزاء مثبت ہیں۔تب $\boldsymbol{A}$ کا کم از کم ایک عدد حقیقی مثبت امتیازی قدر پایا جائے گا جس کا مطابقتی امتیازی سمتیہ حقیقی اور یوں منتخب کیا جا سکتا ہے کہ اس کے تمام اجزاء مثبت ہوں۔

---

[25] normal
[26] Frobenius norm
[27] Schur norm
[28] Perron-Frobenius's theorem
[29] جرمن ریاضی دان اسکار پیغوں [1880-1975]

اس سے درج ذیل مسئلہ کولٹز[30] اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 22.4: (مسئلہ کولٹز)[31]
فرض کریں کہ $n \times n$ حقیقی قالب $\boldsymbol{A} = a_{jk}$ کے تمام اجزاء مثبت ہیں۔فرض کریں کہ $\boldsymbol{x}$ ایسا سمتیہ ہے جس کے اجزاء $x_1, \cdots, x_n$ مثبت ہیں اور $y_1, \cdots, y_n$ سمتیہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ کے اجزاء ہیں۔تب حقیقی محور پر n حاصل تقسیم $q_j = \frac{y_j}{x_j}$ کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمتوں کے بیچ بند وقفہ پر $\boldsymbol{A}$ کا کم از کم ایک امتیازی قدر پایا جائے گا۔

ثبوت: چونکہ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{22.30}$$

ہو گا۔تبدیل محل قالب $\boldsymbol{A}^T$ مسئلہ 22.3 کے شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔یوں $\boldsymbol{A}^T$ کا ایک مثبت امتیازی قدر λ پایا جائے گا جس کے مطابقتی امتیازی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے تمام اجزاء u_j مثبت ہوں گے۔یوں $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ ہو گا جس کا تبدیل محل لیتے ہوئے $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{u}^T$ حاصل ہو گا۔اس کے ساتھ مساوات 22.30 ملا کر

$$\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{y} - \lambda\boldsymbol{x}) = 0$$

حاصل ہو گا جس کو

$$\sum_{j=1}^{n} u_j(y_j - \lambda x_j) = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ u_j کے تمام اجزاء مثبت ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned} &\text{یا} \quad y_j - \lambda x_j \geq 0 \quad \text{ہو گا لہٰذا کم از کم ایک} \quad j \quad \text{کے لئے} \quad q_j \geq \lambda \quad \text{ہو گا} \\ &\text{یا اور} \quad y_j - \lambda x_j \leq 0 \quad \text{ہو گا لہٰذا کم از کم ایک} \quad j \quad \text{کے لئے} \quad q_j \leq \lambda \quad \text{ہو گا۔} \end{aligned} \tag{22.31}$$

چونکہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{A}^T$ کے ایک جیسے امتیازی اقدار ہیں لہٰذا $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی قدر λ ہو گا اور یوں مساوات 22.31 سے مسئلہ کا فقرہ ثابت ہوتا ہے۔

□

---

[30] Collatz's theorem
[31] جرمن ریاضی دان لوثار کولٹز [1910-1990]

مثال 22.8: مسئلہ کولٹز سے امتیازی اقدار کی حد کا حصول
فرض کریں کہ

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}8&1&1\\1&5&2\\1&2&5\end{bmatrix}$$ ہے تب $$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$ منتخب کرتے ہوئے $$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}10\\8\\8\end{bmatrix}$$ ہو گا۔

یوں $q_1=10$ ، $q_2=8$ ، $q_3=8$ ہوں گے اور مسئلہ 22.4 اشارہ کرتا ہے کہ $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار وقفہ $8\leq\lambda\leq10$ میں پائے جاتے ہوں گے۔ظاہر ہے کہ ایسے وقفے کی لمبائی منتخب کردہ $\boldsymbol{x}$ پر منحصر ہو گی۔آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{A}$ کا امتیازی قدر $\lambda=9$ ہے۔ □

سوالات

سوال 22.60 تا سوال 22.65 میں مسئلہ 22.1 استعمال کرتے ہوئے وہ قرص تلاش کریں جن میں دی گئی قالب کے امتیازی اقدار پائے جاتے ہوں۔ قرص کو کاغذ ترسیم پر کھینچیں۔

سوال 22.60:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&1\end{bmatrix}$$

جواب: مرکز 1, 4, 1 رداس 5, 8, 9

سوال 22.61:

$$\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&3&2\\1&2&3\end{bmatrix}$$

سوال 22.62:

$$\begin{bmatrix}-9&1&0\\1&-9&1\\0&1&-9\end{bmatrix}$$

جواب: مرکز $-9, -9, -9$ رداس $1, 2, 1$

سوال 22.63:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

سوال 22.64:

$$\begin{bmatrix} -33 & -16 & -72 \\ 24 & 10 & 57 \\ 8 & 4 & 17 \end{bmatrix}$$

جواب: مرکز $-33, 10, 17$، رداس $88, 81, 12$

سوال 22.65:

$$\begin{bmatrix} 0 & i0.5 & -i \\ 1-i & 1+i & 0 \\ i0.1 & 1 & -i \end{bmatrix}$$

سوال 22.66: دکھائیں کہ سوال 22.65 اور سوال 22.63 کے قالبوں کے امتیازی اقدار بالترتیب $6, 3, 3$ اور $10, 0, -4$ ہیں۔

سوال 22.67: ہم مسئلہ 22.1 اور مسئلہ 9.14 کو ملا کر سوال 22.60 کے امتیازی اقدار کے بارے میں کیا رائے بنا سکتے ہیں؟

سوال 22.68: **(شمولی سلسلہ)** قالب A کے **شمولی سلسلہ**[32] سے مراد مخلوط سطح میں وہ سلسلہ ہے جس میں A کا کم از کم ایک امتیازی قدر پایا جاتا ہو۔ مسئلہ 9.14-پ اور مسئلہ 9.16 کو ملا کر اکہرا قالب کے لئے کس طرح کے شمولی سلسلہ حاصل ہوں گے؟
جواب: دائری قوس

[32] inclusion set

سوال 22.69: دکھائیں کہ مثال 22.6 میں دیا گیا قالب عمودی نہیں ہے اور اس کے امتیازی اقدار 30 ، 25 ، 20 ہیں۔

سوال 22.70: دکھائیں کہ مثال 22.8 میں دیے گئے قالب کے امتیازی اقدار 9 ، 6 ، 3 ہیں اور مساوات 22.27 میں برابری کی علامت مطمئن ہو گی۔

سوال 22.71: دکھائیں کہ ہرمشی، منحرف ہرمشی اور اکہرا قالب عمودی ہیں۔

سوال 22.72: دو صف پر مشتمل ایسا قالب تلاش کریں جو عمودی نہ ہو۔

سوال 22.73 تا سوال 22.75 میں مساوات 22.29 کی مدد سے درج ذیل قالب کے امتیازی اقدار کے مطلق قیمتوں کی زیادہ سے زیادہ حد تلاش کریں۔

سوال 22.73: مثال 22.8 کا قالب۔
جواب: $\sqrt{116} = 10.77$

سوال 22.74: سوال 22.60 کا قالب۔

سوال 22.75: سوال 22.65 کا قالب۔
جواب: $26 \le \lambda \le 34,\ 26 \le \lambda \le 34,\ 28.66 \le \lambda \le 30$

سوال 22.76 تا سوال 22.77 پر مسئلہ 22.4 لاگو کریں۔ دیے گئے سمتیات کو x لیں۔

سوال 22.76:

$$\begin{bmatrix} 17 & 8 & 1 \\ 8 & 18 & 8 \\ 1 & 8 & 17 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

سوال 22.77:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سوال 22.78: مسئلہ 9.14 اور مسئلہ 9.16 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اکہرا قالب، عدم مساوات شُر کو برابری کی علامت کے ساتھ مطمئن کرتا ہے۔

سوال 22.79: **(غیر صفر مقطع)** اگر مقطع کے ہر صف میں وتری مقام پر جزو کا مطلق قیمت اس صف کے باقی اجزاء کے مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے زیادہ ہو تب دکھائیں کہ مقطع کی قیمت غیر صفر ہو گی۔ خطی مساوات کے نظام کے حل کے حوالہ سے اس سے کیا اخذ ہوتا ہے۔

22.6 امتیازی اقدار کا حصول بذریعہ اعادہ

$n \times n$ قالب $A = [a_{jk}]$ کے امتیازی اقدار کی تخمینی قیمتیں حاصل کرنے کا عمومی طریقہ **امتیازی اقدار کی طاقتی ترکیب**[33] ہے۔ اس ترکیب میں ہم n اجزاء کے کسی بھی سمتیہ $x_0\,(\neq \mathbf{0})$ سے ابتدا کرتے ہوئے یک بعد دیگرے

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1, \cdots, \quad x_s = Ax_{s-1}$$

حاصل کرتے ہیں۔ اپنی آسانی کی خاطر x_{s-1} کو x اور x_s کو y سے ظاہر کرتے ہوئے یوں $y = Ax$ لکھا جائے گا۔ حقیقی تشاکلی A کی صورت میں درج ذیل مسئلہ سے تخمین اور حدود خلل حاصل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 22.5: فرض کریں کہ A حقیقی تشاکلی $n \times n$ قالب ہے اور $x\,(\neq \mathbf{0})$ کوئی حقیقی سمتیہ ہے جس کے n اجزاء ہیں۔ مزید درج ذیل تعلق مان لیں۔

$$y = Ax, \quad m_0 = x^T x, \quad m_1 x^T y, \quad m_2 = y^T y$$

تب حاصل تقسیم

$$q = \frac{m_1}{m_0} \qquad \text{(ریلے حاصل تقسیم)} \tag{22.32}$$

قالب A کے امتیازی قدر λ کی تخمین[34] ہے اور اگر ہم $q = \lambda + \epsilon$ لکھیں تاکہ q میں خلل کو ϵ سے ظاہر کیا جا سکے تب

$$|\epsilon| \leq \sqrt{\frac{m_2}{m_0} - q^2} \tag{22.33}$$

---

[33] power method for eigenvalues

[34] عام طور پر وہ λ جس کی مطلق قیمت زیادہ سے زیادہ ہو، البتہ کوئی عمومی قاعدہ بیان نہیں کیا جا سکتا ہے۔

ہو گا۔

ثبوت: زیر جذر رقم کو δ^2 سے ظاہر کرتے ہیں۔تب چونکہ $m_1 = qm_0$ ہے لہٰذا

$$(\boldsymbol{y} - q\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - q\boldsymbol{x}) = m_2 - 2qm_1 + q^2m_0 = m_2 - q^2m_0 = \delta^2 m_0 \tag{22.34}$$

ہو گا۔چونکہ $\boldsymbol{A}$ حقیقی تشاکلی ہے لہٰذا اس کے $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ امتیازی اقدار (جن میں چند آپس میں برابر ہو سکتے ہیں) کے مطابقتی n حقیقی اکائی امتیازی سمتیات کا قائمہ سلسلہ $z_1, \cdots, z_n$ پایا جائے گا (جس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا)۔ تب $\boldsymbol{x}$ کی روپ

$$\boldsymbol{x} = a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n$$

ہو گی۔ اب $\boldsymbol{A}z_1 = \lambda_1 z_1$ ، ... ہوں گے جس سے

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = a_1\lambda_1 z_1 + \cdots + a_n\lambda_n z_n$$

حاصل ہو گا اور چونکہ z_j قائمہ اکائی سمتیات ہیں لہٰذا

$$m_0 = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \tag{22.35}$$

ہو گا۔یوں مساوات 22.34 میں

$$\boldsymbol{y} - q\boldsymbol{x} = a_1(\lambda_1 - q)z_1 + \cdots + a_n(\lambda_n - q)z_n$$

ہو گا۔چونکہ z_j قائمہ اکائی سمتیات ہیں لہٰذا مساوات 22.34 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\delta^2 m_0 = a_1^2(\lambda_1 - q)^2 + \cdots + a_n^2(\lambda_n - q)^2$$

ہر $(\lambda_j - q)^2$ کی جگہ سب سے کم جزو پر کرتے ہوئے اور مساوات 22.35 استعمال کرتے ہوئے

$$\delta^2 m_0 \geq (\lambda_c - q)^2(a_1^2 + \cdots + a_n^2) = (\lambda_c - q)^2 m_0$$

حاصل ہو گا جہاں q کا قریب ترین امتیازی قدر λ_c ہے۔اس سے مساوات 22.33 اخذ ہوتا ہے لہٰذا مسئلے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 22.9: مسئلہ 22.5 کا استعمال

درج ذیل سمتیہ x_0 منتخب کرتے ہوئے ہم درج ذیل حقیقی تشاکلی قالب A (مثال 22.8) پر غور کرتے ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تب یک بعد دیگرے درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$x_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 96 \\ 66 \\ 66 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 900 \\ 558 \\ 558 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 8316 \\ 4806 \\ 4806 \end{bmatrix}$$

$x = x_3$ اور $y = x_4$ لیتے ہوئے

$$m_0 = x^T x = 1\,432\,728, \quad m_1 = x^T y = 12\,847\,896, \quad m_2 = y^T y = 115\,351\,128$$

حاصل ہو گا جس سے

$$q = \frac{m_1}{m_0} = 8.967, \quad |\epsilon| \le \sqrt{\frac{m_2}{m_0} - q^2} = 0.311$$

ملتا ہے۔اس طرح $q = 8.967$ اس امتیازی قدر کی تخمین ہے جو 8.656 اور 9.278 کے بیچ ہو گا۔آپ تسلی کر لیں کہ مذکورہ بالا امتیازی قدر $\lambda = 9$ ہے۔ □

سوالات

سوال 22.80: درج ذیل x_0 منتخب کرتے ہوئے اعادہ کے ذریعہ قالب A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سے $x_1 = Ax_0$ ، $x_2 = Ax_1$ ، $x_3 = Ax_2$ کی قیمتیں حاصل کریں۔مسئلہ 22.5 میں $x = x_2$ ، $y = x_3$ لیتے ہوئے ریلے حاصل تقسیم اور حدود خلل $|\epsilon|$ تلاش کریں۔

جواب: $m_0 = 1304,\ m_1 = 6412,\ m_3 = 31736,\ q = 4.9172,\ |\epsilon| \le 0.398$

سوال 22.81: $x_0^T = [0 \; 1 \; 1]$ سے ابتدا کرتے ہوئے سوال 22.80 دوبارہ حل کریں۔ نتائج کا موازنہ کریں۔

سوال 22.82: $x_0 = [0 \; 1 \; 0]$ سے ابتدا کرتے ہوئے سوال 22.80 کو تیسری مرتبہ حل کریں۔
جواب: $\epsilon = 0, \; q = 5$ یعنی q امتیازی قدر ہے۔

سوال 22.83: دکھائیں کہ اگر x امتیازی سمتیہ ہو تب مساوات 22.33 سے $\epsilon = 0$ حاصل ہو گا۔

سوال 22.84: کیا ایسا ممکن ہے کہ ریلے حاصل تقسیم q امتیازی قدر کے برابر ہو جبکہ x امتیازی سمتیہ نہ ہو؟

سوال 22.85: کیا سوال 22.62، سوال 22.63، سوال 22.64 کے قالبوں کے لئے مساوات 22.33 قابل استعمال ہے؟

سوال 22.86: $x_0^T = [1 \; 1 \; 1]$ منتخب کرتے ہوئے سوال 22.60 کو اعادہ سے حل کرنے کی کوشش کریں۔ دیکھیں کیا ہوتا ہے۔

سوال 22.87 تا سوال 22.89 میں تشاکلی قالب دیے گئے ہیں۔ $x_0^T = [1 \; 1 \; 1 \; 1]$ منتخب کرتے ہوئے x_1 ، x_2 حاصل کریں۔ ساتھ ہی تخمین $q = \frac{x_1^T x_0}{x_0^T x_0}$ ، $q = \frac{x_2^T x_1}{x_1^T x_1}$ اور تشاکلی قالب کے امتیازی قدر کی مطابقتی حدود خلل تلاش کریں۔

سوال 22.87:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

سوال 22.88:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

جواب: $q = \frac{5}{4}, |\epsilon| \leq \frac{\sqrt{11}}{4} \approx 0.83, q = \frac{14}{9}, |\epsilon| \leq \frac{\sqrt{101}}{9} \approx 1.12$

سوال 22.89:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

سوال 22.90: یہ سمجھنے کی خاطر کہ ریلے حاصل تقسیم q کیوں عموماً سب سے زیادہ مطلق قیمت والے امتیازی قدر λ_1 کی تخمین ہوتی ہے، درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{x}_0 = c_1 \boldsymbol{z}_1 + \cdots + c_n \boldsymbol{z}_n$$

(جہاں $\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_n$ مسئلہ 22.5 میں دیے گئے ہیں) درج ذیل دکھائیں۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_{s-1} = c_1 \lambda_1^{s-1} \boldsymbol{z}_1 + \cdots + c_n \lambda_n^{s-1} \boldsymbol{z}_n, \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x}_s = c_1 \lambda_1^s \boldsymbol{z}_1 + \cdots + c_n \lambda_n^s \boldsymbol{z}_n, \\ q &= \frac{m_1}{m_0} = \frac{c_1^2 \lambda_1^{2s-1} + \cdots}{c_1^2 \lambda_1^{2s-2} + \cdots} \approx \lambda_1 \end{aligned}$$

کن صورتوں میں یہ بہتر تخمین ہو گا؟

سوال 22.91: حد خلل (مساوات 22.33) کی اہمیت جاننے کی خاطر درج ذیل $\boldsymbol{x}_0$ منتخب کرتے ہوئے قالب $\boldsymbol{A}$ پر غور کریں۔

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

دکھائیں کہ تمام s کے لئے $q = 0$ ہے۔امتیازی اقدار تلاش کرتے ہوئے بتائیں کہ کیا ہوا۔اب کوئی دوسرا $\boldsymbol{x}_0$ منتخب کرتے ہوئے دوبارہ حل کریں۔

سوال 22.92: مثال 22.9 میں قالب $\boldsymbol{A}$ کے امتیازی اقدار $\lambda_1 = 9$ ، $\lambda_2 = 6$ ، $\lambda_3 = 3$ حاصل کریں۔اب $\boldsymbol{x}_0 = [1 \ 1 \ 1]$ لیتے ہوئے $\boldsymbol{A} - 4.15\boldsymbol{I}$ پر اعادہ کا اطلاق کریں۔ مساوات 22.33 میں

$x = x_3$ اور $y = x_4$ لے کر $q = 4.4995$ حاصل کریں تا کہ λ_1 کی تخمین 8.9995 اور خلل $|\epsilon| \le 0.0393$ ہو۔مثال 22.9 کے نتیجہ سے بہت بہتر نتیجے کی وجہ بتائیں؟
جواب: A کے لئے $\frac{9}{6} = 1.5$ ہے جبکہ $A - 4.5I$ کے امتیازی اقدار 4.5 ، 1.5 ، -1.5 اور $\frac{4.5}{1.5} = 3$ اور ارتکاز آہستہ ہے۔

سوال 22.93: فرض کریں کہ تشاکلی قالب A کے امتیازی اقدار $\lambda_1 > \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_{n-1} > \lambda_n$ ہیں۔اب α کو λ_1 کی اچھی تخمین تصور کریں اور فرض کریں کہ $\lambda_1 > \lambda_n$ ہے۔تب $B = A - \alpha I$ پر اعادہ کی اطلاق سے عموماً λ_n کا تخمین حاصل ہو گا۔ایسا کیوں ہے اور یہاں لفظ عموماً سے کیا مراد ہے؟ $x_0^T = [1\ 1\ 1]$ اور $\alpha = 4.9$ لیتے ہوئے سوال 22.80 کے قالب A پر اس ترکیب کو لاگو کریں۔ مساوات 22.33 میں $x = x_1$ اور $y = x_2$ لیں۔

باب 23

اعدادی تراکیب برائے تفرقی مساوات

23.1 یک رتبی تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب

ہم باب 1 سے جانتے ہیں کہ $F(x,y,y') = 0$ جس کو عموماً $y' = f(x,y)$ لکھنا ممکن ہو گا، یک رتبی تفرقی مساوات ہے۔ابتدائی قیمت مسئلہ [1] سے مراد ایک تفرقی مساوات اور ایک ایسی شرط ہے جس کو (بلند رتبی تفرقی مسئلے کی صورت میں ایک ہی x پر ایسی کئی شرائط ہوں گے جنہیں) تفرقی مساوات کا حل مطمئن کرتا ہو۔اس حصہ میں ہم درج ذیل روپ کی ابتدائی قیمت مسئلہ پر غور کرتے ہیں

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{23.1}$$

جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی وقفہ جس پر x_0 پایا جاتا ہو میں f کا یکتا حل موجود ہے۔ہم اس ابتدائی مسئلے کے حل کی اعدادی تراکیب تلاش کرتے ہیں۔

اگر ہم اس مسئلے کے حل کا کلیہ اخذ کر سکیں تب کلیہ سے اعدادی جوابات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔اگر حل کا کلیہ بہت پیچیدہ ہو یا ایسا کلیہ موجود ہی نہ ہو تب ہم اس حصے کے اعدادی تراکیب استعمال کر سکتے ہیں۔

یہ تراکیب قدم با قدم تراکیب [2] ہیں جن میں ہم $y_0 = y(x_0)$ سے شروع کرتے ہوئے قدم با قدم آگے بڑھتے ہیں۔پہلی قدم پر ہم $x = x_1 = x_0 + h$ پر مساوات 23.1 کے حل y کا تخمینہ y_1 حاصل کرتے

[1] initial value problem
[2] step by step method

ہیں۔دوسری قدم پر ہم $x = x_2 = x_0 + 2h$ پر اس حل کا تخمینہ y_2 حاصل کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ یہاں h ایک مقررہ مستقل ہے مثلاً 0.2 یا 0.1 اور یا 0.01 ؛ مستقل h منتخب کرنے کی اصول پر اسی حصے میں غور کیا جائے گا۔

ہر قدم پر ایک ہی جیسی (کلیات) حساب دہرائی جاتی ہے۔ان کلیات کو ٹیلر تسلسل

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \cdots$$

سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 23.1 سے $y' = f$ حاصل ہوتا ہے جس کا تفرق

$$y'' = f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'$$

دیتا ہے۔اسی طرح بلند رتبی تفرق کے کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں۔یوں ٹیلر تسلسل کو

$$y(x+h) = y(x) + hf + \frac{h^2}{2}f' + \frac{h^3}{6}f'' + \cdots \tag{23.2}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں f ، f' ، f'' ، $\cdots$ کی قیمتیں $(x, y(x))$ پر لی جائیں گی۔ h کی چھوٹی قیمتوں کے لئے h^2 ، h^3 ، $\cdots$ قابل نظر انداز ہوں گے۔یوں مساوات 23.2 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$y(x+h) \approx y(x) + hf$$

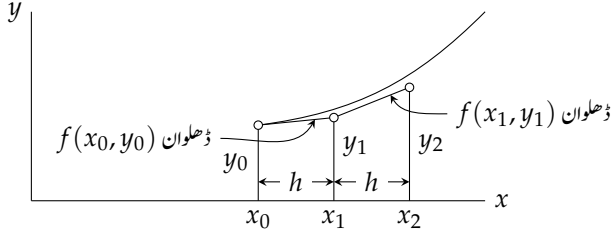
پہلی قدم میں ہم

$$y_1 = y_0 + h(x_0, y_0)$$

کا حساب کرتے ہیں جو $y(x_1) = y(x_0 + h)$ کا تخمینہ ہو گا۔دوسری قدم میں ہم

$$y_2 = y_1 + h(x_1, y_1)$$

کا حساب کرتے ہیں جو $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$ کا تخمینہ ہو گا۔اسی طرح قدم با قدم چلتے ہوئے تمام تخمینی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔کسی بھی قدم کی عمومی مساوات

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad (n = 0, 1, \cdots) \tag{23.3}$$

شکل 23.1: ترکیب یولر

ہو گی۔اس قدم با قدم ترکیب کو **ترکیب یولر**[3] یا **یولر کوشی ترکیب**[4] کہتے ہیں۔ جیومیٹریائی طور پر اس ترکیب میں منحنی $y(x)$ کی جگہ اس کی ایسی تخمینی کثیر الاضلاع استعمال کی جاتی ہے جس کا پہلا بازو نقطہ x_0 پر منحنی کا مماس ہو (شکل 23.1)۔

مساوات 23.2 میں مستقل کے علاوہ اکائی طاقت کا h لے کر ترکیب یولر حاصل کی گئی لہٰذا ترکیب یولر کو **یک رتبی ترکیب**[5] کہتے ہیں۔مساوات 23.2 کے باقی اجزاء کو رد کرنے کی وجہ سے حل میں خلل پیدا ہوتا ہے جس کو اس ترکیب کی **حذفی خلل** کہتے ہیں۔ h کی چھوٹی قیمت کی صورت میں h^3 ، h^4 ، وغیرہ کی قیمت h^2 کی قیمت سے بہت کم ہوں گی لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ **فی قدم حذفی خلل** کا رتبہ h^2 ہے۔اس کے علاوہ اس ترکیب میں اور دیگر تراکیب میں **پورو پور خلل** بھی پائے جائیں گے جن کی بنا n بڑھانے سے y_1 ، y_2 ، ... کی قیمتوں میں خلل بتدریج بڑھتا جائے گا۔اس حقیقت پر اگلے حصے میں غور کیا جائے گا۔

مثال 23.1: ترکیب یولر
ترکیب یولر سے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0$$

حل: ہم $h = 0.2$ منتخب کرتے ہوئے y_1 تا y_5 حاصل کرتے ہیں۔یہاں $f(x,y) = x + y$ ہے لہٰذا مساوات 23.3 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n, y_n)$$

---

[3] Euler method
[4] Euler-Cauchy method
[5] first order method

جدول 23.1: جدول برائے مثال 23.1

n	x_n	y_n	$0.2(x_n + y_n)$	درست حل	مطلق خلل
0	0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.1	0.000	0.040	0.021	0.021
2	0.2	0.040	0.088	0.092	0.052
3	0.3	0.128	0.146	0.222	0.094
4	0.4	0.274	0.215	0.426	0.152
5	0.5	0.489		0.718	0.229

جدول 23.1 میں ترکیب یولر سے حاصل نتائج کے ساتھ ساتھ مساوات 1.59 سے حاصل بالکل درست حل

$$y(x) = e^x - x - 1$$

کی قیمتیں اور خلل بھی دی گئی ہیں۔ موجودہ مثال میں ہمیں اصل حل بھی معلوم ہے لہٰذا ہم ترکیب یولر کی درستگی کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔ h کی مختلف قیمتیں لے کر آپ ترکیب یولر سے حاصل نتائج کا اصل حل کے ساتھ موازنہ کر سکتے ہیں۔ □

مساوات 23.2 کے زیادہ اجزاء شامل کرتے ہوئے بہتر اعدادی تراکیب حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ ایسے کلیات میں عموماً $f(x, y)$ کی تفرق سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر تفرق کو دیگر موزوں نقطوں پر $f(x, y)$ کی قیمتوں سے حاصل کیا جاتا ہے۔ آئیں ایسی دو تراکیب پر غور کرتے ہیں۔

ایسی پہلی ترکیب کو بہتر ترکیب یولر[6] یا یولر کوشی کی بہتر ترکیب کہتے ہیں۔ اس ترکیب کی پہلی قدم میں ہم پہلے ذیلی قیمت

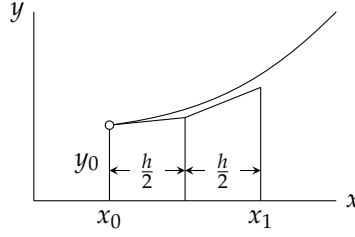
$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{23.4}$$

اور بعد میں نئی قیمت

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})] \tag{23.5}$$

حاصل کرتے ہیں۔

یہ ترکیب ایک سادہ جیومیٹریائی مطلب رکھتی ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ وقفہ x_n تا $x_n + \frac{1}{2}h$ تک ہم حل کو تخمیناً ایسی قطع سے ظاہر کرتے ہیں جو نقطہ (x_n, y_n) سے گزرتی ہو اور جس کی ڈھلوان $f(x_n, y_n)$ ہو جبکہ

[6] improved Euler method

شکل 23.2: بہتر ترکیب یولر

باقی وقفہ، یعنی $x_n + \frac{1}{2}h$ تا x_n تک، ہم قطع کی ڈھلوان $f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$ لیتے ہیں (شکل 23.2 جہاں $n = 0$ ہے)۔

بہتر ترکیب یولر کے ہر قدم پر پہلے مساوات 23.4 سے قیمت کی پیش گوئی کی جاتی ہے اور بعد میں مساوات 23.5 سے قیمت کی تصحیح کی جاتی ہے لہٰذا یہ پیش گو، مصحح ترکیب[7] کہلاتی ہے۔

مثال 23.2: بہتر ترکیب یولر

پہلے کی طرح $h = 0.2$ لیتے ہوئے بہتر ترکیب یولر کو مثال 23.1 کی ابتدائی قیمت مسئلے پر لاگو کریں۔ یہاں مساوات 23.4 اور مساوات 23.5 درج ذیل ہوں گی۔

$$
\begin{aligned}
y^*_{n+1} &= y_n + 0.2(x_n + y_n) \\
y_{n+1} &= y_n + 0.1[(x_n + y_n) + (x_{n+1} + y^*_{n+1})]
\end{aligned}
$$

پہلی مساوات کو دوسری مساوات میں پر کرتے ہوئے ایک ہی قدم میں دو بار حساب کی بجائے ایک بار حساب کرنا ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$y_{n+1} = 0.12x_n + 0.1x_{n+1} + 1.22y_n$$

ہم جدول 23.2 سے دیکھتے ہیں کہ موجودہ نتائج مثال 23.1 میں حاصل کردہ نتائج سے بہتر ہیں۔ □

بہتر ترکیب یولر میں فی قدم حذفی خلل h^3 کے لحاظ سے بڑھتا ہے لہٰذا یہ ترکیب دو رتبی ترکیب[8] ہے۔ بلکہ $\tilde{f}_n = f(x_n, y(x_n))$ لکھ کر مساوات 23.2 استعمال کرنے سے

$$y(x_n + h) - y_n = h\tilde{f}_n + \frac{1}{2}h^2\tilde{f}'_n + \frac{1}{6}h^3\tilde{f}''_n + \cdots \tag{23.6}$$

[7] predictor-corrector method
[8] second order method

جدول 23.2: بہتر ترکیب یولر۔(مثال 23.2)

y_{n+1}	$1.22y_n$	$0.1x_{n+1}$	$0.12x_n$	y_n	x_n	n
0.0200	0.0000	0.0200	0.0000	0.0000	0.0	0
0.0884	0.0244	0.0400	0.0240	0.0200	0.2	1
0.2158	0.1078	0.0600	0.0480	0.0884	0.4	2
0.4153	0.2633	0.0800	0.0720	0.2158	0.6	3
0.7027	0.5067	0.1000	0.0960	0.4153	0.8	4
				0.7027	1.0	5

ملتا ہے۔مساوات 23.5 میں قوسین میں بند حصہ کو $\tilde{f}_n + \tilde{f}_{n+1}$ لکھ کر دوبارہ ٹیلر تسلسل استعمال کرتے ہوئے مساوات 23.5 سے درج ذیل حاصل ہو گا

$$y_{n+1} - y_n \approx \frac{1}{2}h(\tilde{f}_n + \tilde{f}_n + h\tilde{f}'_n + \frac{1}{2}h^2\tilde{f}''_n + \cdots) \tag{23.7}$$

جس سے مساوات 23.6 تفریق کرتے ہوئے فی قدم قطع چال خلل

$$\frac{h^3}{4}\tilde{f}''_n - \frac{h^3}{6}\tilde{f}''_n + \cdots = \frac{h^3}{12}\tilde{f}''_n + \cdots$$

حاصل ہو گا۔

ہم اب قدم h کی انتخاب پر غور کرتے ہیں جو قدم با قدم تراکیب استعمال کرنے میں اہم مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔ h کی قیمت بہت کم رکھنے سے قدموں کی تعداد اور پور و پور خلل بہت بڑھ جاتے ہیں جبکہ h کی قیمت بہت زیادہ رکھنے سے فی قدم حذفی خلل بڑھتی ہے اور ساتھ ہی ساتھ ایک اضافی خلل، جو f کی قیمت (x_n, y_n) کی بجائے $(x_n, y(x_n))$ پر حاصل کرنے کی بنا پیدا ہوتا ہے، بھی بڑھتی ہے۔اگر f متغیر y کے تابع نہ ہو تب ان میں دوسرا خلل صفر کے برابر ہو گا، دیگر حال y کی تبدیلی سے f جتنا زیادہ تبدیل ہو، یہ خلل اتنا زیادہ ہو گا، یعنی $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ کی مطلق قیمت جتنی زیادہ ہو، یہ خلل اتنا زیادہ ہو گا۔بلکہ اس خلل کو φ_n سے ظاہر کرتے ہوئے مسئلہ اوسط قیمت کی اطلاق سے

$$\varphi_n = f(x_n, y_n) - f(x_n, y(x_n)) = f_y(x_n, \tilde{y})\eta_n$$

حاصل ہو گا جہاں y_n کا خلل $\eta_n = y_n - y(x_n)$ ہے، اور $\tilde{y}$ کا مقام y_n اور $y(x_n)$ کے بیچ ہے۔یوں y_{n+1} کے خلل میں φ_n کا حصہ تقریباً $h\varphi_n = hf_y(x_n, \tilde{y}_n)\eta_n$ ہو گا۔اس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ دلچسپی کے خطہ میں $\left|f_y\right|$ کی بالائی حد K کو کم رکھا جائے اور h یوں منتخب کیا جائے کہ

$$\kappa = hK$$

بہت زیادہ بڑی قیمت نہ ہو۔ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $\left|f_y\right|$ کی قیمت زیادہ ہو (جو y پر f کی زیادہ تابعیت کو ظاہر کرتی ہے) تب K بڑا ہو گا لہٰذا ہمیں h چھوٹا رکھنا ہو گا۔ (مثال 23.1 اور مثال 23.2 میں $f_y = 1$ ، $K = 1$ ، $hK = 0.2$ ہیں۔) اگر f_y بہت زیادہ تبدیل ہوتا ہو تب ہم K یعنی $\left|f_y(x_n, \tilde{y})\right|$ کی بالائی حد کو کم رکھتے ہوئے وقفہ کے مختلف حصوں پر مختلف h منتخب کر سکتے ہیں تا کہ

$$\kappa_n = hK_n$$

کو کسی مخصوص وقفہ (مثلاً $0.1 \le \kappa_n \le 0.2$)، جو درکار درستگی پر منحصر ہو گا، میں رکھا جا سکے۔فی قدم حذفی خلل کی بنا ہم h کو کسی ایک مقررہ قیمت سے زیادہ نہیں چن سکتے ہیں۔

رنج کوٹا ترکیب

اس سے بھی زیادہ درست ترکیب جو عملاً انتہائی اہم ہے ترکیب رنج کوٹا[9] کہلاتی[10] ہے جس کے ہر قدم پر ہم پہلے چار عدد ذیلی قیمتیں

$$\begin{aligned} A_n &= hf(x_n, y_n), & B_n &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}A_n), \\ C_n &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}B_n), & D_n &= hf(x_{n+1}, y_n + C_n) \end{aligned} \tag{23.8}$$

تلاش کرتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے نئی قیمت

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(A_n + 2B_n + 2C_n + D_n) \tag{23.9}$$

حاصل کی جاتی ہے۔یہاں ثبوت پیش کیے بغیر بتلاتا چلوں کہ اس ترکیب کی حذفی خلل رتبہ h^5 ہے یعنی یہ رتبہ چار ترکیب ہے۔دھیان رہے کہ اگر f صرف x کا تابع ہو تب ترکیب رنج کوٹا سے تکمل کی ترکیب سمسن (حصہ 21.6) حاصل ہوتی ہے۔

اگرچہ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ترکیب رنج کوٹا قابل محنت طلب ہے، کمپیوٹر کی استعمال کے لئے یہ ترکیب موزوں ہے۔

مثال 23.3: ترکیب رنج کوٹا

ترکیب رنج کوٹا کو مثال 23.1 کے ابتدائی قیمت مسئلے پر لاگو کریں۔ہم پہلے کی طرح $h = 0.2$ منتخب کرتے

---

[9] Runge-Kutta method

[10] جرمنی کے ریاضی دان کارل رنج [1856-1927] اور ولہلم کوٹا [1867-1944]

جدول 23.3: ترکیب رنج کوٹا (مثال 23.3)

y_{n+1}	$0.2214(x_n + y_n)$	$x_n + y_n$	y_n	x_n	n
0.021 400	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.0	0
0.070 418	0.049 018	0.221 400	0.021 400	0.2	1
0.130 289	0.108 889	0.491 818	0.091 818	0.4	2
0.203 414	0.182 014	0.822 107	0.222 107	0.6	3
0.292 730	0.271 330	1.225 521	0.425 521	0.8	4
			0.718 251	1.0	5

جدول 23.4: جدول 23.1، جدول 23.2 اور جدول 23.3 میں خلل کا موازنہ

خلل کی مطلق قیمت			$y = e^x - x - 1$	x
ترکیب رنج کوٹا	بہتر ترکیب یولر	ترکیب یولر		
0.000 003	0.0014	0.021	0.021 403	0.2
0.000 007	0.0034	0.052	0.091 825	0.4
0.000 011	0.0063	0.094	0.222 119	0.6
0.000 020	0.0102	0.152	0.425 541	0.8
0.000 031	0.0156	0.229	0.718 282	1.0

ہیں۔ یہاں $f(x, y) = x + y$ ہے لہٰذا مساوات 23.1 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} A_n &= 0.2(x_n + y_n), & B_n &= 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5A_n), \\ C_n &= 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5B_n), & D_n &= 0.2(x_n + 0.2 + y_n + C_n) \end{aligned} \tag{23.10}$$

چونکہ یہ تعلقات سادہ صورت رکھتے ہیں لہٰذا ہم A_n کو B_n میں پر کر کے $B_n = 0.22(x_n + y_n) + 0.02$ حاصل کرتے ہیں جس کو C_n میں پر کر کے $C_n = 0.222(x_n + y_n) + 0.022$ حاصل کرتے ہیں جس کو D_n میں پر کر کے $D_n = 0.2444(x_n + y_n) + 0.0444$ حاصل کرتے ہیں۔ ان حاصل کردہ تعلقات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 23.9 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y_{n+1} = y_n + 0.2214(x_n + y_n) + 0.0214$$

جدول 23.3 میں حساب دیا گیا ہے۔ جدول 23.4 میں ترکیب یولر، بہتر ترکیب یولر اور ترکیب رنج کوٹا کے نتائج کا موازنہ کیا گیا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مثال 23.1 اور مثال 23.2 کے نتائج سے موجودہ مثال کے نتائج بہت بہتر ہیں۔ □

لمبائی قدم[11] h ایک مخصوص قیمت H ، جو درستگی پر منحصر ہے، سے زیادہ نہیں ہونی چاہیے اور اس کی قیمت یوں منتخب کرنی چاہیے کہ

$$\kappa = hK \qquad (\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \text{ کی بالائی حد } K \text{ ہے})$$

کی قیمت 0.1 اور 0.2 کے بیچ ہو (جیسا بہتر ترکیب یولر میں تھا)۔ ترکیب رنج کوٹا میں ہم h کو A_n ، B_n ، C_n سے قابو کر سکتے ہیں چونکہ f_y کی تعریف کی رو سے

$$\kappa = hK \approx h\left|f_y\right| \approx h\left|\frac{f(x,y^*)-f(x,y^{**})}{y^*-y^{**}}\right|$$

ہو گا اور اگر ہم $x = x_n + \frac{1}{2}h$ ، $y^* = y_n + \frac{1}{2}B_n$ ، $y^{**} = y_n + \frac{1}{2}A_n$ منتخب کریں تب $y^* - y^{**} = \frac{B_n - A_n}{2}$ اور

$$\kappa \approx \kappa_n = 2\left|\frac{C_n - B_n}{B_n - A_n}\right| \tag{23.11}$$

ہو گا۔ہم اب کوئی قاعدہ بنا سکتے ہیں مثلاً جب تک $0.05 \leq \kappa_n \leq 0.2$ ہو ہم h کو تبدیل نہیں کرتے جبکہ $\kappa_n > 0.2$ کی صورت میں ہم h کو $50\,\%$ کم کرتے ہیں اور $\kappa_n < 0.05$ کی صورت میں ہم h کو دگنا کرتے ہیں (اگر h دگنا کرنے سے اس کی قیمت منتخب H سے بڑھتی نہ ہو جہاں H از خود درکار درستگی پر منحصر ہے)۔

h کو قابو کرنے کا دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ہم حساب کرنے کے ساتھ ساتھ قدم $2h$ لیتے ہوئے بھی حساب کرتے ہیں جس سے فی قدم حذفی خلل $2^5 = 32$ گنا بڑھتا ہے لیکن قدموں کی تعداد گھٹنے کی بنا اصل خلل $\frac{2^5}{2} = 16$ گنا بڑھتا ہے۔یوں لمبائی قدم کو h رکھتے ہوئے خلل کی قیمت مطابقتی y کے فرق δ کے تقریباً $\frac{1}{15}$ گنا ہو گی۔ ہم اب عدد ϵ منتخب کرتے ہوئے (مثلاً آخری ہندسے کی اکائی کا نصف، جو بہت بڑی قیمت ہے) h کو اس وقت تک تبدیل نہیں کرتے جب تک $0.2\epsilon \leq |\delta| \leq 10\epsilon$ ہو، اگر $|\delta| > 10\epsilon$ ہو تب ہم h کو $50\,\%$ کم کرتے ہیں اور اگر $|\delta| < 0.2\epsilon$ ہو تب ہم h کو دگنا کرتے ہیں؛ ظاہر ہے کہ h کو اس صورت دگنا کرنا ممکن ہو گا جب تک (پہلے کی طرح) یہ H سے تجاوز نہ کرتا ہو۔

---

[11] step length

سوالات

سوال 23.1 تا سوال 23.4 میں ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے دس قدم تک چلیں۔

سوال 23.1: $y' = y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.01$
جواب: $1, 1.01, 1.0201, 1.030301, 1.04060401, \cdots$

سوال 23.2: $y' = xy, \quad y(1) = 1, \quad h = 0.1$
جواب: $1, 1.1, 1.221, 1.36752, 1.5452976, \cdots$

سوال 23.3: $y' = xy - 1, \quad y(0) = 0, \quad h = 0.1$
جواب: $0, -0.1, -0.201, -0.30502, \cdots$

سوال 23.4: $y' = xy, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1$
جواب: $1, 1, 1.01, 1.0302, 1.061106, \cdots$

سوال 23.5: $y' = 2x, \quad y(0) = 0, \quad h = 0.1$ کو بہتر ترکیب یولر سے حل کریں۔ خلل صفر کے برابر کیوں ہے؟
جواب: $0, 0.01, 0.04, 0.09, 0.16, \cdots$

سوال 23.6: ایسی چند مثالیں پیش کریں جہاں بہتر ترکیب یولر بالکل درست جواب دیتی ہو۔

سوال 23.7: $h = 0.1$ لیتے ہوئے مثال 23.1 کو دوبارہ حل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ خلل مثال 23.1 کے خلل کا 50 % ہو گا۔
جواب: $0, 0, 0.01, 0.031, 0.0641, 0.11051, 0.171561, \cdots$

سوال 23.8: $h = 0.01$ (بیس قدم) لیتے ہوئے مثال 23.1 کو دوبارہ حل کریں۔ نقطہ $x = 2$ پر مطلق خلل کتنا ہے؟
جواب: $f(0.2) = 0.020\,190\,039\,947, \quad |\epsilon| = 0.000\,81$

سوال 23.9: $h = 0.1$ لیتے ہوئے مثال 23.2 کو دوبارہ حل کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ خلل مثال 23.2 کے خلل کا 25 % ہو گا۔
جواب: $0, 0.005, 0.021\,025, 0.049\,232\,625, 0.147\,446\,7, \cdots$

سوال 23.10: ترکیب یولر سے $y' = \frac{y}{x}, \; y(1) = 1, \; h = 0.1$ حل کریں۔
جواب: $1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, \cdots$

سوال 23.11: ترکیب یولر سے $y' = \frac{1}{1+x^2}, \; y(0) = 1, \; h = 0.1$ حل کریں۔
جواب: $1, 1.1, 1.199099, 1.2951637, 1.3569068, \cdots$

سوال 23.12: ترکیب یولر سے $y' = \frac{1}{1+y^2}, \; y(0) = 0, \; h = 0.1$ حل کریں۔دوسری قدم پر مطلق خلل کتنا فی صد ہے؟(اصل حل $y = \tan x$ ہے۔)
جواب: $0, 0.1, 0.199099, 0.295200286, 0.387184487, 0.474147677, \cdots, \quad 1.825\,\%$

سوال 23.13: بہتر ترکیب یولر سے $y' = \frac{1}{1+y^2}, \; y(0) = 0, \; h = 0.1$ حل کریں۔دوسری قدم پر مطلق خلل کتنا فی صد ہے؟
جواب: $0, 0.09950495, 0.197118863, 0.29128, 0.3809659, 0.46563611, \cdots, \quad 2.758\,\%$

سوال 23.14: ترکیب رنج کوٹا سے $y' = \frac{1}{1+y^2}, \; y(0) = 0, \; h = 0.1$ حل کریں۔دوسری قدم پر مطلق خلل کتنا فی صد ہے؟
جواب: $0, 0.099669955, 0.19743461, 0.2917243, 0.38149278, 0.46622, \cdots, \quad 2.602\,\%$

سوال 23.15: ترکیب رنج کوٹا سے $y' = y, \; y(0) = 1, \; h = 0.1$ حل کرتے ہوئے $y = e^x$ کی قیمتیں تلاش کریں۔آپ دیکھیں گے کہ نتائج پانچ اعشاریہ درست ہیں۔
جواب: $1, 1.105170833, 1.22140257, 1.349858497, 1.49182424, \cdots$

سوال 23.16: $h = 0.1$ لیتے ہوئے ترکیب یولر سے $y' = -10y, \; y(0) = 1$ حل کریں۔جواب پر تبصرہ کریں۔
جواب: $1, 0, 0, \cdots$ اصل حل $y = e^{-10x}$

سوال 23.17: مساوات 23.1 میں x_n تا x_{n+1} تفاعل $f(x,y)$ کی قیمت کو نقطہ x_n پر $f(x,y)$ کی قیمت لے کر x_0 تا x_{n+1} تکمل لیتے ہوئے ترکیب یولر اخذ کریں۔

سوال 23.18: ترکیب یولر کوشی کی طرح ایک اور ترکیب درج ذیل ہے

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y^*_{n+1})$$

جہاں $y^*_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)$ ہے۔اس کی جیومیٹریائی وجہ پیش کریں۔اس ترکیب میں $h = 0.2$ لیتے ہوئے مثال 23.1 حل کریں۔
جواب: $0, 0.02, 0.0884, 0.215848, 0.41533458, 0.702708, \cdots$

سوال 23.19: کوٹا کی تین درجی ترکیب درج ذیل ہے

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(A_n + 4B_n + M_n)$$

جہاں

$$\begin{aligned} A_n &= hf(x_n, y_n), \quad B_n = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}A_n), \\ M_n &= hf(x_{n+1}, y_n - A_n + 2B_n), \end{aligned} \tag{23.12}$$

ہیں۔اس ترکیب میں $h = 0.2$ لیتے ہوئے مثال 23.1 حل کریں۔نتائج کا جدول 23.2 کے ساتھ موازنہ کریں۔

جواب: $0, 0.0213333, 0.09165511, 0.2218081, 0.42503497, 0.717509377, \cdots$

23.2 دو رتبی تفرقی مساوات کے اعدادی تراکیب

دو رتبی تفرقی مساوات اور ایک ہی نقطہ پر دو ابتدائی شرائط کو ابتدائی قیمت مسئلہ کہتے ہیں۔اس حصے میں ہم درج ذیل صورت کے ابتدائی قیمت مسئلوں

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{23.13}$$

کا حل دو اعدادی تراکیب سے حاصل کرنا سیکھیں گے جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ f ایسا تفاعل ہے کہ اس مسئلے کا یکتا حل کسی ایسے وقفہ پر موجود ہے جس پر x_0 پایا جاتا ہے۔ پہلی ترکیب سادہ لیکن کم درست ہے جس سے اعدادی ترکیب سمجھنے میں آسانی ہوتی ہے جبکہ دوسری ترکیب بہت زیادہ درست اور عملاً انتہائی اہم ہے۔

دونوں تراکیب میں یکساں فاصلہ نقطوں $x_1 = x_0 + h$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ ، $\cdots$ پر ہم مساوات 23.13 کے حل $y(x)$ کی تخمینی قیمتیں تلاش کریں گے جنہیں بالترتیب y_1 ، y_2 ، $\cdots$ سے ظاہر کیا جائے گا۔اسی طرح ان نقطوں پر تفرق $y'(x)$ کی تخمینی قیمتوں کو بالترتیب y'_1 ، y'_2 ، $\cdots$ سے ظاہر کیا جائے گا۔

گزشتہ حصے کی تراکیب ٹیلر تسلسل

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \tfrac{h^2}{2}y''(x) + \tfrac{h^3}{3!}y'''(x) + \cdots \tag{23.14}$$

سے اخذ کی گئیں۔موجودہ حصے میں اس کے ساتھ تفرق کی ٹیلر تسلسل

$$y'(x+h) = y'(x) + hy''(x) + \frac{h^2}{2}y'''(x) + \cdots \tag{23.15}$$

بھی استعمال کی جائے گی۔

کم تر درستگی کی اعدادی ترکیب میں مساوات 23.14 اور مساوات 23.14 میں y''' اور مزید زیادہ رتبہ کے تفرق رد کیے جائیں گے۔یوں مساوات 23.14 اور مساوات 23.14 سے

$$\begin{aligned} y(x+h) &\approx y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) \\ y'(x+h) &\approx y'(x) + hf''(x) \end{aligned}$$

حاصل ہو گا۔اس پہلی ترکیب کی پہلی قدم میں

$$y_0'' = f(x_0, y_0, y_0')$$

تلاش کرتے ہوئے مساوات 23.13 سے

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0''$$

حاصل کیا جاتا ہے جو $y(x_1) = y(x_0+h)$ کی تخمینی قیمت ہے۔مزید

$$y_1' = y_0' + hy_0''$$

ہو گا جس کی ضرورت اگلی قدم میں پیش آئے گی۔دوسری قدم میں

$$y_1'' = f(x_1, y_1, y_1')$$

تلاش کرتے ہوئے مساوات 23.14 سے

$$y_2 = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2}y_1''$$

حاصل کیا جاتا ہے جو $y(x_2) = y(x_0+2h)$ کی تخمینی قیمت ہے۔مزید

$$y_2' = y_1' + hy_1''$$

ہو گا۔اسی طرح چلتے ہوئے $n+1$ ویں قدم میں

$$y_n'' = f(x_n, y_n, y_n')$$

تلاش کرتے ہوئے مساوات 23.14 سے

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n \tag{23.16}$$

حاصل ہو گا جو $y(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہے۔مزید

$$y'_{n+1} = y'_n + hy''_n \tag{23.17}$$

ہو گا جو $y'(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہے جو اگلی قدم میں درکار ہو گی۔

جیومیٹریائی طور پر اس ترکیب میں منحنی $y(x)$ کو تخمینی طور پر قطع مکافی کے ٹکڑوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 23.4: مساوات 23.16 اور مساوات 23.17 میں دی گئی ترکیب کا استعمال
درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کا حل مساوات 23.16 اور مساوات 23.17 کی مدد سے حاصل کریں۔

$$y'' = \frac{1}{2}(x + y + y' + 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

ہم $h = 0.2$ منتخب کرتے ہیں۔یوں مساوات 23.16 اور مساوات 23.17 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + 0.2y'_n + 0.02y''_n \\ y'_{n+1} &= y'_n + 0.2y''_n \end{aligned}$$

[جہاں $y''_n = \frac{1}{2}(x_n + y_n + y'_n + 2)$ ہے۔]

جدول 23.5 میں حساب دکھایا گیا ہے۔اس مسئلے کا اصل حل $y = e^x - x - 1$ ہے۔آپ جدول میں دی گئی قیمتوں کا اصل حل سے موازنہ کرتے ہوئے دیکھ سکتے ہیں کہ خلل بہت زیادہ ہے۔عملی استعمال میں یہ ترکیب عموماً درست نتائج نہیں دے گی۔ □

رنج کوٹا نیسٹروم ترکیب

آئیں اب ابتدائی قیمت دو رتبی مسئلہ حل کرنے کی دوسری ترکیب پر غور کرتے ہیں جس کو **رنج کوٹا نیسٹروم ترکیب**[12] کہتے[13] ہیں۔ ہم ثبوت پیش کیے بغیر بتلانا چاہتے ہیں کہ یہ چار درجی ترکیب ہے جس کا مطلب ہے کہ y اور y' کے ٹیلر تسلسل میں h^4 تک کے تمام ابتدائی اجزاء جوں کے توں شامل ہیں۔

[12] Runge-Kutta-Nystrom method
[13] فن لینڈ کا ریاضی دان ایورٹ جوہانس نیسٹروم

جدول 23.5: جدول برائے مثال 23.4

$0.2y'_n + 0.02y''_n$	$0.02y''_n$	$0.2y''_n$	$x_n + y_n + y'_n + 2$	$0.2y'_n$	y'_n	y_n	x_n	n
0.0200	0.0200	0.2000	2.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0
0.0642	0.0242	0.2420	2.4200	0.0400	0.2000	0.0200	0.2	1
0.1177	0.0293	0.2926	2.9262	0.0884	0.4420	0.0842	0.4	2
0.1823	0.0354	0.3537	3.5365	0.1469	0.7346	0.2019	0.6	3
0.2604	0.0427	0.4273	4.2725	0.2177	1.0883	0.3842	0.8	4
						0.6446	1.0	5

عمومی $n+1$ ویں قدم میں ہم پہلے ذیلی مساوات

$$A_n = \tfrac{1}{2}hf(x_n, y_n, y'_n)$$

$$B_n = \tfrac{1}{2}hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \beta_n, y'_n + A_n)$$ [جہاں $\beta_n = \tfrac{1}{2}h(y'_n + \tfrac{1}{2}A_n)$ ہے]

$$C_n = \tfrac{1}{2}hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \beta_n, y'_n + B_n) \tag{23.18}$$

$$D_n = \tfrac{1}{2}hf(x_n + h, y_n + \delta_n, y'_n + 2C_n)$$ [جہاں $\delta_n = h(y'_n + C_n)$ ہے]

اور بعد میں نئ قیمت

$$y_{n+1} = y_n + h(y'_n + K_n) \tag{23.19}$$ [جہاں $K_n = \tfrac{1}{3}(A_n + B_n + C_n)$ ہے]

حاصل کرتے ہیں جو $y(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہو گی۔مزید ہم

$$y'_{n+1} = y'_n + K^*_n \tag{23.20}$$ [جہاں $K^*_n = \tfrac{1}{3}(A_n + 2B_n + 2C_n + D_n)$ ہے]

حاصل کرتے ہیں جو $y'(x_{n+1})$ کی تخمینی قیمت ہے جو اگلے قدم میں درکار ہو گی۔

h کو اب قابو کیا جا سکتا ہے (جیسا گزشتہ حصے کے آخر میں بتایا گیا)۔اب ہم δ^* اور δ^{**} میں زیادہ بڑی قیمت کے برابر δ منتخب کرتے ہیں جہاں y کی مطابقتی قیمتوں کے فرق کے $\frac{1}{15}$ گنا کو δ^* اور y' کی مطابقتی قیمتوں کے فرق کے $\frac{1}{15}$ گنا کو δ^{**} کہتے ہیں۔

مثال 23.5: رنج کوٹا نیستروم ترکیب

$h = 0.2$ لیتے ہوئے مثال 23.4 میں دیے گئے مسئلے کو رنج کوٹا نیستروم ترکیب سے حل کریں۔

حل: یہاں $f=0.5(x+y+y'+2)$ ہے لہٰذا مساوات 23.18 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
A_n &= 0.05(x_n+y_n+y'_n+2),\\
B_n &= 0.05(x_n+0.1+y_n+\beta_n+y'_n+A_n+2), \quad [\beta_n=0.1(y'_n+\tfrac{1}{2}A_n)],\\
C_n &= 0.05(x_n+0.1+y_n+\beta_n+y'_n+B_n+2),\\
D_n &= 0.05(x_n+0.2+y_n+\delta_n+y'_n+2C_n+2), \quad [\delta_n=0.2(y'_n+C_n)]
\end{aligned}$$

دیا گیا مسئلہ سادہ ہے جس کے A_n ، B_n ، C_n اور D_n بھی سادہ ہیں لہٰذا ہم A_n کو B_n میں پر کرنے کے بعد B_n کو C_n میں پر کرتے ہیں اور آخر میں C_n کو D_n میں پر کرتے ہیں۔یوں درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
B_n &= 0.05[1.0525(x_n+y_n)+1.1525y'_n+2.205],\\
C_n &= 0.05[1.055\,125(x_n+y_n)+1.160\,125y'_n+2.215\,25],\\
D_n &= 0.05[1.116\,063\,75(x_n+y_n)+1.327\,613\,75y'_n+2.443\,677\,5]
\end{aligned}$$

ان سے ہم K_n اور K_n^* حاصل کر کے مساوات 23.19 اور مساوات 23.20 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n+a(x_n+y_n)+by'_n+c\\
y'_{n+1} &= y'_n+a^*(x_n+y_n)+b^*y'_n+c^*
\end{aligned} \tag{23.21}$$

جہاں

$$\begin{aligned}
a &= 0.010\,358\,8 \quad & b &= 0.211\,042\,1 \quad & c &= 0.021\,400\,8\\
a^* &= 0.105\,521\,9 \quad & b^* &= 0.115\,881\,1 \quad & c^* &= 0.221\,403\,0
\end{aligned}$$

ہیں۔جدول 23.6 میں $h=0.2$ لیتے ہوئے مطابقتی حساب کے پانچ قدم دکھائے گئے ہیں۔ $y(x)$ کی تخمینی قیمتوں میں خلل مثال 23.4 کی نسبت بہت کم ہے (جدول 23.7)۔ □

ہر اعدادی ترکیب میں حذفی خلل کے علاوہ پور و پور خلل بھی پایا جاتا ہے۔ہم آپ کو خبر دار کرنا چاہتے ہیں کہ پور و پور خلل نتائج پر دور رس اثر ڈال سکتا ہے۔مثال کے طور پر مسئلہ $y''=y,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1$ کا حل $y=e^{-x}$ ہے لیکن پور و پور خلل کی بنا نتیجہ میں درکار حل e^{-x} کا چھوٹا مضرب شامل ہو گا جو آخر کار (کافی زیادہ قدموں کے بعد) اصل حل سے بھی زیادہ ہو سکتا ہے۔اس کو **اجتماع خلل**[14] کہتے ہیں۔خلل کے جمع ہونے سے بچنے کے لئے کافی تجربہ درکار ہو گا۔

---

[14] building-up error

جدول 23.6: جدول برائے مثال 23.5

$a^*(x_n+y_n)+b^*y'_n+c^*$	$a(x_n+y_n)+by'_n+c$	y'_n	y_n	x_n	n
0.221 403 0	0.021 400 8	0.000 000 0	0.000 000 0	0.0	0
0.270 422 0	0.070 419 6	0.221 403 0	0.021 400 8	0.2	1
0.330 294 0	0.130 291 3	0.491 825 0	0.091 820 4	0.4	2
0.403 421 9	0.203 418 6	0.822 119 0	0.222 111 7	0.6	3
0.492 740 3	0.292 736 5	1.225 540 9	0.425 530 3	0.8	4
		1.718 281 2	0.718 266 8	1.0	5

جدول 23.7: مثال 23.4 اور مثال 23.5 کے نتائج کا موازنہ

خلل کی مطلق قیمت		e^x-x-1	x
جدول 23.6	مثال 23.4		
0.000 002 0	0.0014	0.021 402 8	0.2
0.000 004 3	0.0076	0.091 824 7	0.4
0.000 007 1	0.0202	0.222 118 8	0.6
0.000 010 6	0.0413	0.425 540 9	0.8
0.000 015 0	0.0737	0.718 281 8	1.0

سوالات

مساوات 23.16 اور مساوات 23.17 کی مدد سے سوال 23.20 تا سوال 23.24 کو پانچ قدم تک حل کریں۔

سوال 23.20: $y''=y,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1,\quad h=0.1$

سوال 23.21: $y''=y,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-1,\quad h=0.1$

سوال 23.22: $y''=-y,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad h=0.1$

سوال 23.23: $y''=-y,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad h=0.05$

سوال 23.24: $y''=-y,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad h=0.1$

سوال 23.25: $h=0.1$ لیتے ہوئے مثال 23.4 کو دوبارہ حل کریں۔ خلل کا موازنہ مثال 23.4 کی خلل کے ساتھ کریں جو جدول 23.7 میں دی گئیں ہیں۔

سوال 23.26: $h = 0.05$ لیتے ہوئے سوال 23.25 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 23.27: $h = 0.2$ لیتے ہوئے رنج کوٹا نیستروم کی ترکیب سے سوال 23.24 کو چار قدم تک حل کریں۔نتائج کا درج ذیل نو ہندسوں تک درست جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

0.099 833 417, 0.198 669 331, 0.295 520 207, 0.389 418 342

سوال 23.28: $h = 0.1$ لیتے ہوئے سوال 23.27 دوبارہ حل کریں۔

سوال 23.29: ابتدائی قیمت مسئلہ $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$ پر غور کریں۔دکھائیں کہ $h = 0.1$ لیتے ہوئے مساوات 23.16 اور مساوات 23.17 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$y_{n+1} = y_n + 0.1y'_n + 0.01\frac{x_n y'_n - y_n}{1-x_n^2}, \quad y'_{n+1} = y'_n + 0.2\frac{x_n y'_n - y_n}{1-x_n^2}$$

پانچ قدم تک حل کریں۔اس تفرقی مساوات کے اصل حل کو تلاش کریں جو $y = x$ ہے۔

$h = 0.1$ لیتے ہوئے سوال 23.30 تا سوال 23.32 کو مساوات 23.16 اور مساوات 23.17 کی مدد سے پانچ قدم تک حل کریں۔دیے گئے اصل حل کی تصدیق کریں۔

سوال 23.30: $y'' = xy' - 3y,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -3,\quad$ اصل حل $y = x^3 - 3x$

سوال 23.31: $y'' = xy' - 4y,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0\quad$ اصل حل $y = x^4 - 6x^2 + 3$

سوال 23.32: $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0,\ y(0) = -\frac{1}{2},\ y'(0) = 0,$
اصل حل $y = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

23.3 اعدادی تراکیب برائے بیضوی جزوی تفرقی مساوات

اس باب کے باقی حصہ میں جزوی تفرقی مساوات پر غور کیا جائے گا۔ہم بالخصوص مساوات لاپلاس، مساوات پوئسن اور حراری مساوات پر غور کریں گے جو انجینئری میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں اور جو بیضوی، قطع مکافی اور قطع زائد جزوی تفرقی مساوات کے بہترین نمونے ہیں۔ان کی تعریف درج ذیل ہے۔

ایسی جزوی تفرقی مساوات جو بلند تر رتبی تفرق کے لحاظ سے خطی ہو کو بظاہر خطی[15] کہتے ہیں۔ یوں دو متغیرات x, y والی دو درجی بظاہر خطی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{23.22}$$

جہاں u نا معلوم متغیر ہے۔اس مساوات کے تین اقسام درج ذیل ہیں

بیضوی قسم $AC - B^2 > 0$ (مثال: مساوات لاپلاس)

قطع مکافی قسم $AC - B^2 = 0$ (مثال: حراری مساوات)

قطع زائد قسم $AC - B^2 < 0$ (مثال: مساوات موج)

جہاں حراری مساوات اور مساوات موج میں y کی جگہ t ہو گا۔یہاں عددی سر A ، B ، C از خود x ، y کے تفاعل ہو سکتے ہیں لہٰذا xy مستوی کے مختلف خطوں میں مساوات 23.22 کی قسم مختلف ہو سکتی ہے۔درج بالا گروہ بندی محض دستوری نہیں ہے بلکہ عملاً انتہائی اہم ہے چونکہ مساوات کے حل کا رویہ اور اضافی (سرحدی اور ابتدائی) شرائط اس گروہ بندی پر منحصر ہوں گے۔

بیضوی مساوات عموماً کسی خطہ R میں سرحدی مسئلہ کو جنم دیتی ہے۔اگر u کی قیمت R کی سرحدی منحنی C پر دی گئی ہو تب اس کو سرحدی مسئلے کی پہلی صورت یا مسئلہ ڈرشلے[16] کہتے ہیں، اگر C پر $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ (عمودی تفرق) دیا گیا ہو تب اس کو سرحدی مسئلے کی دوسری صورت یا مسئلہ نیومن[17] کہتے ہیں اور اگر C کے کچھ حصے پر u اور باقی حصے پر u_n دیا گیا ہو تب اس کو تیسری صورت یا مخلوط مسئلہ[18] کہتے ہیں۔ C ایک بند منحنی یا ایک سے زیادہ بند منحنیات ہو سکتی ہیں۔

---

quasilinear[15]
Dirichlet problem[16]
Neumann problem[17]
mixed problem[18]

اس حصے میں ہم مساوات لاپلاس

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{23.23}$$

اور مساوات پوئسن

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \tag{23.24}$$

پر غور کرتے ہیں جو عملاً اہم ترین بیضوی مساوات ہیں۔اعدادی ترکیب حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات میں جزوی تفرق کی جگہ مطابقتی فرق لکھتے ہیں۔ ٹیلر تسلسل

(23.25)

(الف) $$u(x+h, y) = u(x, y) + hu_x(x, y) + \frac{1}{2}h^2 u_{xx}(x, y) + \frac{1}{6}h^3 u_{xxx}(x, y) + \cdots$$

(ب) $$u(x-h, y) = u(x, y) - hu_x(x, y) + \frac{1}{2}h^2 u_{xx}(x, y) - \frac{1}{6}h^3 u_{xxx}(x, y) + \cdots$$

لکھ کر مساوات 23.25-الف سے مساوات 23.25-ب تفریق کر کے $h^3, h^4, \ldots$ کو رد کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

(23.26) (الف) $$u_x(x, y) \approx \frac{1}{2h}[u(x+h, y) - u(x-h, y)]$$

اسی طرح

(23.26) (ب) $$u_y(x, y) \approx \frac{1}{2k}[u(x, y+k) - u(x, y-k)]$$

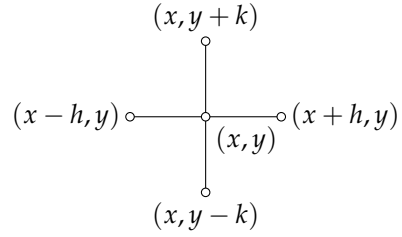
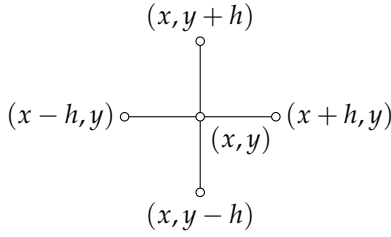
حاصل کیا جا سکتا ہے۔ہم اب دو رتبی تفرق کی طرف بڑھتے ہیں۔مساوات 23.25-الف اور مساوات 23.25-ب کو جمع کر کے $h^4, h^5, \ldots$ کو رد کرتے ہوئے u_{xx} کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

(23.27) (الف) $$u_{xx}(x, y) \approx \frac{1}{h^2}[u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)]$$

اسی طرح

(23.27) (ب) $$u_{yy}(x, y) \approx \frac{1}{k^2}[u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)]$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح

(23.27) (پ) $$u_{xy}(x, y) \approx \frac{1}{4hk}[u(x+h, y+k) - u(x-h, y+k) - u(x+h, y-k) + u(x-h, y-k)]$$

$$(x, y+h),\ (x-h, y),\ (x, y),\ (x+h, y),\ (x, y-h)$$

شکل 23.4: (مساوات 23.28 اور مساوات 23.29 میں استعمال نقطے

$$(x, y+k),\ (x-h, y),\ (x, y),\ (x+h, y),\ (x, y-k)$$

شکل 23.3: (مساوات 23.26 اور مساوات 23.27 میں استعمال نقطے

ہو گا (سوال 23.35)۔ شکل 23.3 میں نقطہ $(x+h, y)$ ، $(x-h, y)$ ، . . . دکھائے گئے ہیں جو مساوات 23.26 اور مساوات 23.27 میں استعمال ہوئے ہیں۔[مساوات 23.27-پ کی ضرورت موجودہ حصے میں پیش نہیں آئے گی۔]

ہم مساوات 23.27-الف اور مساوات 23.27-ب کو مساوات پوئسن (مساوات 23.24) میں پر کرتے ہوئے

$$u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = h^2 f(x, y) \tag{23.28}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں سادہ کلیہ اخذ کرنے کی خاطر $k = h$ لیا گیا ہے۔ یوں مساوات پوئسن (مساوات 23.24) کی مطابقتی مساوات فرق درج بالا مساوات 23.28 ہے جہاں h کو جسامت جال[19] کہتے ہیں۔اسی طرح مساوات لاپلاس (مساوات 23.23) کی مطابقتی مساوات فرق

$$u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = 0 \tag{23.29}$$

ہو گی۔جیسا شکل 23.4 میں دکھایا گیا ہے، مساوات 23.29 نقطہ (x, y) پر u کی قیمت کو پڑوسی چار نقطوں پر u کی قیمت کی صورت میں بیان کرتی ہے۔

مساوات 23.28 اور مساوات 23.29 میں $h^2\nabla^2 u$ کی تخمینی قیمت پانچ نقاطی تخمین ہے جہاں عددی سر کا خاکہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} \tag{23.30}$$

[19] mesh size

مساوات 23.29 کہتی ہے کہ نقطہ (x, y) پر u کی قیمت پڑوسی چار نقطہ جال پر u کی قیمتوں کا اوسط ہو گا۔ اس طرح مساوات 23.28 کو نہایت خوش اسلوبی سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} u = h^2 f(x, y)$$

23.3.1 مسئلہ ڈرشلے

مسئلہ ڈرشلے کا خطہ R میں اعدادی حل تلاش کرنے کی خاطر ہم h منتخب کرتے ہوئے R میں یکساں h فاصلہ پر افقی اور عمودی سیدھی لکیروں کا جال بچھاتے ہیں (شکل 23.5)۔ جن نقطوں پر یہ لکیریں ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں ان کو نقطہ جال یا جوڑ[20] کہا جاتا ہے۔ اس کے بعد دی گئی جزوی تفرقی مساوات کو تخمیناً اس کی مطابقتی مساوات فرق سے ظاہر کیا جاتا ہے جو ہر جوڑ پر u کی نا معلوم قیمت کو R میں باقی جوڑ پر اور دیے گئے سرحدی معلومات کے ساتھ منسلک کرتی ہے۔ اس عمل سے خطی الجبرائی مساوات کا نظام حاصل ہو گا جس کے حل R میں جوڑوں پر u کی تخمینی قیمت دیں گی۔ ہم دیکھیں گے کہ مساواتوں کی تعداد نا معلوم متغیرات کی تعداد، یعنی R میں جوڑوں کی تعداد، کے برابر ہو گی۔ چونکہ ہر جوڑ پر u کی قیمت صرف پڑوسی چار جوڑ پر u کی قیمتوں پر منحصر ہے لہٰذا اس نظام کا عددی سر غیر گنجان قالب[21] ہو گا جس میں بہت کم اجزاء غیر صفر ہوں گے۔ حقیقت میں یہ قالب بہت بڑا ہو گا چونکہ درست نتائج حاصل کرنے کی خاطر زیادہ جوڑ درکار ہوں گے اور 500×500 قالب یا اس سے بھی بڑا قالب ذخیرہ کرنے میں دشواری پیش آ سکتی ہے[22]۔ یوں بلا واسطہ ترکیب کی بجائے بالواسطہ ترکیب (حصہ 22.2) کو ترجیح دی جاتی ہے۔ بالخصوص عمومی مسائل میں ترکیب گاوس زائڈل[23] جس[24] کو ترکیب لیبمن[25] بھی کہتے ہیں کار آمد ثابت ہوتی ہے۔ ہم اس عمل کو ایک مثال کی مدد سے پیش کرتے ہیں جس میں اپنی آسانی کی خاطر جوڑوں کی تعداد کم رکھی گئی ہے۔ ہم جوڑ اور جوڑ پر تخمینی حل کو درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$N_{ij} = (ih, jh), \quad u_{ij} = u(ih, jh) \tag{23.31}$$

اس طرح مساوات 23.29 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0 \tag{23.32}$$

---

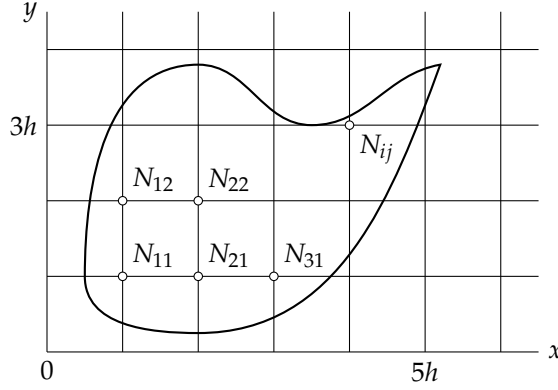
[20] mesh point, nodal point

[21] sparse matrix

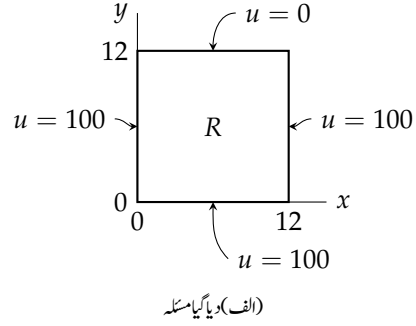
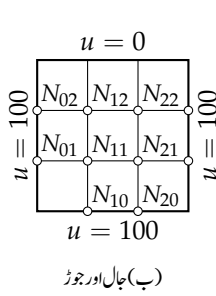
[22] موجودہ قالب سہ وتری (تعریف جلد پیش کی جائے گی) نہیں ہے۔ اگر ایسا ہوتا تب ذخیرہ کا مسئلہ پیدا کیے بغیر ہم گاوسی اسقاط استعمال کر سکتے تھے۔

[23] Gauss-Seidel method

[24] جرمن ریاضی دان فلپ لڈوگ ون زائڈل [1821-1896]

[25] Liebmann's method

شکل 23.5: جسامت جال h ہے۔ جوڑ $N_{11}=(h,h)$، ...، $N_{ij}=(ih,jh)$ ہیں۔

(ب) جال اور جوڑ

(الف) دیا گیا مسئلہ

شکل 23.6: شکل برائے مثال 23.6

مثال 23.6: مساوات لاپلاس۔ ترکیب لیبمن

یکساں موٹائی اور یکساں مادے کی چکور چادر کے اطراف کی لمبائی $12\,\text{cm}$ ہے۔ اس چادر کے تین کناروں کو $100\,^\circ\text{C}$ پر اور ایک کنارے کو $0\,^\circ\text{C}$ پر رکھا گیا ہے (شکل 23.6)۔ جسامت جال کو $4\,\text{cm}$ (چوڑے خانے) رکھتے ہوئے ترکیب لیبمن سے جوڑوں پر برقرار حال درجہ حرارت تلاش کریں۔

حل: برقرار حال نتائج میں وقت بطور متغیر نہیں پایا جائے گا لہٰذا حراری مساوات

$$u_t = k^2(u_{xx}+u_{yy})$$

سے مساوات لاپلاس حاصل ہو گی۔ یوں ہمیں مسئلہ ڈرشلے حل کرنا ہو گا۔ ہم شکل میں دکھائی گئی جال بچھاتے ہیں اور

جوڑ N_{11} ، N_{21} ، N_{12} ، N_{22} پر اسی ترتیب میں غور کرتے ہیں۔ مساوات 23.32 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} \qquad\quad &= -200 \\ u_{11} - 4u_{21} \qquad + u_{22} &= -200 \\ u_{11} \qquad - 4u_{12} + u_{22} &= -100 \\ u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= -100 \end{aligned} \tag{23.33}$$

عملاً اتنے کم مساوات کو آپ گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں گے۔

$$u_{11} = u_{21} = 87.5, \quad u_{12} = u_{22} = 62.5$$

ایک اعشاریہ تک (زیادہ درست) جوابات 88.1 اور 61.9 ہیں (جنہیں فوریئر تسلسل سے حاصل کیا گیا)۔ یوں خلل 1 % کے لگ بھگ ہے جو اتنے چوڑے جال کے لئے حیرت کن بات ہے۔ زیادہ مساواتوں کی صورت میں نظام کو ترکیب لیبمن سے حل کیا جائے گا۔ ایسا کرتے ہوئے مساوات 23.33 کو پہلے درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} u_{11} &= \quad 0.25u_{21} + 0.25u_{12} \qquad + 50 \\ u_{21} &= 0.25u_{11} \qquad\qquad + 0.25u_{22} + 50 \\ u_{12} &= 0.25u_{11} \qquad\qquad + 0.25u_{22} + 25 \\ u_{22} &= \qquad\quad 0.25u_{21} + 0.25u_{12} \qquad + 25 \end{aligned} \tag{23.34}$$

انہیں اب ترکیب گاوس زائڈل میں استعمال کیا جاتا ہے۔ $u_{11} = w$ ، $u_{21} = x$ ، $u_{12} = y$ ، $u_{22} = z$ لیتے ہوئے یہ حصہ 22.2 میں مساوات دیتی ہیں جہاں ابتدائی قیمتیں 100 ، 100 ، 100 لیتے ہوئے اس کو حل کیا گیا ہے۔ جوڑ پر قیمتوں کا بہتر اندازہ لگانے سے نتائج زیادہ آسانی سے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ آپ تسلی کر سکتے ہیں کہ اس نظام کا حل $u_{11} = u_{21} = 87.5$ اور $u_{12} = u_{22} = 62.5$ ہے۔

آسانی پیدا کرنے کی تراکیب جاننے کے لئے سوال 23.36 دیکھیں۔

رائے: اگر $h = \frac{l}{n}$ منتخب کیا جائے جہاں R کی ایک طرف کی لمبائی l ہو اور $(n-1)^2$ جوڑ کو صف در صف لیا جائے یعنی پہلے صف $N_{11}, N_{21}, \cdots, N_{n1}$ کے بعد دوسرا صف $N_{12}, N_{22}, \cdots, N_{n2}$ اور اس کے بعد تیسرا صف، ... لیا جائے تب نظام کا $(n-1)^2 \times (n-1)^2$ عددی سر قالب $\boldsymbol{A}$ درج ذیل ہو گا

$$\text{(الف)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} & & & \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} & & \\ \vdots & & & & \\ & & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \\ & & & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{23.35}$$

جہاں

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 1 & & & \\ \vdots & & & & & \\ & & & 1 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)} \tag{23.35}$$

ہے جو $(n-1) \times (n-1)$ قالب ہے۔یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $\boldsymbol{A}$ غیر نادر ہو گا۔ □

ایسا قالب جس کے تمام غیر صفر اجزاء مرکزی وتر اور مرکزی وتر کے متوازی ترچھی لکیروں پر واقع ہوں (ان لکیروں اور مرکزی وتر کے بیچ ایسی ترچھی لکیریں ہو سکتی ہیں جن کے اجزاء صفر ہوں) کو **پٹی قالب**[26] کہتے ہیں۔مثال کے طور پر مساوات 23.35 میں $\boldsymbol{A}$ پٹی قالب ہے۔اگرچہ گاوسی اسقاط پٹی میں صفروں کو برقرار نہیں رکھتا ہے البتہ یہ پٹی کے باہر غیر صفر اجزاء بھی پیدا نہیں کرتا ہے۔یوں عددی سر قالب کی پٹی صورت سود مند ثابت ہوتی ہے۔مساوات 23.35 میں جوڑ کی ترتیب یوں منتخب کی گئی کہ پٹی قالب حاصل ہو۔

23.3.2 بدلتی رخ خفی ترکیب

ایسا قالب جس میں تمام غیر صفر اجزاء مرکزی وتر یا مرکزی وتر کے ساتھ ملے ہوئے خانوں میں پائے جاتے ہوں کو **سہ وتری قالب**[27] کہتے ہیں۔ایسی صورت میں گاوسی اسقاط کا استعمال خصوصی طور پر سادہ ثابت ہوتا ہے۔

اس سے سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا مساوات لاپلاس یا مساوات پوئسن کے مسئلہ ڈرشلے کا اعدادی حل تلاش کرنے کی خاطر ہم مساوات کا ایسا نظام حاصل کر سکتے ہیں جس کا عددی سر قالب سہ وتری ہو۔جی ہاں ایسا ممکن ہے اور سہ وتری قالب حاصل کرنے کی ایک مقبول ترکیب **بدلتی رخ خفی ترکیب**[28] کہلاتی ہے۔مساوات 23.30 کی نقش کو دیکھ کر معلوم ہوتا ہے کہ اگر صف میں صرف یہی تین نقطے ہوں (یا قطار میں یہی تین نقطے ہوں) تب سہ وتری قالب حاصل ہو گی۔یوں ہم مساوات 23.32 کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں

$$u_{i-1,j} - 4u_{ij} + u_{i+1,j} = -u_{i,j-1} - u_{i,j+1} \quad \text{(الف)} \tag{23.36}$$

---

band matrix[26]
tridiagonal matrix[27]
alternating direction implicit method, ADI[28]

تا کہ بایاں ہاتھ صف j کا حصہ ہو اور دایاں ہاتھ قطار i کا حصہ ہو۔ظاہر ہے کہ ہم مساوات 23.32 کو

$$u_{i,j-1} - 4u_{ij} + u_{i,j+1} = -u_{i-1,j} - u_{i+1,j} \quad \text{(ب)} \tag{23.36}$$

بھی لکھ سکتے ہیں جہاں بایاں ہاتھ قطار i کا حصہ ہو گا اور دایاں ہاتھ صف j کا حصہ ہو گا۔ہم بدلتی رخ خفی ترکیب کو بار بار دہرا کر آگے بڑھتے ہیں۔ہم ہر جوڑ پر ابتدائی قیمت $u_{ij}^{(0)}$ سے شروع کرتے ہیں۔ہر قدم پر ہم تمام جوڑوں پر نئی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔ایک قدم میں ہم مساوات 23.36-الف سے اخذ کلیہ توالی استعمال کرتے ہیں جبکہ اگلی قدم میں ہم مساوات 23.36-ب سے اخذ کلیہ توالی استعمال کرتے ہیں اور اسی طرح متواتر یہی کلیات استعمال کرتے ہوئے بڑھتے ہیں۔ یوں اگر ہم $u_{ij}^{(m)}$ حاصل کر چکے ہوں، تب مساوات 23.36-الف کے دائیں ہاتھ میں $u_{ij}^{(m)}$ پر کر کے ہم بائیں ہاتھ کو $u_{ij}^{(m+1)}$ کے لئے حل کریں گے یعنی:

$$u_{i-1,j}^{(m+1)} - 4u_{ij}^{(m+1)} + u_{i+1,j}^{(m+1)} = -u_{i,j-1}^{(m)} - u_{i,j+1}^{(m)} \quad \text{(الف)} \tag{23.37}$$

ہم مقررہ j یعنی مقررہ صف j کے تمام جوڑوں کے لئے یہ کلیہ استعمال کرتے ہیں جس سے N عدد خطی مساوات کا نظام حاصل ہو گا جس میں N نا معلوم متغیرات (یعنی جوڑوں پر u کی نئی تخمینی قیمتیں) ہوں گی، اور جہاں مقررہ صف میں اندرونی نقطوں کی تعداد N ہے۔مساوات 23.37-الف میں نا صرف گزشتہ قدم کی تخمینی قیمتیں بلکہ سرحدی قیمتیں بھی شامل ہیں۔ ہم (مقررہ j کے لئے) گاوسی اسقاط سے مساوات 23.37-الف حل کرتے ہیں۔اس کے بعد ہم اگلی صف کے لئے N عدد مساوات کا نظام حاصل کر کے اس کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہیں۔اسی طرح چلتے ہوئے ہم آخری صف کے لئے بھی نتائج حاصل کرتے ہیں۔اگلے قدم میں ہم رخ تبدیل کرتے ہیں اور $u_{ij}^{(m+1)}$ کو مساوات 23.36-ب کے دائیں ہاتھ میں پر کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ اخذ کرتے ہوئے

$$u_{i,j-1}^{(m+2)} - 4_{ij}^{(m+2)} + u_{i,j+1}^{(m+2)} = -u_{i-1,j}^{(m+1)} - u_{i+1,j}^{(m+1)} \quad \text{ب} \tag{23.37}$$

اس سے قطار در قطار نئی تخمینی قیمتیں $u_{ij}^{(m+2)}$ حاصل کرتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے گزشتہ تخمینی قیمتیں $u_{ij}^{(m+1)}$ اور سرحدی قیمتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ہر مقررہ j ، یعنی ہر قطار کے لئے M خطی مساوات کا نظام حاصل ہو گا (جہاں قطار میں اندرونی نقطوں کی تعداد M ہے) جس کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہوئے M نا معلوم متغیرات کی تخمینی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔اس کے بعد اگلی قطار کے لئے نظام حاصل کر کے حل کیا جاتا ہے۔اسی طرح آخری قطار تک کی تمام اندرونی جوڑوں پر تخمینی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔

بدلتی رخ خفی ترکیب کو سمجھنے کی خاطر ایک مثال پیش کرتے ہیں۔(حقیقت میں ایسی مثال کو گاوسی اسقاط سے حل کیا جائے گا۔) اس کے بعد ہم بدلتی رخ خفی ترکیب میں ارتکاز کی بہتری پر غور کریں گے۔

مثال 23.7: مسئلہ ڈرشلے۔ بدلتی رخ خفی ترکیب
بدلتی رخ خفی ترکیب میں ابتدائی قیمتیں 100 ، 100 ، 100 ، 100 لیتے ہوئے مثال 23.6 کو دوبارہ حل کریں۔ جسامت جال وہی رکھیں۔
حل: شکل 23.6-ب جو سرحدی قیمتیں دیتی ہے پر نظر رکھیں۔ مساوات 23.37-الف میں $m = 0$ لیتے ہوئے ہم پہلی تخمینی قیمتیں $u_{11}^{(1)}$ ، $u_{21}^{(1)}$ ، $u_{12}^{(1)}$ ، $u_{22}^{(1)}$ حاصل کرتے ہیں۔ ہم سرحدی قیمتوں کو مساوات 23.37-الف میں بغیر بالائی اشاریہ لکھتے ہیں تاکہ ان پر نظر رکھنا آسان ہو اور یہ واضح کرنے کی خاطر کہ دہرانے کے دوران یہ قیمتیں تبدیل نہیں ہوتی ہیں۔۔ مساوات 23.37-الف میں $m = 0$ لیتے ہوئے $j = 1$ (پہلی صف) کے لئے درج ذیل نظام حاصل ہو گا

$$\begin{aligned}
(i=1) \quad & u_{01} - 4u_{11}^{(1)} + u_{21}^{(1)} &&= -u_{10} - u_{12}^{(0)} \\
(i=2) \quad & u_{11}^{(1)} - 4u_{21}^{(1)} + u_{31} &&= -u_{20} - u_{22}^{(0)}
\end{aligned}$$

جس کا حل $u_{11}^{(1)} = u_{21}^{(1)} = 100$ ہے۔ دوسری صف یعنی $j = 2$ کے لئے مساوات 23.37-الف سے

$$\begin{aligned}
(i=1) \quad & u_{02} - 4u_{12}^{(1)} + u_{22}^{(1)} &&= -u_{11}^{(0)} - u_{13} \\
(i=2) \quad & u_{12}^{(1)} - 4u_{22}^{(1)} + u_{32} &&= -u_{21}^{(0)} - u_{23}
\end{aligned}$$

حاصل ہو گا جس کا حل $u_{12}^{(1)} = u_{22}^{(1)} = 66.667$ ہے۔

اب $m = 1$ لیتے ہوئے درج بالا حاصل کردہ تخمینی قیمتیں اور سرحدی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے دوسری تخمینی قیمتیں $u_{11}^{(2)}$ ، $u_{21}^{(2)}$ ، $u_{12}^{(2)}$ ، $u_{22}^{(2)}$ مساوات 23.37-ب سے حاصل کی جاتی ہیں۔ یوں $i = 1$ (پہلی قطار) کے لئے مساوات 23.37-ب سے نظام

$$\begin{aligned}
(j=1) \quad & u_{10} - 4u_{11}^{(2)} + u_{12}^{(2)} &&= -u_{01} - u_{21}^{(1)} \\
(j=2) \quad & u_{11}^{(2)} - 4u_{12}^{(2)} + u_{13} &&= -u_{02} - u_{22}^{(1)}
\end{aligned}$$

حاصل ہو گا جس کا حل $u_{11}^{(2)} = 91.11$ ، $u_{12}^{(2)} = 64.44$ ہے۔ دوسری قطار یعنی $i = 2$ کے لئے مساوات 23.37-ب سے نظام

$$\begin{aligned}
(j=1) \quad & u_{20} - 4u_{21}^{(2)} + u_{22}^{(2)} &&= -u_{11}^{(1)} - u_{31} \\
(j=2) \quad & u_{21}^{(2)} - 4u_{22}^{(2)} + u_{23} &&= -u_{12}^{(1)} - u_{32}
\end{aligned}$$

حاصل ہو گا جس کا حل $u_{21}^{(2)} = 91.11$ ، $u_{22}^{(2)} = 64.44$ ہے۔

اس مثال میں جو محض بدلتی رخ خفی ترکیب سمجھنے کی خاطر استعمال کی گئی، دوسری تخمینی قیمتوں کی درستگی تقریباً حصہ 22.2 کے دو قدم گاوس زائڈل کے برابر ہے (جہاں $u_{11} = w$ ، $u_{21} = x$ ، $u_{12} = y$ ، $u_{22} = z$ ہیں)۔

	u_{11}	u_{21}	u_{12}	u_{22}
بدلتی رخ خفی ترکیب، دوسری تخمین	91.11	91.11	64.44	64.44
گاوس زائڈل، دوسری تخمین	93.75	90.62	65.62	64.06
مساوات 23.33 کا اصل حل	87.50	87.50	62.50	62.50

□

مقدار معلوم p متعارف کرتے ہوئے مساوات 23.32 کو

$$u_{i-1,j} - (2+p)u_{ij} + u_{i+1,j} = -u_{i,j-1} + (2-p)u_{ij} - u_{i,j+1} \quad \text{(الف)} \tag{23.38}$$

اور

$$u_{i,j-1} - (2+p)u_{ij} + u_{i,j+1} = -u_{i-1,j} + (2-p)u_{ij} - u_{i+1,j} \quad \text{(ب)} \tag{23.38}$$

روپ میں لکھ جا سکتا ہے جس سے بدلتی رخ خفی ترکیب کے زیادہ عمومی کلیات

$$u_{i-1,j}^{(m+1)} - (2+p)u_{ij}^{(m+1)} + u_{i+1,j}^{(m+1)} = -u_{i,j-1}^{(m)} + (2-p)u_{ij}^{(m)} - u_{i,j+1}^{(m)} \quad \text{(الف)} \tag{23.39}$$

اور

$$u_{i,j-1}^{(m+2)} - (2+p)u_{ij}^{(m+2)} + u_{i,j+1}^{(m+2)} = -u_{i-1,j}^{(m+1)} + (2-p)u_{ij}^{(m+1)} - u_{i+1,j}^{(m+1)} \quad \text{(ب)} \tag{23.39}$$

اخذ ہوتے ہیں۔ ان میں $p = 2$ پر کرنے سے مساوات 23.37 حاصل ہوتے ہیں۔ مقدار معلوم p سے ارتکاز میں بہتری پیدا کی جا سکتی ہے۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ بدلتی رخ خفی ترکیب مثبت p کے لئے مرتکز ہو گی اور ارتکاز کی شرح زیادہ سے زیادہ حاصل کرنے کے لئے p کی بہترین قیمت

$$p_o = 2\sin\frac{\pi}{C} \tag{23.40}$$

ہے جہاں C کی قیمت $M+1$ اور $N+1$ میں زیادہ بڑی قیمت کے برابر ہے۔ مزید بہتر نتائج حاصل کرنے کی خاطر p کی قیمت کو ہر ایک قدم کے دوران مختلف رکھا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 23.33: مساوات 23.26-ب اخذ کریں۔

سوال 23.34: مساوات 23.27-ب اخذ کریں۔

سوال 23.35: مساوات 23.27-پ اخذ کریں۔
جواب: $u_{xy}(x,y) \approx \frac{1}{2k}[u_x(x,y+k) - u_x(x,y-k)]$ میں درج ذیل پر کریں۔
$u_x(x,y \mp k) \approx \frac{1}{2h}[u(x+h,y \mp k) - u(x-h,y \mp k)]$

سوال 23.36: **تشاکل کا استعمال**
مثال 23.6 کی سرحدی قیمتوں کو دیکھ کر فیصلہ کریں کہ $u_{21} = u_{11}$ اور $u_{22} = u_{12}$ ہو گا۔دکھائیں کہ اس سے دو مساوات کا نظام حاصل ہو گا۔اس نظام کو حل کریں۔

سوال 23.37: $h = 6$ لیتے ہوئے مثال 23.6 میں u_{11} حاصل کریں۔اس کا بالکل درست قیمت 75 کے ساتھ موازنہ کریں۔
جواب: 75

سوال 23.38: $h = 3$ لیتے ہوئے مثال 23.6 حل کریں۔

سوال 23.39: شکل 23.7 میں N_{11} ، N_{12} ، N_{13} پر ساکن برقی مخفی قوہ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔یہ نقطے موصل چادروں کے درمیان پائے جاتے ہیں (جو شکل میں بطور مستطیل نظر آتے ہیں) اور جن پر برقی مخفی قوہ 0 V اور 100 V ہے۔دکھایا گیا جال اور گاوسی اسقاط استعمال کریں۔

جواب: 1.96, 7.86, 29.46

سوال 23.40: شکل 23.8 میں نچلی چادر پر $u = x^3$ ، دائیں چادر پر $u = 27 - 9y^2$ ، بالائی چادر پر $u = x^3 - 27x$ اور بائیں چادر پر $u = 0$ تصور کرتے ہوئے مخفی قوہ $u(x,y)$ کو گاوسی اسقاط سے تلاش کریں۔

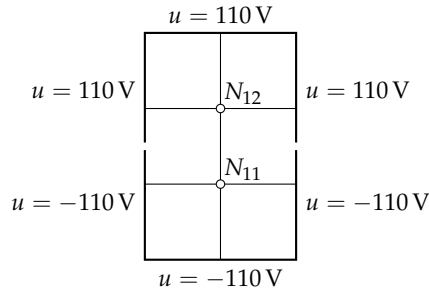
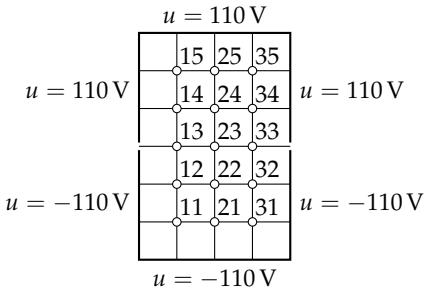
سوال 23.41: شکل 23.8 میں نچلی چادر پر $u = x^4$ ، دائیں چادر پر $u = 81 - 54y^2 + y^4$ ، بالائی چادر پر $u = x^4 - 54x^2 + 81$ اور بائیں چادر پر $u = y^4$ تصور کرتے ہوئے مخفی قوہ $u(x,y)$ کو گاوسی اسقاط سے تلاش کریں۔تصدیق کریں کہ اس مسئلے کا حل $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ ہے اور

شکل 23.7: شکل برائے سوال 23.39

شکل 23.8: شکل برائے سوال 23.40، سوال 23.41 اور سوال 23.44

خلل تلاش کریں۔
جواب: $-2,\ -5,\ -5,\ -62$

سوال 23.42: شکل 23.9 میں مخفی قوہ کو (الف) چوڑی جال پر، (ب) باریک جال پر، گاوسی اسقاط کی مدد سے تلاش کریں۔ اشارہ۔ باریک جال میں تشاکل استعمال کریں اور ان دو نقطوں پر جہاں سرحدی مخفی قوہ میں چھلانگ پائی جاتی ہے وہاں مخفی قوہ کو $0\,\mathrm{V}$ (یعنی $-110\,\mathrm{V}$ اور $110\,\mathrm{V}$ کی اوسط) فرض کریں۔

سوال 23.43: ترکیب گاوس زائڈل میں $0, 0$ سے ابتدا کرتے ہوئے کتنے قدم بعد سوال 23.42 میں چوڑی جال کے نتائج پانچ ملحوظ ہندسوں تک درست ہوں گے؟ باریک جال کی صورت میں ارتکاز کی شرح بہت کم

شکل 23.9: شکل برائے سوال 23.42

ہو گی۔کیا مساوات کی نظام کو دیکھ کر آپ اس کی وجہ بتا سکتے ہیں۔
جواب: پانچ قدم

سوال 23.44: شکل 23.8 میں بالائی چادر پر $u=\sin\frac{1}{3}\pi x$ جبکہ باقی چادروں پر $u=0$ ہے۔تصدیق کریں کہ اس کا بالکل درست حل $u(x,y)=\frac{\sin\frac{1}{3}\pi x\sinh\frac{1}{3}\pi y}{\sinh\pi}$ ہے۔اعدادی حل حاصل کرتے ہوئے خلل کا تخمینہ لگائیں۔

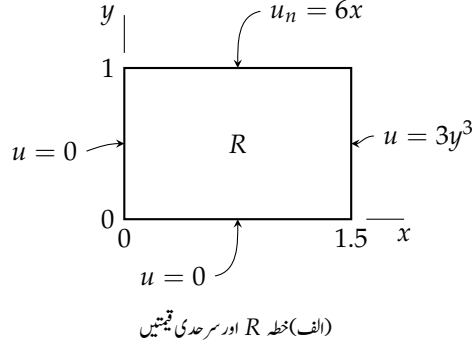
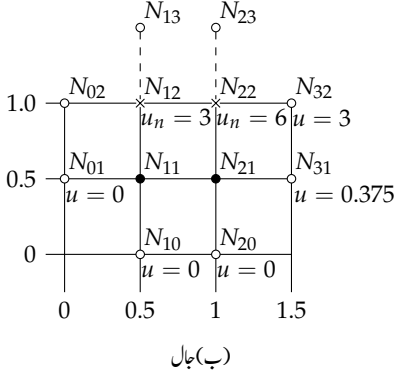
سوال 23.45: مساوات 23.34 میں دیے گئے نظام کے لئے مساوات 23.35 کی تصدیق کریں۔دکھائیں کہ مساوات 23.34 میں $\boldsymbol{A}$ غیر نادر ہے۔

سوال 23.46: شکل 23.8 کی جال استعمال کرتے ہوئے سوال 23.44 کے مسئلہ ڈرشلے کو بدلتی رخ مخفی ترکیب سے دو قدم تک حل کریں۔ ابتدائی قیمتیں صفر لیں۔

سوال 23.47: مقدار معلوم p (مساوات 23.40) کی موزوں قیمت سوال 23.46 کے لئے تلاش کریں۔ $p_0=1.7$ لیتے ہوئے مساوات 23.39 میں دیے گئے بدلتی رخ مخفی کلیات سے سوال 23.46 کو ایک قدم تک حل کریں۔ایک قدم کے بعد سوال 23.46 کی پہلی قدم کی قیمتوں 0.077 اور 0.308 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے ارتکاز میں بہتری کی تصدیق کریں۔ابتدائی قیمتیں صفر لیں۔
جواب: $\sqrt{3}u_{11}=u_{21}=0.0859,\ u_{12}=u_{22}=0.3180$ (چار اعشاریہ درست نتائج 0.1083, 0.3248 ہیں۔)

سوال 23.48: $p=0$ لینے سے مساوات 23.39 کے کلیات کارآمد نہیں رہتے ہیں۔یہ دیکھنے کی خاطر انہیں استعمال کرتے ہوئے مثال 23.7 کو دو قدم تک حل کریں۔مثال میں دیا گیا جال اور ابتدائی قیمتیں استعمال کریں۔ نتیجہ کیا حاصل ہوتا ہے؟

(ب) جال

(الف) خطہ R اور سرحدی قیمتیں

شکل 23.10: اشکال برائے مثال 23.8

23.4 مسئلہ نیومن اور مخلوط سرحدی قیمت مسئلہ۔ غیر منظم سرحد

ہم xy مستوی کے خطہ R میں بیضوی مساوات کی سرحدی قیمت مسئلہ کے اعدادی حل پر بحث جاری رکھتے ہیں۔ مسئلہ ڈرشلے پر گزشتہ حصے میں غور کیا گیا ہے۔ نیومن اور مخلوط مسئلوں میں ہمیں نئی صورت حال کا سامنا ہوتا ہے چونکہ سرحد کے کچھ مقامات پر ہمیں u کی بجائے $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ دیا گیا ہو گا لہٰذا سرحد کی ان مقامات پر ہمیں u معلوم نہیں ہو گا۔ اس نقطوں پر صورت حال سے نپٹنے کی خاطر ہمیں نئی تدبیر درکار ہو گی۔ یہ تدبیر نیومن اور مخلوط مسائل کے لئے یکساں ہے لہٰذا ہم ان میں سے کسی ایک کو مثال بنا کر ترکیب کو سمجھ سکتے ہیں۔

مثال 23.8: مساوات پوئسن کا مخلوط قیمت سرحدی مسئلہ

مساوات پوئسن

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 12xy$$

کا مخلوط قیمت سرحدی مسئلہ شکل 23.10-الف میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو حل کریں۔

حل: ہم شکل 23.8-ب میں دکھایا گیا جال استعمال کرتے ہیں جہاں $h = 0.5$ ہے۔ کلیات $u = 3y^3$ اور $u_n = 6x$ سے سرحد پر

$$u_{31} = 0.375, \quad u_{32} = 3, \quad \frac{\partial u_{12}}{\partial n} = \frac{\partial u_{12}}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial u_{22}}{\partial n} = \frac{\partial u_{22}}{\partial y} = 6 \tag{23.41}$$

حاصل ہو گا۔ N_{11} اور N_{21} خطہ R کے اندرونی نقطے ہیں لہٰذا ان سے گزشتہ حصہ کی طرح برتا جا سکتا ہے۔ یقیناً $h^2 = 0.25$ ، $f(x,y) = 12xy$ اور سرحدی معلومات استعمال کرتے ہوئے مساوات 23.28 سے N_{11} اور N_{21} کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\text{(الف)} \quad \begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} \quad &= 0.75 \\ u_{11} - 4u_{21} \quad + u_{22} &= 1.5 - 0.375 = 1.125 \end{aligned} \tag{23.42}$$

ان مساوات میں سرحد کے نقطہ N_{12} اور N_{22} پر u کی قیمتیں u_{12} اور u_{22} درکار ہیں جبکہ ہمیں ان نقطوں پر عمودی تفرق $u_n = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y}$ کی قیمتیں دی گئی ہیں۔ہم اس مشکل سے جلد نجات حاصل کر پائیں گے۔

ہم نقطہ N_{13} اور N_{23} پر غور کرتے ہیں۔ہم تصور میں R کو وسعت دے کر بالائی جانب پہلی بیرونی صف (یعنی $y = 1.5$ کے مطابقتی نقطوں) کو R میں شامل کرتے ہیں اور ساتھ ہی فرض کرتے ہیں کہ تفرقی مساوات توسیع کردہ خطہ میں بھی کارآمد ہے۔تب ہم پہلے کی طرح مزید دو مساوات

$$\text{(ب)} \quad \begin{aligned} u_{11} \quad - 4u_{12} + u_{22} + u_{13} \quad &= 1.5 \\ u_{21} + u_{12} - 4u_{22} \quad + u_{23} &= 3 - 3 = 0 \end{aligned} \tag{23.42}$$

لکھ سکتے ہیں (شکل 23.10-ب)۔دھیان رہے کہ R کی بالائی سرحد پر دی گئی معلومات کو اب تک ہم نے استعمال نہیں کیا ہے، اور مساوات 23.42-ب میں ہم نے دو اضافی متغیرات u_{13} اور u_{23} بھی متعارف کیے ہیں۔اب ہم بالائی سرحد پر دی گئی معلومات اور u_y کی مساوات فرق استعمال کرتے ہوئے u_{13} اور u_{23} سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں۔ یوں مساوات 23.41 سے

$$3 = \frac{\partial u_{12}}{\partial y} = \frac{u_{13} - u_{11}}{2h} = u_{13} - u_{11} \quad \implies \quad u_{13} = u_{11} + 3$$
$$6 = \frac{\partial u_{22}}{\partial y} = \frac{u_{23} - u_{21}}{2h} = u_{23} - u_{21} \quad \implies \quad u_{23} = u_{21} + 6$$

حاصل ہو گا جنہیں مساوات 23.42-ب میں پر کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} 2u_{11} \quad - 4u_{12} + u_{22} &= 1.5 - 3 = -1.5 \\ 2u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= 0 - 6 = -6 \end{aligned}$$

انہیں مساوات 23.42-الف کے ساتھ ملا کر قالبی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.750 \\ 1.125 \\ -1.500 \\ -6.000 \end{bmatrix} \tag{23.43}$$

اس کا حل درج ذیل ہے جہاں بالکل درست حل کو ساتھ قوسین میں دکھایا گیا ہے۔

$$u_{12} = 0.866\ (1.000) \qquad u_{22} = 1.812\ (2.000)$$
$$u_{11} = 0.077\ (0.125) \qquad u_{21} = 0.191\ (0.250)$$

□

غیر منظم سرحد

ہم xy مستوی میں خطہ R پر بیضوی مساوات کے سرحدی مسئلے کے اعدادی حل پر غور جاری رکھتے ہیں۔اگر R کی سادہ جیومیٹریائی شکل ہو تب عموماً ہم جال کو یوں بچھا سکتے ہیں کہ R کی سرحد C پر جال کے کئی جوڑ پائے جاتے ہوں۔یوں ہم جزوی تفرق کو گزشتہ حصہ کی طرح تخمینی طور پر لکھ سکتے ہیں۔البتہ اگر سرحد C جال کو جوڑ سے ہٹ کر قطع کرتا ہو تب سرحد کے قریب نقطوں پر ہمیں کچھ مختلف طرز عمل اختیار کرنا ہو گا۔آئیں ایسی صورت کو دیکھیں۔

شکل 23.11 میں جوڑ O اس قسم کا نقطہ ہے۔ O اور اس کے پڑوسی نقطے A اور P کے لئے ٹیلر تسلسل لکھتے ہیں۔

$$\text{(الف)}\quad u_A = u_O + ah\frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2}(ah)^2\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \cdots \tag{23.44}$$
$$\text{(ب)}\quad u_P = u_O - h\frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \cdots$$

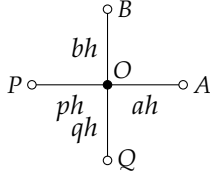
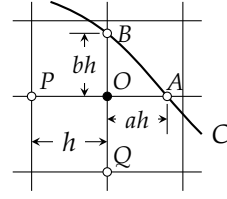
ہم ٹیلر تسلسل کی پہلی تین اجزاء لیتے ہوئے باقی اجزاء کو رد کرتے ہیں اور ساتھ ہی $\frac{\partial u_O}{\partial x}$ کو حذف کرنے کی غرض سے مساوات 23.44-ب کو a سے ضرب دے کر مساوات 23.44-الف کے ساتھ جمع کرتے ہوئے

$$u_A + au_P \approx (1+a)u_O + \frac{1}{2}a(1+a)h^2\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2}$$

حاصل کرتے ہیں جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{a(1+a)}u_A + \frac{1}{1+a}u_P - \frac{1}{a}u_O\right]$$

اسی طرح نقطہ O ، B اور Q کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 u_O}{\partial y^2} \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{b(1+b)}u_B + \frac{1}{1+b}u_Q - \frac{1}{b}u_O\right]$$

شکل 23.12: جوڑ O کے پڑوسی نقطے A، B، P اور Q

شکل 23.11: غیر منظم سرحد

درج بالا دونوں مساوات کا مجموعہ

$$\nabla^2 u_O \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{u_A}{a(1+a)}+\frac{u_B}{b(1+b)}+\frac{u_P}{1+a}+\frac{u_Q}{1+b}-\frac{(a+b)u_O}{ab}\right] \tag{23.45}$$

ہو گا۔مثال کے طور پر اگر $a=\frac{1}{2}$ ، $b=\frac{1}{2}$ ہوں تب مساوات 23.30 کی نقش کی بجائے درج ذیل نقش

$$\begin{Bmatrix} & \frac{4}{3} & \\ \frac{2}{3} & -4 & \frac{4}{3} \\ & \frac{2}{3} & \end{Bmatrix}$$

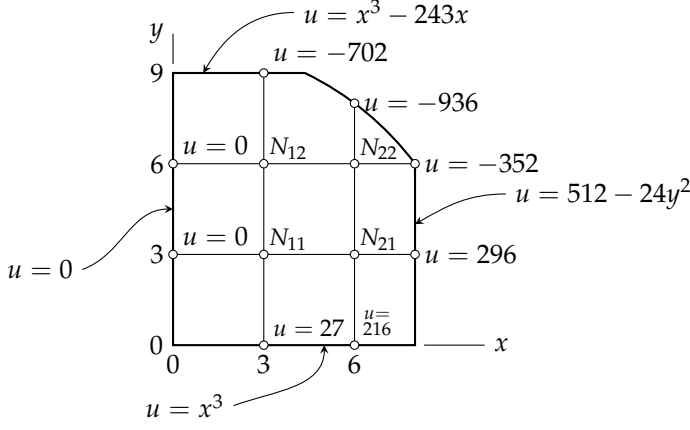
حاصل ہو گا۔اس نقش کے پانچ اعداد کا مجموعہ اب بھی صفر کے برابر ہے (جو درستگی کو پرکھنے کی ایک اچھی ترکیب ہے)۔

اسی طرح آپ شکل 23.12 کے لئے

$$\nabla^2 u_O \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{u_A}{a(a+p)}+\frac{u_B}{b(b+q)}+\frac{u_P}{p(p+a)}+\frac{u_Q}{q(q+b)}-\frac{ap+bq}{abpq}u_O\right] \tag{23.46}$$

حاصل کر سکتے ہیں جو ہر ممکنہ صورت حاصل کو نپٹا سکتی ہے۔

مثال 23.9: مساوات لاپلاس کا مسئلہ ڈرشلے۔ قوسی سرحد

شکل 23.13 میں دکھائے گئے خطہ میں مخفی قوہ u تلاش کریں۔یہاں سرحد کو قوسی حصہ ایک دائرے کا حصہ ہے جس کا رداس 10 اور مرکز $(0,0)$ ہے۔سرحدی معلومات شکل میں دی گئیں ہیں۔شکل میں دیا گیا جال استعمال کریں۔

شکل 23.13: شکل برائے مثال 23.9

حل: مساوات لاپلاس کا حل u ہو گا۔ سرحد پر کلیات $u = x^3$ ، $u = 512 - 24y^2$ ، وغیرہ سے ہم درکار نقطوں پر قیمتیں حاصل کرتے ہیں جنہیں شکل میں دکھایا گیا ہے۔ N_{11} اور N_{12} کے لئے عمومی منظم نقش حاصل ہوتا ہے، اور N_{21} اور N_{22} کے لئے ہم مساوات 23.46 سے

$$N_{11},\, N_{12} : \left\{\begin{matrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}\right\},\; N_{21} : \left\{\begin{matrix} & 0.5 & \\ 0.6 & -2.5 & 0.9 \\ & 0.5 & \end{matrix}\right\},\; N_{22} : \left\{\begin{matrix} & 0.9 & \\ 0.6 & -3.0 & 0.9 \\ & 0.6 & \end{matrix}\right\} \tag{23.47}$$

حاصل کرتے ہیں۔ ہم انہیں اور سرحدی قیمتیں کو استعمال کرتے ہیں اور جوڑوں کو N_{11} ، N_{21} ، N_{12} ، N_{22} ترتیب میں لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل نظام حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}
-4u_{11} + u_{21} + u_{12} \qquad &= 0 - 27 &&= -27 \\
0.6u_{11} - 2.5u_{21} \qquad + 0.5u_{22} &= -0.9(296) - 0.5(216) &&= -374.4 \\
u_{11} \qquad - 4u_{12} + u_{22} &= 702 + 0 &&= 702 \\
0.6u_{21} + 0.6u_{12} - 3u_{22} &= 0.9(352) + 0.9(936) &&= 1159.2
\end{aligned}$$

اس کو قالبی صورت میں لکھ کر

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0.6 & -2.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0.6 & 0.6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -374.4 \\ 702 \\ 1159.2 \end{bmatrix} \tag{23.48}$$

گاوسی اسقاط کی مدد سے درج ذیل نتائج حاصل کرتے ہیں۔

$$u_{11} = -55.6, \quad u_{21} = 49.2, \quad u_{12} = -298.5, \quad u_{22} = -436.3$$

ظاہر ہے کہ اتنے کم خانوں کی جال سے ہمیں زیادہ درست نتائج حاصل نہیں ہوں گے۔ بالکل درست نتائج درج ذیل ہیں۔

$$u_{11} = -54, \quad u_{21} = 54, \quad u_{12} = -297, \quad u_{22} = -432$$

عملاً بہت باریک جال استعمال کرتے ہوئے بڑا نظام حاصل کیا جائے گا جس کو بالواسطہ ترکیب سے حل کیا جائے گا۔
□

سوالات

سوال 23.49: مساوات 23.43 کے نظام کو گاوسی اسقاط سے حل کرتے ہوئے مثال 23.8 کی آخر میں دی گئی قیمتوں کو پرکھیں۔

سوال 23.50: شکل 23.10-الف کی مستطیل میں (اور شکل-ب کا جال استعمال کرتے ہوئے) مساوات لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ کا ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں جہاں بائیں چادر پر $u_x = 0$ ، دائیں چادر پر $u_x = 3$ ، نچلی چادر پر $u = x^2$ اور بالائی چادر پر $u = x^2 - 1$ ہیں۔

سوال 23.51: مساوات پوئسن $\nabla^2 u = 2(x^2 + y^2)$ کے مخلوط قیمت مسئلے کا حل شکل 23.14 کے لئے (شکل میں دیے گئے جال کے لئے) حاصل کریں۔ سرحدی معلومات شکل میں دی گئی ہیں۔

جواب: $u_{11} = 1, \; u_{21} = u_{12} = 4, \; u_{22} = 16$

سوال 23.52: مساوات 23.44 میں سے $\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2}$ حذف کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

$$\frac{\partial u_O}{\partial x} \approx \frac{1}{h}\left[\frac{1}{a(1+a)} u_A - \frac{1-a}{a} u_O - \frac{a}{1+a} u_P\right]$$

شکل 23.14: شکل برائے سوال 23.51

شکل 23.15: شکل برائے سوال 23.57

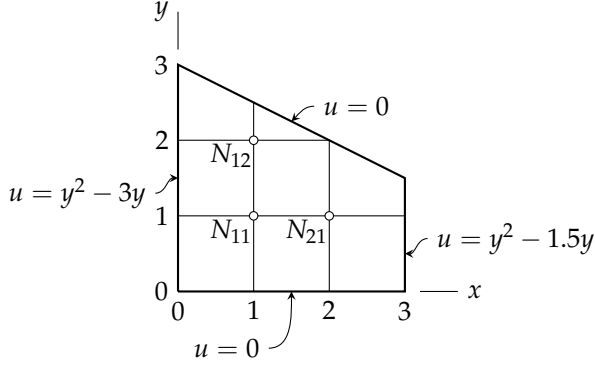
سوال 23.53: ٹھیک مساوات 23.45 کے بعد دی گئی نمونہ حساب کی تصدیق کریں۔

سوال 23.54: مساوات 23.46 حاصل کرنے کی تفصیل پیش کریں۔

سوال 23.55: مساوات 23.47 کی تصدیق کریں۔

سوال 23.56: قالبی مساوات 23.48 کو گاوسی اسقاط کی مدد سے حل کریں۔

سوال 23.57: مساوات لاپلاس کا حل شکل 23.15 میں دیے گئے مسئلہ کے لئے (شکل میں دیے گئے جال پر) حاصل کریں۔ سرحدی معلومات شکل میں دی گئی ہیں۔ (سرحد کا ترچھا حصہ $y = 4.5 - x$ ہے۔)
جواب: $-4u_{11} + u_{21} + u_{12} = -3,\ u_{11} - 4u_{21} + u_{22} = -12,\ u_{11} - 4u_{12} + u_{22} = 0,$
$2u_{21} + 2u_{12} - 12u_{22} = -14,\ u_{11} = u_{22} = 2,\ u_{21} = 4,\ u_{12} = 1$

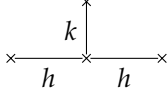
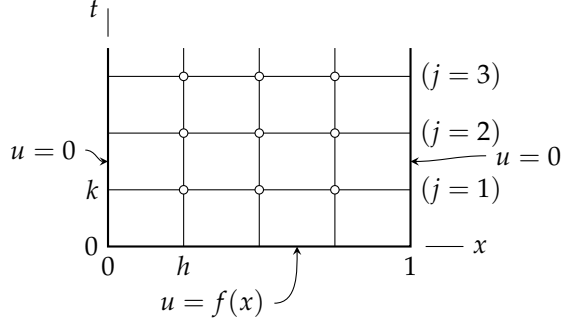
سوال 23.58: مساوات پوئسن $\nabla^2 u = 2$ کو شکل 23.16 کے خطہ کے لئے حل کریں۔

شکل 23.16: شکل برائے سوال 23.58

23.5 اعدادی تراکیب برائے قطع مکافی مساوات

جیسا کہ ہم نے حصہ 23.3 میں ذکر کیا، مختلف اقسام کی مساوات مثلاً بیضوی، قطع مکافی اور قطع زائد کے حل کا رویہ مختلف ہو گا۔اسی طرح ان کے اعدادی تراکیب بھی کچھ مختلف ہوں گے۔تینوں اقسام میں ہم مساوات کی جگہ مطابقتی مساوات فرق لکھتے ہیں لیکن قطع مکافی اور قطع زائد مساوات کی صورت میں ضروری نہیں ہے کہ تخمینی اعدادی حل، $h \to 0$ کرنے سے، اصل حل کو مرتکز ہو، بلکہ اس سے کسی صورت بھی ارتکاز یقینی نہیں ہو گا۔ان دو صورتوں میں مرتکز (اور مستحکم) حل کے لئے اضافی شرائط (عدم مساوات) کا ہونا لازمی ہے۔حل کی استحکام سے مراد یہ ہے کہ ابتدائی معلومات میں معمولی اضطراب (یا کسی بھی لمحہ پر معمولی اضطراب) بعد میں بھی معمولی ہی رہے گی۔

اس حصہ میں ہم حراری مساوات کو مثال بناتے ہوئے قطع مکافی مساوات کے اعدادی حل پر غور کرتے ہیں۔ہم مذکورہ بالا اور دیگر صورتوں پر یک بعدی حراری مساوات

$$u_t = c^2 u_{xx} \qquad (\text{مستقل } c)$$

کی مدد سے غور کرتے ہیں۔ اس مساوات پر عموماً کسی وقفہ $0 \le x \le l$ میں وقت $t \ge 0$ کے لئے غور کیا جاتا ہے جہاں ابتدائی درجہ حرارت $u(x,0) = f(x)$ (جہاں f دیا گیا ہو گا) اور تمام $t \ge 0$ کے لئے $x = 0$ اور $x = l$ پر سرحدی معلومات، مثلاً $u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0$ ، دی گئی ہوں گی۔ ہم اپنی آسانی کی خاطر $c = 1$ اور $l = 1$ لیتے ہیں جو x اور t کی خطی تبادل سے ممکن ہو گا (سوال 23.59)۔تب

شکل 23.18: مساوات 23.52 اور مساوات 23.53 کے چار نقطے

شکل 23.17: جال اور جوڑ برائے مساوات 23.52 اور مساوات 23.53

حراری مساوات اور دی گئی معلومات درج ذیل ہوں گی۔

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 \le x \le l,\ t \ge 0 \tag{23.49}$$

$$u(x,0) = f \qquad \text{(ابتدائی شرائط)} \tag{23.50}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad \text{(سرحدی شرائط)} \tag{23.51}$$

مساوات 23.49 کا مطابقتی تخمینی مساوات فرق درج ذیل ہے۔

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) \tag{23.52}$$

شکل 23.17 میں مطابقتی جال اور جوڑ دکھائے گئے ہیں۔ x رخ میں جسامت جال h ہے جبکہ t رخ جسامت جال k ہے۔ مساوات 23.52 میں استعمال ہونے والے چار نقطوں کو شکل 23.18 میں دکھایا گیا ہے۔ چونکہ منفی t کے لئے ہمارے پاس کوئی معلومات نہیں ہے لہٰذا بائیں ہاتھ آگے فرق کا حاصل تقسیم استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 23.52 سے ہم وقت t کی صف $j+1$ کے لئے $u_{i,j+1}$ کو وقت j کے مطابقتی u کی صورت میں حاصل کرتے ہیں؛ مساوات 23.52 کو $u_{i,j+1}$ کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$u_{i,j+1} = (1-2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad r = \frac{k}{h^2} \tag{23.53}$$

اس کلیہ سے با آسانی نتائج حاصل ہوں گے البتہ ارتکاز کے لئے ضروری ہے کہ درج ذیل شرط

$$r = \frac{k}{h^2} \le \frac{1}{2} \tag{23.54}$$

مطمئن ہو جس سے مساوات 23.53 میں u_{ij} کا عددی سر غیر منفی ہو گا۔ مساوات 23.54 کہتی ہے کہ t رخ میں زیادہ تیزی سے نہ چلا جائے۔ نیچے ایک مثال دی گئی ہے۔

ترکیب کرینک نکلسن[29]

عملی استعمال میں مساوات 23.54 کی شرط مسائل پیدا کرتی ہے۔ یقیناً زیادہ درست نتائج کے لئے h کی قیمت کم رکھنا ضروری ہے جس کی بنا مساوات 23.54 کے تحت k بہت کم ہو گا۔ مثلاً $h = 0.1$ کی صورت میں $k \leq 0.005$ ہو گا۔ اب h کی قیمت آدھی کرنے سے، کسی بھی t تک پہنچنے کی خاطر، قدموں کی تعداد چار گنا بڑھتی ہے لہٰذا ہمیں بہتر ترکیب کی ضرورت ہے۔

$r = \frac{k}{h^2}$ کی قیمت پر ترکیب کرینک نکلسن[30] کوئی پابندی عائد نہیں کرتی ہے۔ یہ ترکیب شکل 23.19 کے چھ نقطوں کو استعمال کرتی ہے۔ اس ترکیب میں مساوات 23.52 کے دائیں ہاتھ فرق کے حاصل تقسیم کی جگہ شکل 23.19 کے دو عدد صف وقت کے مجموعہ کا $\frac{1}{2}$ گنا پر کیا جاتا ہے۔ یوں مساوات 23.52 کی بجائے

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \tag{23.55}$$

حاصل ہو گا۔ دونوں اطراف کو $2k$ سے ضرب دے کر $r = \frac{k}{h^2}$ لکھتے ہوئے بائیں ہاتھ صف وقت $j+1$ کے مطابقتی تین اجزاء اور دائیں ہاتھ صف وقت j کے تین مطابقتی اجزاء منتقل کرتے ہوئے

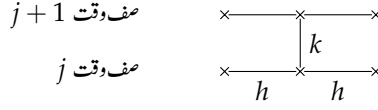
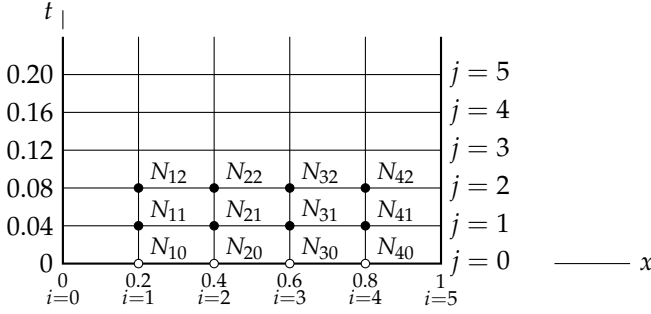
$$(2+2r)u_{i,j+1} - r(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (2-2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \tag{23.56}$$

حاصل ہو گا۔ عموماً مساوات 23.56 میں بائیں ہاتھ تینوں اجزاء نا معلوم ہوں گے جبکہ دائیں ہاتھ تینوں اجزاء معلوم ہوں گے۔ مساوات 23.49 کے وقفہ $0 \leq x \leq 1$ کو n عدد برابر ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے فی صف وقت ہمیں $n-1$ اندرونی جوڑ حاصل ہوں گے (شکل 23.17 دیکھیں جہاں $n = 4$ ہے)۔ تب $j = 0$ اور $i = 1, \cdots, n-1$ کے لئے مساوات 23.56 سے $n-1$ عدد خطی مساوات کا نظام حاصل ہو گا جو پہلی صف وقت کے $n-1$ عدد نا معلوم متغیرات $u_{11}, u_{21}, \cdots, u_{n-1,1}$ کو ابتدائی قیمتوں $u_{00}, u_{10}, \cdots, u_{n0}$ اور سرحدی قیمتوں $u_{01}, u_{n1} \; (=0)$ کی صورت میں پیش کرتا ہے۔ اسی طرح ہر صف وقت، مثلاً $j = 1$، $j = 2$ وغیرہ، کے لئے بھی مساوات 23.56 سے $n-1$ عدد خطی مساوات کا نظام حاصل کر کے حل کیا جائے گا۔

---

[29] فرانسیسی ماہر طبیعیات جان کرینک [1916-2006] اور برطانوی ریاضی دان فلس نکلسن [1917-1968]
[30] Crank-Nicolson method

صف وقت $j+1$

صف وقت j

شکل 23.19: ترکیب کرینک نکلسن میں استعمال ہونے والے چھ نقطے

شکل 23.20: جال (مثال 23.10)

اگرچہ $r=\frac{k}{h^2}$ پر اب کوئی پابندی عائد نہیں ہے البتہ h کی چھوٹی قیمت اب بھی زیادہ درست نتائج دے گی۔ عملاً k کی قیمت یوں منتخب کی جاتی ہے کہ، r کی قیمت بہت زیادہ بڑھائے بغیر، کام میں نمایاں کمی واقع ہو۔ مثال کے طور پر عموماً $r=1$ منتخب کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے (جو گزشتہ بلا واسطہ ترکیب میں نا ممکن ہو گا)۔ تب مساوات 23.56 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

$$4u_{i,j+1}-u_{i+1,j+1}-u_{i-1,j+1}=u_{i+1,j}+u_{i-1,j} \tag{23.57}$$

مثال 23.10: سلاخ کی درجہ حرارت۔ ترکیب کرینک نکلسن، بلا واسطہ ترکیب

ایک سلاخ جس کی لمبائی 1 ہے کے اطراف حاجز شدہ ہیں جبکہ اس کے سر $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ پر رکھے گئے ہیں اور کسی لمحہ، جس کو ہم $t=0$ کہتے ہیں، پر سلاخ میں حرارت $f(x)=\sin\pi x$ ہے۔ حراری مساوات میں $c^2=1$ لیں۔ ترکیب کرینک نکلسن استعمال کرتے ہوئے $h=0.2$ اور $r=1$ لیتے ہوئے $0\le t\le 0.2$ کے لئے سلاخ میں درجہ حرارت $u(x,t)$ تلاش کریں۔ حاصل نتائج کا اصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ ساتھ ہی اس صورت مساوات 23.53 استعمال کریں جب r مساوات 23.54 کو مطمئن کرتا ہو، مثلاً $r=0.25$، اور جب r مساوات 23.54 کو مطمئن نہ کرتا ہو، مثلاً $r=1$ اور $r=2.5$۔

حل: ترکیب کرینک نکلسن

چونکہ $r = 1$ ہے لہٰذا مساوات 23.57 استعمال ہو گی۔چونکہ $r = 1$ اور $h = 0.2$ ہیں لہٰذا $r = \frac{k}{h^2}$ سے $k = h^2 = 0.04$ ہو گا۔یوں ہمیں چار قدم چلنا ہو گا۔شکل 23.20 میں جال دکھائی گئی ہے۔ہم درج ذیل ابتدائی قیمتیں استعمال کریں گے۔

$$u_{10} = \sin 0.2\pi = 0.587\,785, \quad u_{20} = \sin 0.4\pi = 0.951\,057$$

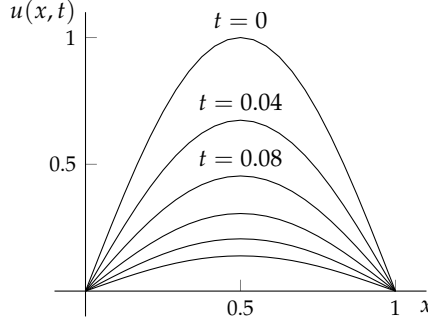
مزید $u_{30} = u_{20}$ اور $u_{40} = u_{10}$ ہوں گے۔یاد رہے کہ u_{10} سے مراد شکل 23.20 میں نقطہ N_{10} پر u کی قیمت ہے۔ شکل کے ہر صف وقت میں چار عدد اندرونی جوڑ پائے جاتے ہیں۔ یوں وقت کے ہر ایک قدم پر ہم 4 عدد خطی مساوات حل کرتے ہوئے 4 نا معلوم متغیرات حاصل کریں گے۔چونکہ ابتدائی درجہ حرارت، نقطہ $x = 0.5$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے اور سلاخ کے دونوں سر $0\,^\circ\mathrm{C}$ پر ہیں لہٰذا پہلی صف وقت میں $u_{31} = u_{21}$ اور $u_{41} = u_{11}$ ہوں گے اور اسی طرح باقی صفوں میں بھی ہو گا۔اس کی بنا مساوات کا نظام کم ہو کر دو مساوات پر مبنی ہو گا جن میں دو نا معلوم متغیرات ہوں گے۔چونکہ $j = 1$ کے لئے $u_{31} = u_{21}$ ہے لہٰذا مساوات 23.57 درج ذیل دے گی۔

$$\begin{aligned} 4u_{11} - u_{21} \qquad &= u_{00} + u_{20} = 0.951\,057 \\ -u_{11} + 4u_{21} - u_{21} &= u_{10} + u_{20} = 1.538\,842 \end{aligned}$$

اس کا حل $u_{11} = 0.399\,274$ اور $u_{21} = 0.646\,039$ ہے۔اسی طرح صف وقت $j = 2$ کے لئے

$$\begin{aligned} 4u_{12} - u_{22} &= u_{01} + u_{21} = 0.646\,039 \\ -u_{12} + 3u_{22} &= u_{11} + u_{21} = 1.045\,313 \end{aligned}$$

ہو گا جس کا حل $u_{12} = 0.271\,221$ اور $u_{22} = 0.438\,845$ ہے۔اسی طرح باقی (درج ذیل) قیمتیں حاصل کی جائیں گی جنہیں شکل 23.21 میں دکھایا گیا ہے۔

t	x=0	x=0.2	x=0.4	x=0.6	x=0.8	x=1
0.00	0	0.588	0.951	0.951	0.588	0
0.04	0	0.399	0.646	0.646	0.399	0
0.08	0	0.271	0.439	0.439	0.271	0
0.12	0	0.184	0.298	0.298	0.184	0
0.16	0	0.125	0.202	0.202	0.125	0
0.20	0	0.085	0.138	0.138	0.085	0

شکل 23.21: سلاخ میں حرارت (مثال 23.10)

درست نتائج کے ساتھ موازنہ: موجودہ مسئلے کا درست حل درج ذیل ہے (حصہ 13.5)۔

$$u(x,t) = \sin \pi x e^{-\pi^2 t}$$

اعدادی نتائج کا موازنہ اب پیش کرتے ہیں۔

حل برائے بلا واسطہ ترکیب، مساوات 23-53 جہاں $r = 0.25$ ہے۔ $r = \frac{k}{h^2} = 0.25$ اور $h = 0.2$ سے $k = rh^2 = 0.25 \cdot 0.04 = 0.01$ ملتا ہے لہٰذا ہمیں ترکیب کرینک نکلسن سے چار گنا زیادہ قدم چلنا ہو گا۔ $r = 0.25$ لیتے ہوئے مساوات 23.53 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$u_{i,j+1} = 0.25(u_{i-1,j} + 2u_{ij} + u_{i+1,j}) \tag{23.58}$$

ہم پہلے کی طرح یہاں بھی تشاکل کو استعمال کریں گے۔ قدم وقت $j = 1$ میں ہم

$$u_{00} = 0, \quad u_{10} = 0.587\,785, \quad u_{20} = u_{30} = 0.951\,057$$

کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0.25(u_{00} + 2u_{10} + u_{20}) = 0.531\,657 \\ u_{21} &= 0.25(u_{10} + 2u_{20} + u_{30}) = 0.25(u_{10} + 3u_{20}) = 0.860\,239 \end{aligned}$$

ظاہر ہے کہ ہم سرحدی اجزاء $u_{01} = 0$ اور $u_{02} = 0$ کو کلیات سے حذف کر سکتے ہیں۔ دوسری قدم وقت ($j = 2$) میں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} u_{12} &= 0.25(2u_{11} + u_{21}) = 0.480\,888 \\ u_{22} &= 0.25(u_{11} + 3u_{21}) = 0.778\,094 \end{aligned}$$

اسی طرح باقی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔ہمیں 20 قدم لینے ہوں گے لیکن درج ذیل اعدادی نتائج کے تحت درستگی تقریباً وہی ہے جو کرینک نکلسن ترکیب سے حاصل ہوئی ہے (تین اعشاریہ تک بالکل درست قیمتیں بھی دی گئی ہیں)۔

t	x=0.2			x=0.4		
	کرینک نکلسن	مساوات 23.58	درست	کرینک نکلسن	مساوات 23.58	درست
0.04	0.399	0.393	0.396	0.646	0.637	0.641
0.08	0.271	0.263	0.267	0.439	0.426	0.432
0.12	0.184	0.176	0.180	0.298	0.285	0.291
0.16	0.125	0.118	0.121	0.202	0.191	0.196
0.20	0.085	0.079	0.082	0.138	0.128	0.132

مساوات 23.54 مطمئن نہ ہونے کی صورت میں مساوات 23.53 کی ناکامی: $h = 0.2$ اور $r = 1$ لینے سے مساوات 23.54 مطمئن نہیں ہو گا جبکہ مساوات 23.53 درج ذیل صورت اختیار کرے گی

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} - uij + u_{i+1,j}$$

جو درج ذیل نتائج دیتی ہے جو زیادہ درست نہیں ہیں۔

t	x=0.2	درست	x=0.4	درست
0.04	0.363	0.396	0.588	0.641
0.12	0.139	0.180	0.225	0.291
0.20	0.053	0.082	0.086	0.132

$h = 0.2$ رکھتے ہوئے r کی مزید بڑی قیمت $r = 2.5$ لینے سے مساوات 23.53 بے معنی نتائج دیتی ہے۔چند نتائج درج ذیل ہیں۔

t	x=0.2	درست	x=0.4	درست
0.1	0.0265	0.2191	0.0429	0.3545
0.3	0.0001	0.0304	0.0001	0.0492
0.5	0.0018	0.0042	0.0011-	0.0068

□

سوالات

سوال 23.59: (غیر بعدی صورت) $u=\frac{\tilde{u}}{u_0}$ اور $t=\frac{c^2\tilde{t}}{l^2}$ ، $x=\frac{\tilde{x}}{l}$ لیتے ہوئے حراری مساوات $\tilde{u}_{\tilde{t}}=c^2\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}},\ 0\le\tilde{x}\le l$ کا تبادل غیر بعدی معیاری صورت $u_t=u_{xx},\ 0\le x\le 1$ میں کریں جہاں u_0 کوئی مستقل درجہ حرارت ہے۔

سوال 23.60: حراری مساوات 23.49 کو مساوات 23.51 کی سرحدی شرائط اور درج ذیل ابتدائی شرائط کے لئے ترکیب کرینک نکلسن (مساوات 23.57) کی مدد سے $h=0.2$ لیتے ہوئے $0\le t\le 0.20$ کے لئے حل کریں۔

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 1-x & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$$

سوال 23.61: $h=0.2$ اور $r=0.25$ لیتے ہوئے 8 قدموں تک سوال 23.60 کو بلا واسطہ ترکیب سے حل کریں۔حاصل نتائج کا تین اعشاریہ درست کرینک نکلسن جوابات 0.107 ، 0.175 ، اور تین اعشاریہ بالکل درست جوابات 0.108 ، 0.175 کے ساتھ کریں۔
جواب: $t=0.04$ کے لئے 0.105, 0.170 ہیں، $t=0.08$ کے لئے 0.156, 0.254 ہیں، $\cdots$

سوال 23.62: $x=0.2,\ 0.4$ اور $t=0.04, 0.08,\cdots, 0.20$ لیتے ہوئے مثال 13.3 کی تسلسل سے سوال 23.60 کے نتائج حاصل کریں۔

سوال 23.63: بلا واسطہ ترکیب کی درستگی $r\,(\le\frac{1}{2})$ پر منحصر ہے۔سوال 23.61 میں پہلے کی طرح $h=0.2$ رکھتے ہوئے $r=\frac{1}{2}$ لے کر چار قدم تک حل کریں۔ $t=0.04$ اور $t=0.08$ پر حاصل نتائج کا سوال 23.61 کے نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔
جواب: $x=0.2, 0.4$ کے لئے $t=0.04$ پر 0.150, 0.250 اور $t=0.0.08$ کے لئے 0.100, 0.162 ہیں۔

سوال 23.64: اطراف سے حاجز شدہ متجانس سلاخ کے سر $x=0$ اور $x=1$ پر ہیں۔ بائیں سر کو $0\,°\mathrm{C}$ پر رکھا گیا ہے جبکہ دائیں سر پر درجہ حرارت $u(t,1)=g(t)=\sin\frac{25}{3}\pi t$ ہے۔سلاخ میں درجہ حرارت کو بلا واسطہ ترکیب سے ایک دوری عرصہ $0\le t\le 0.24$ کے لئے حاصل کریں۔ $h=0.2$ اور $r=0.5$ لیں۔(مساوات 23.49 کا حل درکار ہے۔)

سوال 23.65: سلاخ کا بایاں سر $0\,^\circ\mathrm{C}$ کی بجائے $-g(t)$ پر رکھتے ہوئے سوال 23.64 میں $u(x, 0.12)$ اور $u(x, 0.24)$ تلاش کریں۔باقی تمام مواد وہی رکھیں۔
جواب: $t = 0.12$ پر $0, 0.352, 0.153, -0.153, -0.352, 0$ ہیں جبکہ $t = 0.24$ پر $0, -0.344, -0.166, 0.166, 0.344, 0$ ہیں۔

سوال 23.66: سوال 23.64 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے سوال 23.65 کے نتائج کس طرح حاصل کیے جا سکتے ہیں؟ سوال 23.64 کے نتائج

$t = 0.12, x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ کے لئے $0.054, 0.172, 0.325, 0.406$ ہیں

اور $t = 0.24$ کے لئے $-0.009, -0.086, -0.252, -0.353$ ہیں۔

انہیں استعمال کرتے ہوئے سوال 23.65 کے نتائج پرکھیں۔

سوال 23.67: اگر اطراف سے حاجز شدہ $x = 0$ تا $x = 1$ لمبی سلاخ کا بایاں سر حاجز شدہ ہو تب $x = 0$ پر سرحدی شرط $u_n(0, t) = u_x(0, t) = 0$ ہو گا۔دکھائیں کہ مساوات 23.53 میں دی گئی بلا واسطہ ترکیب کی استعمال سے ہم $u_{0,j+1}$ کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$u_{0,j+1} = (1 - 2r)u_{0j} + 2ru_{1j}$$

سوال 23.68: ایک سلاخ جو $x = 0$ تا $x = 1$ ہے اطراف سے حاجز شدہ ہے۔اس کا بایاں سر حاجز شدہ ہے، دائیں سر پر درجہ حرارت $g(t) = \sin \frac{50}{3}\pi t$ ہے جبکہ $u(x, 0) = 0$ ہے۔بلا واسطہ ترکیب میں $h = 0.2$ اور $r = 0.25$ لیتے ہوئے درجہ حرارت $u(x, t), 0 \le t \le 0.12$ تلاش کریں۔اشارہ۔ سوال 23.67 کو دیکھیں۔

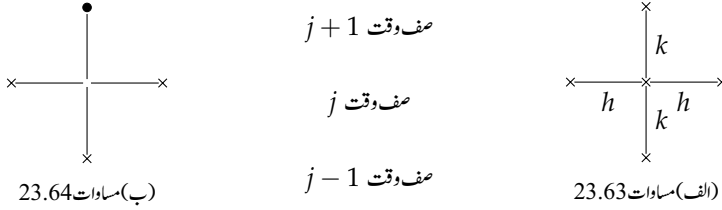
23.6 اعدادی تراکیب برائے قطع زائد مساوات

اس حصہ میں ہم مساوات موج اور مطلوبہ شرائط

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 \le x \le 1,\ t > 0 \tag{23.59}$$

$$u(x, 0) = f(x) \qquad \text{(ابتدائی ہٹاو)} \tag{23.60}$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \qquad \text{(ابتدائی سمتی رفتار)} \tag{23.61}$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \qquad \text{(سرحدی شرائط)} \tag{23.62}$$

شکل 23.22: مساوات 23.63 اور مساوات 23.64 میں استعمال ہونے والے جوڑ

کو مثال بناتے ہوئے قطع زائد مساوات کے اعدادی حل پر غور کریں گے۔یاد رہے کہ x کے کسی بھی وقفہ اور مساوات $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ کو x اور t کے موزوں خطی تبادل سے (سوال 23.59 کے تبادل کی طرح) مساوات 23.59 میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔

ایک لچکدار ارتعاش پذیر دھاگہ جس کے سر $x = 0$ اور $x = 1$ پر باندھے گئے ہوں کا $t > 0$ پر حرکت کے مسئلہ کو مساوات 23.59 تا مساوات 23.62 پیش کرتے ہیں۔اس مسئلے کا حل مساوات 13.35 میں دیا گیا ہے۔

مساوات میں پہلے کی طرح تفرق کی جگہ فرق کے حاصل تقسیم پر کرتے ہیں۔یوں مساوات 23.59 سے

$$\frac{1}{k^2}[u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}] = \frac{1}{h^2}[u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}] \tag{23.63}$$

حاصل ہو گا جہاں x رخ جسامت جال h اور t رخ جسامت جال k ہے۔درج بالا مساوات فرق شکل 23.22-الف میں دکھائے گئے پانچ نقطوں کا آپس میں تعلق بیان کرتی ہے۔اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ، گزشتہ حصے کی قطع مکافی مساوات کی طرح، ہمیں یہاں بھی مستطیل جال درکار ہو گا۔ہم $r^* = \frac{k^2}{h^2} = 1$ لیتے ہیں جس سے u_{ij} حذف ہو گا (شکل 23.22-ب) اور مساوات 23.63 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \tag{23.64}$$

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $0 < r^* \leq 1$ کے لئے موجودہ ترکیب مستحکم ہے لہٰذا موجودہ ابتدائی قیمتیں جن میں عدم استمرار نہیں پایا جاتا ہے کہ لئے ہم مساوات 23.64 سے قابل توقع نتائج کی توقع رکھتے ہیں۔ (ابتدائی معلومات میں عدم استمرار کی صورت میں قطع زائد مساوات کو موجودہ طریقہ سے حل کرنے میں دشواری پیش آئے گی۔)

مساوات 23.64 میں اب بھی تین قدم وقت $j-1$ ، j ، $j+1$ پائے جاتے ہیں جبکہ قطع مکافی کی صورت میں دو قدم وقت پائے جاتے تھے۔مزید اب دو عدد ابتدائی شرائط ہیں۔اس لئے ہم جاننا چاہیں گے کہ ہم قدم لینا

کس طرح شروع کریں گے اور مساوات 23.61 میں دی گئی ابتدائی معلومات کو کس طرح استعمال کریں گے۔ان معاملات پر اب غور کرتے ہیں۔ $u_t(x,0)=g(x)$ سے ہم مساوات فرق

$$\frac{1}{2k}(u_{i1}-u_{i,-1})=g_i \qquad \Longrightarrow \qquad u_{i,-1}=u_{i1}-2kg_i \tag{23.65}$$

حاصل کرتے ہیں جہاں $g_i=g(ih)$ ہے۔اب $t=0$ یعنی $j=0$ کے لئے مساوات 23.64 درج ذیل دے گی

$$u_{i1}=u_{i-1,0}+u_{i+1,0}-u_{i,-1}$$

جس میں ہم مساوات 23.65 پر کرتے ہوئے u_{i1} کے لئے حل کر کے

$$u_{i1}=\frac{1}{2}(u_{i-1,0}+u_{i+1,0}+kg_i) \tag{23.66}$$

حاصل کرتے ہیں جو u_{i1} کو ابتدائی معلومات کی صورت میں پیش کرتی ہے۔

مثال 23.11: ارتعاش پذیر دھاگہ

$h=k=0.2$ لیتے ہوئے موجودہ ترکیب کی مدد سے مساوات 23.59 تا مساوات 23.62 میں دیا گیا مسئلہ حل کریں جہاں $f(x)=\sin \pi x$ اور $g(x)=0$ ہیں۔

حل: ہم شکل 23.20 کی جال استعمال کرتے ہیں پس t کی قیمتیں $0.04, 0.08, \cdots$ کی بجائے اب $0.2, 0.4, \cdots$ ہوں گی۔ابتدائی قیمتیں $u_{00}, u_{10}, \cdots$ وہی ہوں گی جو مثال 23.10 میں تھیں۔مساوات 23.66 اور $g(x)=0$ سے

$$u_{i1}=\frac{1}{2}(u_{i-1,0}+u_{i+1,0})$$

حاصل ہو گا جس سے ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
u_{11}&=\frac{1}{2}(u_{00}+u_{20})=\tfrac{1}{2}\cdot 0.951\,057=0.475\,528\\
u_{21}&=\frac{1}{2}(u_{10}+u_{30})=\tfrac{1}{2}\cdot 1.538\,842=0.769\,421
\end{aligned}$$

یہاں بھی تشاکل کی بنا $u_{31}=u_{21}$ اور $u_{41}=u_{11}$ ہوں گے۔ $u_{01}=u_{02}=\cdots=0$ استعمال کرتے ہوئے $j=1$ کے لئے مساوات 23.65 سے

$$\begin{aligned}
u_{12}&=u_{01}+u_{21}-u_{10}=0.769\,421-0.587\,785=0.181\,636\\
u_{22}&=u_{11}+u_{31}-u_{20}=0.475\,528-0.769\,421-0.951\,057=0.293\,892
\end{aligned}$$

حاصل ہوں گے اور تشاکل کی بنا $u_{32}=u_{22}$ اور $u_{42}=u_{12}$ ہوں گے۔اسی طرح باقی قیمتیں بھی حاصل کی جاتی ہیں۔یوں دھاگے کی پہلی نصف ارتعاش کے لئے ہٹاو $u(x,t)$ کی درج ذیل قیمتیں حاصل ہوں گی۔

t	x=0	x=0.2	x=0.4	x=0.6	x=0.8	x=1
0.0	0	0.588	0.951	0.951	0.588	0
0.2	0	0.476	0.769	0.769	0.476	0
0.4	0	0.182	0.294	0.294	0.182	0
0.6	0	0.182-	0.294-	0.294-	0.182-	0
0.8	0	0.476-	0.769-	0.769-	0.476-	0
1.0	0	0.588-	0.951-	0.951-	0.588-	0

یہ قیمتیں بالکل درست ہیں۔اس مسئلے کا درست حل درج ذیل ہے (حصہ 13.3)۔

$$u(x,t)=\sin\pi x\cos\pi t$$

حصہ 13.4 میں مسئلہ دالومبیغ کے حل کی بنا یہاں بالکل درست نتائج حاصل ہوئے ہیں (سوال 23.70)۔ □

سوالات

سوال 23.69: ارتعاش پذیر دھاگے کے مسئلہ (مساوات 23.59 تا مساوات 23.62) کو $h=k=0.2$ لیتے ہوئے $0\le t\le 2$ کے لئے موجودہ اعدادی ترکیب سے حل کریں۔ابتدائی انحراف $f(x)=x(1-x)$ جبکہ ابتدائی رفتار صفر ہے۔
جواب: $x=0.2,0.4$ کے لئے $(t=0.2)$ پر $0.12,0.2$ ، $(t=0.4)$ پر $0.04,0.08$ ، $(t=0.6)$ پر $-0.04,-0.08$ ، وغیرہ۔

سوال 23.70: دکھائیں کہ $c=1$ لیتے ہوئے مسئلہ دالومبیغ کے حل، مساوات 13.34، کی بنا مساوات 23.64 بالکل درست حل $u_{i,j+1}=u(ih,(j+1)h)$ دے گی۔

سوال 23.71: ابتدائی رفتار $g(x)=\sin\pi x$ اور ابتدائی انحراف صفر لیتے ہوئے مساوات 23.59 کا حل $t=0.4$ اور $x=0.2,0.4,0.6,0.8$ کے لئے حاصل کریں۔موجودہ ترکیب استعمال کریں جس میں $h=0.2$ اور $k=0.2$ لیں۔ مساوات 13.35 میں دیے گئے بالکل درست حل کے ساتھ موازنہ کریں۔
جواب: 0.190, 0.308, 0.308, 0.190 جبکہ تین اعشاریہ درست نتائج 0.178, 0.288, 0.288, 0.178 ہیں۔

سوال 23.72: زیادہ باریک جال ($h=0.1$ ، $k=0.1$) لیتے ہوئے سوال 23.71 دوبارہ حل کریں۔مساوات 13.35 میں دیے گئے بالکل درست حل کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 23.73: موجودہ ترکیب کی ابتدا کا طریقہ کار اس صورت پیش کریں جب f اور g دونوں مماثلی صفر نہ ہوں مثلاً

$$f(x) = 1 - \cos 2\pi x, \quad g(x) = x - x^2;$$

$h = k = 0.1$ لیں اور دو قدم وقت تک چلیں۔

جواب: $t = 0.1$ کے لئے $0, 0.354, 0.766, 1.271, 1.679, 1.834, \cdots$
جبکہ $t = 0.2$ کے لئے $0, 0.575, 0.935, 1.135, 1.296, 1.357, \cdots$

سوال 23.74: دکھائیں کہ مساوات 13.35 سے درج ذیل ابتدا کرنے کا کلیہ بھی دیتی ہے

$$u_{i1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + \frac{1}{2}\int_{x_i-k}^{x_i+k} g(s)\,\mathrm{d}s$$

(جہاں تکمل کو اعدادی تراکیب سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے)۔ کس صورت یہ کلیہ اور مساوات 23.66 یکساں ہوں گے؟

سوال 23.75: سوال 23.74 میں دیا گیا کلیہ استعمال کرتے ہوئے سوال 23.73 کو $t = 0.1$ اور $x = 0.1, 0.2, \cdots$ کے لئے حل کریں۔ نتائج کا موازنہ کریں۔

سوال 23.76: درج ذیل ابتدائی معلومات کے لئے مساوات 23.59 حل کریں۔

$$u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = 2x, \quad u_x(0,t) = 2t, \quad u(1,t) = (1+t)^2$$

$h = k = 0.2$ لیں (پانچ قدم وقت)۔

باب 24

احتمال اور شماریات

بڑے پیمانے پر مصنوعات کی پیداوار اور تجرباتی مواد کے تجزیہ کے لئے حسابی شماریات بہت اہم ہے۔ اس باب کی شروع میں مواد کا جدول اور ترسیم سے اظہار پر غور کیا جائے گا۔ چونکہ شماریات کی بنیاد حسابی احتمال ہے لہٰذا اس کے بعد حسابی احتمال کے بنیادی تصورات اور اصولوں پر غور کیا جائے گا۔ باب کا باقی حصہ شماریات کے اہم ترین تراکیب پر مشتمل ہے۔

24.1 حسابی شماریات کی نوعیت اور اس کا مقصد

انجینئری شماریات میں ہمیں ایسے تجربات کی بناوٹ اور تشخیص سے غرض ہو گا جو عملی مسائل کے بارے میں معلومات فراہم کر سکے، مثلاً، خام مال یا تیار کردہ مصنوعات کے معیار کی جانچ پڑتال، مشین اور آلات یا مصنوعات کی تیاری میں استعمال تراکیب کا آپس میں موازنہ، مزدور کی پیداوار، صارفین کا نئی مصنوعات کے لئے رد عمل، مختلف حالات میں کیمیائی عمل سے حاصل پیداوار، خام لوہا کی کثافت اور اس میں لوہے کی مقدار کا تعلق، مختلف درجہ حرارت پر ایئر کنڈیشنر نظام کی کارکردگی، فولاد میں کاربن کی مقدار اور فولاد کی راک ویل[1] سختی کا تعلق، وغیرہ وغیرہ۔

مثال کے طور پر، بڑے پیمانے پر (پیچ، بلب، موبائل فون وغیرہ کی) پیداوار کے عمل میں عموماً بے عیب[2] اجزاء، جو درکار خواص کے معیار پر پورا اترے ہیں، اور عیب دار[3] اجزاء، جو درکار خواص کے معیار پر پورا نہیں اترتے ہیں، پائے

[1] Rockwell
[2] nondefective
[3] defective

جائیں گے۔ درکار خواص میں دھرا کا قطر، بلب کی کم سے کم عرصہ زندگی[4]، برقیاتی مصنوعات میں استعمال برقی مزاحمت کی قیمت کے حدود، کتاب میں استعمال کاغذ کی موٹائی، خود کار بھری گئی بوتل میں مشروب کی کم سے کم مقدار، برقی سوئچ کا زیادہ سے زیادہ دورانیہ رد عمل، اور کپڑے کی کم سے کم مضبوطی شامل ہیں۔

مصنوعات کی معیار میں فرق متعدد وجوہات (مثلاً خام مال، خود کار مشین کی کارکردگی، کاریگر کی کاریگری) کی بنا ممکن ہے جن کو قبل از وقت جاننا ممکن نہیں ہے لہٰذا انہیں بلا منصوبہ تبدیلیاں[5] تصور کیا جاتا ہے۔پیداوار کے تراکیب کی کارکردگی اور متذکرہ بالا دیگر مثالوں میں بھی صورت حال ایسا ہی ہو گا۔

ہر ایک پیدا کردہ رکن کو پرکھنے کے لئے عموماً بہت وقت درکار ہو گا اور ایسا کرنا خاصہ مہنگا ہو گا۔اگر پرکھنے کے دوران رکن ضائع ہوتا ہو تب ہر رکن کو پرکھنا ممکن نہیں ہو گا۔اسی لئے تمام ارکان کو پرکھنے کی بجائے چند ارکان کو بطور نمونہ[6] پرکھا جاتا ہے اور اس نمونہ کے نتائج سے کل تعداد (آبادی[7]) کے بارے میں رائے بنائی جاتی ہے۔ اگر 10000 پیچوں کی کھیپ سے 100 پیچوں کے نمونہ کو پرکھا جائے اور اس میں 5 پیچ عیب دار نکلیں تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس کھیپ میں 5% پیچ عیب دار ہوں گے، پس اتنا ضروری ہے کہ نمونہ کو بلا منصوبہ[8] چننا جائے یعنی کھیپ میں موجود ہر پیچ کا بطور نمونہ منتخب ہونے کا امکان[9] ایک جیسا ہو۔ظاہر ہے کہ ایسی رائے مکمل طور پر درست نہیں ہو سکتی ہے اور یہ کہنا کہ ٹھیک 5% پیچ عیب دار ہوں گے عموماً درست نہیں ہو گا لیکن عام طور عملی زندگی میں اتنی درست رائے (یا نتیجہ) کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔جتنے زیادہ ارکان کو پرکھا جائے ہمیں نتائج پر اتنا زیادہ اعتماد ہوتا ہے۔حسابی احتمال کا نظریہ ان خیالات کو ٹھوس شکل دیتا ہے اور نتائج پر کتنا اعتبار کیا جائے، اس کی ناپ بھی پیش کرتا ہے۔یوں شماریات کی بنیاد نظریہ احتمال ہے۔

اسی طرح خام لوہا میں لوہے کی فی صد مقدار μ جاننے کی خاطر ہم بلا منصوبہ n تعداد کے نمونے لیتے ہوئے ان میں لوہے کی فی صد مقدار تجرباتی طور دریافت کریں گے۔ ان n نمونوں کے تجرباتی نتائج $x_1, \cdots, x_n$ کی اوسط $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ لوہے کی فی صد مقدار μ کی تخمین ہو گی۔

مختلف نوعیت کے مسائل کے لئے مختلف تراکیب اور تکنیک درکار ہوں گے البتہ مسئلے کی تشکیل سے حل تک کے قدم عموماً ایک جیسے ہوتے ہیں۔انہیں یہاں پیش کرتے ہیں۔

---

[4] lifetime
[5] random variation
[6] sample
[7] population
[8] at random
[9] chance

- مسئلے کی تشکیل۔ مسئلے کو ٹھیک ٹھیک بیان کرنا اور تفتیشی عمل کے حدود تعین کرنا ضروری ہے تا کہ شماریاتی تفتیش کی لاگت، تفتیش کار کی مہارت اور دستیاب سہولیات کو مد نظر رکھتے ہوئے مخصوص وقت میں قابل استعمال نتائج حاصل ہوں۔اسی قدم میں واضح تصورات سے حسابی نمونہ[10] کی تخلیق[11] بھی شامل ہے۔ (مثال کے طور پر ہم نے تعین کرنا ہو گا کہ عیب دار رکن سے کیا مراد ہے۔)

- تجربہ کی تخلیق۔ آخری مرحلے میں استعمال ہونے والی شماریاتی ترکیب کا انتخاب، نمونہ کی جسامت (جتنے ارکان کا تجزیہ یا ان پر تجربہ کیا جائے گا، وغیرہ) اور طبعی تراکیب اور تکنیک جو بروئے کار لائے جائیں گے کا انتخاب اس قدم میں کیا جائے گا۔کم سے کم وقت اور لاگت کے ساتھ زیادہ سے زیادہ معلومات حاصل کرنا مقصد ہے۔

- تجربہ یا مواد جمع کرنے کا عمل۔ اس قدم میں قواعد پر سختی سے عمل کرنا ضروری ہے۔

- جدول بندی۔ اس قدم میں تجرباتی نتائج کو واضح اور سادہ جدول کی شکل میں لکھا جاتا ہے اور ساتھ ہی انہیں ترسیم کیا جا سکتا ہے یا انہیں ڈبہ ترسیم[12] کی صورت میں دکھایا جا سکتا ہے۔ اس قدم میں نمونہ کی اوسط اور قیمتوں میں پھیل کے تخمین کا حساب بھی کیا جاتا ہے۔

- شماریاتی رائے زنی۔ اس قدم میں کوئی مخصوص شماریاتی ترکیب کو نمونہ سے حاصل نتائج پر لاگو کرتے ہوئے نا معلوم خواص کے بارے میں رائے قائم کی جاتی ہے تا کہ ہم مطلوبہ جواب حاصل کر سکیں۔

24.2 نمونہ کا اظہار بذریعہ جدول اور ترسیم

شماریاتی تجربہ کے دوران عموماً مشاہدوں (زیادہ تر صورتوں میں اعداد) کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے جنہیں ہم اسی ترتیب سے لکھتے ہیں جس میں انہیں حاصل کیا گیا ہو۔ایک مثال جدول 24.1 میں دی گئی ہے۔ سیمنٹ اور بجری (کنکریٹ) سے معیاری ٹھوس بیلن (قطر 15.24 cm اور لمبائی 30.48 cm) بنا کر 28 دن[13] بعد انہیں چیرا گیا۔یوں ہمیں ایک نمونہ حاصل ہوا جو 100 نمونہ اعداد پر مشتمل ہے۔یوں نمونہ کی جسامت[14] $n = 100$ ہے۔

---

[10] mathematical model

[11] لفظ "نمونہ" اور لفظ "حسابی نمونہ" علیحدہ معنی رکھتے ہیں۔اسی لئے حسابی نمونہ کو بطور اصطلاح لیتے ہوئے پورا لکھا جائے گا یعنی "حسابی نمونہ"۔

[12] bar graph

[13] سیمنٹ کو مکمل مضبوط ہونے کے لئے اتنے دن درکار ہوتے ہیں۔

[14] size

جدول 24.1: کنکریٹ بیلن چیرنے کے لئے درکار فی مربع سنٹی میٹر قوت ($\mathrm{N\,cm^{-2}}$)

320	380	340	410	380	340	360	350	320	370
350	340	350	360	370	350	380	370	300	420
370	390	390	440	330	390	330	360	400	370
320	350	360	340	340	350	350	390	380	340
400	360	350	390	400	350	360	340	370	420
420	400	350	370	330	320	390	380	400	370
390	330	360	380	350	330	360	300	360	360
360	390	350	370	370	350	390	370	370	340
370	400	360	350	380	380	360	340	330	370
340	360	390	400	370	410	360	400	340	360

اس حصے میں ہم نمونہ کو جدول اور ترسیم کی صورت میں ظاہر کرنا سیکھتے ہیں۔ہم ان تراکیب کو جدول 24.1 کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

جدول 24.1 میں دی گئی معلومات جاننے کی خاطر ہم مواد کو ترتیب دیتے ہیں۔ہم (کم سے کم قیمت) 310 ، 320 ،...، 440 (زیادہ سے زیادہ قیمت) کو ایک قطار میں لکھتے ہیں۔اس کے بعد جدول 24.1 کے ہر صف سے گزرتے ہوئے ہر عدد کے لئے اس قطار میں مطابقتی مقام کی صف میں **نشان شمار**[15] کھینچتے ہیں۔اس طرح ہمیں جدول 24.2 کی پہلی دو قطاروں کا جدول حاصل ہو گا۔ نشان شمار کی گنتی کو جدول کی تیسری قطار میں درج کیا جاتا ہے۔یہ گنتی نمونہ میں کسی عدد x کی تعداد دیتی ہے جس کو نمونہ میں x کی مطلق تعدد[16] یا مختصراً **تعدد**[17] کہتے ہیں۔اس کو نمونہ میں ارکان کی تعداد n سے تقسیم کرنے سے ہمیں **اضافی تعدد**[18] حاصل ہوتی ہے جس کو جدول 24.2 کی چوتھی قطار میں درج کیا جاتا ہے۔یہاں $n=100$ ہے لہٰذا $x=330$ کی تعدد 6 اور اضافی تعدد 0.06 یا $6\,\%$ ہے۔

کسی مخصوص x کے لئے نمونہ میں x اور x سے کم قیمتوں کی تمام تعدد کا مجموعہ لیتے ہوئے **مجموعی تعدد**[19] حاصل ہوتی ہے جس کو پانچویں قطار میں درج کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر $x=350$ کا مطابقتی مجموعی تعدد 37 ہے جس کے تحت 350 اور اس سے کم قیمتوں کی تعداد 37 ہے۔اس کو جسامت n سے تقسیم کرنے

---

tally mark[15]
absolute frequency[16]
frequency[17]
relative frequency[18]
cumulative frequency[19]

جدول 24.2: جدول تقسیم برائے جدول 24.1 کا نمونہ

1	2	3	4	5	6
مضبوطی	مطلق تعدد		اضافی تعدد	مجموعی تعدد	مجموعی اضافی تعدد
	نشان شمار				
300	||	2	0.02	2	0.02
310		0	0.00	2	0.02
320	||||	4	0.04	6	0.06
330	𝍸 |	6	0.06	12	0.12
340	𝍸 𝍸 |	11	0.11	23	0.23
350	𝍸 𝍸 ||||	14	0.14	37	0.37
360	𝍸 𝍸 𝍸 |	16	0.16	53	0.53
370	𝍸 𝍸 𝍸	15	0.15	68	0.68
380	𝍸 |||	8	0.08	76	0.76
390	𝍸 𝍸	10	0.10	86	0.86
400	𝍸 |||	8	0.08	94	0.94
410	||	2	0.02	96	0.96
420	|||	3	0.03	99	0.99
430		0	0.00	99	0.99
440	|	1	0.01	100	1.00

سے چھٹی قطار میں درج مجموعی اضافی تعدد[20] حاصل ہوتی ہے۔مثال کے طور پر چھٹی قطار سے ہم دیکھتے ہیں کہ نمونہ میں 76 % قیمتیں 380 کے برابر یا اس سے کم ہیں۔

اگر نمونہ میں کوئی قیمت نہ پائی جاتی ہو تب اس قیمت کی تعدد 0 ہو گی۔اگر نمونہ میں تمام قیمتیں ایک جیسی ہوں تب اس قیمت کی تعدد n اور اضافی تعدد $\frac{n}{n} = 1$ ہو گی۔چونکہ یہی تعدد کی دو انتہائی قیمتیں ہیں لہٰذا درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.1: **(اضافی تعدد)**
اضافی تعدد کی کم سے کم قیمت 0 اور زیادہ سے زیادہ قیمت 1 ہے۔

فرض کریں کہ جسامت n کے نمونہ میں درج ذیل m مختلف قیمتیں پائی جاتی ہیں

$$x_1, x_2, \cdots, x_m \qquad (m \le n)$$

جن کے مطابقتی اضافی تعدد

$$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \cdots, \tilde{f}_m$$

ہیں۔تب ہم درج ذیل تفاعل[21] متعارف کر سکتے ہیں

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \tilde{f}_j & \text{جب } x = x_j \text{ ہو} \quad (j = 1, 2, \cdots, m) \\ 0 & \text{کسی بھی قیمت } x \text{ کے لئے جو نمونہ میں نہ پایا جاتا ہو} \end{cases} \tag{24.1}$$

جس کو **نمونہ کا تعددی تفاعل**[22] کہتے ہیں۔یہ نمونہ میں قیمتوں کی تقسیم (پھیل) دیتا ہے۔اسی لئے ہم کہتے ہیں کہ یہ تفاعل نمونہ کی **تعددی تقسیم**[23] دیتا ہے۔

مثال کے طور پر جدول 24.2 میں تعددی تفاعل کی قیمتیں قطار 4 میں دکھائی گئی ہیں جہاں $\tilde{f}(300) = 0.02$ ، $\tilde{f}(310) = 0$ ، $\tilde{f}(320) = 0.04$ ، وغیرہ، ہیں۔

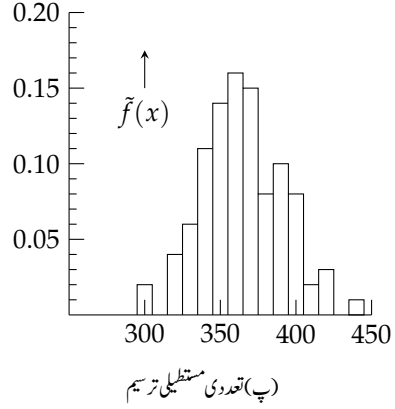
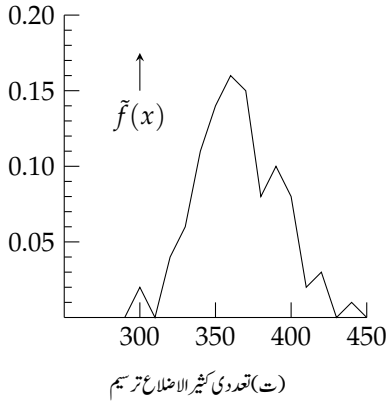
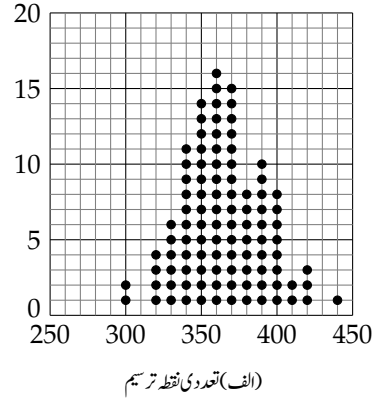
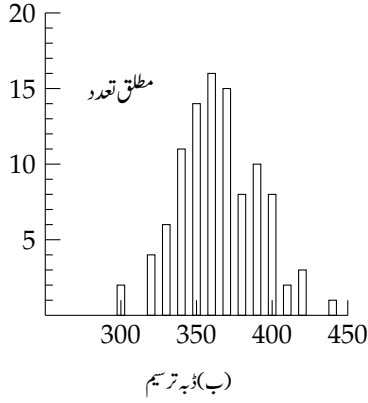
---

[20] cumulative relative frequency
[21] ہم $\tilde{f}$ استعمال کرتے ہیں چونکہ f کو تعددی تفاعل کے لئے استعمال کیا جائے گا جس کا استعمال کثرت سے ہو گا۔
[22] frequency function of the sample
[23] frequency distribution

(الف) تعددی نقطہ ترسیم

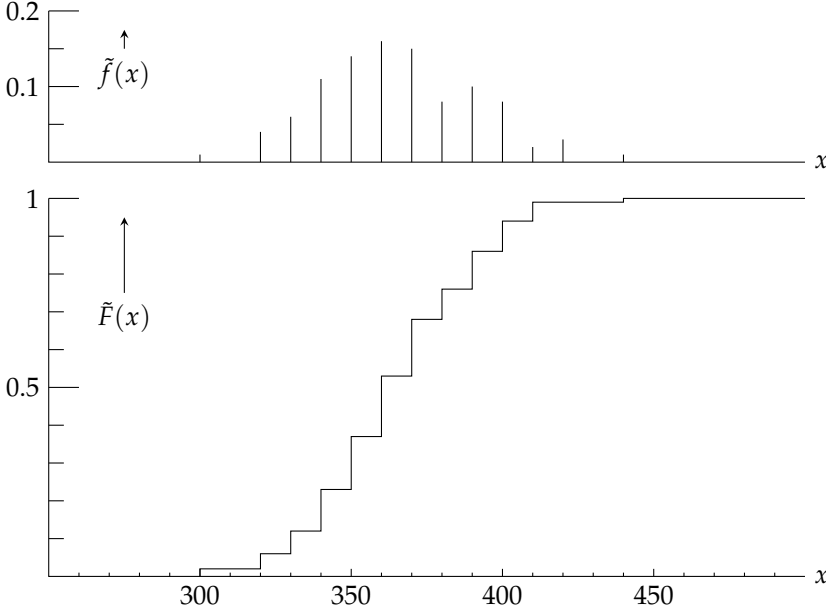
(ب) ڈبہ ترسیم

(پ) تعددی مستطیلی ترسیم

(ت) تعددی کثیر الاضلاع ترسیم

شکل 24.1: ترسیم برائے جدول 24.2

جسامت n کے نمونہ میں تمام تعدد کا مجموعہ n کے برابر ہو گا۔ (کیوں؟) اس سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.2: اضافی تعدد کا مجموعہ
کسی بھی نمونہ میں تمام اضافی تعدد کا مجموعہ 1 کے برابر ہو گا، یعنی:

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{f}(x_j) = \tilde{f}(x_1) + \tilde{f}(x_2) + \cdots + \tilde{f}(x_m) = 1$$

شکل 24.2: تعددی تفاعل $\tilde{f}(x)$ اور مجموعی تعددی تفاعل $\tilde{F}(x)$ برائے جدول 24.2

نمونہ کا ترسیمی اظہار شکل 24.1-الف تا شکل 24.1-ت میں دکھایا گیا ہے۔ شکل 24.1-پ میں ہر مستطیل کا رقبہ مطابقتی اضافی تعدد کے برابر ہو گا لہٰذا عمودی محدد پر اضافی تعدد فی اکائی رقبہ ہو گا۔ چونکہ شکل 24.1-پ میں تمام مستطیل کی چوڑائی ایک جیسی ہے لہٰذا عمودی محدد پر قیمتیں $\tilde{f}(x)$ کے راست متناسب ہوں گی۔ البتہ مستطیل کو چوڑائیاں مختلف ہونے کی صورت میں ایسا نہیں ہو گا۔ شکل 24.1-ت میں بھی یہی صورت حال ہو گی۔

ہم اب درج ذیل تفاعل متعارف کرتے ہیں

$\tilde{F}(x) =$ x اور x سے کم تمام قیمتوں کے اضافی تعدد کا مجموعہ

جس کو نمونے کا **مجموعی تعددی تفاعل**[24] یا مختصراً **تقسیمی تفاعل نمونہ**[25] کہتے ہیں۔ شکل 24.2 میں مثال دی گئی ہے۔

$\tilde{F}(x)$ سیڑھی تفاعل (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ہے جس میں ٹھیک ان x پر جہاں $\tilde{f}(x) \neq 0$ ہو $\tilde{f}(x)$

[24] cumulative frequency function of the sample
[25] sample distribution function

کے برابر چلانگ پائے جاتے ہیں۔پہلی چھلانگ نمونہ کی کم سے کم قیمت اور آخری چھلانگ نمونہ کی زیادہ سے زیادہ قیمت پر پائی جائے گی۔ آخری چھلانگ کے بعد $\tilde{F}(x) = 1$ رہے گا۔

$\tilde{f}(x)$ اور $\tilde{F}(x)$ کا تعلق درج ذیل ہے

$$\tilde{F}(x) = \sum_{t \leq x} \tilde{f}(t) \tag{24.2}$$

جہاں $t \leq x$ کا مطلب ہے کہ کسی بھی x کے لئے ان تمام $\tilde{f}(x)$ کا مجموعہ لیا جائے گا جن کے لئے t کی قیمت x کے برابر یا x سے کم ہو۔

اگر کسی نمونہ میں مختلف اعداد کی تعداد بہت زیادہ ہو تب اس کا جدولی اور ترسیمی اظہار غیر ضروری طور پر مشکل ہو گا جس کو گروہ بندی[26] سے آسان بنانا ممکن ہے۔آئیں گروہ بندی کے عمل کو سمجھیں۔

دیے گئے نمونہ کے لحاظ سے ہم ایسا وقفہ I منتخب کرتے ہیں جس میں تمام نمونی قیمتیں شامل ہوں۔ہم I کو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں جماعتی وقفہ[27] کہتے ہیں۔ان جماعتی وقفوں کے وسطی نقطوں کو جماعتی وسطی نقطے[28] یا جماعتی نشان[29] کہتے ہیں۔ہر جماعتی وقفہ میں پائے جانے والے نمونی قیمتیں کو طبقہ[30] کہتے ہیں۔ طبقہ میں نمونی قیمتوں کی تعداد کو جماعتی تعدد[31] کہتے ہیں جس کو جسامت نمونہ n سے تقسیم کرنے سے اضافی جماعتی تعدد[32] حاصل ہو گا۔ اس تعدد $\tilde{f}(x)$ کو جو جماعتی نشان کے تابع ہے گروہ بند نمونہ کا تعددی تفاعل[33] کہتے ہیں۔اسی طرح مجموعی اضافی جماعتی تعدد $\tilde{F}(x)$ جو جماعتی نشان کے تابع ہے گروہ بند نمونہ کا تقسیمی تفاعل[34] کہلاتا ہے۔جدول 24.3 اور جدول 24.4 میں مثال دیا گیا ہے۔

جماعتوں کی تعداد جتنی کم رکھی جائے، گروہ بند نمونہ کی تقسیم اتنی سادہ ہو گی اور اتنی ہی زیادہ معلومات کھوئی جائے گی چونکہ اصل نمونی قیمتیں اب صریحاً نظر نہیں آئیں گی۔ گروہ بندی کرتے وقت دھیان رکھیں کہ صرف غیر ضروری معلومات کھوئی جائے۔ گروہ بند نمونہ استعمال کرتے ہوئے مشکلات سے بچنے کی خاطر درج ذیل اصولوں کا خیال رکھیں۔

---

grouping[26]
class intervals[27]
class midpoints[28]
class marks[29]
class[30]
class frequency[31]
relative class frequency[32]
frequency function of the grouped sample[33]
distribution!function of the grouped sample[34]

جدول 24.3: کپاس کے سوتی دھاگے کو توڑنے کے لئے درکار قوت (نیوٹن میں)

114	118	86	107	87	94	82	81	98	84
120	126	98	89	114	83	94	106	96	111
123	110	83	118	83	96	96	74	91	81
102	107	103	80	109	71	96	91	86	129
130	104	86	121	96	96	127	94	102	87

جدول 24.4: تعددی جدول برائے جدول 24.3 (گروہ بند)

جماعتی وقفہ	جماعتی نشان x	مطلق تعدد: نشان شمار	مطلق تعدد	$\tilde{f}(x)$	$\tilde{F}(x)$
$65-75$	70	‖	2	0.04	0.04
$75-85$	80	𝍸 |||	8	0.16	0.20
$85-95$	90	𝍸 𝍸		11	0.22	0.42
$95-105$	100	𝍸 𝍸 ‖	12	0.24	0.66
$105-115$	110	𝍸 |||	8	0.16	0.82
$115-125$	120	𝍸	5	0.10	0.92
$125-135$	130	||||	4	0.08	1.00
		مجموعہ	50	1.00	

- جماعتی وقفے برابر رکھیں۔
- جماعتی نشان یوں منتخب کریں کہ جماعتی نشان سادہ اعداد (جن میں غیر صفر ہندسوں کی تعداد کم سے کم ہو) پر واقع ہوں۔
- اگر نمونی قیمت x_j دو جماعتوں کی سرحد پر واقع ہو تب یہ قیمت اس طبقہ میں شامل کیا جائے گا جو x_j سے شروع ہوتا ہو۔

سوالات

سوال 24.1 تا سوال 24.9 میں دیے گئے نمونہ کا تعددی جدول بنائیں اور نمونہ کو تعددی نقطہ ترسیم، ڈبہ ترسیم اور مستطیل ترسیم کی صورت میں دکھائیں۔

سوال 24.1: مزاحمت کی قیمت اوہم Ω میں۔

99	100	102	101	98	103	100	102	99	101
100	100	99	101	100	102	99	101	98	100

سوال 24.2:

6 2 4 1 2 4 3 3 2 1 6 5 6 3 4

سوال 24.3: برقی سوئچ کا سیکنڈوں میں دورانیہ ردعمل

1.3 1.4 1.1 1.5 1.4 1.3 1.2 1.4 1.5 1.3
1.2 1.3 1.5 1.4 1.4 1.6 1.3 1.5 1.1 1.4

سوال 24.4: خام کوئلہ میں کوئلہ کی فی صد مقدار

87 86 85 87 86 87 86 81 77 85
86 84 83 83 82 84 83 79 82 73

سوال 24.5: چادری فولاد کی تنشی مضبوطی [$\mathrm{kg\,mm^{-2}}$]

44 43 41 41 44 44 43 44 42 45 43 43 44 45 46
42 45 41 44 44 43 44 46 41 43 45 45 42 44 44

سوال 24.6: خودکار نظام سے 100 کاغذ کے گھٹے بنانے میں کمی بیشی

0 -1 0 0 1 1 2 0 1 0

سوال 24.7: ایک ہی قسم کے گاڑیوں کا تیل کا خرچہ۔ [کلومیٹر فی لیٹر]

12 11.5 11 12.5 11 12

سوال 24.8: خودکار نظام سے بھری گئی تھیلوں کا گرام میں وزن

200 203 199 198 201 200 201 201

سوال 24.9: اندرون شہر چلتی ریل گاڑی کا اڈے پر ٹھیک وقت پر پہنچنے سے انحراف (منٹوں میں)[35]

3 4 1 0 2 2 3 1 5 3

سوال 24.10: سوال 24.3 کے نمونہ کی مجموعی تعددی تفاعل کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.11: جدول 24.4 کے گروہ بند نمونہ کا ڈبہ ترسیم، مستطیل ترسیم اور تعددی کثیر الاضلاع ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.12: جدول 24.1 میں جماعتی وقفوں کے جماعتی نشان 300 ، 320 ، 340 ، ... پر لیتے ہوئے مطابقتی تعددی جدول بنائیں۔اس کے مستطیل ترسیم کھینچ کا شکل 24.1-پ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 24.13: جدول 24.3 میں جماعتی نشان 75 ، 85 ، 95 ، ...لے کر مطابقتی تعددی جدول بنائیں۔اس کے مستطیل ترسیم کا سوال 24.10 کے ترسیم سے موازنہ کریں۔

سوال 24.14: 1500 تجرباتی نتائج میں سب سے کم ناپ 10.8 cm اور سب سے زیادہ ناپ 11.9 cm تھی۔اس مواد کی گروہ بندی کے لئے جماعتی وقفہ تجویز کریں۔

24.3 نمونی اوسط اور نمونی تغیریت

تعددی تفاعل (یا تقسیمی تفاعل) نمونہ کی صحیح تصویر کشی کرتا ہے۔اس تفاعل سے ہم نمونہ کے کئی خواص کا حساب لگا سکتے ہیں مثلاً نمونی قیمتوں کی اوسط جسامت، پھیل، تشاکل، وغیرہ۔ اس حصہ میں ہم ایسے اہم ترین دو قیمتوں، نمونی اوسط اور نمونی تغیریت، پر غور کریں گے۔

نمونہ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ کی اوسط قیمت یا مختصراً **نمونی اوسط**[36] کو $\bar{x}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{24.3}$$

[35] امید کی جاسکتی ہے کہ ایک دن ہماری ریل گاڑیاں بھی وقت کی اتنی پابند ہوں گی۔

[36] sample mean

تمام نمونی قیمتوں کے مجموعہ کو جسامت n سے تقسیم کرتے ہوئے نمونی اوسط حاصل ہو گا۔ظاہر ہے کہ یہ نمونی قیمتوں کی اوسط جسامت دے گا۔

نمونہ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ کی **نمونی تغیریت**[37] کو s^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے۔

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n-1}[(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^2] \end{aligned} \tag{24.4}$$

نمونی اوسط $\bar{x}$ سے نمونی قیمتوں کے انحراف کے مربعوں کو $n-1$ سے تقسیم کرتے ہوئے نمونی تغیریت حاصل ہو گی۔یہ نمونی قیمتوں کی انحراف یا پھیل کی ناپ ہے۔نمونی تغیریت غیر منفی عدد ہو گا۔ نمونی تغیریت s^2 کا مثبت جذر **معیاری انحراف**[38] کہلاتا ہے جس کو s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 24.1: **نمونی اوسط اور نمونی تغیریت**

بلا منصوبہ منتخب کیے گئے کیلوں کی (سنٹی میٹروں میں) لمبائیاں درج ذیل ہیں۔

0.80 0.81 0.81 0.82 0.81 0.82 0.80 0.82 0.81 0.81

مساوات 24.3 سے نمونی اوسط

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(0.80 + 0.81 + 0.81 + 0.82 + \cdots + 0.81) = 0.811\,\text{cm}$$

اور مساوات 24.4 سے نمونی تغیریت

$$s^2 = \frac{1}{9}[(0.80-0.811)^2 + \cdots + (0.81-0.811)^2] = 0.000\,054\,\text{cm}^2$$

ہے۔ایک جیسی نمونی قیمتوں کو اکٹھا لکھنے سے حساب نسبتاً آسان بنایا جا سکتا ہے جیسے

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(2\cdot 0.80 + 5\cdot 0.81 + 3\cdot 0.82) = 0.811\,\text{cm}$$

جہاں قوسین میں تین مختلف نمونی قیمتوں $x_1 = 0.80$ ، $x_2 = 0.81$ اور $x_3 = 0.82$ کو ان کی تعدد سے ضرب دیا گیا ہے۔اسی طرح

$$s^2 = \frac{1}{9}[(2(0.800-0.811)^2 + 5(0.810-0.811)^2 + 3(0.820-0.811)^2] = 0.000\,054$$

[37] sample variance
[38] standard deviation

ہو گا۔ □

اس مثال میں ہم نے $\bar{x}$ اور s^2 کو نمونہ کے تعددی تفاعل $\tilde{f}(x)$ کی مدد سے حاصل کرنا دیکھا۔اگر ایک نمونہ میں ٹھیک m مختلف اعدادی قیمتیں

$$x_1, x_2, \cdots, x_m$$

پائی جاتی ہوں جن کے مطابقتی اضافی تعدد

$$\tilde{f}(x_1), \tilde{f}(x_2), \cdots, \tilde{f}(x_m)$$

ہوں تب حساب کے لئے درکار تعدد درج ذیل ہوں گے

$$n\tilde{f}(x_1), n\tilde{f}(x_2), \cdots, n\tilde{f}(x_m)$$

جنہیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 24.3 اور مساوات 24.4 سے

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} x_j n\tilde{f}(x_j) \tag{24.5}$$

اور

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{m}(x_j - \bar{x})^2 n\tilde{f}(x_j) \tag{24.6}$$

حاصل ہو گا۔ دھیان رہے کہ مساوات 24.3 اور مساوات 24.4 میں ہم تمام نمونی قیمتوں پر مجموعہ لیتے ہیں جبکہ مساوات 24.5 اور مساوات 24.6 میں ہم اعدادی طور مختلف نمونی قیمتوں پر مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔مطلق تعدد $n\tilde{f}(x_j)$ عدد صحیح ہوں گے جبکہ اضافی تعدد $\tilde{f}(x_j)$ عموماً غیر عدد صحیح ہوں گے۔

چونکہ $x_j - \bar{x}$ کی مطلق قیمت نمونی اوسط کی نسبت بہت کم ہو سکتی ہے لہٰذا s^2 کے مذکورہ بالا کلیات کی استعمال سے (خود کار حساب میں) ملحوظ ہندسے ضائع ہوں گے۔ہم s^2 کا ایک ایسا کلیہ اخذ کرتے ہیں جو ان مشکلات سے دو چار نہ ہو۔ہم مساوات 24.4 میں

$$(x_j - \bar{x})^2 = x_j^2 - 2x_j\bar{x} + \bar{x}^2$$

پر کرتے ہوئے تین مجموعے

$$\sum(x_j - \bar{x})^2 = \sum x_j^2 - 2\bar{x}\sum x_j + \sum \bar{x}^2$$

جدول 24.5: اوسط اور تغیریت کا حساب برائے مثال 24.1

x_j	$10\tilde{f}(x_j)$	$x_j \cdot 10\tilde{f}(x_j)$	x_j^2	$x_j^2 \cdot 10\tilde{f}(x_j)$
0.80	2	1.60	0.6400	1.2800
0.81	5	4.05	0.6561	3.2805
0.82	3	2.46	0.6724	2.0172

حاصل کرتے ہیں جہاں آخری مجموعہ $n\bar{x}^2$ کے برابر ہے۔ مساوات 24.3 سے $\bar{x}$ کی قیمت پر کرتے ہوئے

$$-2\bar{x}\sum x_j = -\frac{2}{n}(\sum x_j)^2 \quad \text{اور} \quad n\bar{x}^2 = \frac{1}{n}(\sum x_j)^2$$

لکھا جا سکتا ہے جنہیں استعمال کرتے ہوئے

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\Big[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)^2\Big] \tag{24.7}$$

حاصل ہو گا۔ اسی طرح مساوات 24.6 کو تبدیل کرتے ہوئے

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\Big[\sum_{j=1}^{m} x_j^2 n\tilde{f}(x_j) - \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} x_j n\tilde{f}(x_j)\Big)^2\Big] \tag{24.8}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال کے طور پر مثال 24.1 میں مساوات 24.5 اور مساوات 24.8 (جدول 24.5) سے پہلے کی طرح $\bar{x} = \frac{8.11}{10} = 0.811$ اور

$$s^2 = \frac{1}{9}\Big(6.5777 - \frac{8.11^2}{10}\Big) = \frac{0.000\,49}{9} = 0.000\,054$$

حاصل ہوتے ہیں۔

سوالات

سوال 24.15: گزشتہ حصے کی سوال 24.2 کے لئے نمونی اوسط اور نمونی تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = 3.47,\ s^2 = 2.98$

سوال 24.16: گزشتہ حصے کی سوال 24.4 کے لئے نمونی اوسط اور نمونی تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = 84,\ s^2 = \frac{1251}{95}$

سوال 24.17: نمونہ $2, 1, 4, 5$ کا مستطیل ترسیم کھینچیں۔ ترسیم کو دیکھ کر $\bar{x}$ اور s کی قیمتوں کا اندازہ لگائیں۔ $\bar{x}$ ، s^2 اور s کی قیمتوں کا حساب لگائیں۔
جواب: $\bar{x} = 3,\ s^2 = 3.3,\ s = 1.817$

سوال 24.18: دکھائیں کہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ نمونی قیمتوں کے بیچ $\bar{x}$ ہو گا۔

سوال 24.19: نمونہ کا
نمونہ میں سب سے بڑی قیمت اور سب سے چھوٹی قیمت کے فرق کو نمونہ کا [39] کہتے ہیں۔ مثال 24.1 میں دیے گئے نمونہ کا تلاش کریں۔
جواب: 0.02

سوال 24.20: صدویہ، وسطانیہ
نمونہ کی p ویں صدویہ[40] سے مراد ایسا عدد Q_p ہے کہ کم از کم $p\,\%$ نمونی قیمتیں Q_p سے کم یا اس کے برابر ہوں اور ساتھ ہی $(100-p)\,\%$ نمونی قیمتیں اس سے زیادہ یا اس کے برابر ہوں۔ اگر ایک سے زیادہ ایسا عدد پایا جاتا ہو (جس صورت میں ان اعداد کا وقفہ پایا جائے گا) تب p ویں صدویہ سے مراد ان اعداد کا اوسط (یعنی وقفے کا وسطی نقطہ) ہو گا۔ بالخصوص Q_{50} کو وسطانیہ[41] کہتے ہیں جس کو $\tilde{x}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وسطانیہ کو نصف چوتھائی[42] بھی کہتے ہیں۔ جدول 24.2 کے نمونہ کا وسطانیہ $\tilde{x}$ تلاش کریں۔
جواب: 360

سوال 24.21: نمونہ کی Q_{25} اور Q_{75} صدویہ کو بالترتیب نچلی چوتھائی[43] اور بالائی چوتھائی[44] کہتے ہیں جبکہ $Q_{75} - Q_{25}$ جو پھیل کی ناپ ہے کو چوتھائی[45] کہتے ہیں۔ جدول 24.2 کے نمونہ کا کی Q_{25} ، Q_{75} اور $Q_{75} - Q_{25}$ تلاش کریں۔
جواب: 350, 380, 30

سوال 24.22: جدول 24.3 کے لئے سوال 24.21 کو حل کریں۔
جواب: $\frac{345}{4},\ \frac{439}{4},\ \frac{47}{2}$

---

[39] range
[40] percentile
[41] median
[42] middle quartile
[43] lower quartile
[44] upper quartile
[45] interquartile range

سوال 24.23: عادہ
نمونہ میں سب سے زیادہ بار آنے والی قیمت کو نمونہ کی عادہ[46] کہتے ہیں۔یہ سب سے عام قدر ہوتی ہے۔درج ذیل نمونہ کی اوسط، وسطانیہ اور عادہ تلاش کریں۔ ان پر تبصرہ کریں۔

قیمت	100	1000	1 000 000
تعدد	100	90	20

جواب: $100 =$ عادہ, $1000 =$ وسطانیہ, $10\,000 =$ اوسط

سوال 24.24: مبدا کام
اگر $x_j = x_j^* + c$ ہو جہاں $j = 1, \cdots, n$ اور c کوئی مستقل ہو تب دکھائیں کہ

$$\bar{x} = c + \bar{x}^*, \quad \left(\bar{x}^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^*\right) \quad \text{اور} \quad s^2 = s^{*2}$$

ہوں گے جہاں x_j^* قیمتوں کی تغیریت s^{*2} ہے۔(عملی استعمال میں c یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ x_j^* کی مطلق قیمتیں چھوٹی ہوں۔جیومیٹریائی طور پر یہ مبدا کی تبدیلی کے مترادف ہے لہٰذا اس کو ترکیب مبدا کام[47] کہتے ہیں۔)

سوال 24.25: ترکیب مبدا کام کو مثال 24.1 کے نمونہ پر لاگو کریں۔

سوال 24.26: مکمل رمزنویسی
اگر $x_j = c_1 x_j^* + c_2$ ہو جہاں $j = 1, \cdots, n$ جبکہ c_1 اور c_2 مستقل ہیں تب دکھائیں کہ

$$\bar{x} = c_1 \bar{x}^* + c_2, \quad s^2 = c_1^2 s^{*2}$$

ہوں گے جہاں $\bar{x}^*$ اور s^{*2} کی معنی سوال 24.24 میں پیش کی گئی ہیں۔اس کو ترکیب مکمل رمزنویسی[48] کہتے ہیں۔(اس ترکیب سے قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے نتائج کی جلد جانچ پڑتال کی جا سکتی ہے۔)

سوال 24.27: اس ترکیب کو مثال 24.1 کے نمونہ پر لاگو کریں۔

سوال 24.28: کسی بھی نمونہ کی گروہ بندی سے عموماً نمونی اوسط متاثر ہو گا۔دکھائیں کہ نمونی اوسط میں تبدیلی $\frac{l}{2}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے جہاں ہر ایک جماعتی وقفہ کی لمبائی l ہے۔

---

[46] mode
[47] method of working origin
[48] method of full coding

سوال 24.29: جدول 24.3 کی غیر گروہ بند نمونہ کی گروہ بندی جدول 24.4 میں کی گئی ہے۔ دونوں مواد کی اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔ نتائج کا آپس میں موازنہ کریں۔
جواب: غیر گروہ بند : $\bar{x} = 99.2,\ s^2 = 234.7;$ گروہ بند : $\bar{x} = 99.4,\ s^2 = 254.7$

24.4 بلا منصوبہ تجربات، انجام، وقوعات

شماریاتی تجربات یا شماریاتی مشاہدے سے ہمیں نمونے حاصل ہوں گے جن کی مدد سے ہم متعلقہ آبادی کے بارے میں نتائج اخذ کرنا چاہیں گے۔ ایسا کرنے سے پہلے حسابی احتمال کی مدد سے ہمیں آبادی کے حسابی نمونے بنانے ہوں گے۔ یہ نظریہ حسابی شماریات کی بنیاد ہے جس کی گہرائی میں ہم اپنی ضرورت کے مطابق جائیں گے۔ اس حصہ میں کئی بنیادی تصورات کو متعارف کیا جائے گا۔

ایک بلا منصوبہ تجربہ یا بلا منصوبہ مشاہدہ، جنہیں ہم مختصراً **تجربہ**[49] یا **مشاہدہ**[50] کہیں گے، سے مراد وہ عمل ہے جو درج ذیل خواص رکھتا ہو۔

- اس کو طے شدہ قواعد کے تحت سرانجام دیا جاتا ہے جو عمل کو مکمل طور پر بیان کرتے ہیں۔
- اس عمل کو جتنی بار چاہیں دوبارہ انجام دیا جا سکتا ہے۔
- ہر مرتبہ عمل کا نتیجہ اتفاق پر منحصر ہو گا (یعنی نتیجہ ان اثرات پر منحصر ہے جنہیں ہم قابو نہیں کر سکتے ہیں) لہٰذا قبل از وقت یکتا طور پر نتیجہ جاننا ممکن نہیں ہو گا۔

ایک مرتبہ تجربے کے عمل سے حاصل نتیجہ کو اس **کوشش**[51] کا **انجام**[52] کہتے ہیں۔

اس کی مثال (کرکٹ کی کھیل کی آغاز میں) سکہ پھینکنا، لوڈو[53] کی کھیل میں پانسہ[54] پھینکنا، 100 پیچ کی ڈبی سے 10 پیچوں کا انتخاب یا مختلف حالات میں کیمیائی عمل کی پیداوار تعین کرنا اور دیگر تجربات مثلاً بلا منصوبہ 20 افراد کا انتخاب اور ان کا فشار خون[55] تعین کرنا یا کسی موضوع پر ان کی رائے جاننا ہیں۔

---

[49] experiment
[50] observation
[51] trial
[52] outcome
[53] ludo
[54] ایک مکعب جس کی چھ سطحوں پر ایک تا چھ نقطے ہوتے ہیں۔
[55] blood pressure

کسی تجربہ کے تمام ممکنہ انجام کے سلسلہ کو اس تجربہ کی **نمونی فضا**[56] کہتے ہیں جس کو S سے ظاہر کیا جائے گا۔ ہر ایک انجام کو S کا **رکن**[57] یا **نقطہ**[58] کہتے ہیں۔ متناہی تعداد کے ارکان پر مشتمل سلسلہ **متناہی** جبکہ لا متناہی تعداد کے ارکان پر مشتمل سلسلہ **لامتناہی** کہلائے گا۔

مثال کے طور پر پانسہ پھینکنے کے بلا منصوبہ تجربہ کے ساتھ درج ذیل نمونی سلسلہ منسلک کیا جا سکتا ہے،

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

چونکہ پانسہ پھینکنے کے بعد (چھ ممکنات میں سے) کسی ایک رخ رکے گا۔

صنعتی پیداوار سے ہم ایک رکن نکال کر دیکھ سکتے ہیں کہ آیا وہ بے عیب یا عیب دار ہے۔ یوں S دو ارکان D (عیب دار) اور N (بے عیب) پر مشتمل ہو گا جنہیں اعداد مثلاً 0 (عیب دار) اور 1 (بے عیب) سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ اب اگر ہم ایک سے زیادہ اقسام کے عیب میں تمیز کریں تب نمونی فضا دو سے زائد نقطوں پر مشتمل ہو گا۔

کپاس کی مضبوطی کے تجربہ (جدول 24.3) میں نمونی فضا لامتناہی ہو گا چونکہ دھاگہ توڑنے کے لئے درکار قوت کسی مخصوص میں کوئی بھی مثبت قیمت ہو سکتی ہے۔

عملی مسائل میں ہمیں انفرادی انجام سے زیادہ دلچسپی نہیں ہو گی بلکہ ہم صرف اتنا جاننا چاہیں گے کہ آیا اس کا کسی مخصوص سلسلہ انجام سے تعلق ہے (یا نہیں ہے)۔ ظاہر ہے کہ ایسا ہر سلسلہ A پوری نمونی فضا S کا ذیلی سلسلہ ہو گا۔ اس کو **وقوعہ**[59] کہتے ہیں۔

چونکہ کوئی بھی انجام S کا ذیلی سلسلہ ہو گا لہٰذا یہ ایک مخصوص قسم کا وقوعہ ہو گا جس کو بنیادی وقوعہ کہتے ہیں۔ اسی طرح پوری فضا S بھی ایک مخصوص وقوعہ ہے۔

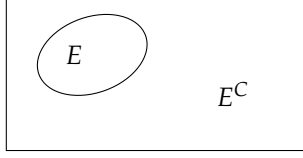
مثال 24.2: پانچ پانی کے نلکوں (جنہیں ایک تا پانچ سے ظاہر کیا جاتا ہے) میں سے دو نلکے منتخب کیے جاتے ہیں۔ نمونی فضا درج ذیل دس ممکنہ انجام پر مشتمل ہو گی۔

$$1,2 \quad 1,3 \quad 1,4 \quad 1,5 \quad 2,3 \quad 2,4 \quad 2,5 \quad 3,4 \quad 3,5 \quad 4,5$$

---

[56] sample space
[57] element
[58] point
[59] event

E

E^C

شکل 24.3: وین شکل میں نمونی سلسلہ S اور وقوعات E اور E^C دکھائے گئے ہیں

اب اگر ہم عیب دار نلکوں میں دلچسپی رکھتے ہوں تب ہمیں درج ذیل تین انجاموں میں فرق کرنا ہو گا۔

A : دونوں عیب دار ہیں , B : ایک عیب دار ہے , C : کوئی بھی عیب دار نہیں ہے

فرض کریں کہ نلکوں میں $1, 2, 3$ عیب دار ہیں تب درج ذیل ہو گا۔

$4, 5,$ منتخب کرنے سے A ہو گا
$1, 4 \quad 1, 5 \quad 2, 4 \quad 2, 5 \quad 3, 4 \quad 3, 5$ منتخب کرنے سے B ہو گا
$1, 2 \quad 1, 3 \quad 2, 3$ منتخب کرنے سے C ہو گا

□

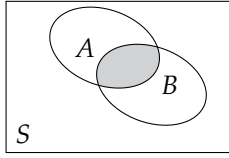
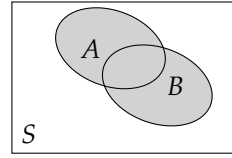
نمونی فضا S اور تجربہ کے انجام کو **وین اشکال**[60] سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ فرض کریں کہ شکل 24.3 میں چکور کے اندر نقطوں کا سلسلہ S کو ظاہر کرتے ہے۔تب مستطیل کے اندر بند منحنی کا اندرون کسی وقوعہ کو ظاہر کرے گا جس کو ہم E سے ظاہر کرتے ہیں۔ ان تمام ارکان (انجاموں) کا سلسلہ جو E میں شامل نہیں ہیں کو S میں E کا متمم کہتے ہیں جس کو E^c [61] سے ظاہر کیا گیا ہے۔

مثال کے طور پر پانسہ پھینکنے کے تجربہ میں

E : جب جفت عدد حاصل ہو

کا متمم

E^C : جب طاق عدد حاصل ہو

[60] Venn diagram
[61] یا $\bar{E}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کو ہم استعمال نہیں کریں گے چونکہ اس کو کسی دوسرے مقصد (بندش سلسلہ) کے لئے مختص کیا گیا ہے۔

(الف) اشتراک $A \cup B$ (ب) تقاطع $A \cap B$

شکل 24.4: نمونی فضا S میں دو وقوعات A ، B اور (گہری سیاہی میں) ان کی اشتراک اور تقاطع کی وین شکل

ہو گا۔ایسا وقوعہ جس میں کوئی انجام نہ پایا جاتا ہو کو خالی وقوعہ[62] یا **ناممکن وقوعہ**[63] کہتے ہیں جس کو $\varnothing$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ کسی تجربہ میں A اور B کوئی دو وقوعات ہیں۔تب وہ وقوعہ جو S میں ان تمام ارکان پر مشتمل ہو جو A یا B یا دونوں میں پائے جاتے ہوں کو A اور B کا **اشتراک**[64] کہلاتا ہے جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

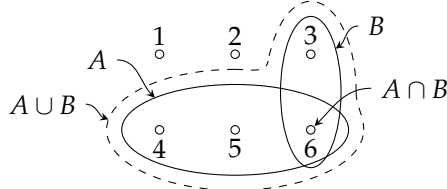
$$A \cup B$$

وہ وقوعہ جو S میں ان تمام ارکان پر مشتمل ہو جو A اور B دونوں میں پائے جاتے ہوں کو A اور B کا **تقاطع**[65] کہلاتا ہے جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔شکل 24.4 میں اشتراک اور تقاطع کو وین شکل پر دکھایا گیا ہے۔

$$A \cap B$$

اگر A اور B میں کوئی وقوعہ مشترک نہ ہو تب $A \cup B = \varnothing$ ہو گا اور ہم کہیں گے کہ A اور B **بے ربط وقوع**[66] یا **باہمی بلا شرکت وقوعہ**[67] ہیں۔

مثال کے طور پر مثال 24.2 میں $B \cap C = \varnothing$ ہے جبکہ $B \cup C$ ایک یا دو عیب دار نلکیاں ہیں۔

empty event[62]
impossible event[63]
union[64]
intersection[65]
disjoint events[66]
mutually exclusive events[67]

شکل 24.5: وین شکل برائے مثال 24.3

مثال 24.3: پانسہ پھینکنے کے ایک تجربہ میں درج ذیل وقوعہ

A : 4 سے چھوٹا عدد نہ ہو

B : 3 سے قابل تقسیم عدد ہو

کا اشتراک $A \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$ اور تقاطع $A \cap B = \{6\}$ ہو گا (شکل 24.5)۔ □

اگر وقوعہ A کے تمام ارکان وقوعہ B میں پائے جاتے ہوں تب A کو B کا **ذیلی وقوعہ**[68] کہتے ہیں جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$A \subset B \quad \text{یا} \quad B \supset A$$

ظاہر ہے کہ $A \subset B$ کی صورت میں اگر B واقع پذیر ہو تب لازماً A بھی وقوع پذیر ہو گا۔ مثال کے طور پر وقوعہ $D = \{4, 6\}$ پانسہ کے جفت نتائج کے وقوعہ $E = \{2, 4, 6\}$ کا ذیلی وقوعہ ہے۔

فرض کریں کہ نمونی فضا S میں کئی وقوعات $A_1, \cdots, A_m$ ہیں۔ تب ان m وقوعات میں سے ایک میں یا ایک سے زیادہ میں پائے جانے والے تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ان m وقوعات کا **اشتراک** ہو گا جس کو

$$\bigcup_{j=1}^{m} A_j \quad \text{یا مختصراً} \quad A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$$

لکھا جاتا ہے۔ ان تمام وقوعات میں پائے جانے والے ارکان پر مشتمل وقوعہ $A_1, \cdots, A_m$ کا **تقاطع** ہو گا جس کو

$$\bigcap_{j=1}^{m} A_j \quad \text{یا مختصراً} \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m$$

[68] subevent

لکھا جاتا ہے۔

زیادہ عمومی طور پر فرض کریں کہ S میں لا متناہی ارکان $A_1, \cdots, A_m, \cdots$ پائے جاتے ہیں۔ تب اشتراک

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{یا مختصراً} \quad A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

ان تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ہو گا جو کم سے کم کسی ایک مذکورہ بالا وقوعہ میں پائے جاتے ہوں۔ اسی طرح تقاطع

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{یا مختصراً} \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

ان تمام ارکان پر مشتمل وقوعہ ہو گا جو مذکورہ بالا تمام وقوعہ میں پائے جاتے ہوں۔

اگر وقوعات $A_1, \cdots, A_m, \cdots$ یوں ہوں کہ ان میں سے کسی ایک کا واقع ہونے سے باقی کسی وقوعہ کا واقع ہونا ناممکن ہو تب کسی بھی $j \neq k$ کے لئے $A_j \cap A_k = \varnothing$ ہو گا اور ایسی وقوعات کو **بے ربط وقوعات** یا **باہمی بلا شرکت وقوعات** کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر مثال 24.2 میں A, B, C بے ربط وقوعات ہیں۔

فرض کریں کہ ہم بلا منصوبہ تجربہ n مرتبہ کرتے ہوئے n قیمتوں پر مشتمل نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ ان n کوششوں میں وقوعہ A اور وقوعہ B کے اضافی تعدد بالترتیب $\tilde{f}(A)$ اور $\tilde{f}(B)$ ہیں۔ تب وقوعہ $A \cup B$ کی اضافی تعدد

$$\tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B) - \tilde{f}(A \cap B) \tag{24.9}$$

ہو گی۔ اگر A اور B باہمی بلا شرکت ہوں تب $\tilde{f}(A \cap B) = 0$ اور

$$\tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B) \tag{24.10}$$

ہو گا۔ یہ کلیات شکل 24.4 میں دکھائے گئے وین شکل سے صاف ظاہر ہیں۔ ان کا با ضابطہ ثبوت آپ سے سوال 24.34 میں مانگا گیا ہے۔

سوالات

سوال 24.30: دو سکے پھینکنے کے نمونی فضا کا ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.31: پانسہ کی جوڑی ایک مرتبہ پھینکی جاتی ہے۔اس تجربہ کا نمونی فضا بنائیں جس میں تمام ارکان ہوں۔اس شکل پر درج ذیل وقوعات کی نشاندہی کریں۔ (الف) دونوں یکساں عدد ہیں۔ (ب) دونوں اعداد کا مجموعہ 7 سے زیادہ ہے۔ (پ) دونوں اعداد کا مجموعہ 5 ہے۔

سوال 24.32: تین برقیاتی پرزوں کا عرصہ زندگی کا نمونی فضا تلاش کریں۔
جواب: غیر منفی اعداد کے تمام مرتب تین اعداد کا فضا۔

سوال 24.33: ایک تجربہ میں چادر میں سوراخ کر کے سوراخ کا قطر ناپا جاتا ہے۔سوراخ کا قطر 2.9 cm اور 3.1 cm کے بیچ ہے۔ E کا متمم تلاش کریں۔

سوال 24.34: مساوات 24.9 کو ثابت کریں۔
جواب: $A \cup B$ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب $A \cap B$ یا $A \cap B^C$ یا $A^C \cap B$ ہو۔ یہ تینوں باہمی بلا شرکت ہیں۔فرض کریں کہ نمونہ میں متعلقہ مطلق تعدد n_1 ، n_2 ، n_3 ہو۔ تب $\tilde{f}(A) = \frac{n_1+n_2}{n}$ ، $\tilde{f}(B) = \frac{n_1+n_3}{n}$ ، $\tilde{f}(A \cap B) = \frac{n_1}{n}$ ، $\tilde{f}(A \cup B) = \frac{n_1+n_2+n_3}{n}$ ہوں گے۔ان سے مساوات 24.9 حاصل ہوتا ہے۔

سوال 24.35: ایک ڈبیا میں 20 قلم ہیں جن میں سے 10 قلم بے عیب ہیں۔ 8 قلموں میں عیب A ، 5 قلموں میں عیب B اور 3 قلموں میں دونوں عیب پائے جاتے ہیں۔ فرض کریں کہ بلا منصوبہ ایک قلم نکالا جاتا ہے۔متعلقہ نمونی فضا S کی وین شکل بنائیں جس میں A قسم کے عیب کا وقوعہ E_A اور B قسم کے عیب کا وقوعہ E_B دکھایا گیا ہو۔ مزید $E_A \cap E_B$ ، $E_A \cap E_B^C$ ، $E_A^C \cap E_B$ ، $E_A^C \cap E_B^C$ ، $E_A \cup E_B$ ، $E_A^C \cup E_B$ ، $E_A \cup E_B^C$ ، $E_A^C \cup E_B^C$ بھی دکھائیں۔ہر وقوعہ میں انجام کی تعداد بتائیں۔

سوال 24.36: وین شکل کی مدد سے درج ذیل قواعد کو پرکھیں۔

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

جدول 24.6: سکہ پھینکنے کے نتائج

تجربہ کرنے والا	جتنی مرتبہ سکہ پھینکا گیا	جتنی مرتبہ شیر حاصل ہوا	شیر کی اضافی تعدد
امجد	4040	2048	0.5069
مشرف	12 000	6019	0.5016
مشرف	24 000	12 012	0.5005

سوال 24.37: **قوانین ڈی مارگن** وین اشکال بناتے ہوئے درج ذیل ڈی مارگن قوانین[69] کی تصدیق کریں۔

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

سوال 24.38: **متمم** کی تعریف سے درج ذیل اخذ کریں جہاں نمونی فضا S کا A کوئی ذیلی سلسلہ ہے۔

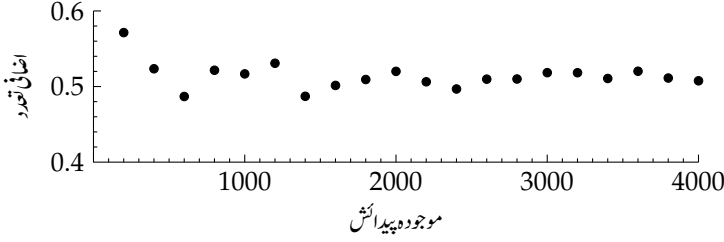
$$(A^C)^C = A, \quad S^C = \varnothing, \quad \varnothing^C = S, \quad A \cup A^C = S, \quad A \cap A^C = \varnothing$$

سوال 24.39: وین شکل استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $A \subset B$ صرف اور صرف تب ہو گا جب $A \cup B = B$ ہو۔ $A \subset B$ کے لئے $A \cap B$ کی صورت میں شرط تلاش کریں۔

24.5 احتمال

تجربہ سے ثابت ہوتا ہے کہ عموماً بلا منصوبہ تجربات کی اضافی تعدد میں شماریاتی یکسانیت پائی جاتی ہے۔یعنی ایسے تجربہ کے مختلف لمبی تسلسل میں کسی وقوعہ کے مطابقتی اضافی تعدد تقریباً ایک جیسے ہوں گے۔اس کی مثالیں جدول 24.6 اور شکل 24.6 میں دکھائی گئی ہیں۔(سکہ پھینکنے سے شیر یا خط حاصل ہوتا ہے۔) شکل 24.6 میں یوں معلوم ہوتا ہے کہ جیسے جیسے لڑکوں کی تعداد بڑھتی ہے ویسے ویسے لڑکوں کی فی صد میں اتر چڑھاو کم ہوتی جاتی ہے۔عیب دار اشیاء کا فی صد بھی ایسا ہی رویہ رکھتا ہے اور اس طرح کے دیگر مثال بھی دیے جا سکتے ہیں۔

چونکہ عموماً بلا منصوبہ تجربات میں شماریاتی یکسانیت پائی جاتی ہے ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ ایسے تجربہ میں وقوعہ E کے لئے ایسا عدد $P(E)$ پایا جاتا ہے کہ تجربہ بہت زیادہ مرتبہ سرانجام دینے سے E کا اضافی تعدد تخمیناً $P(E)$

[69] De Morgan's laws

شکل 24.6: وقوعہ "لڑکے کی پیدائش"

ہو گا۔ہم $P(E)$ کو بلا منصوبہ تجربہ میں E کا **احتمال**[70] کہتے ہیں۔دھیان رہے کہ یہ عدد E کی **مطلق خاصیت** نہیں ہے بلکہ کسی نمونی فضا S یعنی کسی بلا منصوبہ تجربہ سے **متعلق** ہے۔

جب ہم کہتے ہیں کہ E کا احتمال $P(E)$ ہے، اس سے ہمارا مطلب یہ ہے کہ اگر اس تجربہ کو بہت زیادہ مرتبہ سرانجام دیا جائے تب اضافی تعدد $\tilde{f}(E)$ **عملی طور پر لازماً** $P(E)$ کے تخمیناً برابر ہو گا۔ (یہاں "تخمیناً برابر" کو ہم نے "ٹھیک برابر" بنانا ہو گا۔اس کے لئے ہمیں حصہ 24.10 تک انتظار کرنا ہو گا۔)

متعارف کردہ احتمال یوں تجربی اضافی تعدد سے وابستہ ہے۔اس طرح ضروری ہے کہ یہ اضافی تعدد کی چند بنیادی خواص رکھتا ہو۔یہ خواص مسئلہ 24.1، مسئلہ 24.2 اور مساوات 24.10 سے اخذ کیے جا سکتے ہیں جنہیں **حسابی احتمال کے مسلمات** کہتے ہیں۔

حسابی احتمال کے مسلمات

- (الف) اگر نمونی فضا S میں E ایک وقوعہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$0 \le P(E) \le 1 \tag{24.11}$$

- (ب) تمام نمونی فضا کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$P(S) = 1 \tag{24.12}$$

[70] probability

• (پ) اگر A اور B باہمی بلا شرکت وقوعات (حصہ 24.4) ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{24.13}$$

لا متناہی نمونی فضا کی صورت میں ہمیں مسلمہ-پ کی جگہ مسلمہ-پ* استعمال کرنا ہو گا۔

• (پ*) اگر E_1، E_2، $\cdots$ باہمی بلا شرکت وقوعات ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots \tag{24.13*}$$

مسلمہ-پ سے الکراجی ماخوذ کے ذریعہ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.3: **(قاعدہ جمع برائے باہمی بلا شرکت وقوعات)**
اگر E_1، $\cdots$، E_m باہمی بلا شرکت ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_m) \tag{24.14}$$

آپ مساوات 24.9 کا درج ذیل مماثل ثابت کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 24.4: **(قاعدہ جمع برائے صوابدیدی وقوعات)**
نمونی فضا S میں وقوعات A اور B کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{24.15}$$

مزید وقوعہ E اور اس کا متمم وقوعہ E^C (حصہ 24.4) بلا شرکت ہیں لہٰذا $E \cup E^C = S$ ہو گا۔ یوں مسلمہ-ب اور پ سے

$$P(E \cup E^C) = P(E) + P(E^C) = 1$$

حاصل ہو گا جس سے درج ذیل اخذ ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.5: (قاعدہ اتمام)
نمونی فضا S میں وقوعہ E اور اس کے متمم وقوعہ E^C کے احتمال کا تعلق درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$P(E) = 1 - P(E^C) \tag{24.16}$$

اس کلیہ کو وہاں استعمال کیا جا سکتا ہے جہاں $P(E^C)$ کا حساب $P(E)$ کے حساب سے زیادہ آسان ہو۔ مثال 24.5 میں اس کی استعمال دکھائی جائے گی۔

ہم نمونی فضا S میں وقوعات کے احتمال کی قیمت کس طرح مقرر کر سکتے ہیں؟

اگر S متناہی ہو اور k ارکان پر مشتمل ہو اور تجربہ سے ظاہر ہوتا ہو کہ ان k انجام کا امکان ایک جیسا ہے تب ہم ہر انجام کے احتمال کو یکساں قیمت مختص کر سکتے ہیں اور مسلمہ۔ب کے تحت یہ احتمال لازماً $\frac{1}{k}$ ہو گا۔ اس صورت میں احتمال کا حساب، وقوعات کے ارکان کی گنتی کے مترادف ہو گا۔

مثال 24.4: منصفانہ پانسہ
منصفانہ پانسہ سے مراد یکساں خاصیت اور بالکل مربع شکل کا پانسہ ہے۔ پانسہ پھینکنے کے تجربہ میں $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ہے۔ یوں $P(1) = \frac{1}{6}$ ، $P(2) = \frac{1}{6}$ ، $\cdots$ ، $P(6) = \frac{1}{6}$ ہو گا۔ اس سے اور مسئلہ 24.3 سے ہم دیکھتے ہیں کہ

وقوعہ جس میں بالائی سطح پر جفت نقطے ہوں : A

کا احتمال $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{2}$ ہو گا۔ اسی طرح

وقوعہ جس میں بالائی سطح پر 4 نقطوں سے زیادہ نقطے ہوں : B

کا احتمال $P(B) = P(5) + P(6) = \frac{1}{3}$ ہو گا، وغیرہ، وغیرہ۔ زیادہ پیچیدہ صورتیں اگلے حصے میں پیش کی جائیں گی۔ □

مثال 24.5: سکہ اچھالنا
پانچ سکے ایک ساتھ اچھالے جاتے ہیں۔ کم از کم ایک خط حاصل ہونے کا احتمال تلاش کریں۔

حل: چونکہ ہر ایک سکہ خط یا شیر دے سکتا ہے لہٰذا نمونی فضا $2^5 = 32$ ارکان پر مشتمل ہے۔منصفانہ سکہ کی صورت میں ہر انجام کو ایک جیسا احتمال $\frac{1}{32}$ مختص کیا جا سکتا ہے۔تب وقوعہ A^C جس میں کوئی بھی خط حاصل نہ ہو صرف 1 رکن پر مشتمل ہو گا لہٰذا $P(A^C) = \frac{1}{32}$ ہو گا۔اس طرح $P(A) = 1 - P(A^C) = \frac{31}{32}$ حاصل ہوتا ہے۔ □

اگر تجربہ کی نوعیت سے ایسا ظاہر نہ ہو کہ متناہی انجام یکساں برابر امکان رکھتے ہیں یا اگر نمونی فضا متناہی نہ ہو تب، حسابی احتمال کے مسلمات پر پورا اترتے ہوئے، ہم لمبی تواتر میں کوشش دہرا کر اضافی تعدد کو استعمال کرتے ہوئے احتمال کی قیمتیں مختص کرتے ہیں۔

اس طرح ہمیں تخمینی قیمتیں حاصل ہوں گی لیکن اس سے کوئی فرق نہیں پڑے گا۔کلاسیکی طبیعیات میں ہمیں عموماً ایسی صورت حال کا سامنا ہوتا ہے مثلاً ہم جانتے ہیں کہ مادہ کی کوئی کمیت ہوتی ہے لیکن اس کمیت کی ٹھیک قیمت جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ نظریہ بنانے میں یہ رکاوٹ پیدا نہیں کرتی ہے۔

اگر ہمیں شک ہو کہ ہم نے درست طریقہ سے احتمال کی قیمتیں مختص نہیں کی ہیں تب ہم شماریاتی پرکھ کا سہارا لے سکتے ہیں جس پر حصہ 24.18 میں غور کیا جائے گا۔

عموماً یہ جانتے ہوئے کہ وقوعہ A ہو چکا ہے ہمیں وقوعہ B کا احتمال درکار ہو گا۔اس کو دیے گیے A کی صورت میں B کا مشروط احتمال[71] کہتے ہیں جس کو $P(B|A)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ایسی صورت میں A بطور نئی (تخفیف شدہ) نمونی فضا کردار ادا کرتا ہے اور یہ احتمال $P(A)$ کا وہ (کسری) حصہ ہو گا جو $A \cap B$ کا مطابقتی ہو۔یوں

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad [P(A) \neq 0] \tag{24.17}$$

ہو گا۔اسی طرح دیے گیے B کی صورت میں A کا مشروط احتمال

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad [P(B) \neq 0] \tag{24.18}$$

ہو گا۔

مساوات 24.17 اور مساوات 24.18 کو $P(A \cap B)$ کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

[71] conditional probability

مسئلہ 24.6: **قاعدہ ضرب**
اگر نمونی فضا S میں A اور B وقوعات ہوں اور $P(A) \neq 0$ اور $P(B) \neq 0$ ہو تب

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \tag{24.19}$$

ہو گا۔

اگر A اور B ایسے وقوعات ہوں کہ

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{24.20}$$

ہو تب انہیں **غیر تابع وقوعات**[72] کہتے ہیں۔اب اگر $P(A) \neq 0$ اور $P(B) \neq 0$ ہوں تب مساوات 24.17، مساوات 24.18 اور مساوات 24.19 کے تحت

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B)$$

ہوں گے جس کا مطلب ہے کہ A کا احتمال B کے انجام یا غیر انجام پر منحصر نہیں ہو گا اور اسی طرح B کا احتمال A کے انجام یا غیر انجام پر منحصر نہیں ہو گا۔

اسی طرح m وقوعات $A_1, \cdots, A_m$ اس صورت غیر تابع ہوں گے جب کسی بھی k وقوعات $A_1, \cdots, A_k$ (جہاں $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq m$ اور $k = 2, 3, \cdots, m$ ہیں) کے لئے درج ذیل ہو۔

$$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_k}) \tag{24.21}$$

دھیان کریں کہ چیزوں کے سلسلہ سے چیز نکالنے، یعنی آبادی سے نمونہ حاصل کرنے، کے دو طریقے پائے جاتے ہیں۔

- **نمونہ واپس رکھتے ہوئے نمونے کا حصول۔** ہم کل سے جس چیز کو بلا منصوبہ نکالتے ہیں، اسی چیز کو واپس کل میں رکھ کر کل کو اچھی طرح گڈ مڈ کرتے ہیں۔اس کے بعد اگلا نمونہ نکالا جاتا ہے۔
- **نمونہ واپس نہ رکھتے ہوئے نمونے کا حصول۔** ہم نمونہ نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔

---

[72] independent events

مثال 24.6: واپس رکھتے ہوئے اور بغیر واپس رکھتے ہوئے نمونے کا حصول ایک ڈبیا میں 10 پیچ پائے جاتے ہیں جن میں سے 3 عیب دار ہیں۔دو پیچ بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔دونوں پیچ بے عیب ہونے کا احتمال تلاش کریں۔ہم درج ذیل وقوعات پر غور کرتے ہیں۔

A : پہلا نکالا گیا پیچ بے عیب ہے۔
B : دوسرا نکالا گیا پیچ بے عیب ہے۔

چونکہ 10 میں سے 7 پیچ بے عیب ہیں اور ہم بلا منصوبہ پیچ نکالتے ہیں لہٰذا ہر پیچ کا نکالے جانے کا امکان $\frac{1}{10}$ ہے۔یوں $P(A) = \frac{7}{10}$ ہو گا۔اگر ہم اس پیچ کو واپس ڈبیا میں رکھ دیں تب دوسری مرتبہ پیچ نکالنے میں اور پہلی مرتبہ پیچ نکالنے میں کوئی فرق نہیں ہو گا لہٰذا $P(B) = \frac{7}{10}$ ہو گا۔یہ وقوعات غیر تابع ہیں اور

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.7 \cdot 0.7 = 0.49 = 49\,\%$$

ہو گا۔اس کے برعکس اگر ہم نمونہ واپس نہ رکھیں تب A وقوع پذیر ہونے کے بعد دوسری مرتبہ ڈبیا میں کل 9 پیچ ہوں گے جن میں سے 3 عیب دار ہیں لہٰذا $P(B|A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ہو گا۔مسئلہ 24.6 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$P(A \cap B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \approx 47\,\%$$

□

سوالات

سوال 24.40: 5 منصفانہ سکے اچھال کر کم سے کم 1 خط حاصل کرنے کا کیا احتمال ہے؟
جواب: $\frac{31}{32}$

سوال 24.41: تین منصفانہ پانسہ اچھالے جاتے ہیں۔وقوعہ E جس میں کم از کم دو اعداد مختلف حاصل ہوتے ہیں کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.42: 100 پیچ کی کھیپ میں 10 عیب دار ہیں۔اس کھیپ سے 3 پیچ بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔(الف) بغیر واپس رکھے، (ب) واپس رکھتے ہوئے، تینوں پیچ بے عیب ہونے کا احتمال تلاش کریں۔
جواب: (الف) $0.9^3 = 72.9\,\%$ ، (ب) $\frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{88}{98} = 72.65\,\%$

سوال 24.43: تین برتن ہیں اور ہر برتن میں 5 مرچ ہیں جن پر 1 تا 5 لکھا گیا ہے۔ہر برتن سے ایک مرچ نکالا جاتا ہے۔وقوعہ E جس میں نکالے گئے مرچ پر لکھے اعداد کا مجموعہ 3 سے زیادہ ہو کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.44: 100 لوہے کے سلاخوں کے جتھا میں 25 سلاخ زیادہ لمبے، 25 کم لمبے اور 50 صحیح لمبائی کے ہیں۔ اگر 2 سلاخ بلا منصوبہ نکالے جائیں اور انہیں واپس نہ رکھا جائے تب (الف) دونوں ٹھیک لمبائی کے، (ب) ایک ٹھیک لمبائی کا، (پ) دونوں غلط لمبائی کے، (ت) دو کم لمبائی کے سلاخ نکالنے کے احتمال تلاش کریں۔
جواب: (الف) 24.75 %، (ب) 50.5 %، (پ) 24.75 %، (ت) 6.06 %

سوال 24.45: کافی عرصہ سے ایک کارخانے میں گلاس بنائے جا رہے ہیں جن میں عیب دار گلاسوں کی شرح برقرار 2 % ہے۔ ہر آدھا گھنٹہ بعد دو گلاس نکال کر پرکھے جاتے ہیں۔اس وقوعہ کا کیا احتمال ہے کہ (الف) دونوں گلاس بے عیب ہوں، (ب) ایک گلاس بے عیب ہو، (پ) دونوں گلاس عیب دار ہوں؟تینوں صورتوں کے احتمال کا مجموعہ کیا ہے؟

سوال 24.46: ایک ڈیزل انجن سے برقی جنریٹر چلایا جاتا ہے۔ 30 دن کے عرصہ میں ڈیزل انجن میں مرمت کی ضرورت کا احتمال 5 % جبکہ جنریٹر میں مرمت کی ضرورت کا احتمال 6 % ہے۔کسی مخصوص دورانیہ میں دونوں کے مرمت کی ضرورت کا احتمال کیا ہو گا؟
جواب: 10.7 %

سوال 24.47: کسی مشین میں ہوا کا دباو خود کار نظام سے قابو کیا جاتا ہے۔یہ خود کار نظام 6 ٹرانزسٹر[73] پر مبنی ہے۔کسی دورانیہ میں ہر ایک ٹرانزسٹر کے خراب ہونے کا احتمال 0.05 ہے۔خود کار نظام صرف اس صورت کام کر سکتا ہے جب تمام ٹرانزسٹر ٹھیک ہوں۔کسی دورانیہ میں خود کار نظام کے خراب ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.48: ایک ڈبیا میں 100 پیچ ہیں جن میں سے 10 پیچوں میں A قسم کا عیب، 5 میں B قسم کا عیب اور 2 میں دونوں اقسام کے عیب پائے جاتے ہیں۔پہلے نکالے گئے پیچ میں A قسم کا عیب پایا جاتا ہے۔اس پیچ میں B قسم کے عیب کا احتمال کیا ہو گا؟
جواب: $P(E_B|E_A)=\frac{P(E_A\cap E_B)}{P(E_A)}=\frac{0.02}{0.10}=20\,\%$

سوال 24.49: دو منصفانہ پانسہ اچھالے جاتے ہیں۔ایک پانسہ 5 دیتا ہے۔دونوں کا مجموعہ 9 سے زیادہ ہونے کا احتمال تلاش کریں۔

---
[73] transistor

سوال 24.50: اگر $P(A^C) = 0.2$ ، $P(B) = 0.5$ اور $P(A \cap B^C) = 0.4$ ہوں تب $P(B|A \cup B^C)$ کیا ہو گا؟ (اشارہ۔ وین شکل استعمال کریں۔)
جواب: $\frac{0.4}{0.9} = 0.44$

سوال 24.51: مسئلہ 24.4 کو ثابت کریں۔

سوال 24.52: مسئلہ 24.3 کو ثابت کریں۔

سوال 24.53: مسئلہ 24.6 کو وسعت دیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

سوال 24.54: دکھائیں کہ اگر A کا ذیلی سلسلہ B ہو تب $P(B) \le P(A)$ ہو گا۔
جواب: $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C) = B \cup (A \cap B^C)$ ہے جبکہ مسلمہ-پ سے $P(A) = P(B) + P(A \cap B^C) \ge P(B)$ اخذ کیا جا سکتا ہے چونکہ $P(A \cap B^C) \ge 0$ ہے۔

24.6 مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات

گزشتہ حصہ سے ہم جانتے ہیں کہ k مساوی انجام پر مشتمل متناہی نمونی فضا S میں ہر انجام کا احتمال $\frac{1}{k}$ ہے اور وقوعہ A کا احتمال حاصل کرنے کی خاطر ہم A وقوعات کو گنتے ہیں۔یوں اگر وقوعہ m مرتبہ سرانجام ہو تب $P(A) = \frac{m}{k}$ ہو گا۔انجام کی گنتی کے لئے درج ذیل کلیات مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

فرض کریں کہ چیزوں یا ارکان کی تعداد n ہے۔ انہیں کسی بھی ترتیب سے ایک صف میں رکھا جا سکتا ہے۔ایسی ہر ترتیب ان چیزوں کی ایک مرتب اجتماع[74] کہلاتی ہے۔

مسئلہ 24.7: مرتب اجتماعات
n مختلف چیزوں کی مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہو گی جہاں تمام چیزیں مرتب اجتماعات میں شامل ہیں۔

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \qquad (24.22)$$

اس کو "عدد ضربیہ n " پڑھیں

[74] permutation

مرتب اجتماع میں پہلی جگہ کو n مختلف طریقوں سے پر کیا جا سکتا ہے۔ پہلی جگہ پر کرنے کے بعد $n-1$ ارکان رہ جاتے ہیں لہٰذا دوسری جگہ کو $n-1$ مختلف طریقوں سے پر کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح چلتے ہوئے درج ذیل نتیجہ حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.8: مرتب اجتماعات
اگر n چیزوں کو c مختلف جماعتوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہو جہاں ہر ایک جماعت میں تمام چیزیں بالکل یکساں ہوں جبکہ ہر جماعت میں چیزیں دوسری تمام جماعتوں کی چیزوں سے مختلف ہوں تب ان چیزوں کی مرتب اجتماعات کی تعداد

$$\frac{n!}{n_1 1 n_2! \cdots n_c!} \qquad (n_! + n_2 + \cdots + n_c = n) \tag{24.23}$$

ہو گی جہاں تمام چیزیں لی گئی ہیں اور j ویں جماعت میں چیزوں کی تعداد n_j ہے۔

n چیزوں سے ایک وقت میں k چیزیں منتخب کرنے سے ایسی مرتب اجتماعات حاصل ہوں گی جن میں صرف k چیزیں شامل ہوں گی۔ایک ہی k ارکان کی دو مرتب اجتماعات جن میں ارکان کی ترتیب مختلف ہو، تعریف کی رو، سے مختلف مرتب اجتماعات ہوں گی۔ مثال کے طور پر تین حروف a, b, c میں سے ایک وقت دو حروف منتخب کرتے ہوئے ab ، ac ، bc ، ba ، ca ، cb مرتب اجتماعات ملتی ہیں۔

n چیزوں میں سے k چیزوں کی مرتب اجتماعات، جہاں چیز واپس رکھی جائے، حاصل کرتے ہوئے کسی بھی چیز کو پہلی مقام پر رکھ کر، دوسری جگہ کوئی بھی چیز بشمول پہلی چیز رکھی جا سکتی ہے۔اسی طرح باقی جگہ پر کیے جاتے ہیں۔مثال کے طور پر a, b, c میں سے ایک وقت میں 2 حروف منتخب کر کے واپس رکھتے ہوئے کل $3^2 = 9$ مرتب اجتماعات حاصل ہوں گی جس میں مذکورہ بالا 6 مرتب اجتماعات اور aa ، bb ، cc شامل ہیں۔ آپ درج ذیل مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں (سوال 24.63)۔

مسئلہ 24.9: مرتب اجتماعات
بغیر واپس رکھے، n مختلف چیزوں میں سے ایک وقت میں k چیزیں منتخب کرتے ہوئے مرتب اجتماعات کی تعداد

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{24.24}$$

حاصل ہو گی جبکہ منتخب چیز واپس رکھتے ہوئے مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$n^k \tag{24.24*}$$

مرتب اجتماعات (کی تعداد) میں نا صرف چیزیں اہمیت رکھتی ہیں بلکہ ان چیزوں کی ترتیب بھی اہمیت رکھتی ہے۔اس کے برعکس دی گئے چیزوں کے غیر مرتب اجتماعات[75] سے مراد ایک یا ایک سے زیادہ چیزوں کی وہ انتخاب ہے جس میں چیزوں کی ترتیب کو رد کیا جاتا ہے۔دو قسم کے غیر ترتیبی اجتماعات پائے جاتے ہیں۔

بغیر واپس رکھتے ہوئے، ایک وقت میں n چیزوں میں سے k چیزیں منتخب کرتے ہوئے سلسلے بنائے جا سکتے ہیں۔ہر سلسلہ میں k مختلف چیزیں ہوں گی اور کسی بھی دو سلسلوں میں بالکل ایک جیسی چیزیں نہیں پائی جائیں گی۔

اس کے علاوہ، چیزوں کو واپس رکھتے ہوئے، ایک وقت میں n چیزوں میں سے k چیزیں منتخب کرتے ہوئے سلسلے بنائے جا سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر 3 حروف a, b, c میں سے ایک وقت میں 2 حروف منتخب کر کے بغیر واپس رکھے ab ، ac ، bc حاصل کیے جا سکتے ہیں جبکہ چیزیں واپس رکھتے ہوئے ab ، ac ، bc ، aa ، bb ، cc حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

مسئلہ 24.10: غیر مرتب اجتماعات
بغیر واپس رکھے، n چیزوں میں سے ایک وقت میں k چیزیں منتخب کرتے ہوئے

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \tag{24.25}$$

غیر مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے جبکہ چیزیں واپس رکھتے ہوئے غیر مرتب اجتماعات کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$\binom{n+k-1}{k} \tag{24.25*}$$

مساوات 24.25 کے ساتھ منسلک فقرہ مسئلہ 24.9 کے پہلے حصے سے اخذ ہوتا ہے یعنی n چیزوں میں سے k چیزیں منتخب کرتے ہوئے ان k چیزوں کے مرتب اجتماعات $k!$ ہوں گے جن میں صرف چیزوں کی ترتیب مختلف ہو گی (مسئلہ 24.7) لیکن مسئلہ 24.10 کے پہلے فقرے کے تحت ان k چیزوں کا صرف ایک غیر مرتب اجتماع پایا جاتا ہے۔ مسئلہ 24.10 کا آخری فقرہ الکراجی ماخوذ سے حاصل کیا جا سکتا ہے (سوال 24.64)۔

[75] combinations

مثال 24.7: مسئلہ 24-7 اور مسئلہ 24-8 کا استعمال
ایک ڈبیا میں 10 مختلف قسم کے پیچ ہیں جنہیں ایک مخصوص ترتیب سے مشین میں لگایا جانا ہے۔ان پیچوں کو ڈبیا سے بلا منصوبہ نکالا جاتا ہے۔انہیں ڈبیا سے درکار ترتیب میں نکالنے کا احتمال P بہت کم (مسئلہ 24.7) یعنی

$$P = \frac{1}{10!} = \frac{1}{3\,628\,800} \approx 0.000\,03\,\%$$

ہو گا۔ اگر ڈبیا میں 6 دائیں ہاتھ اور 4 بائیں ہاتھ پیچ ہوں اور 6 دائیں ہاتھ پیچ پہلے اور 4 بائیں ہاتھ پیچ بعد میں درکار ہوں تب اس ترتیب میں پیچ نکالنے کا احتمال P (مسئلہ 24.8) درج ذیل ہو گا۔

$$P = \frac{6!4!}{10!} = \frac{1}{210} \approx 0.5\,\%$$

□

مثال 24.8: مسئلہ 24-9 کا استعمال
ایک خفی خط میں حروف کو 5 کی گروہ (الفاظ) میں لکھا جاتا ہے۔مساوات 24.24* سے ہم دیکھتے ہیں کہ کل

$$26^5 = 11\,881\,376$$

مختلف الفاظ ممکن ہیں۔ مساوات 24.24 کے تحت ایسے الفاظ جن میں ہر حرف زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ استعمال ہو کی تعداد درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{26!}{(26-5)!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\,893\,600$$

□

مثال 24.9: مسئلہ 24-10 کا استعمال
500 پیچوں میں سے 5 پیچ بلا منصوبہ منتخب کرتے ہوئے

$$\binom{500}{5} = \frac{500!}{5!\,495!} = \frac{500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot 497 \cdot 496}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 255\,244\,687\,600$$

نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

□

آئیں عدد ضربیہ تفاعل کے بار میں کچھ باتیں کریں۔صفر کا عدد ضربیہ ($0!$) کی تعریف

$$0! = 1 \tag{24.26}$$

ہے۔باقی عدد صحیح کے عدد ضربیہ درج ذیل کلیہ سے حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$(n+1)! = (n+1)n! \tag{24.27}$$

بڑی عدد کے لئے یہ کلیہ بہت بڑے اعداد دیتا ہے۔ہم بڑے عدد n کی صورت میں عموماً درج ذیل کلیہ سٹرلنگ[76] استعمال کرتے ہیں[77]

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (e = 2.718\cdots) \tag{24.28}$$

جہاں $\sim$ سے مراد یہ ہے کہ n کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہونے سے مساوات 24.28 کی دونوں ہاتھ کا تناسب 1 کے قریب تر ہو گا۔

ثنائی عددی سر[78] کی تعریف درج ذیل کلیہ ہے۔

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!} \qquad (k \geq 0, \text{عدد صحیح}) \tag{24.29}$$

شمار کنندہ میں k اجزاء ہیں۔مزید ہم درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں۔

$$\binom{a}{0} = 1 \quad \implies \quad \binom{0}{0} = 1 \tag{24.30}$$

عدد صحیح $a = n$ کے لئے مساوات 24.29 سے

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (n \geq 0,\, 0 \leq k \leq n) \tag{24.31}$$

حاصل ہو گا۔چونکہ

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1} \qquad (k \geq 0, \text{عدد صحیح}) \tag{24.32}$$

---

[76] Stirling formula
[77] انگلستانی ریاضی دان جیمس سٹرلنگ [1692-1770]
[78] binomial coefficients

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا ثنائی عددی سر کو تکرار سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔مساوات 24.29 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\binom{-m}{k} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k} \qquad (k \geq 0, \text{صحیح عدد}; m > 0) \tag{24.33}$$

متعدد دیگر کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں جن میں سے ہم

$$\sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} = \binom{n+k}{k+1} \qquad (k \geq 0, n \geq 1, \text{دونوں عدد صحیح}) \tag{24.34}$$

اور

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r} \tag{24.35}$$

پیش کرتے ہیں۔

سوالات

سوال 24.55: تمام چار اعداد $1, 2, 3, 4$ لیتے ہوئے کتنے مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے؟

سوال 24.56: تمام پانچ حروف تہجی د، ڈ، ذ، ر، ڑ لیتے ہوئے کتنے مرتب اجتماعات حاصل ہوں گے؟

سوال 24.57: دس افراد میں سے تین افراد کے کتنے پنچایت بنائی جا سکتی ہیں؟
جواب: $\binom{10}{3} = 120$

سوال 24.58: گاڑی کے نمبر پلیٹ پر دو حروف تہجی اور تین اعداد لکھ کر کتنے مختلف نمبر پلیٹ بنائے جا سکتے ہیں؟

سوال 24.59: 100 کی کھیپ سے 3 چیزوں کے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں؟
جواب: $\binom{100}{3} = 161\,700$

سوال 24.60: ایک لوٹے میں 2 سیاہ، 3 سفید، اور 4 سرخ گیند پڑے ہیں۔ہم بلا منصوبہ ایک گیند نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔اس کے بعد دوسرا گیند نکل کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں اور اسی طرح چلتے ہوئے

آخری گیند نکال کر ایک طرف رکھ دیتے ہیں۔اس کا احتمال تلاش کریں کہ پہلے 2 سیاہ، اس کے بعد 3 سفید اور آخر میں 4 سرخ گیند نکلیں۔

سوال 24.61: ہمارے پاس 6 مختلف رنگ ہیں۔ہم کتنے طریقوں سے (الف) 2 ، (ب) 3 رنگ منتخب کر سکتے ہیں؟
جواب: $15, 15$

سوال 24.62: 10 کی کھیپ میں 2 چیزیں عیب دار ہیں۔ان میں سے چار چیزوں کے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں کہ ان میں کوئی بھی چیز عیب دار نہ ہوں؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں کہ ان میں 1 چیز عیب دار ہ؟ ان میں سے چار چیزوں کے ایسے کتنے نمونے حاصل کیے جا سکتے ہیں کہ ان میں 2 چیزیں عیب دار ہوں؟

سوال 24.63: مسئلہ 24.9 ثابت کریں۔
جواب: ثبوت کا طریقہ کار وہی ہے جو مسئلہ 24.7 میں استعمال کیا گیا ہے لیکن اب n کی جگہ ہم k جگہیں پر کرتے ہیں۔اگر واپس رکھنا ممکن ہو تب k میں سے ہر ایک کو n اشیاء سے پر کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.64: مسئلہ 24.10 کا آخری فقرہ ثابت کریں۔ اشارہ۔ مساوات 24.34 استعمال کریں۔

سوال 24.65: مساوات 24.28 استعمال کرتے ہوئے $4!$ اور $8!$ کی تخمینی قیمتیں حاصل کریں۔ان تخمینی قیمتوں کا مطلق اور اضافی خلل کیا ہے؟ جواب: $39\,902,\ 400,\ 1\,\%;\quad 23.5,\ 0.5,\ 2\,\%$

سوال 24.66: ایک کھیپ سے 4 چیزوں کا نمونہ، بغیر واپس رکھے حاصل کیا جاتا ہے۔مرتب اجتماعات اور غیر مرتب اجتماعات کی تعداد کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

سوال 24.67: مساوات 24.29 سے مساوات 24.32 حاصل کریں۔

سوال 24.68: (مسئلہ ثنائی) مسئلہ ثنائی[79] کے تحت

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

---

[79] binomial theorem

ہو گا۔یوں $a^k b^{n-k}$ کا عددی سر $\binom{n}{k}$ ہے۔کیا مسئلہ 24.10 سے آپ یہ اخذ کر سکتے ہیں یا آپ سمجھتے ہیں کہ یہ محض اتفاق ہے۔

سوال 24.69: مسئلہ ثنائی (سوال 24.68) کو

$$(1+b)^p(1+b)^q = (1+b)^{p+q}$$

پر لاگو کرتے ہوئے مساوات 24.35 ثابت کریں۔

24.7 بلا منصوبہ متغیرات۔غیر مسلسل اور استمراری تقسیم

دو پانسے اچھال کر 2 تا 12 عدد صحیح مجموعہ X حاصل ہو گا لیکن اگلے اچھال میں حاصل X کی پیش گوئی نہیں کر سکتے ہیں لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ X "امکان" پر منحصر ہے۔اسی طرح اگر ہم پیچوں کی کھیپ سے 5 کا نمونہ لے کر ان کی لمبائی ناپنا چاہیں تو ہم پیش گوئی نہیں کر سکتے ہیں کہ ان میں سے کتنے عیب دار ہوں گے؛ یوں عیب دار پیچوں کی تعداد X "امکان" پر منحصر ہو گی۔

بلا منصوبہ متغیر[80] X سے مراد ایسا تفاعل ہے جس کی قیمت حقیقی اعداد اور "امکان" پر منحصر ہوں۔ بلا منصوبہ متغیر کو **امکانی متغیر**[81] بھی کہتے ہیں۔یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ تفاعل X درج ذیل خواص رکھتا ہے۔

- تجربہ کی نمونی فضا S پر X معین ہے اور اس کی قیمتیں حقیقی اعداد ہیں۔
- فرض کریں کہ a کوئی حقیقی عدد اور I کوئی وقفہ ہیں۔تب S میں ان تمام انجام کا سلسلہ جن کے لئے $X=a$ ہو کا احتمال پوری طرح معین ہو گا اور یہی کچھ S میں ان تمام انجام کے لئے درست ہو گا جن کے لئے X کی قیمت I میں ہو۔یہ احتمال حصہ 24.5 میں دی گئی مسلمات کے تحت ہوں گی۔

اگرچہ یہ تعریف عمومی ہے جس میں بہت سے تفاعل شامل ہیں، ہم دیکھیں گے کہ عملاً اہم بلا منصوبہ متغیرات کے اقسام اور ان کی مطابقتی "تقسیم احتمال" کی تعداد بہت کم ہیں۔

---

[80] random variable
[81] stochastic variable

اگر ہم بلا منصوبہ تجربہ سرانجام دیں اور عدد a کا مطابقتی وقوعہ حاصل ہو تب ہم کہتے ہیں کہ اس تجربہ کی کوشش میں بلا منصوبہ متغیر X قیمت a اختیار[82] کرتا ہے۔ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ ہم نے قیمت $X = a$ کا مشاہدہ[83] کیا۔ بجائے "عدد a کا مطابقتی وقوعہ" کہنے کے ہم مختصراً کہتے ہیں، "وقوعہ $X = a$ "۔ مطابقتی احتمال $P(X = a)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس طرح وقوعہ

$$X \text{ وقفہ } a < X < b \text{ میں کوئی قیمت اختیار کرتا ہے}$$

کا احتمال $P(a < X < b)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔وقوعہ

$$X \le x \qquad (c \text{ کے برابر یا } c \text{ سے کم قیمت } X \text{ اختیار کرتا ہے})$$

کا احتمال $P(X \le c)$ سے ظاہر کیا جائے گا اور وقوعہ

$$X > x \qquad (c \text{ سے زیادہ قیمت } X \text{ اختیار کرتا ہے})$$

کا احتمال $p(X > c)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔

مندرجہ بالا دو آخری وقوعات باہمی بلا شرکت ہیں لہٰذا حصہ 24.5 کے مسلمہ-پ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$P(X \le c) + P(X > c) = P(-\infty < X < \infty)$$

چونکہ $-\infty < X < \infty$ پورا نمونی فضا کو ظاہر کرتا ہے لہٰذا مسلمہ-ب کے تحت دایاں ہاتھ 1 کے برابر ہو گا جس سے درج ذیل اہم نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

$$P(X > c) = 1 - P(X \le c) \qquad (c \text{ اختیاری}) \tag{24.36}$$

مثال کے طور پر، اگر X وہ عدد ہو جو پانسہ اچھال کر حاصل ہوتا ہو، تب

$$P(X = 1) = \tfrac{1}{6}, \quad P(X = 2) = \tfrac{1}{6}, \quad P(1 < X < 2) = 0, \quad P(1 \le X \le 2) = \tfrac{1}{3},$$
$$P(0 \le X \le 3.2) = \tfrac{1}{2}, \quad P(X > 4) = \tfrac{1}{3}, \quad P(X \le 0.5) = 0, \quad \cdots$$

ہوں گے۔

عموماً صورتوں میں بلا منصوبہ متغیرات غیر مسلسل[84] یا استمراری[85] ہوں گے۔ان دونوں پر باری باری غور کرتے ہیں۔

بلا منصوبہ متغیر X اور اس کا مطابقتی تقسیم اس صورت غیر مسلسل کہلاتے ہیں جب X درج ذیل خواص رکھتا ہو۔

---

[82] assume
[83] observed
[84] discrete
[85] continuous

- ان قیمتوں کا تعداد جن کے لئے X کا احتمال غیر 0 ہو متناہی یا قابل شمار لامتناہی ہوں۔
- اگر وقفہ $a < X \leq b$ میں ایسا قیمت نہ پایا جاتا ہو، تب $P(a < X \leq b) = 0$ ہو گا۔

فرض کریں کہ

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \cdots$$

وہ قیمتیں ہیں جن کے لئے X کا مثبت احتمال پایا جاتا ہو اور فرض کریں کہ مطابقتی احتمال درج ذیل ہیں۔

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \cdots$$

تب $P(X = x_1) = P_1$ ، وغیرہ ہو گا۔ہم اب تفاعل

$$f(x) = \begin{cases} p_j & x = x_j \\ 0 & x \neq x_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots) \tag{24.37}$$

متعارف کرتے ہیں۔ $f(x)$ کو X کا **تفاعل احتمال**[86] کہتے ہیں۔

چونکہ $P(S) = 1$ (حصہ 24.5 مسلمہ-ب) ہے لہٰذا لازمی طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) = 1 \tag{24.38}$$

اگر ہمیں بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر X کا احتمال معلوم ہو، تب ہم کسی بھی وقفہ $a < X \leq b$ کے لحاظ سے $P(a < X \leq b$ کا حساب کر سکتے ہیں جو در حقیقت

$$P(a < X \leq b) = \sum_{a < x_j \leq b} f(x_j) = \sum_{a < x_j \leq b} p_j \tag{24.39}$$

ہو گا جو اس وقفہ میں تمام x_j کے لئے احتمال $f(x_j) = p_p$ کا مجموعہ ہے۔بند، کھلا یا لامتناہی وقفہ کے لئے صورت حال تقریباً اسی طرح ہے۔اس حقیقت کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ بلا منصوبہ متغیر X کے لئے تفاعل احتمال $f(x)$ ، **تقسیم احتمال**[87] ،یا مختصراً، **تقسیم**[88] کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔

---

[86] probability function
[87] probability distribution
[88] distribution

اگر X کوئی بلا منصوبہ متغیر ہو، جو ضروری نہیں کہ غیر مسلسل ہو، تب کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے

$$X \leq x \quad (x \text{ سے کم یا } x \text{ کے برابر کوئی بھی قیمت } X \text{ اختیار کر سکتا ہے})$$

کا مطابقتی احتمال $P(X \leq x)$ پایا جائے گا۔ ظاہر ہے کہ $P(X \leq x)$ کی قیمت x کے انتخاب پر منحصر ہو گی؛ یہ x کا تفاعل ہو گا جس کو X کا **تفاعل تقسیم**[89] کہتے[90] ہیں جس کو $F(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں

$$F(x) = P(X \leq x) \tag{24.40}$$

ہو گا۔چونکہ کسی بھی a اور $b > a$ کے لئے

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

ہے لہٰذا

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \tag{24.41}$$

ہو گا جس سے ظاہر ہے کہ X کی تقسیم کو تفاعل تقسیم یکتا طور پر تعین کرتا ہے لہٰذا اس کو احتمال کے حساب کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

فرض کریں کہ X ایک غیر مسلسل متغیر ہے۔تب ہم تفاعل تقسیم $F(x)$ کو تفاعل احتمال $f(x)$ کی صورت میں ظاہر کر سکتے ہیں۔یقیناً مساوات 24.39 ($a = -\infty$ اور $b = x$ کے ساتھ) پر کرتے ہوئے

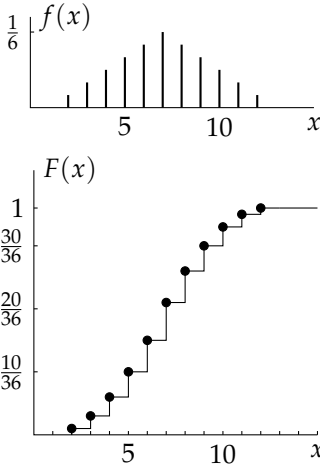
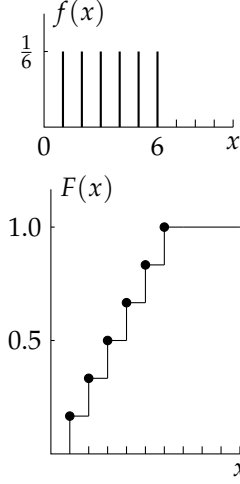
$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j) \tag{24.42}$$

حاصل ہو گا جہاں دایاں ہاتھ $x_j \leq x$ کے لئے ان تمام $f(x_j)$ کا مجموعہ ہے۔سادہ مثالیں شکل 24.7 اور شکل 24.8 میں دکھائی گئی ہیں جو دو پانسہ کو ایک بار اچھال کر حاصل ہوا ہے۔دونوں اشکال میں $f(x)$ کو ڈبہ ترسیم کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔شکل 24.7 میں $x = 1, 2, \cdots, 6$ کے لئے $f(x) = \frac{1}{6}$ اور اس کے علاوہ $f(x) = 0$ ہے جو پانسہ اچھال کر حاصل ہوئے ہیں جبکہ شکل 24.8 میں $f(x)$ کی قیمتیں درج ذیل ہیں جو دو پانسہ کا حاصل مجموعہ ہے۔

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

دو پانسہ کے تجربہ میں چونکہ $6 \cdot 6 = 36$ ممکنہ مساوی امکانی انجام ہیں لہٰذا ہر ایک کا احتمال $\frac{1}{36}$ ہے۔صرف

[89] distribution function

[90] بعض مصنف $F(x)$ کو مجموعی تفاعل تقسیم کہتے ہیں، خصوصاً وہ جو $f(x)$ کو تفاعل احتمال کہتے ہیں۔

شکل 24.7: تفاعل احتمال $f(x)$ اور تفاعل تقسیم $F(x)$

شکل 24.8: تفاعل احتمال $f(x)$ اور تفاعل تقسیم $F(x)$

$(1,1)$ کے لئے (جہاں پہلا عدد ایک پانسہ اور دوسرا عدد دوسرے پانسہ کا نتیجہ ہے) $X = 2$ ہو گا؛ اسی طرح $(1,2)$ اور $(2,1)$ انجام کے لئے $X = 3$ ہو گا؛ $(1,3)$، $(2,2)$، $(3,1)$ کے لئے $X = 4$ ہو گا، وغیرہ۔

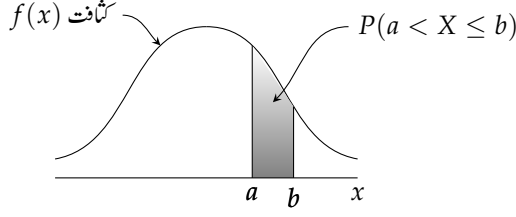
صرف وہ $x_1, x_2, x_3, \cdots$ قیمتیں جن کے لئے بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر X مثبت احتمال رکھتا ہو X کی **ممکنہ قیمتیں**[91] کہلاتی ہیں۔ جس وقفہ میں کوئی ممکنہ قیمت نہ پائی جاتی اس وقفہ میں تفاعل تقسیم $F(x)$ مستقل ہو گا۔ اس طرح $F(x)$ **سیڑھی تفاعل** (ٹکڑوں میں مستقل تفاعل) ہو گا جس میں $x = x_j$ پر اوپر رخ $p_j = P(X = x_j)$ چھلانگ پائی جائے گی جبکہ دو چھلانگوں کے بیچ یہ مستقل ہو گا۔ شکل 24.7 اور شکل 24.8 میں ایسا صاف ظاہر ہے۔

ہم اب استمراری بلا منصوبہ متغیر کی تعریف پیش کرتے ہیں اور اس پر غور کرتے ہیں۔ ایک بلا منصوبہ متغیر X اور اس کا مطابقتی تفاعل تقسیم تب **استمراری** کہلاتے ہیں جب اس کا تفاعل تقسیم $F(x) = P(X \leq x)$ مثبت ہو اور اسے درج ذیل تکمل کی صورت میں لکھنا ممکن ہو[92]

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)\,\mathrm{d}v \tag{24.43}$$

---

[91] possible values

[92] $F(x)$ استمراری ہے لیکن $F(x)$ کے استمراری ہونے سے مساوات 24.43 کی موجودگی ثابت نہیں ہوتی ہے۔ چونکہ ایسے استمراری تفاعل تقسیم جنہیں مساوات 24.43 کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو عملاً بہت کم پائے جاتے ہیں لہٰذا اصطلاحات "استمراری بلا منصوبہ متغیر" اور "استمراری تقسیم" جو بہت زیادہ استعمال کی جاتی ہیں سے پریشانی پیدا ہونے کا امکان بہت کم ہو گا۔

شکل 24.9: شکل برائے مساوات 24.45

جہاں منکمل استمراری ہے، ماسوائے v کی متناہی تعداد کے قیمتوں کے لئے۔منکمل f کو تقسیم کی کثافت احتمال یا مختصراً کثافت کہتے ہیں۔ہر اس x پر جہاں $f(x)$ استمراری ہو وہاں مساوات 24.43 کو تقسیم کرتے ہوئے

$$F'(x) = f(x)$$

حاصل ہو گا۔اس لحاظ سے تفاعل تقسیم کا تفرق کثافت ہے۔

مساوات 24.43 اور حصہ 24.5 کے مسلمہ-ب کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v = 1 \tag{24.44}$$

مساوات 24.41 اور مساوات 24.43 سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(v)\,\mathrm{d}v \tag{24.45}$$

یوں جیسا شکل 24.9 میں دکھایا گیا ہے، کثافت $f(x)$ کے منحنی کے نیچے $x = a$ اور $x = b$ کے بیچ رقبہ احتمال کے برابر ہو گا۔

ظاہر ہے کہ کسی بھی مقررہ a اور $b\,(> a)$ کے لئے وقفہ $a < X \le b$ ، $a < X < b$ اور $a \le X < b$ کے احتمال ایک جیسے ہوں گے جو غیر مسلسل صورت حال سے مختلف ہے۔

استمراری تقسیم کے مثال (سوالات) اگلے حصے کے سوالات اور آنے والے حصوں میں پیش کئے جائیں گے۔

سوالات

سوال 24.70: تفاعل احتمال $f(x)=\frac{x^2}{14}\ (x=1,2,3)$ اور تفاعل تقسیم کی ترسیم کھینچیں۔

سوال 24.71: X کا تفاعل احتمال $f(2)=\frac{1}{2}$ ، $f(3)=\frac{1}{4}$ ، $f(4)=f(5)=\frac{1}{8}$ ہے۔اس کا کیا احتمال ہے کہ X کی قیمت 4 سے کم ہو گی؟

سوال 24.72: ایک مشین کو X سالوں کے بعد تبدیل کرنا ضروری ہے۔ X کا تفاعل احتمال $f(1)=0.3$ ، $f(2)=0.4$ ، $f(3)=0.2$ ، $f(4)=0.1$ ہے۔ f اور F کو ترسیم کریں۔

سوال 24.73: کسی پٹرول پمپ میں ایک دن کی درکار پٹرول بلا منصوبہ متغیر X ہے۔ فرض کریں کہ $2000<x<6000$ کے لئے X کی کثافت $f(x)=k$ ہے ورنہ 0 ہے۔ k تلاش کریں اور تفاعل تقسیم $F(x)$ ترسیم کریں۔
جواب:

$$k=\frac{1}{4000},\quad F(x)=\begin{cases}0 & x<2000\\ \frac{x}{4000}-0.5 & 2000\le x<6000\\ 1 & x\ge 6000\end{cases}$$

سوال 24.74: $x>0$ کے لئے $f(x)=ce^{-x}$ جبکہ $x<0$ کے لئے $f(x)=0$ ہے۔ c تلاش کریں۔ f اور F کر ترسیم کریں۔

سوال 24.75: 3 پانسہ اچھال کر ان کا مجموعہ لے کر بلا منصوبہ متغیر X حاصل کیا جاتا ہے۔تفاعل احتمال $f(x)$ ترسیم کریں۔
جواب: $f(3)=\frac{1}{216}, f(4)=\frac{3}{216},\cdots$

سوال 24.76: کاغذ کے گتے کی موٹائی X ملی میٹر ہے۔ فرض کریں کہ $1.9<x<2.1$ کے لئے کثافت $f(x)=kx$ ہے ورنہ $f(x)=0$ ہے۔ k تلاش کریں۔اس کا کیا احتمال ہے کہ گتے کی موٹائی 1.95 اور 2.05 کے بیچ ہو؟

سوال 24.77: ایک سکہ کو اتنی مرتبہ (X) اچھالا جاتا ہے جب تک خط حاصل نہ ہو۔دکھائیں کہ اس تجربہ کا تفاعل احتمال $f(x)=2^{-x},\ (x=1,2,\cdots)$ ہو گا۔دکھائیں کہ $f(x)$ مساوات 24.38 کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 24.78: $0 \le x \le 1$ کے لئے $f(x) = kx^2$ ہے ورنہ $f(x) = 0$ ہے۔ k تلاش کریں۔ایسا عدد c تلاش کریں کہ $P(X \le c) = 72.9\,\%$ ہو۔

سوال 24.79: بلب کی عرصہ زندگی X بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی کثافت

$$f(x) = 6[0.25 - (x - 1.5)^2] \qquad 1 \le x \le 2$$

اور باقی x کے لئے $f(x) = 0$ ہے، جہاں $x = 1$ سے مراد 1000 گھنٹے ہیں۔ کیا احتمال ہے کہ سڑک کے اشارے پر پہلے 1200 گھنٹوں میں تین میں سے کسی ایک بھی بلب کی تبدیل کرنے کی ضرورت پیش نہ آئے؟
جواب: $P(X > 1200) = \int_{1.2}^{2} 6[0.25 - (x - 1.5)^2]\,\mathrm{d}x = 0.896^3 = 72\,\%$

سوال 24.80: کسی دکان کی فروخت اور منافع کی نسبت X ہے۔ فرض کریں کہ X کی تفاعل تقسیم $x < 2$ کے لئے $F(x) = 0$ ، $2 \le x < 3$ کے لئے $F(x) = \frac{x^2-4}{5}$ اور $x \ge 3$ کے لئے $F(x) = 1$ ہے۔ کثافت تلاش کر کے ترسیم کریں۔ X کی قیمت 2.5 ($40\,\%$ منافع) اور 5 ($20\,\%$ منافع) کے بیچ میں ہونے کا کیا احتمال ہے؟

سوال 24.81: X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے جو کوئی بھی حقیقی قیمت اختیار کر سکتا ہے۔وقوعہ $X \le b$ ، $X < b$ ، $X \ge c$ ، $X > c$ ، $b \le X \le c$ ، $b < X \le x$ کے متمم کے کیا احتمال ہوں گے؟
جواب: $X > b$, $X \ge b$, $X < c$, $X \le c$, $X < b$ یا $X > c$, $X \le b$ یا $X > c$

سوال 24.82: ایک ڈبہ میں 4 دائیں ہاتھ پیچ اور 6 بائیں ہاتھ پیچ پائے جاتے ہیں۔بغیر واپس رکھے، دو پیچ بلا منصوبہ نکالے جاتے ہیں۔نکالے گئے بائیں ہاتھ پیچوں کی تعداد X ہے۔ احتمال $P(X = 0)$ ، $P(X = 1)$ ، $P(1 < X < 2)$ $P(X \le 1)$ ، $P(X \ge 1)$ ، $P(X > 1)$ ، $P(0.5 < X < 10)$ تلاش کریں۔

سوال 24.83: دکھائیں کہ $b < c$ سے مراد $P(X \le b) \le P(X \le c)$ ہے۔

24.8 تقسیم کا اوسط اور اس کی تغیریت

تقسیم کے اوسط[93] کو μ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\text{(الف)} \quad \mu = \sum_j x_j f(x_j) \qquad \text{(غیر مسلسل تقسیم)}$$

$$\text{(ب)} \quad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x \qquad \text{(استمراری تقسیم)} \tag{24.46}$$

مساوات 24.46-الف میں زیر غور بلا منصوبہ متغیر X کا تفاعل احتمال $f(x)$ ہے اور ہم تمام ممکنہ قیمتوں (حصہ 24.7) پر مجموعہ لیتے ہیں۔ مساوات 24.46-ب میں X کی کثافت $f(x)$ ہے۔ اوسط کو X کی حسابی توقع[94] بھی کہتے ہیں جس کو $E(X)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ تعریف کی رو سے ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 24.46-الف کی تسلسل مطلق مرتکز ہو گی اور $-\infty$ سے ∞ تک $|x| f(x)$ کا تکمل موجود ہو گا۔ اگر یہ تکمل موجود نہ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ اس تقسیم کی اوسط نہیں پائی جاتی ہے؛ ایسی صورت عملی انجینئری میں شاذ و نادر پائی جاتی ہے۔

$x = c$ کے لحاظ سے ایک تقسیم کو اس صورت تشاکلی کہتے ہیں جب ہر حقیقی x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$f(c + x) = f(c - x) \tag{24.47}$$

آپ درج ذیل مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں (سوال 24.84)۔

مسئلہ 24.11: (تشاکلی تقسیم کا اوسط)
اگر ایک تقسیم $x = c$ کے لحاظ سے تشاکلی ہو اور اس کا اوسط μ ہو تب $\mu = c$ ہو گا۔

تقسیم کی تغیریت[95] کو σ^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کی تعریف درج ذیل کلیہ دیتی ہے

$$\text{(الف)} \quad \sigma^2 = \sum_j (x_j - \mu)^2 f(x_j) \qquad \text{(غیر مسلسل تقسیم)}$$

$$\text{(ب)} \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) \, \mathrm{d}x \qquad \text{(استمراری تقسیم)} \tag{24.48}$$

---

mean[93]
mathematical expectation[94]
variance[95]

جہاں تعریف کی رو سے ہم فرض کرتے ہیں کہ مساوات 24.48-الف میں دی گئی تسلسل مطلق مرتکز ہے اور مساوات 24.48-ب کا تکمل موجود ہے۔

غیر مسلسل تقسیم کی صورت میں اگر کسی ایک نقطہ پر $f(x)=1$ اور باقی ہر جگہ $f(x)=0$ ہو تب $\sigma^2=0$ ہو گا جو عملاً غیر دلچسپ صورت ہے۔اس غیر دلچسپ صورت کے علاوہ ہر صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\sigma^2>0 \tag{24.49}$$

تغیریت کا مثبت جذر معیاری انحراف[96] کہلاتا ہے جس کو σ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

بلا منصوبہ متغیر X جن قیمتوں کو اختیار کر سکتا ہے، تغیریت کو ان قیمتوں کی پھیل کی ناپ تصور کیا جا سکتا ہے۔

مثال 24.10: (اوسط اور تغیریت)
بلا منصوبہ متغیر

$$X = \text{سکہ اچھال کر شیر کا حاصل ہونا}$$

کے ممکنہ قیمتیں $X=0$ اور $X=1$ ہیں جن کا احتمال $P(X=0)=\frac{1}{2}$ اور $P(X=1)=\frac{1}{2}$ ہے۔مساوات 24.46-الف سے اوسط $\mu=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔مساوات 24.46-ب سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

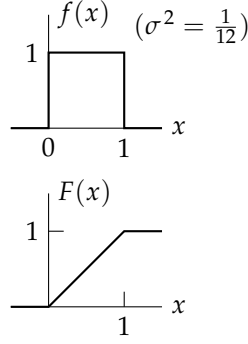
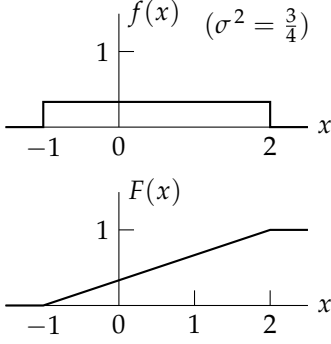
$$\sigma^2=(0-\tfrac{1}{2})^2\cdot\tfrac{1}{2}+(1-\tfrac{1}{2})^2\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{4}$$

□

مثال 24.11: یکساں تقسیم
وہ تقسیم جس کی کثافت $a<x<b$ کے لئے

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad (a<x<b \text{ جب})$$

---

[96] standard deviation

شکل 24.10: یکساں تقسیم جن کی ایک جیسی اوسط (0.5) لیکن مختلف تغیریت σ^2 ہے

اور باقی x کے لئے $f = 0$ ہو، وقفہ $a < x < b$ میں یکساں تقسیم[97] کہلاتی ہے۔ مسئلہ 24.11 یا مساوات 24.48-الف سے $\mu = \frac{a+b}{2}$ اور مساوات 24.48-ب سے تغیریت حاصل کرتے ہیں۔

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \tfrac{a+b}{2})^2 \tfrac{1}{b-a}\, \mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{12}$$

شکل 24.10 میں چند خصوصی مثالیں پیش کی گئی ہیں جو دکھاتی ہیں کہ σ^2 پھیل کی ناپ ہے۔ □

مسئلہ 24.12: (خطی تبادل)
اگر بلا منصوبہ متغیر X کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو تب بلا منصوبہ متغیر $X^* = c_1 X + c_2 \, (c_1 \neq 0)$ کی اوسط

$$\mu^* = c_1 \mu + c_2 \tag{24.50}$$

اور تغیریت

$$\sigma^{*2} = c_1^2 \sigma^2 \tag{24.51}$$

ہو گی۔

ثبوت: ہم پہلے $c_1 > 0$ فرض کرتے ہوئے مساوات 24.50 کو استمراری صورت کے لئے ثابت کرتے ہیں۔ چونکہ X محور پر چھوٹے سے وقفہ Δx کا مطابقتی احتمال (تخمیناً) $f(x)\Delta x$ ہو گا جو ہر صورت X^*

uniform distribution[97]

محور پر مطابقتی چھوٹے وقفہ $\Delta x^* = c_1 \Delta x$ پر احتمال $f^*(x^*)\Delta x^*$ کے برابر ہو گا لہٰذا x اور $x^* = c_1 x + c_2$ کے مطابقتی، X کی کثافت $f(x)$ اور X^* کی کثافت $f^*(x^*)$، تعلق $f^*(x^*) = \frac{f(x)}{c_1}$ کو مطمئن کریں گے۔ چونکہ $\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}x} = c_1$ ہے لہٰذا $\mathrm{d}x^* = c_1 \, \mathrm{d}x$ اور $f^*(x^*) \, \mathrm{d}x^* = f(x) \, \mathrm{d}x$ ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا

$$\mu^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^* f^*(x^*) \, \mathrm{d}x^* = \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 x + c_2) f(x) \, \mathrm{d}x$$
$$= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$$

جہاں آخری تکمل مساوات 24.44 کے تحت 1 کے برابر ہو گا۔ یوں مساوات 24.50 ثابت ہوتی ہے۔ چونکہ

$$x^* - \mu^* = (c_1 x + c_2) - (c_1 \mu + c_2) = c_1 x - c_1 \mu$$

ہے لہٰذا تغیریت کی تعریف سے

$$\sigma^{*2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x^* - \mu^*)^2 f^*(x^*) \, \mathrm{d}x^* = \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 x - c_1 \mu)^2 f(x) \, \mathrm{d}x = c_1^2 \sigma^2$$

حاصل ہو گا۔ $c_1 < 0$ سے نتائج تبدیل نہیں ہوتے ہیں چونکہ اس سے دو اضافی منفی کی علامتیں ملتی ہیں، ایک x میں تکمل کے رخ کی تبدیلی کی بنا (دھیان رہے کہ $x^* = -\infty$ کا مطابقتی $x = \infty$ ہے) اور دوسرا $f^*(x^*) = \frac{f(x)}{-c_1}$ کی بنا؛ یہاں $-c_1 > 0$ درکار ہو گا چونکہ کثافت غیر منفی قیمت ہے۔

غیر مسلسل کثافت کے لئے مسئلے کا ثبوت بھی بالکل ایسا ہی ہے۔

□

مساوات 24.50 اور مساوات 24.51 سے ہم درج ذیل اخذ کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 24.13: (معیاری متغیر)
اگر بلا منصوبہ متغیر X کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو، تب مطابقتی متغیر $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو گی۔

Z کو X کا مطابقتی معیاری متغیر[98] کہتے ہیں۔

اگر X کوئی بلا منصوبہ متغیر اور $g(X)$ کوئی استمراری تفاعل ہو جو تمام حقیقی X کے لئے معین ہو تب عدد

$$\text{(الف)} \quad E(g(X)) = \sum_j g(x_j)f(x_j) \qquad (\text{غیر مسلسل } X)$$
$$\text{(ب)} \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\text{استمراری } X) \tag{24.52}$$

کو $g(X)$ کی حسابی توقع[99] کہتے ہیں۔ یہاں f بالترتیب تفاعل احتمال یا کثافت ہے۔

مساوات 24.52 میں $g(X) = X^k \; (k = 1, 2, \cdots)$ لیتے ہوئے بالترتیب

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{اور} \quad E(X^k) = \sum_j x_j^k f(x_j) \tag{24.53}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ $E(X^k)$ کو X کا k واں معیار اثر[100] کہتے ہیں۔ مساوات 24.52 میں $g(X) = (X - \mu)^k$ لیتے ہوئے بالترتیب

$$E([X-\mu]^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{اور} \quad E([X-\mu]^k) = \sum_j (x_j-\mu)^k f(x_j) \tag{24.54}$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں X کے k ویں وسطی معیار اثر[101] کہتے ہیں۔ آپ درج ذیل ثابت کر سکتے ہیں۔

$$E(1) = 1 \tag{24.55}$$
$$\mu = E(X) \tag{24.56}$$
$$\sigma^2 = E([X-\mu]^2) \tag{24.57}$$

سوالات

سوال 24.84: مسئلہ 24.11 ثابت کریں۔

جواب:

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_{-\infty}^{c} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\infty}^{0} (c-x)f(c-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} (c+x)f(c+x)\,\mathrm{d}x = 2c\int_{0}^{\infty} f(c+x)\,\mathrm{d}x = c
\end{aligned}$$

standardized variable[98]
mathematical expectation[99]
kth moment[100]
kth central moment[101]

غیر مسلسل تقسیم کے لئے بھی ثبوت اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.85: ایک تقسیم کی کثافت $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\lvert x\rvert}$ ہے۔اس کی اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\mu = 0, \sigma^2 = 2$

سوال 24.86: $0 \le x \le 2$ کے لئے X کی کثافت $f(x) = 0.5x$ ہے جبکہ باقی x کے لئے $f(x) = 0$ ہے۔دکھائیں کہ X کی اوسط $\frac{4}{3}$ اور تغیریت $\frac{2}{9}$ ہے۔

سوال 24.87: $Y = -2X + 5$ کی اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔ بلا منصوبہ متغیر X سوال 24.86 میں دیا گیا ہے۔

سوال 24.88: سوال 24.86 کے X کا مطابقتی معیاری بلا منصوبہ متغیر تلاش کریں۔
جواب: $\frac{X-\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{2}{9}}}$

سوال 24.89: مسئلہ 24.12 کو غیر مسلسل صورت کے لئے ثابت کریں۔

سوال 24.90: مسئلہ 24.13 کو مساوات 24.50 اور مساوات 24.51 سے اخذ کریں۔
جواب: مساوات 24.50 اور مساوات 24.51 میں $c_1 = \frac{1}{\sigma}$ اور $c_2 = -\frac{\mu}{\sigma}$ پر کریں۔

سوال 24.91: ایک مخصوص قسم کے ٹائر بلا منصوبہ متغیر X (ہزار کلو میٹر) چلتے ہیں۔ X کی کثافت $x > 0$ کے لئے $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ ورنہ 0 ہے جہاں $\theta\ (> 0)$ مقدار معلوم ہے۔(الف) ایسے ایک ٹائر سے کتنے کلومیٹر طے کیے جا سکتے ہیں؟ (ب) اگر $\theta = 0.05$ ہو تب کم سے کم 30 000 کلومیٹر تک پہنچنے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.92: ایک کارخانے میں کیل بنائے جاتے ہیں جن کا وتر X سنٹی میٹر ہے۔فرض کریں کہ X کی کثافت $0.9 < x < 1.1$ کے لئے $f(x) = k(x-0.9)(1.1-x)$ ورنہ 0 ہے۔ k معلوم کریں، $f(x)$ کو ترسیم کریں اور μ اور σ^2 کو تلاش کریں۔
جواب: $k = 750, \mu = 1, \sigma^2 = 0.002$

سوال 24.93: سوال 24.92 میں اگر کیل کے وتر کا 1 cm سے انحراف 0.06 cm بڑھ جائے تب اس کو عیب دار تصور کیا جاتا ہے۔کتنے فی صد کیل عیب دار ہوں گے؟

سوال 24.94: ایک پٹرول پمپ کو ہر جمعرات دوپہر کے وقت پٹرول مہیا کیا جاتا ہے۔فروخت پٹرول کا حجم X ہزار لٹر ہے۔ $0 \le x \le 1$ کے لئے X کی کثافت احتمال $f(x) = 6x(1-x)$ ورنہ 0 ہے۔ اوسط اور تغیریت تلاش کریں۔
جواب: $\mu = \frac{1}{2}, \sigma^2 = \frac{1}{20}$

سوال 24.95: سوال 24.94 میں پٹرول کی ٹینکی کا حجم کتنا ہو گا اگر ایک ہفتہ میں ٹینکی خالی ہونے کا احتمال 10% ہو؟

سوال 24.96: مساوات 24.55، مساوات 24.56 اور مساوات 24.57 ثابت کریں۔

سوال 24.97: دکھائیں کہ $E(X-\mu) = 0$ اور $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$ ہوں گے۔

سوال 24.98: فرض کریں کہ X کی کثافت $0 < x < 1$ کے لئے $f(x) = 2x$ ورنہ 0 ہے۔ تمام معیار اثر تلاش کریں۔سوال 24.97 میں دیے گئے کلیہ سے σ^2 حاصل کریں۔
جواب: $E(X^k) = \frac{2}{k+2}, \sigma^2 = \frac{1}{18}$

سوال 24.99: دکھائیں کہ $E(ag(X) + bh(X)) = aE(g(X)) + bE(h(X))$ ہو گا جہاں a اور b مستقل ہیں۔

سوال 24.100: وقفہ $0 \le x \le 1$ پر یکساں تقسیم کے معیار اثر تلاش کریں۔
جواب: $E(X^k) = \frac{1}{k+1}$

سوال 24.101: **(ترچھاپن)** عدد $\gamma = \frac{1}{\sigma^3}E([X-\mu]^3)$ کو X کا ترچھاپن[102] کہتے ہیں۔اس اصطلاح کا جواز پیش کرنے کی خاطر دکھائیں کہ μ کے لحاظ سے تشاکلی X کے لئے اگر تیسرا وسطی معیار اثر موجود ہو تب یہ معیار اثر صفر ہو گا۔

سوال 24.102: $x > 0$ کے لئے کثافت تقسیم $f(x) = xe^{-x}$ ورنہ $f = 0$ کی صورت میں کثافت تقسیم کا ترچھاپن تلاش کریں۔ $f(x)$ کو ترسیم کریں۔
جواب: تکمل بالحصص لیں $\sigma^2 = 2, \gamma = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

---

[102] skewness

سوال 24.103: **(معیار اثر کا پیدا کار تفاعل)**
بلا منصوبہ غیر مسلسل یا استمراری متغیر X کے معیار اثر کا پیدا کار تفاعل درج ذیل کلیات دیتے ہیں

$$G(t) = E(e^{tX}) = \sum_j e^{tx_j} f(x_j) \quad \text{اور} \quad G(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) \, \mathrm{d}x$$

جہاں فرض کیا گیا ہے کہ مجموعہ کی علامت کے اندر اور تکمل کی علامت کے اندر تفرق لیا جا سکتا ہے۔دکھائیں کہ $E(X^k) = G^{(k)}(0)$ ہو گا اور بالخصوص $\mu = G'(0)$ ہو گا جہاں $G^{(k)}(t)$ سے مراد t کے لحاظ سے G کا k واں تفرق ہے۔

24.9 ثنائی، پوئسن، اور بیش ہندسی تقسیم

ہم اب چند مخصوص غیر مسلسل تقسیم پر غور کرتے ہیں جو شماریات کے لئے اہم ہیں۔

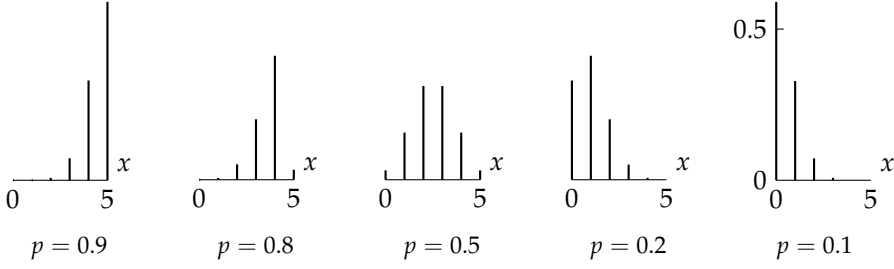
ثنائی تقسیم

ہم ایک تجربہ کو n مرتبہ بلا منصوبہ سرانجام دینے میں وقوعہ A کے واقع ہونے کی تعداد سے حاصل ثنائی تقسیم پر غور کرتے ہیں جہاں ایک کوشش میں A کا احتمال $P(A) = p$ فرض کیا جائے گا۔تب ایک کوشش میں A کے نا واقع ہونے کا احتمال $q = 1 - p$ ہو گا۔یہ تجربہ n مرتبہ سرانجام دیتے ہوئے ہم بلا منصوبہ متغیر

$$X = \text{واقع ہونے کی تعداد } A$$

پر غور کرتے ہیں۔تب X کی قیمتیں $0, 1, \cdots, n$ ہو سکتی ہیں۔ہمیں ان اعداد کے مطابقتی احتمال تلاش کرنا چاہتے ہیں۔اس مقصد کے لئے ہم ان قیمتوں میں سے کوئی ایک قیمت، مثلاً $X = x$ پر غور کرتے ہیں جس کا مطلب ہے کہ n میں سے x کوششوں میں A واقع ہوا ہے جبکہ $n - x$ کوششوں میں A واقع نہیں ہوا ہے۔یہ سب کچھ یوں

$$\underbrace{AA\cdots A}_{x \text{ مرتبہ}}\underbrace{BB\cdots B}_{n-x \text{ مرتبہ}} \tag{24.58}$$

نظر آئے گا۔یہاں $B = A^C$ ہے؛ یعنی A واقع نہیں ہوا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام کوششیں بلا منصوبہ ہے یعنی یہ ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوتی ہیں۔تب چونکہ $P(A) = p$ اور $P(B) = q$ ہیں لہٰذا

شکل 24.11: مختلف p اور $n = 5$ کے لئے مساوات 24.59 میں دی گئی ثنائی تقسیم

مساوات 24.58 کا مطابقتی احتمال

$$\underbrace{pp\cdots p}_{x \text{ مرتبہ}}\underbrace{qq\cdots q}_{n-x \text{ مرتبہ}} = p^x q^{n-x}$$

ہو گا۔ ظاہر ہے کہ x گنا A اور $n-x$ گنا B کو مختلف انداز (ترتیب) میں لکھنے کا ایک طریقہ مساوات 24.58 دیتا ہے لہٰذا مسئلہ 24.3 کے تحت $p^x q^{n-x}$ کو x گنا A اور $n-x$ گنا B کے کل مختلف انداز میں لکھنے کی تعداد سے ضرب دینے سے احتمال $P(X = x)$ حاصل ہو گا۔ ہم n کوششوں کو 1 تا n سے ظاہر کرتے ہوئے ان میں سے ان x کوششوں منتخب کرتے ہیں جن میں A واقع پذیر ہوا ہو۔ چونکہ x منتخب کرنے کی ترتیب اہمیت نہیں رکھتی ہے لہٰذا مساوات 24.25 کے تحت n میں سے x کا انتخاب $\binom{n}{x}$ مختلف انداز سے کیا جا سکتا ہے۔ یوں $X = x$ کا مطابقتی احتمال $P(X = x)$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n) \tag{24.59}$$

ہو گا جبکہ x کے کسی دوسری قیمت کے لئے $f(x) = 0$ ہو گا۔ n کوششوں میں ٹھیک x مرتبہ A واقع ہونا کا احتمال مساوات 24.59 دیتی ہے جہاں ایک کوشش میں A واقع ہونے کا احتمال p ہے اور $q = 1 - p$ ہے۔ مساوات 24.59 میں دی گئی تقسیم کو ثنائی تقسیم[103] کہتے ہیں۔ A کے واقع ہونے کو کامیابی[104] جبکہ اس کے نا واقع ہونے کو ناکامی[105] کہتے ہیں۔ p کو ایک کوشش میں کامیابی کا احتمال کہتے ہیں۔ شکل 24.11 میں $n = 5$ اور مختلف p کے لئے مساوات 24.59 ترسیم کیا گیا ہے۔

---

[103] binomial distribution
[104] success
[105] failure

ثنائی تقسیم کی اوسط (سوال 24.107)

$$\mu = np \tag{24.60}$$

اور تغیریت (سوال 24.107)

$$\sigma^2 = npq \tag{24.61}$$

ہے۔ دھیان رہے کہ $p = 0.5$ پر μ کے لحاظ سے تقسیم تشاکلی ہے۔

پوئسن تقسیم

ایسی غیر مسلسل تقسیم جس کا تفاعل احتمال درج ذیل ہو **پوئسن تقسیم**[106] کہلاتی[107] ہے۔

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \tag{24.62}$$

شکل 24.12 میں $n = 5$ اور مختلف μ کے لئے مساوات 24.62 میں دی گئی پوئسن تقسیم ترسیم کی گئی ہے۔ $p \to 0$ اور $n \to \infty$ کی صورت اوسط $\mu = np$ ایک متناہی قیمت کے قریب تر ہو گی اور ثنائی تقسیم کی تحدیدی صورت پوئسن تقسیم دیتی ہے۔ پوئسن تقسیم کی اوسط μ اور تغیریت (سوال 24.108) درج ذیل ہے۔

$$\sigma^2 = \mu \tag{24.63}$$

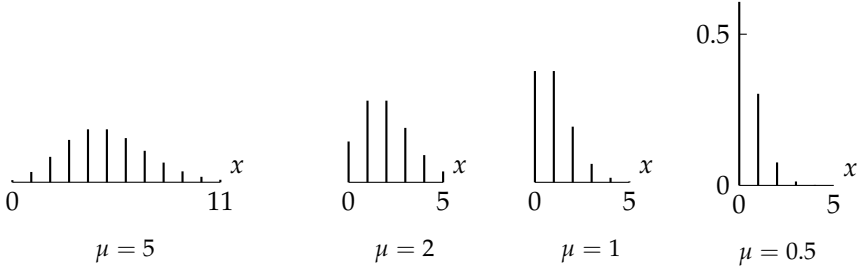
اکائی دورانیہ (وقت) میں کسی چوک سے گزرتی گاڑیوں کی تعداد، اکائی لمبائی کے تار میں عیبوں کی تعداد، کاغذ کے اکائی رقبہ میں عیبوں کی تعداد، وغیرہ پوئسن تقسیم سے حاصل کیے جاتے ہیں۔

واپس رکھ کر اور واپس نہ رکھ کر نمونے کا حصول۔ بیش ہندسی تقسیم

واپس رکھ کر نمونہ حاصل کرنے میں ثنائی تقسیم (مثال 24.6) اہم ہے۔ مثال کے طور پر ایک ڈبیا میں N پیچ ہیں جن میں سے M پیچ عیب دار ہیں۔ اگر ہم ڈبے سے ایک پیچ بلا منصوبہ نکالیں تب عیب دار پیچ کے حصول کا احتمال

$$p = \frac{M}{N}$$

[106] Poisson distribution
[107] سمیوں دنی پوسوں

$\mu = 5$ $\mu = 2$ $\mu = 1$ $\mu = 0.5$

شکل 24.12: مختلف p اور $n = 5$ کے لئے مساوات 24.62 میں دی گئی پوئسن تقسیم

ہو گا۔یوں واپس رکھ کر حاصل، x پیچوں کے نمونہ میں عیب دار پیچوں کی تعداد x ہونے کا احتمال (مساوات 24.59)

$$f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{M}{N}\right)^{x}\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n) \tag{24.64}$$

ہو گا۔واپس نہ رکھ کر حاصل نمونہ میں احتمال

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n) \tag{24.65}$$

ہو گا۔مساوات 24.65 میں دی گئی تقسیم کو **بیش ہندسی تقسیم**[108] کہتے[109] ہیں۔

مساوات 24.65 ثابت کرنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات 24.25 کے تحت

- (الف) N اشیاء میں سے n اشیاء کے انتخاب کے $\binom{N}{n}$ مختلف طریقے ہیں،
- (ب) M میں سے x عیب دار کے انتخاب کے $\binom{M}{x}$ مختلف طریقے ہیں،
- (پ) $N - M$ میں سے $n - x$ بے عیب کے انتخاب کے $\binom{N-M}{n-x}$ مختلف طریقے ہیں،

[108] hypergeometric distribution
[109] چونکہ اس تقسیم کے معیار اثر کے پیدا کار تفاعل کو بیش ہندسی تفاعل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

اور (ب) میں ہر طریقہ کے ساتھ (پ) کا ہر طریقہ لے کر، بغیر واپس رکھتے ہوئے n میں سے x عیب دار کی انتخاب کے کل طریقے حاصل ہوں گے۔چونکہ (الف) تمام وقوعات کا مجموعہ ہے اور ہم بلا منصوبہ انتخاب کرتے ہیں لہٰذا اس طرح کے ہر طریقہ کا احتمال $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ ہو گا۔یوں مساوات 24.65 ثابت ہوتا ہے۔

بیش ہندسی تقسیم کی اوسط (سوال 24.121)

$$\mu = n\frac{M}{N} \tag{24.66}$$

اور تغیریت

$$\sigma^2 = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)} \tag{24.67}$$

ہے۔

مثال 24.12: واپس رکھ کر اور نا رکھ کر نمونے کا حصول

ایک ڈبہ میں 10 تصاویر ہیں جن میں سے 3 عیب دار ہیں۔ہم بلا منصوبہ 2 تصاویر ڈبے سے نکالتے ہیں۔بلا منصوبہ متغیر

$$X = \text{نمونہ میں عیب دار کی تعداد}$$

کا تفاعل احتمال تلاش کریں۔

حل: یہاں $N = 10$ ، $M = 3$ ، $N - M = 7$ اور $n = 2$ ہیں۔واپس رکھ کر نمونہ حاصل کرتے ہوئے مساوات 24.64 کے تحت

$$f(x) = \binom{2}{x}\left(\frac{3}{10}\right)^x\left(\frac{7}{10}\right)^{2-x}, \quad f(0) = 0.49, \quad f(1) = 0.42, \quad f(2) = 0.09$$

حاصل ہوتا ہے۔ واپس نہ رکھ کر نمونہ حاصل کرتے ہوئے مساوات 24.65 سے

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{7}{2-x}}{\binom{10}{2}}, \quad f(0) = f(1) = \frac{21}{45} \approx 0.47, \quad f(2) = \frac{3}{45} \approx 0.07$$

حاصل ہوتا ہے۔ □

اگر n کے لحاظ سے N ، M اور $N - M$ بہت بڑی مقدار ہوں تب واپس رکھتے ہوئے اور واپس نہ رکھتے ہوئے حاصل کردہ نمونے تقریباً ایک جیسے ہوں گے لہٰذا ایسی صورت میں بیش ہندسی تقسیم کی جگہ $p = \frac{M}{N}$ لیتے ہوئے ثنائی تقسیم استعمال کی جا سکتی ہے، جو نسبتاً سادہ تفاعل ہے۔

یوں بہت بڑی آبادی (لامتناہی آبادی) سے، واپس رکھتے ہوئے یا واپس نہ رکھتے ہوئے، نمونہ حاصل کرتے ہوئے ثنائی تقسیم استعمال کی جا سکتی ہے۔

سوالات

سوال 24.104: چار سکے ایک ساتھ اچھالے جاتے ہیں۔بلا منصوبہ متغیر " $X =$ تعداد خط " کا تفاعل احتمال تلاش کریں؟ 0 خط، 1 خط، کم سے کم 1 خط اور زیادہ سے زیادہ 3 خط کا احتمال حاصل کریں۔
جواب: $0.0625, 0.25, 0.9375, 0.9375$

سوال 24.105: نشانے پر تیر مارنے کا امکان $10\,\%$ ہے۔ 10 تیر چلائے جاتے ہیں۔کم سے کم ایک بار نشانہ لگنے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.106: 24 گھنٹوں کے پرکھ میں $p = 1\,\%$ امکان ہے کہ ایک خاص قسم کا بلب زائل ہو جائے گا۔ایسے 10 بلبوں کا، کوئی بھی بلب خراب ہوئے بغیر، مسلسل 24 گھنٹے روشنی دینے کا احتمال کیا ہو گا۔
جواب: $0.99^{10} \approx 90.4\,\%$

سوال 24.107: مسئلہ ثنائی استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ ثنائی تقسیم کے معیار اثر کا پیدا کار تفاعل (سوال 24.103) درج ذیل ہے اور مساوات 24.60 اور مساوات 24.61 کو ثابت کریں۔

$$G(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t + q)^n$$

سوال 24.108: دکھائیں کہ پوئسن تقسیم کے معیار اثر کا پیدا کار تفاعل درج ذیل ہے اور مساوات 24.63 کو ثابت کریں۔

$$G(t) = e^{-\mu}e^{\mu e^t}$$

سوال 24.109: دکھائیں کہ $E([X-\mu]^3) = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$ ہو گا۔اس کو اور سوال 24.108 کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ پوئسن تقسیم کا ترچھاپن $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ہے جو کہتا ہے کہ μ کی بڑی قیمت کے لئے یہ تقسیم تقریباً تشاکلی ہے (شکل 24.12)۔

سوال 24.110: دکھائیں کہ پوئسن تقسیم کا تفاعل تقسیم $F(\infty) = 1$ کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 24.111: ایک ٹیلیفون تقسیم کار تختی اوسطاً 600 ٹیلیفون کے لئے کافی ہے۔ یہ ایک منٹ میں زیادہ سے زیادہ 10 نئے ٹیلیفون ملا سکتی ہے۔ پوئسن تقسیم استعمال کرتے ہوئے اس بات کا احتمال تلاش کریں کہ کسی ایک منٹ میں یہ تقسیم کار تختی ناکافی ثابت ہو گا۔

سوال 24.112: ایک کارخانے میں $50\,\Omega$ کے برقی مزاحمت پیدا کیے جاتے ہیں جن میں سے وہ مزاحمت بے عیب تصور کیے جاتے ہیں جن کی مزاحمت $45\,\Omega$ اور $55\,\Omega$ کے بیچ ہو۔ عیب دار مزاحمت کا احتمال $0.2\,\%$ ہے۔ ان مزاحمتوں کو 100 کی کھیپ میں، ضمانت کے ساتھ فروخت کیا جاتا ہے۔ تقسیم پوئسن استعمال کرتے ہوئے ایک کھیپ میں عیب دار مزاحمت نکلنے کا احتمال حاصل کریں۔
جواب: $1-e^{-0.2}=0.1813$

سوال 24.113: فرض کریں کہ ایک مشین کے پیدا کردہ پیچوں میں سے $3\,\%$ عیب دار ہوتے ہیں۔ ایک ڈبیا میں 50 پیچ بھرے جاتے ہیں۔ تقسیم پوئسن استعمال کرتے ہوئے ایک ڈبیا میں x عیب دار پیچ نکلنے کا احتمال تلاش کریں۔

سوال 24.114: ایک پل سے جمع کے دن صبح 8 تا 10 بجے فی منٹ X گاڑیاں گزرتی ہیں۔ فرض کریں کہ X کو پوئسن تقسیم ظاہر کرتی ہے جس کا اوسط 5 ہے۔ کسی ایک منٹ میں 3 یا 3 سے کم گاڑیاں گزرنے کا احتمال تلاش کریں۔
جواب: 0.265

سوال 24.115: ایک مقناطیسی پٹی کے 100 میٹر لمبائی میں اوسطاً 2 عیب پائے جاتے ہیں۔ 300 میٹر لمبی پٹی (الف) میں x عیب کا احتمال کیا ہو گا، (ب) بلا عیب ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.116: گتے کے ڈبا میں 20 فتیلہ ہیں جن میں سے 5 عیب دار ہیں۔ اس ڈبا سے بلا منصوبہ 3 فتیلے بغیر واپس رکھے بطور نمونہ نکالے جاتے ہیں۔ اس نمونہ میں x عیب دار فتیلے ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.117: ایک تقسیم کار 100 قلم کے ڈبوں فروخت کرتا ہے۔ وہ اس بات کی ضمانت دیتا ہے کہ کسی ایک ڈبے میں سے زیادہ سے زیادہ $10\,\%$ قلم عیب دار ہوں گے۔ ایک خریدار ہر ڈبے میں سے 10 قلم بغیر واپس رکھے نکال کر پرکھتا ہے۔ کوئی بھی قلم عیب دار نہ ہونے کی صورت میں وہ ڈبا خرید لیتا ہے ورنہ وہ ڈبے کو نہیں خریدتا۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ ایک ڈبے میں 10 عیب دار قلم ہوں (لہٰذا یہ ضمانت پر پورا اترتا ہے) اور خریدار اس ڈبے کو نہ خریدے؟

سوال 24.118: سوال 24.117 میں کیا احتمال ہے کہ ایک ڈبے میں 20 عیب دار قلم ہونے کے باوجود خریدار اسے خرید لیتا ہے؟

سوال 24.119: ایک کارخانے میں پیچوں کی پیداوار کی جاتی ہے۔ہر گھنٹہ بلا منصوبہ n پیچ کا نمونہ حاصل کر کے پرکھا جاتا ہے۔ایک یا ایک سے زیادہ عیب دار پیچ حاصل ہونے کی صورت میں کام روک کر مشینوں کی کارکردگی تسلی بخش بنائی جاتی ہے۔ n کتنا ہو گا اگر $10\,\%$ عیب دار پیچ کی صورت میں $95\,\%$ احتمال ہے کہ کام روکا جائے گا؟

سوال 24.120: 1 سے لے کر 13 تک عدد کو علیحدہ علیحدہ کاغذ پر لکھا جاتا ہے۔ان میں سے بلا منصوبہ تین کاغذ نکالے جاتے ہیں جبکہ ایک شخص بغیر دیکھے تینوں پر لکھے اعداد بتاتا ہے۔کیا احتمال ہے کہ وہ (الف) کوئی بھی درست عدد نہ بتائے، (ب) ایک عدد ٹھیک بتائے، (پ) دو عدد ٹھیک بتائے، (ت) تینوں اعداد ٹھیک بتائے؟
جواب: $\frac{120}{286}, \frac{135}{286}, \frac{30}{286}, \frac{1}{286}$

سوال 24.121: مساوات 24.66 کو ثابت کریں۔

سوال 24.122: (متعدد رکنی تقسیم) k باہمی بلا شرکت وقوعات $A_1, \cdots, A_k$ کے احتمال بالترتیب $p_1, \cdots, p_k$ ہیں جہاں $p_1 + \cdots + p_k = 1$ ہے۔فرض کریں کہ n باہمی بلا شرکت کوشش کیے جاتے ہیں۔دکھائیں کہ ان میں A_1 کی تعداد x_1 ، $\cdots$ ، A_k کی تعداد x_k ہونے کا احتمال

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}$$

ہو گا جہاں $0 \le x_j \le n$ ، $j = 1, \cdots, k$ ، اور $x_1 + \cdots + x_n = n$ ہیں۔ایسی تقسیم جس کی تفاعل تقسیم درج بالا ہو کو متعدد رکنی تقسیم[110] کہتے ہیں۔

سوال 24.123: برقی مزاحمت کی پیداوار میں $3\,\%$ کی مزاحمت $R < 198\,\Omega$ اور $5\,\%$ کی مزاحمت $R > 201\,\Omega$ ہے۔بلا منصوبہ 20 مزاحمتوں کے نمونہ میں $R < 198\,\Omega$ کے x_1 اور $R > 201\,\Omega$ کے x_2 مزاحمت حاصل کرنے کا احتمال کیا ہو گا؟

[110] multinomial distribution

24.10 عمومی تقسیم

ایسی تقسیم جس کی کثافت

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad (\sigma > 0) \tag{24.68}$$

ہو کو **عمومی تقسیم**[111] یا گاوسی تقسیم[112] کہتے ہیں۔اس طرح تقسیم والا بلا منصوبہ متغیر **عمومی**[113] یا **عمومی بانٹا ہوا**[114] کہلاتا ہے۔ عملی دلچسپی کے بہت سارے بلا منصوبہ متغیرات عمومی یا تخمیناً عمومی ہیں اور یا ان کا تبادلہ با آسانی عمومی بلا منصوبہ متغیرات میں کیا جا سکتا ہے۔ اس کے علاوہ کئی پیچیدہ تقسیم کو تخمیناً عمومی تقسیم سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔شماریاتی پرکھ کے کئی ثبوت میں بھی یہ تقسیم کردار ادا کرتی ہے۔

مساوات 24.68 میں تقسیم کی اوسط μ اور اس کا معیاری انحراف σ ہے۔ $f(x)$ کی منحنی μ کے لحاظ سے تشاکلی ہے اور اس کو **قوس جرس**[115] کہتے ہیں۔قوس جرس کو شکل 24.13 میں $\mu = 0$ اور σ کے کئی قیمتوں کے لئے دکھایا گیا ہے۔ $\mu > 0$ ($\mu < 0$) کے لئے قوس کی شکل تبدیل نہیں ہوتی البتہ یہ $|\mu|$ اکائیاں دائیں (بائیں) منتقل ہوتا ہے۔ σ^2 کی قیمت جتنی کم ہو، $x = \mu$ پر قوس کی چوٹی اتنی زیادہ بلند ہو گی اور چوٹی کے دونوں اطراف ڈھلوان اتنی زیادہ ہو گی (شکل 24.13) جو تغیریت کے تصور کے عین مطابق ہے۔

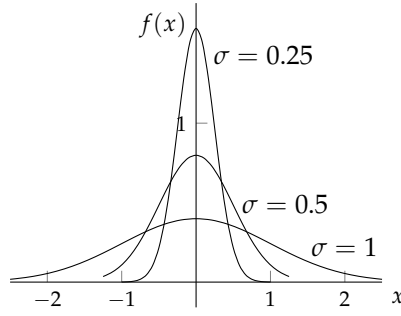
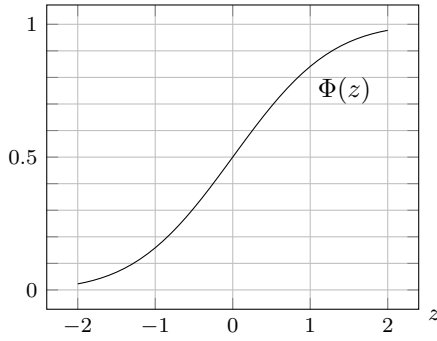
مساوات 24.68 سے ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی تقسیم کا تقسیمی تفاعل

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{v-\mu}{\sigma})^2} \, \mathrm{d}v \tag{24.69}$$

ہو گا۔یوں مساوات 24.45 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{1}{2}(\frac{v-\mu}{\sigma})^2} \, \mathrm{d}v \tag{24.70}$$

---

[111] normal distribution
[112] Gauss distribution
[113] normal
[114] normally distributed
[115] bell curve

شکل 24.13: عمومی تقسیم کی کثافت (مساوات 24.68) برائے $\mu = 0$ اور مختلف σ

شکل 24.14: اوسط 0 اور تغیریت 1 کے عمومی تقسیم کا تفاعل تقسیم $\Phi(z)$

مساوات 24.69 کا تکمل بنیادی طریقوں سے حاصل کرنا ممکن نہیں ہے البتہ اس کو درج ذیل تکمل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے (شکل 24.14)

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u \tag{24.71}$$

جو عمومی تقسیم کا وہ تفاعل ہے جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے اور جس کو جدول بند کیا گیا ہے۔ یہ جدول ضمیمہ ج میں پیش کیے گئے ہیں۔ اگر $u = \frac{v-\mu}{\sigma}$ لیا جائے تب $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{\sigma}$ اور $\mathrm{d}v = \sigma \,\mathrm{d}u$ ہو گا اور ہمیں $-\infty$ تا $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ تکمل لینا ہو گا۔ مساوات 24.69 سے یوں

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma \,\mathrm{d}u$$

حاصل ہو گا جس میں σ کٹ جاتا ہے اور جس کا دایاں ہاتھ مساوات 24.71 دیتا ہے جہاں $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ہے یعنی:

$$F(x) = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) \tag{24.72}$$

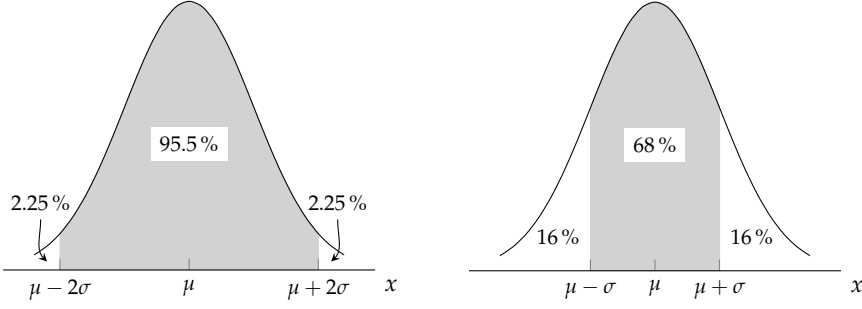
اس سے اور مساوات 24.70 سے درج ذیل ایک اہم کلیہ اخذ ہوتا ہے۔

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big) \tag{24.73}$$

بالخصوص $a = \mu - \sigma$ اور $b = \mu + \sigma$ کی صورت میں دایاں ہاتھ $\Phi(1) - \Phi(-1)$ کے برابر ہے؛ $a = \mu - 2\sigma$ اور $b = \mu + 2\sigma$ کی صورت میں دایاں ہاتھ $\Phi(2) - \Phi(-2)$ کے برابر ہے، وغیرہ، وغیرہ۔ تفاعل $\Phi(z)$ کی قیمتیں جدول سے دیکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے (شکل 24.15)۔

$$\begin{aligned}
&\text{(الف)} \quad P(\mu - \sigma < X \le \mu + \sigma) \approx 68\,\% \\
&\text{(ب)} \quad P(\mu - 2\sigma < X \le \mu + 2\sigma) \approx 95.5\,\% \\
&\text{(پ)} \quad P(\mu - 3\sigma < X \le \mu + 3\sigma) \approx 99.7\,\%
\end{aligned} \tag{24.74}$$

یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ بلا منصوبہ عمومی متغیر X کی بہت ساری قیمتیں درج ذیل طرح بانٹی گئی ہوں گی۔

- (الف) تقریباً $\frac{2}{3}$ قیمتیں $\mu - \sigma$ اور $\mu + \sigma$ کے بیچ ہوں گی،
- (ب) تقریباً $95\,\%$ قیمتیں $\mu - 2\sigma$ اور $\mu + 2\sigma$ کے بیچ ہوں گی،

شکل 24.15: اظہار مساوات 24.74

- (پ) تقریباً $99\frac{3}{4}\%$ قیمتیں $\mu - 3\sigma$ اور $\mu + 3\sigma$ کے بیچ ہوں گی

جس کو درج ذیل طریقہ سے بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔

وہ قیمت جس کی μ سے دوری σ سے زیادہ ہو، 3 کوششوں میں تقریباً 1 مرتبہ واقع ہو گی، جبکہ وہ قیمت جس کی μ سے دوری 2σ یا 3σ سے زیادہ ہو، بالترتیب 20 اور 400 کوششوں میں تقریباً 1 مرتبہ واقع ہو گی۔یوں عملی طور پر تمام قیمتیں $\mu - 3\sigma$ اور $\mu + 3\sigma$ کے بیچ پائی جائیں گی۔اس دو اعداد کو تین سگما حدود[116] کہتے ہیں۔

اسی طرح درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
&\text{(الف)} \quad P(\mu - 1.96\sigma < X \leq \mu + 1.96\sigma) = 95\,\% \\
&\text{(ب)} \quad P(\mu - 2.58\sigma < X \leq \mu + 2.58\sigma) = 99\,\% \\
&\text{(پ)} \quad P(\mu - 3.29\sigma < X \leq \mu + 3.29\sigma) = 99.9\,\%
\end{aligned}
\tag{24.75}
$$

درج ذیل مثال ضمیمہ ج میں دیے گیے عمومی تقسیم کی جدول کا استعمال سمجھنے میں مدد دیں گی۔

مثال 24.13: درج ذیل احتمال ضمیمہ ج کی مدد سے تلاش کریں جہاں X عمومی ہے جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے۔

(الف) $P(X \leq 2.44)$, (ب) $P(X \leq -1.16)$, (پ) $P(X \geq 1)$, (ت) $P(2 \leq X \leq 10)$

[116] three-sigma limits

حل: ہم ضمیمہ ج سے جوابات پڑھ کر لکھتے ہیں۔

$$\text{(الف)}\ 0.9927, \quad \text{(ب)}\ 0.1230, \quad \text{(پ)}\ 1 - P(X \le 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587,$$
$$\text{(ت)}\ \Phi(10) = 1.0000\,(\text{کیوں؟}), \Phi(2) = 0.9772, \Phi(10) - \Phi(2) = 0.0228$$

□

مثال 24.14: گزشتہ مثال کو دوبارہ حل کریں۔اس مرتبہ فرض کریں کہ X عمومی ہے جس کی اوسط 0.8 اور تغیریت 4 ہے۔
جواب: ضمیمہ ج اور مساوات 24.73 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\text{(الف)}\quad F(2.44) = \Phi(\frac{2.44 - 0.80}{2}) = \Phi(0.82) = 0.7939$$
$$\text{(ب)}\quad F(-1.16) = \Phi(-0.98) = 0.1635$$
$$\text{(پ)}\quad 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = 1 - \Phi(0.1) = 0.4602$$
$$\text{(ت)}\quad F(10) - F(2) = \Phi(4.6) - \Phi(0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$$

□

مثال 24.15: فرض کریں کہ X عمومی ہے جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے۔ایسا مستقل c تلاش کریں جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$\text{(الف)}\ P(X \ge c) = 10\,\%, \quad \text{(ب)}\ P(X \le c) = 5\,\%$$
$$\text{(پ)}\ P(0 \le X \le c) = 45\,\%, \quad \text{(ت)}\ P(-c \le X \le c) = 99\,\%$$

حل: ضمیمہ ج سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\text{(الف)}\quad 1 - P(X \le c) = 1 - \Phi(c) = 0.1, \Phi(c) = 0.9, c = 1.282,$$
$$\text{(ب)}\quad c = -1.645,$$
$$\text{(پ)}\quad \Phi(c) - \Phi(0) = \Phi(c) - 0.5 = 0.45, \Phi(c) = 0.95, c = 1.645,$$
$$\text{(ت)}\quad c = 2.576$$

□

سوال 24.124: فرض کریں کہ X عمومی ہے جس کی اوسط -2 اور تغیریت 0.25 ہے۔ایسا c تلاش کریں جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

(الف) $P(X \geq c) = 0.2,$ (ب) $P(-c \leq X \leq -1) = 0.5$
(پ) $P(-2-c \leq X \leq -2+c) = 0.9,$ (ت) $P(-2-c \leq X \leq -2+c) = 99.6\,\%$

حل: ضمیمہ ج سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

(الف) $1 - P(X \leq c) = 1 - \Phi(\frac{c+2}{0.5}) = 0.2,$
$\Phi(2c+4) = 0.8, 2c+4 = 0.842, c = -1.579$
(ب) $\Phi(\frac{-1+2}{0.5}) - \Phi(\frac{-c+2}{0.5}) = 0.9772 - \Phi(4-2c) = 0.5,$
$\Phi(4-2c) = 0.4772, 4-2c = -0.057, c = 2.03$
(پ) $\Phi(\frac{-2+c+2}{0.5}) - \Phi(\frac{-2-c+2}{0.5})$
$= \Phi(2c) - \Phi(-2c) = 0.9, 2c = 1.645, c = 0.823$
(ت) $\Phi(2c) - \Phi(-2c) = 99.6\,\%, 2c = 2.878, c = 1.439$

مثال 24.16: ایک کارخانے میں ایک خاص موٹائی کی لوہے کی چادریں بنائی جاتی ہیں۔یہ کام خود کار مشین کرتے ہیں۔ خام مال میں فرق اور درجہ حرارت، لرزش وغیرہ کی بنا مشینوں کا رویہ اور استعمال آلات میں معمولی تبدیلیاں رو نما ہوتی ہیں جنہیں قبل از وقت جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ان وجوہات کی بنا چادریں ایک دوسرے سے مختلف ہوتی ہیں۔یوں ہم چادر کی موٹائی X (ملی میٹر) کو بلا منصوبہ متغیر تصور کر سکتے ہیں۔ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ متغیر عمومی ہے جس کی اوسط $\mu = 10\,\text{mm}$ اور معیاری انحراف $\sigma = 0.02\,\text{mm}$ ہے۔ہم عیب دار چادروں کی تعداد جاننا چاہیں گے۔عیب دار چادر وہ چادر ہے جس کی موٹائی (الف) $9.97\,\text{mm}$ سے کم ہو، (ب) $10.05\,\text{mm}$ سے زیادہ ہو، (پ) کا اوسط ($10\,\text{mm}$) سے انحراف $0.03\,\text{mm}$ سے زیادہ ہو۔ (ت) ہم اعداد $10-c$ اور $10+c$ منتخب کرنا چاہتے ہیں کہ عیب دار چادروں کی تعداد $5\,\%$ سے زیادہ نہ ہو۔(ٹ) جزو-ت میں $\mu = 10.01\,\text{mm}$ کرنے سے عیب دار کی فی صد تعداد پر کیا اثر پڑے گا؟

حل: ضمیمہ ج استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{(الف)}\quad P(X \le 9.97) = \Phi(\frac{9.97-10.00}{0.02}) = \Phi(-1.5) = 0.0668 \approx 6.7\,\%$$

$$\text{(ب)}\quad P(X \ge 10.05) = 1 - P(X \le 10.05) = 1 - \Phi(\frac{10.05-10.00}{0.02})$$
$$= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 \approx 0.6\,\%$$

$$\text{(پ)}\quad P(9.97 \le X \le 10.03) = \Phi(\frac{10.03-10.00}{0.02}) - \Phi(\frac{9.97-10.00}{0.02})$$
$$= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 0.8664; \implies 1 - 0.8664 \approx 13\,\%$$

(ت) مساوات 24.75-الف سے

$$c = 1.96\sigma = 0.039$$

یوں جواب $9.961\,\text{mm}$ اور $10.039\,\text{mm}$ ہے۔

$$\text{(ٹ)}\quad P(9.961 \le X \le 10.039) = \Phi(\frac{10.039-10.010}{0.02}) - \Phi(\frac{9.961-10.010}{0.02})$$
$$= \Phi(1.45) - \Phi(-2.45) = 0.9265 - 0.0071 \approx 92\,\%$$

لہٰذا جواب $8\,\%$ ہو گا۔آپ نے دیکھا کہ مشین میں معمولی تبدیلی سے عیب دار چادروں کی تعداد میں بہت زیادہ اضافہ پیدا ہوتا ہے۔

□

بلا منصوبہ عمومی متغیر سے خطی تبادل کے ذریعہ بلا منصوبہ عمومی متغیر ہی حاصل ہو گا۔مساوات 24.72 سے آپ یقیناً درج ذیل حاصل کر پائیں گے۔

مسئلہ 24.14: (خطی تبادل)
اگر X عمومی ہو اور اس کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو تب $X^* = c_1 X + c_2\ (c_1 \neq 0)$ عمومی ہو گا جس کی اوسط $\mu^* = c_1\mu + c_2$ اور تغیریت $\sigma^{*2} = c_1^2\sigma^2$ ہو گی۔

بڑی n کی صورت میں ثنائی تقسیم کو تخمیناً عمومی تقسیم سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ بڑی n کی صورت میں تفاعل تقسیم

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n) \tag{24.76}$$

کے ثنائی عددی سر اور طاقت سادہ نہیں رہتے اور ان سے چھٹکارا حاصل کرنے میں بہتری ہے۔

مسئلہ 24.15: **(ڈی موے ور اور لاپلاس کا تحدیدی مسئلہ)**
بڑی n کے لئے

$$f(x) \sim f^*(x) \qquad (x = 0, 1, \cdots, n)$$

ہو گا جہاں f کو مساوات 24.76 میں پیش کیا گیا ہے جبکہ

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} \tag{24.77}$$

عمومی تقسیم کی کثافت ہے جس کی اوسط $\mu = np$ اور تغیریت $\sigma^2 = npq$ ہے (جو ثنائی تقسیم کی اوسط اور تغیریت ہیں) اور علامت $\sim$ (متقاربی برابر) کا مطلب ہے کہ جیسے جیسے n لامتناہی کے قریب تر ہوتا جائے ویسے ویسے دونوں اطراف کی نسبت 1 کے قریب تر ہوتی جائے گی۔ مزید کسی بھی غیر منفی اعداد صحیح a اور $b\,(> a)$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{gathered} P(a \le X \le b) = \sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \sim \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \\ \alpha = \frac{a - np - 0.5}{\sqrt{npq}}, \quad \beta = \frac{b - np + 0.5}{\sqrt{npq}} \end{gathered} \tag{24.78}$$

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔ اس مسئلے کے ثبوت سے ظاہر ہوتا ہے کہ غیر مسلسل سے استمراری صورت میں تبادلے کی بنا اصلاح کی ضرورت پیش آتی ہے جو اجزاء 0.5 ، α اور β کی صورت میں نظر آتا ہے۔

سوالات

سوال 24.125: دکھائیں کہ مساوات 24.68 کے نقاط تصریف[117] $x = \mu - \sigma$ اور $x = \mu + \sigma$ پر پائے جاتے ہیں۔ نقطہ تصریف سے مراد وہ نقطہ ہے جس پر منحنی کی شکل محدب سے مجوف یا مجوف سے محدب ہوتی ہو۔

سوال 24.126: دکھائیں $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

سوال 24.127: X عمومی متغیر ہے جس کی اوسط 80 اور تغیریت 9 ہے۔ $P(X > 83)$ ، $P(X < 81)$ ، $P(X < 80)$ اور $P(78 < X < 82)$ تلاش کریں۔
جواب: $0.1587, 0.6306, 0.5, 0.4950$

سوال 24.128: X عمومی متغیر ہے جس کی اوسط 105 اور تغیریت 25 ہے۔ $P(X \leq 112.5)$ ، $P(X > 100)$ اور $P(110.5 < X < 111.25)$ تلاش کریں۔
جواب:

سوال 24.129: X عمومی ہے جس کی اوسط 14 اور تغیریت 4 ہے۔ایسا c کہ $P(X \leq c) = 95\,\%$ ، $P(X \leq c) = 5\,\%$ ، $P(-c \leq X \leq c) = 99\,\%$ ہو تلاش کریں۔
جواب: $17.29, -17.29, 19.152$

سوال 24.130: X عمومی ہے جس کی اوسط 3.6 اور تغیریت 0.01 ہے۔ایسا c تلاش کریں کہ $P(X \leq c) = 50\,\%$ ، $P(X > c) = 10\,\%$ ، $P(-c < X \leq c) = 99.9\,\%$ ہوں۔

سوال 24.131: گاڑی کی ایک مخصوص بیٹری کی زندگی X عمومی متغیر ہے جس کی اوسط 4 سال اور معیاری انحراف 1 سال ہے۔ صنعت گر بیٹری کی تین سال کی ضمانت دیتا ہے۔اس کو ضمانت کی بنا کتنی فی صد بیٹریاں مہیا کرنی ہوں گی؟
جواب: $16\,\%$

سوال 24.132: ایک سکہ 4040 مرتبہ اچھالا جاتا ہے۔ 2048 شیر حاصل ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟

سوال 24.133: ایک صنعت کار کاغذ بناتا ہے جس کی کمیت عمومی متغیر ہے جس کی اوسط $\mu = 1.950\,\text{g}$ اور معیاری انحراف $\sigma = 0.025\,\text{g}$ ہے۔کاغذ کو 1000 کی جتھوں میں فروخت کیا جاتا ہے۔ایک جتھا میں کتنے

---

[117] inflextion points

کاغذ $2\,\mathrm{g}$ سے زیادہ بھاری ہوں گے؟
جواب: تقریباً 22

سوال 24.134: مثال 24.16 کے جزو-پ میں عیب دار چادروں کی تعداد $6\,\%$ کے لئے σ کتنا ہو گا؟

سوال 24.135: برقی مزاحمت کا پیداکار تجربہ سے جانتا ہے کہ اس کے بنائے گئے مزاحمت کی قیمت عمومی متغیر ہے جس کی اوسط $\mu = 150\,\Omega$ اور معیاری انحراف $\sigma = 5\,\Omega$ ہے۔کتنے فی صد کی مزاحمت $148\,\Omega$ اور $152\,\Omega$ کے بیچ ہو گی؟ کتنے فی صد کی مزاحمت $140\,\Omega$ اور $160\,\Omega$ کے بیچ ہو گی؟
جواب: $31.1\,\%, 95.5\,\%$

سوال 24.136: ایک پلاسٹک اینٹ کی طاقت توڑ[118] X (کلوگرام) عمومی متغیر ہے جس کی اوسط $1250\,\mathrm{kg}$ اور معیاری انحراف $55\,\mathrm{kg}$ ہے۔وہ کمیت تلاش کریں جس پر پلاسٹک ٹوٹنے کا انحراف $5\,\%$ سے زیادہ نہ ہو۔

سوال 24.137: ایک صارف کو $0.280 \mp 0.002\,\mathrm{cm}$ قطر کے قابلے درکار ہیں۔ایک صنعت کار کے بنائے گئے قابلوں کی $\mu = 0.279\,\mathrm{cm}$ اور $\sigma = 0.001\,\mathrm{cm}$ ہے اور ان کی تقسیم عمومی ہے۔اس صنعت کار کے کتنے فی صد قابلے صارف کی تخصیص پر پورا اترتے ہیں؟
جواب: $84\,\%$

سوال 24.138: ایک فروش کار 1000 بلب گتے کے ایک ڈبے میں بیچتا ہے۔ $p = 1\,\%$ لیتے ہوئے مساوات 24.78 کی مدد سے اس بات کا احتمال تلاش کریں کہ ایک ڈبے میں $1\,\%$ سے زیادہ بلب خراب نہیں ہوں گے۔

سوال 24.139: جدول عمومی استعمال کرتے ہوئے مساوات 24.75 میں دیے گئے نتائج حاصل کریں۔

سوال 24.140: مسئلہ 24.14 ثابت کریں۔

سوال 24.141: اگر X عمومی ہو جس کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہے تب $-X$ کی تقسیم کیا ہو گی؟
جواب: $-X$ بھی عمومی ہو گا۔اس کی اوسط $-\mu$ اور تغیریت σ^2 ہو گی۔

---
[118] breaking strength

سوال 24.142: (بڑے اعداد کے لئے برنولی کا قاعدہ)
فرض کریں کہ ایک تجربہ میں وقوعہ A کا احتمال $p\ (0 < p < 1)$ ہے، اور فرض کریں کہ n بلا منصوبہ کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد X ہے۔ دکھائیں کہ کسی بھی $\epsilon > 0$ کے $n \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \epsilon\right) \to 1 \qquad (n \to \infty) \tag{24.79}$$

سوال 24.143: $\Phi^2(\infty)$ میں قطبی محدد ($u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$) متعارف کرتے ہوئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = 1 \tag{24.80}$$

جواب:

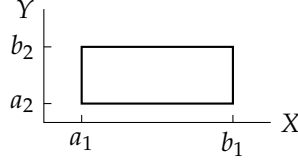
$$\Phi^2(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 1$$

سوال 24.144: مساوات 24.80 اور تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ مساوات 24.68 میں σ معیاری تقسیم کا معیاری انحراف ہے۔

24.11 ایک سے زائد بلا منصوبہ متغیرات کی تقسیمیں

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم ایک مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ واحد ایک بلا منصوبہ متغیر، مثلاً X ، وابستہ کرنا ہو گا۔ حصہ 24.7 سے ہم جانتے ہیں کہ اس کا مطابقتی تفاعل تقسیم $F(x) = P(X \le x)$ اس تقسیم کو مکمل طور پر تعین کرتا ہے، چونکہ ہر وقفہ $a < X \le b$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

اگر ایک بلا منصوبہ تجربہ میں ہم دو مقدار کا مشاہدہ کریں تب ہمیں اس تجربہ کے ساتھ دو بلا منصوبہ متغیرات، مثلاً X اور Y ، وابستہ کرنا ہو گا۔ مثال کے طور پر فولاد کی راک ویل سختی کو X اور اس میں کاربن کی مقدار کو Y

شکل 24.16: دوبعدی تقسیم کا تصور

ظاہر کر سکتے ہیں۔ہر ایک تجربہ اعداد کی جوڑی $X = x$ ، $Y = y$ دے گی جس کو مختصراً (x, y) لکھا اور XY مستوی پر بطور نقطہ دکھایا جا سکتا ہے۔ہم اب ایک **مستطیل** $a_1 < X \leq b_1$ ، $a_2 < Y \leq b_2$ پر غور کرتے ہیں (شکل 24.16)۔اگر ایسے ہر ایک مستطیل کے لئے ہمیں مطابقتی احتمال

$$P(a_1 < X \leq b_1, \; a_2 < Y \leq b_2)$$

معلوم ہو تب ہم کہتے ہیں کہ **دوبعدی بلا منصوبہ متغیر**[119] (X, Y) یا بلا منصوبہ متغیرات X اور Y کا **دوبعدی تفاعل احتمال**[120] ہمیں معلوم ہے۔تفاعل

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \tag{24.81}$$

کو اس تقسیم یا (X, Y) کا **تقسیمی تفاعل**[121] کہتے ہیں۔چونکہ (سوال 24.145)

$$\begin{aligned} &P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) \\ &\quad = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \end{aligned} \tag{24.82}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 24.81 تقسیم کو یکتا طور پر تعین کرتا ہے۔

غیر مسلسل دوبعدی تقسیمیں

اگر (X, Y) درج ذیل خواص رکھتا ہو تب متغیر (X, Y) اور اس کا مطابقتی تقسیم **غیر مسلسل** کہلائے گا۔

X, Y متناہی تعداد یا قابل شمار لا متناہی تعداد کی جوڑی قیمتیں (x, y) اختیار کر سکتا ہے جن کے مطابقتی احتمال مثبت ہوں گے۔ہر ایسا دائرہ کار جس میں ایسی کوئی جوڑی نہ پائی جاتی ہو کا احتمال 0 ہو گا[122]۔

---

[119] two-dimensional random variable

[120] two-dimensional probability distribution

[121] distribution function

[122] دھیان رہے کہ پہلی خاصیت سے یہ نہیں کہا جا سکتا ہے

فرض کریں کہ x_i, y_j ایسی کوئی جوڑی ہے اور $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ ہے (جہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ p_{ij} کسی مخصوص i, j کی جوڑیوں کے لئے صفر بھی ہو سکتا ہے)۔ تفاعل

$$f(x, y) = \begin{cases} p_{ij} & x = x_i, y = y_j \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases} \tag{24.83}$$

کو (X, Y) کا تفاعل احتمال کہتے ہیں؛ یہاں غیر تابع طور پر $i = 1, 2, \cdots$ اور $j = 1, 2, \cdots$ ہیں۔ مساوات 24.42 کا مماثل

$$F(x, y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} f(x_i, y_j) \tag{24.84}$$

ہے اور مساوات 24.38 کی جگہ درج ذیل شرط ہو گا۔

$$\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1 \tag{24.85}$$

مثال کے طور پر اگر ہم ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے اچھال کر

$$X = \text{ایک روپیہ کی خط کی تعداد}$$
$$Y = \text{پانچ روپیہ کی خط کی تعداد}$$

پر غور کریں تب X اور Y کی قیمت 0 یا 1 ہو سکتی ہے اور تفاعل احتمال

$f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = \frac{1}{4}$ ورنہ (ان کے علاوہ) $f(x, y) = 0$ ہو گا۔

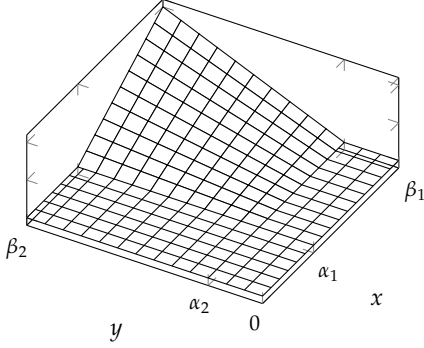
استمراری دوبعدی تقسیمیں

(X, Y) اور اس کا تقسیم اس صورت استمراری کہلاتے ہیں جب مطابقتی تفاعل تقسیم کو دوہرا تکمل

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x^*, y^*) \, \mathrm{d}x^* \, \mathrm{d}y^* \tag{24.86}$$

کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں $f(x, y)$ معین، غیر منفی اور پورے مستوی میں محدود ہے ماسوائے متناہی تعداد کے استمراری قابل تفرق منحنیات پر۔ $f(x, y)$ کو تقسیم کی کثافت احتمال کہتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$P(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{24.87}$$

شکل 24.18: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل تقسیم

شکل 24.17: یکساں تقسیم (مساوات 24.88) کا تفاعل احتمال کثافت

مثال کے طور پر (شکل 24.17)

$$f(x,y)=\frac{1}{k} \text{ جب } (x,y) \text{ مستطیل } R \text{ میں ہو تب } f(x,y)=0 \text{ ورنہ} \tag{24.88}$$

مستطیل R میں یکساں تقسیم کو ظاہر کرتا ہے؛ یہاں k مستطیل کا رقبہ یعنی $k=(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)$ ہے۔اس تقسیم کو شکل 24.18 میں دکھایا گیا ہے۔

دو بعدی غیر مسلسل تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

فرض کریں کہ بلا منصوبہ غیر مسلسل متغیر (X,Y) کا تفاعل احتمال $f(x,y)$ ہے۔اگر $X=x$ ہو، جبکہ Y جس میں ہمیں دلچسپی نہیں ہے کوئی بھی قیمت اختیار کر سکتا ہو، تب تفاعل احتمال $P(X=x,Y$ اختیاری$)$ کو $f_1(x)$ لکھا جا سکتا ہے جو x کا تابع تفاعل ہے۔یوں

$$f_1(x)=P(X=x,Y \text{ اختیاری})=\sum_y f(x,y) \tag{24.89}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اس x کے لئے ہم $f(x,y)$ کی تمام غیر صفر قیمتوں کا مجموعہ لیا گیا ہے۔ظاہر ہے کہ $f_1(x)$ ایک بلا منصوبہ متغیر تقسیمی احتمال کا تفاعل احتمال ہے۔اس تقسیم کو دیے گئے دو بعدی تقسیم کے لحاظ سے

X کا حاشیہ تقسیم[123] کہا جاتا ہے۔اس کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$F_1(x) = P(X \leq x, Y \text{ اختیاری}) = \sum_{x^* \leq x} f_1(x^*) \tag{24.90}$$

اسی طرح تفاعل احتمال

$$f_2(y) = P(X \text{ اختیاری}, Y = y) = \sum_{x} f(x, y)) \tag{24.91}$$

دیے گئے دو بعدی تقسیم کا Y کے لحاظ سے حاشیہ تقسیم تعین کرتا ہے۔مساوات 24.91 میں ہم y کے مطابقتی غیر صفر $f(x,y)$ کا مجموعہ لیتے ہیں۔اس تقسیم کا تفاعل تقسیم درج ذیل ہو گا۔

$$F_2(y) = P(X \text{ اختیاری}, Y \leq y) = \sum_{y^* \leq y} f_2(y^*) \tag{24.92}$$

ظاہر ہے کہ بلا منصوبہ متغیر (X, Y) کے دونوں حاشیہ تقسیم غیر مسلسل ہیں۔

جدول 24.7 میں ان کی مثال دی گئی ہے جہاں تاش کے پتوں سے تین پتے نکال کر واپس رکھے جاتے ہیں۔ملکہ کے حصول کو X جبکہ بادشاہ کے حصول کو Y سے ظاہر کیا گیا ہے۔تاش کے کل 52 پتے ہوتے ہیں جن میں 4 ملکہ اور 4 بادشاہ کے پتے ہوتے ہیں۔یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ حاصل کرنے کا احتمال $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ہو گا۔یوں ایک پتہ نکال کر ملکہ یا بادشاہ حاصل کرنے کا احتمال $\frac{2}{13}$ ہو گا۔اس طرح اس بلا منصوبہ تجربہ کا مطابقتی تفاعل احتمال

$$f(x,y) = \frac{3!}{x!y!(3-x-y)!}\left(\frac{1}{13}\right)^x\left(\frac{2}{13}\right)^y\left(\frac{10}{13}\right)^{3-x-y} \qquad (x+y \leq 3)$$

ہو گا اور ان کے علاوہ $f(x,y) = 0$ ہو گا۔جدول 24.7 میں $f(x,y)$ ، $f_1(x)$ اور $f_2(y)$ دیے گئے ہیں۔

دو بعدی استمراری تقسیم کے حاشیہ تقسیمیں

اسی طرح کثافت $f(x,y)$ والے استمراری متغیر X, Y کے لئے ہم

$$(X \leq x, Y \text{ اختیاری}) \quad \text{یا} \quad (X \leq x, -\infty < Y < \infty)$$

---

[123] marginal distribution

جدول 24.7: تاش سے ملکہ اور بادشاہ کا حصول

x \ y	0	1	2	3	$f_1(x)$
0	$\frac{1000}{2197}$	$\frac{600}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	$\frac{1728}{2197}$
1	$\frac{300}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{12}{2197}$	0	$\frac{432}{2197}$
2	$\frac{30}{2197}$	$\frac{6}{2197}$	0	0	$\frac{36}{2197}$
3	$\frac{1}{2197}$	0	0	0	$\frac{1}{2197}$
$f_2(y)$	$\frac{1331}{2197}$	$\frac{726}{2197}$	$\frac{132}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	

پر غور کر سکتے ہیں جس کا مطابقتی احتمال

$$F_1(x) = P(X \leq x, -\infty < Y < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x^*, y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x^*$$

ہو گا جس میں

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{24.93}$$

لکھتے ہوئے

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x^*)\,\mathrm{d}x^* \tag{24.94}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ $f_1(x)$ اور $F_1(x)$ کو بالترتیب دیے گئے استمراری تقسیم کے لحاظ سے حاشیہ تقسیم X کی کثافت اور تقسیمی تفاعل کہتے ہیں۔ دیے گئے دو بعدی استمراری تقسیم کے لحاظ سے تفاعل

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x \tag{24.95}$$

کو حاشیہ تقسیم Y کی کثافت اور

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y^*)\,\mathrm{d}y^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y^*)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^* \tag{24.96}$$

کو حاشیہ تقسیم Y کا تقسیمی تفاعل کہتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ استمراری تقسیم کے دونوں حاشیہ تقسیم استمراری ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کی تابعیت اور غیر تابعیت

دو بعدی (X, Y) تقسیم جس کا تفاعل تقسیم $F(x, y)$ ہو کے بلا منصوبہ متغیرات X اور Y اس صورت **غیر تابع** کہلاتے ہیں جب تمام (x, y) کے لئے

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) \tag{24.97}$$

ہو ورنہ انہیں **تابع** کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ X اور Y دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہوں۔تب X اور Y اس صورت غیر تابع ہوں گے جب ان کے مطابقتی تفاعل احتمال یا کثافتیں $f_1(x)$ اور $f_2(y)$ درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں (سوال 24.160)۔

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) \tag{24.98}$$

مثال کے طور پر جدول 24.7 میں متغیرات تابع ہیں۔ایک روپیہ اور پانچ روپیہ کے سکے ایک بار اچھال کر متغیرات

$X =$ پانچ روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد $\quad$,$Y =$ ایک روپیہ کے سکے کے خط کی تعداد

0 یا 1 قیمت اختیار کر سکتے ہیں اور یہ متغیرات غیر تابع ہیں۔

تابعیت اور غیر تابعیت کی تصور کو n بعدی تقسیم $X_1, \cdots, X_n$ جس کا تفاعل احتمال

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_! \leq x_1, \cdots X_n \leq x_n)$$

ہو کے n بلا منصوبہ متغیرات تک وسعت دی جا سکتی ہے۔اگر تمام $x_1, \cdots, x_n$ کے لئے

$$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(n) \tag{24.99}$$

ہو جہاں X_j کے حاشیہ تقسیم کا تقسیمی تفاعل $F_j(x_j)$ ہو، یعنی

$$F_j(x_j) = P(X_j \leq x_j, X_k \text{ اختیاری}, k \neq j)$$

تب یہ بلا منصوبہ متغیرات **غیر تابع** کہلاتے ہیں ورنہ ان متغیرات کو **تابع** کہتے ہیں۔

بلا منصوبہ متغیرات کے تفاعل

فرض کریں کہ بلا منصوبہ متغیر (X, Y) کا تفاعل احتمال یا کثافت $f(x, y)$ اور تقسیمی تفاعل $F(x, y)$ ہیں اور فرض کریں کہ $g(x, y)$ غیر مستقل استمراری تفاعل ہے جو تمام (x, y) پر معین ہے۔تب $Z = g(X, Y)$ بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔مثال کے طور پر ہم دو پانسہ پھینکتے ہیں۔پہلے پانسہ عدد X اور دوسرا پانسہ عدد Y دیتا ہے۔ عدد $Z = X + Y$ ان دونوں کا مجموعہ ہے (شکل 24.8)۔

اگر n $(X_1, \cdots, X_n)$ بعدی متغیر ہوا ور تمام $(x_1, \cdots, x_n)$ پر $g(x_1, \cdots, x_n)$ معین غیر مستقل استمراری تفاعل ہو تب $Z = g(X_1, \cdots, X_n)$ بھی بلا منصوبہ متغیر ہو گا۔

غیر مسلسل بلا منصوبہ متغیر (X, Y) کی صورت میں ان تمام $f(x, y)$ کا مجموعہ لیتے ہوئے جن کے لئے $g(x, y)$ کی قیمت زیر غور y کے برابر ہو، ہم $Z = g(X, Y)$ کا تفاعل احتمال $f(z)$ حاصل کر سکتے ہیں، یعنی:

$$f(z) = P(Z = z) = \sum_{g(x,y)=z}\sum f(x, y) \tag{24.100}$$

Z کا تقسیمی تفاعل

$$F(z) = P(Z \leq z) = \sum_{g(x,y)\leq z}\sum f(x, y) \tag{24.101}$$

ہے جہاں ہم ان $f(x, y)$ کا مجموعہ لیا جائے گا جن کے لئے $g(x, y) \leq z$ ہو۔

بلا منصوبہ استمراری متغیر (X, Y) کے لئے اسی طرح

$$F(z) = P(Z \leq z) = \iint_{g(x,y)\leq z} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{24.102}$$

ہو گا جہاں ہر z کے لئے ہم xy مستوی میں خطہ $g(x, y) \leq z$ پر تکمل حاصل کرتے ہیں۔

$g(X,Y)$ کی حسابی توقع۔ مجموعہ اوسط اور تغیریت

درج ذیل عدد کو $g(X,Y)$ کی **حسابی توقع**[124] یا مختصراً **توقع** کہتے ہیں۔

$$E(g(X,Y)) = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y) & [(X,Y) \text{ غیر مسلسل}] \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y & [(X,Y) \text{ استمراری}] \end{cases} \tag{24.103}$$

یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ دوہرا مجموعہ مطلق مرتکز ہے اور xy مستوی پر $|g(x,y)| f(x,y)$ کا تکمل موجود ہے۔ درج ذیل کلیہ کو سوال 24.99 کی طرز پر ثابت کیا جا سکتا ہے۔

$$E(ag(X,Y) + bh(X,Y)) = aE(g(X,Y)) + bE(h(X,Y)) \tag{24.104}$$

اس کے ایک مخصوص صورت $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ ہے اور الکراجی ماخوذ سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.16: **(مجموعہ اوسط)**
بلا منصوبہ متغیرات کے مجموعے کی اوسط (توقع) ان کے انفرادی اوسط کا مجموعہ ہو گا، یعنی:

$$E(X_1 + X_2, \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) \tag{24.105}$$

مزید درج ذیل با آسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 24.17: **اوسطوں کا حاصل ضرب**
غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات کے حاصل ضرب کی اوسط ان کے انفرادی اوسط کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا، یعنی:

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1) E(X_2) \cdots E(X_n) \tag{24.106}$$

ثبوت: فرض کریں کہ X اور Y بلا منصوبہ متغیرات ہیں (جہاں دونوں غیر مسلسل یا دونوں استمراری ہیں)۔ تب $E(XY) = E(X)E(Y)$ ہو گا۔ غیر مسلسل صورت میں

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy f(x,y) = \sum_x x f_1(x) \sum_y y f_2(y) = E(X)E(Y)$$

[124] mathematical expectation

لکھا جا سکتا ہے اور استمراری صورت میں بھی ثبوت اسی طرح کا ہے۔اس نتیجہ کو n غیر تابع متغیرات تک وسعت دینے سے مساوات 24.106 ثابت ہوتی ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

ہم اب تغیریت کے مجموعہ پر غور کرتے ہیں۔فرض کریں کہ $Z = X + Y$ ہے اور Z کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہے۔سوال 24.97 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sigma^2 = E([Z-\mu]^2) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

مساوات 24.104 سے دائیں ہاتھ پہلے جزو کو

$$E(Z^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$$

لکھا جا سکتا ہے جبکہ دائیں ہاتھ دوسرے جزو کو مسئلہ 24.17 کی مدد سے

$$[E(Z)]^2 = [E(X) + E(Y)]^2 = [E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔انہیں σ^2 کے کلیہ میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]\end{aligned}$$

سوال 24.97 سے ہم دیکھتے ہیں کہ دائیں ہاتھ پہلی لکیر پر دیا گیا تعلق X اور Y کی تغیریت کا مجموعہ ہے جنہیں ہم بالترتیب σ_1^2 اور σ_2^2 سے ظاہر کرتے ہیں۔دوسری لکیر پر مقدار

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) \tag{24.107}$$

کو X اور Y کی باہمی تغیریت[125] کہتے ہیں۔اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{XY} \tag{24.108}$$

اگر X اور Y غیر تابع ہوں تب $E(XY) = E(X)E(Y)$ لہٰذا $\sigma_{XY} = 0$ اور

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \tag{24.109}$$

ہو گا۔دو سے زائد متغیرات تک وسعت دیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

مسئلہ 24.18: (تغیریات کا مجموعہ)
غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات کے مجموعہ کی تغیریت ان متغیرات کے انفرادی تغیریت کے مجموعہ کے برابر ہو گا۔

[125] covariance

شکل 24.19: شکل برائے سوال 24.145

سوالات

سوال 24.145: مساوات 24.82 کو ثابت کریں۔
جواب: شکل 24.19 میں (X, Y) احتمال $F(b_1, b_2)$ کے ساتھ A ، B ، C یا D سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(a_1, b_2)$ کے ساتھ A یا C سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(b_1, a_2)$ کے ساتھ C یا D سے قیمت اختیار کر سکتا ہے، احتمال $F(a_1, a_2)$ کے ساتھ C سے قیمت اختیار کر سکتا ہے لہٰذا B سے قیمت حاصل کرنے کا احتمال مساوات 24.82 کا دایاں ہاتھ دے گا۔

سوال 24.146: شکل 24.17 اور شکل 24.18 میں دیے تقسیم کے حاشیہ تقسیم حاصل کریں۔

سوال 24.147: فرض کریں کہ $8 \le x \le 12$ اور $0 \le y \le 2$ میں $f(x, y) = k$ جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ۔ k ، $P(X \le 11, 1 \le Y \le 1.5)$ اور $P(9 \le X \le 12, Y \le 1)$ تلاش کریں۔
جواب: $\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{8}$

سوال 24.148: ایک کاغذ کی اوسط کمیت $10\,\mathrm{g}$ اور معیاری انحراف $0.05\,\mathrm{g}$ ہے۔ ایسی $10\,000$ کاغذوں کی ڈھیر کی اوسط کمیت اور تغیریت کیا ہو گی؟

سوال 24.149: فرض کریں کہ $x > 0$ ، $y > 0$ اور $x + y < 3$ میں $f(x, y) = k$ جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ہے۔ k تلاش کریں۔ $f(x, y)$ ترسیم کریں۔ $P(X + Y \le 1)$ اور $P(Y > X)$ تلاش کریں۔
جواب: $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}$

سوال 24.150: ایک خالی ڈبے کی اوسط $2\,\mathrm{kg}$ اور معیاری انحراف $0.1\,\mathrm{kg}$ ہے۔ اس ڈبے میں مال کی اوسط $75\,\mathrm{kg}$ اور تغیریت $0.8\,\mathrm{kg}$ ہے۔ بھرے ڈبے کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.151: خطہ $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ میں بلا منصوبہ متغیرات کی کثافتیں $f(x,y) = x + y$ اور $g(x,y) = (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})$ ہیں۔دکھائیں کہ ان کی حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہیں۔

سوال 24.152: ایسی دو مختلف غیر مسلسل تقسیم کی مثال دیں جن کے حاشیہ تقسیم ایک جیسی ہوں۔

سوال 24.153: چار گراریوں کو یوں یکجا کیا جاتا ہے کہ ان کے بیچ فاصلہ رہے۔ گراریوں کے بیچ باریک چادر کی ٹکیا رکھ کر فاصل پیدا کیا جاتا ہے۔ گراری کی موٹائی کی اوسط 5.020 cm اور معیاری انحراف 0.003 cm ہے جبکہ ٹکیا کی موٹائی کی اوسط 0.040 cm اور معیاری انحراف 0.002 cm ہے۔بلا منصوبہ 4 گراریوں اور 3 ٹکیوں سے بنائی گئی پوری گراری کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے۔
جواب: تقریباً 20.200, 0.007

سوال 24.154: لوہے کی چادروں اور کاغذ کو تہہ در تہہ رکھ کر ٹرانسفارمر کا قالب بنایا جاتا ہے۔اگر لوہے کی چادر کی موٹائی کی اوسط 0.5 mm اور معیاری انحراف 0.05 mm ہو اور کاغذ کی موٹائی کی اوسط 0.05 mm اور معیاری انحراف 0.02 mm ہو تب 50 لوہے کی چادروں اور 49 کاغذوں سے بنائے گئے قالب کی موٹائی کی اوسط اور معیاری انحراف کیا ہوں گے؟

سوال 24.155: خطہ $x^2 + y^2 < 1$ میں (X,Y) کی کثافت $f(x,y) = k$ ہے جبکہ اس خطہ کے باہر کثافت صفر ہے۔ k تلاش کریں۔حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔احتمال $P(X^2 + Y^2 < \frac{1}{2})$ تلاش کریں۔
جواب: $k = \frac{1}{\pi}; f_1(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}, f_2(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - y^2}, 50\,\%$

سوال 24.156: ایک پنیا اور سوراخ کے قطر بالترتیب X سنٹی میٹر اور Y سنٹی میٹر ہیں۔فرض کریں کہ (X,Y) کی کثافت

$$f(x,y) = 2500 \quad \text{ہو تب} \quad 0.99 < x < 1.01, 1.00 < y < 1.02 \quad \text{اگر}$$

ہے ورنہ $f = 0$ ہے۔ حاشیہ تقسیمیں حاصل کریں۔ اس بات کا کیا احتمال ہے کہ بلا منصوبہ منتخب کردہ پنیا 1.00 سنٹی میٹر کی سوراخ میں ٹھیک بیٹھے گا؟

سوال 24.157: خطہ $x \geq 0, y \geq 0$ میں (X,Y) کی کثافت $f(x,y) = e^{-(x+y)}$ ہے جبکہ باقی جگہوں پر $f = 0$ ہے۔ $P(X > Y)$ تلاش کریں۔
جواب: 50 %

سوال 24.158: سوال 24.157 میں حاشیہ تقسیم کی کثافتیں تلاش کریں۔

سوال 24.159: ایک برقیاتی آلہ میں دو برقیاتی پرزے پائے جاتے ہیں۔فرض کریں کہ پہلا پرزہ X مہینوں تک اور دوسرا پرزہ Y مہینوں تک کام کر سکتا ہے۔فرض کریں کہ (X,Y) کی احتمال کثافت

$$f(x,y)=0.01e^{-0.1(x+y)} \qquad x>0, y>0$$

جبکہ اس کے علاوہ $f=0$ ہے۔ (الف) کیا X اور Y تابع ہیں؟ (ب) حاشیہ تقسیم کی کثافت تلاش کریں۔ (پ) پہلے پرزے کی زندگی 10 مہینے یا اس سے زیادہ ہونے کا احتمال کیا ہو گا؟
جواب: غیر تابع، $f_1(x)=0.1e^{-0.1x}, x>0; f_2(y)=0.1e^{-0.1y}, y>0; 36.8\,\%$ ہے

سوال 24.160: مساوات 24.98 سے منسلک فقرہ ثابت کریں۔

سوال 24.161: فرض کریں کہ (X,Y) کا تفاعل احتمال $f(0,0)=f(1,1)=\frac{1}{8}$ ، $f(0,1)=f(1,0)=\frac{3}{8}$ ہے۔کیا X اور Y غیر تابع ہیں؟
جواب: جی نہیں

سوال 24.162: مسئلہ 24.16 کو استعمال کرتے ہوئے ثنائی تقسیم کی اوسط μ کا کلیہ حاصل کریں۔

سوال 24.163: مسئلہ 24.18 کی مدد سے ثنائی تقسیم کی تغیریت σ^2 کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال 24.164: مسئلہ 24.16 کی مدد سے بیش ہندسی تقسیم کی اوسط کا کلیہ حاصل کریں۔کیا مسئلہ 24.18 کی مدد سے اس تقسیم کی تغیریت کا کلیہ حاصل کیا جا سکتا ہے؟

24.12 بلا منصوبہ نمونہ بندی۔بلا منصوبہ اعداد

حصہ 24.3 تا حصہ 24.11 میں نظریہ احتمال پر غور کیا گیا۔اس باب کے باقی حصوں میں شماریات پر غور کیا جائے گا۔آبادی کے حسابی نمونے بنانے میں نظریہ شماریات مدد دیتا ہے۔شماریاتی تراکیب، جن پر غور کیا جائے گا، نظریہ اور حقیقی مشاہدوں کے مابین تعلقات پیش کرتے ہیں۔یوں نمونہ بندی کے ذریعہ آبادی کے بارے میں نتائج حاصل کیے جا سکتے ہیں (شماریاتی رائے زنی؛ حصہ 24.1)۔

اب تک اتنا جاننا کافی تھا کہ آبادی کے نمونہ سے مراد آبادی سے اشیاء کا انتخاب ہے (حصہ 24.1 میں مثالیں) لیکن اب ہمیں اس تصور کی تعریف باریک بینی سے دینی ہو گی۔حقیقتاً کسی بھی آبادی سے نمونہ بندی کے ذریعہ معنی خیز نتائج حاصل کرنے کی خاطر ضروری ہے کہ نمونہ **بلا منصوبہ انتخاب**[126] ہو، یعنی آبادی میں ہر چیز کا منتخب ہو کر نمونے میں شامل ہونے کے احتمال کی قیمت معلوم ہو۔یہ شرط ہر صورت (کم از کم تخمینی طور پر) پوری کرنا لازم ہے ورنہ حاصل نتائج مکمل طور پر بے معنی اور غلط ہو سکتے ہیں۔

لامتناہی نمونی فضا کی صورت میں نمونی قیمتیں **غیر تابع** ہوں گی، یعنی، کسی بلا منصوبہ تجربہ کو n مرتبہ سرانجام دیتے ہوئے حاصل n بلا منصوبہ نمونی قیمتیں ایک دوسرے پر اثر انداز نہیں ہوں گی۔ عمومی آبادی سے حاصل نمونوں کے لئے یہ یقینی طور پر درست ہے۔متناہی نمونی فضا کی صورت میں اگر ہم واپس رکھ کر نمونہ حاصل کریں تب نمونی قیمتیں غیر تابع ہوں گی؛ اگر ہم واپس نہ رکھ کر نمونہ حاصل کریں تب، آبادی کی جسامت کے لحاظ سے نمونے کی جسامت چھوٹی رکھتے ہوئے (مثلاً 1000 کی آبادی سے 5 یا 10 کا نمونہ لیتے ہوئے)، حاصل نمونی قیمتیں عملاً غیر تابع ہوں گی۔ اس کے برعکس اگر ہم بغیر واپس رکھتے ہوئے متناہی آبادی سے بڑے نمونے لیں تب تابعیت کا بہت زیادہ اثر پایا جائے گا۔

بلا منصوبہ انتخاب کی شرط پر پورا اترنا آسان نہیں ہے۔ کئی وجوہات نمونہ بندی کے عمل پر اثر انداز ہو سکتی ہیں۔مثال کے طور پر اگر ایک خریدار نے 80 کی ڈھیر سے 10 کا انتخاب کر کے ڈھیر خریدنے یا نہ خریدنے کا فیصلہ کرنا ہو تب وہ طبعی طور پر ان 10 چیزوں کا انتخاب کس طرح کرے گا کہ $\binom{80}{10}$ ممکنات میں سے ہر ایک کے منتخب ہونے کا احتمال ایک جیسا ہو؟

اس مسئلے کی حل کے لئے مختلف تراکیب تشکیل دی گئی ہیں۔ہم اب ایک ایسے طریقہ کار پر غور کرتے ہیں جس کو عموماً استعمال کیا جاتا ہے۔

---

[126] random selection

ہم اس ڈھیر کے اجزاء کو 1 تا 80 کے شمار سے ظاہر کرتے ہیں۔اس کے بعد ہم ضمیمہ ج میں بلا منصوبہ اعداد کی جدول استعمال کرتے ہوئے 10 اجزاء چنتے ہیں۔بلا منصوبہ اعداد کے جدول کو ہم یوں استعمال کرتے ہیں کہ ہم پہلے 0 سے 99 کوئی صف بلا منصوبہ منتخب کرتے ہیں۔بلا منصوبہ صف منتخب کرنے کی خاطر ہم ایک سکہ کو 7 مرتبہ اچھال کر 7 ثنائی ہندسوں پر مبنی عدد حاصل کرتے ہیں جس میں خط کو 1 اور شیر کو 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یہ ثنائی عدد 0 تا 127 کو ظاہر کر سکتا ہے۔ 99 سے بڑا عدد حاصل ہونے کی صورت میں عدد کو رد کرتے ہوئے سکہ دوبارہ 7 مرتبہ اچھالا جاتا ہے حتیٰ کہ ہمیں 0 تا 99 کوئی عدد حاصل ہو جو صف دے گا۔اس کے بعد اسی طرح ہم بلا منصوبہ 0 تا 9 قطار منتخب کرتے ہیں۔بلا منصوبہ قطار منتخب کرنے کی خاطر سکہ 4 مرتبہ اچھال کر 4 ثنائی ہندسوں کا عدد حاصل کیا جاتا ہے۔فرض کریں کہ صف کے لئے $0011010\ (=26)$ اور قطار کے لئے $0111\ (=7)$ حاصل ہو تب جدول کے 26 ویں صف اور 7 ویں قطار سے 44973 حاصل کرتے ہوئے اس کے پہلے دو ہندسوں پر مبنی عدد 44 لیا جاتا ہے جبکہ باقی ہندسوں کو رد کیا جاتا ہے۔اسی قطر میں نیچے چلتے ہوئے اعداد کے پہلے دو ہندسے لیتے ہوئے درج ذیل اعداد حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$44 \quad 44 \quad 83 \quad 91 \quad 55 \quad \cdots$$

ہم 80 سے بڑے اعداد رد کرتے ہیں اور کسی بھی عدد کو ایک سے زیادہ مرتبہ شامل نہیں کرتے ہیں۔یوں درکار بلا منصوبہ اعداد کا درج ذیل سلسلہ حاصل ہوتا ہے جس کے تحت اجزاء کو منتخب کیا جائے گا۔

$$44 \quad 55 \quad 53 \quad 03 \quad 52 \quad 61 \quad 67 \quad 78 \quad 39 \quad 54$$

زیادہ اجزاء کے نمونہ کے لئے یہ طریقہ کار موزوں نہیں ہے۔ اسی لئے ایسے اعداد جن کی خاصیت بلا منصوبہ اعداد کی طرح ہو، پیدا کرنے کے کئی طریقے بنائے گئے ہیں جنہیں کمپیوٹر کی زبان میں **پیدا کار بلا منصوبہ اعداد**[127] کہتے ہیں۔

سوالات

سوال 24.165: فرض کریں کہ مذکورہ بالا مثال میں ہم ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کا جدول کے صف 83 اور قطار 2 سے شروع کرتے ہوئے اوپر رخ چلیں۔تب کون سے اجزاء نمونہ میں شامل کیے جائیں گے؟
جواب: $38, 69, 02, 49, 23, 52, 73, 29, 09, 05$

سوال 24.166: ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کا جدول استعمال کرتے ہوئے 250 کی ڈھیر سے 20 اجزاء بلا منصوبہ منتخب کریں۔

---

[127] random number generator

سوال 24.167: منصفانہ پانسہ کو بلا منصوبہ انتخاب کے لئے کس طرح استعمال کیا جا سکتا ہے؟

سوال 24.168: ایک بلا منصوبہ متغیر Y پر غور کریں جس کی خطہ $0 < y < 1$ میں کثافت یکساں $f(y) = 1$ جبکہ خطہ سے باہر $f = 0$ ہے۔ہم بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے با آسانی Y (یعنی Y کی قیمتوں) کا نقل اتار[128] سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر 2 اعشاریہ تک کے 20 قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہم ضمیمہ ج کے بلا منصوبہ اعداد کے جدول کے کسی بھی (بلا منصوبہ) قطار اور صف سے شروع کرتے ہوئے نیچے چلتے ہوئے، پانچ ہندسوں پر مشتمل دیے اعداد کے صرف پہلے دو ہندسوں کو لیتے ہوئے ان کے بائیں جانب اعشاریہ پر کرتے ہوئے اعداد حاصل کر سکتے ہیں۔ہم ایک سے زیادہ مرتبہ آنے والے اعداد کو بھی شامل کرتے ہیں۔فرض کریں ہم صف 36 اور قطار 3 سے شروع کرتے ہیں۔دکھائیں کہ درج ذیل حاصل ہو گا۔ان کا تعددی نقطہ ترسیم کھینچیں۔

0.89	0.40	0.67	0.86	0.87	0.86	0.06	0.20	0.38	0.12
0.68	0.50	0.53	0.10	0.08	0.90	0.19	0.85	0.53	0.98

سوال 24.169: بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے کسی بھی بلا منصوبہ استمراری متغیر X کی نقل اتاری جا سکتی ہے۔ایسا کرنے کی خاطر ہم X کی تفاعل تقسیم کو ترسیم کرتے ہیں۔ سوال 24.168 کی طرز پر بلا منصوبہ اعداد کی مدد سے متغیر Y کی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے انہیں y محدد پر ترسیم کریں اور ان کے مطابقتی X قیمتیں پڑھیں۔سوال 24.168 کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے عمومی بلا منصوبہ متغیر X ، جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو، کے لئے یہ طریقہ کار استعمال کریں۔جماعتی نشان -2 ، -1 ، 0 ، 1 اور 2 لیتے ہوئے x کی ان 20 نمونی قیمتوں کا مستطیلی ترسیم کھینچیں۔
جواب: جماعتی تعدد 1 ، 5 ، 7 ، 6 ، 1 ہیں۔

سوال 24.170: سوال 24.169 کا طریقہ کار غیر مسلسل بلا منصوبہ متغیر کے لئے بھی قابل استعمال ہے۔اگر دو منصفانہ پانسہ پھینک کر حاصل اعداد کا مجموعہ X ہو تب اس طریقہ کو کس طرح استعمال کیا جائے گا؟

---
[128] simulation

24.13 مقدار معلوم کا اندازہ لگانا

تقسیمات میں پائی جانے والے مقدار مثلاً ثنائی تقسیم میں p ، عمومی تقسیم میں μ اور σ ، کو مقدار معلوم[129] کہتے ہیں۔

ایک نقطہ پر مقدار معلوم کی اندازاً قیمت (نقطہی اندازہ[130]) ایک عدد (حقیقی محور پر نقطہ) ہو گا جس کو دیے گئے نمونہ سے حاصل کیا جاتا ہے جو مقدار معلوم کی اصل قیمت کی تخمین ہو گی۔ وقفہ اندازہ[131] (یعنی وقفہ اعتماد[132])، جس پر اگلے حصے میں بحث کی جائے گی، کو نمونہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔مقدار معلوم کی قیمت کا اندازہ لگانا ایک اہم مسئلہ ہے۔

آبادی کی اوسط μ کا اندازہ لگانے کی خاطر ہم نمونے کی اوسط $\overline{x}$ لے سکتے ہیں جس سے ہمیں μ کا اندازہ $\widehat{\mu} = \overline{x}$ حاصل ہوتا ہے، یعنی

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \tag{24.110}$$

جہاں نمونہ کی جسامت n ہے۔اسی طرح آبادی کی تغیریت کا اندازہ $\widehat{\sigma^2}$ در حقیقت مطابقتی نمونے کی تغیریت s^2 ہو گی، یعنی:

$$\widehat{\sigma^2} = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2 \tag{24.111}$$

ظاہر ہے کہ مساوات 24.110 اور مساوات 24.111 ان تقسیمات کی مقدار معلوم کی اندازاً قیمت دیتے ہیں جن میں μ اور σ^2 صریحاً پائے جاتے ہیں؛ عمومی تقسیم اور پوئسن تقسیم ایسی تقسیمات ہیں۔ثنائی تقسیم میں $p = \frac{\mu}{n}$ (مساوات 24.60) ہے۔ اس صورت میں اگر j ویں کوشش میں وقوعہ A جس کا احتمال p ہے واقع ہو تب مساوات 24.110 میں $x_j = 1$ ہو گا اور اگر اس کوشش میں A واقع نہ ہو تب $x_j = 0$ ہو گا۔ اس طرح مساوات 24.110 سے p کا اندازہ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\widehat{p} = \frac{\overline{x}}{n} \tag{24.112}$$

---

[129] parameters
[130] point estimate
[131] interval estimate
[132] confidence interval

ہم یہاں بتانا چاہتے ہیں کہ مساوات 24.110 ترکیب معیار اثر[133] کی ایک مخصوص صورت ہے۔اس ترکیب میں جس مقدار معلوم کی اندازاً قیمت درکار ہو، اس کو تقسیم کی معیار اثر کی صورت میں لکھا جاتا ہے (حصہ 24.8)۔حاصل کلیات میں ان معیار اثر کی جگہ نمونہ سے حاصل مطابقتی معیار اثر پر کرتے ہوئے درکار اندازے حاصل کیے جاتے ہیں۔یہاں نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ کا k واں معیار اثر درج ذیل ہے۔

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k$$

اندازے حاصل کرنے کی دوسری ترکیب کو زیادہ سے زیادہ امکان کی ترکیب[134] کہتے ہیں۔اس ترکیب کو سمجھنے کی خاطر ہم غیر مسلسل (یا استمراری) بلا منصوبہ متغیر X پر غور کرتے ہیں جس کا تفاعل احتمال واحد متغیر θ پر منحصر ہے۔ ہم n غیر تابع قیمتوں $x_1, \cdots, x_n$ کا نمونہ لیتے ہیں۔تب غیر مسلسل صورت میں n جسامت کے نمونہ میں بالکل یہی قیمتیں حاصل ہونے کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$l = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \tag{24.113}$$

استمراری صورت میں، چھوٹے چھوٹے وقفوں $x_i \le x \le x_i + \Delta x \; (i = 1, 2, \cdots, n)$ میں قیمتیں حاصل کرنے کا احتمال درج ذیل ہو گا۔

$$f(x_1)\Delta x f(x_2)\Delta x \cdots f(x_n)\Delta x = l(\Delta x)^n \tag{24.114}$$

چونکہ $f(x_i)$ متغیر θ کا تابع ہے لہٰذا تفاعل l متغیرات $x_1, \cdots, x_n$ اور θ کا تابع ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ ہمیں $x_1, \cdots, 2_n$ دیے گئے ہیں اور یہ مقررہ قیمتیں ہیں۔تب l متغیر θ کا تابع ہو گا جس کو تفاعل امکان[135] کہتے ہیں۔ زیادہ سے زیادہ امکان کی ترکیب کا بنیادی تصور بہت سادہ ہے۔ہم نا معلوم قیمت θ کے لئے وہ تخمین چنتے ہیں جس سے l کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل ہو۔اگر تفاعل l متغیر θ کا قابل تفرق تفاعل ہو تب (سرحد سے ہٹ کر) l کی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے درج ذیل لازمی شرط ہے۔

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = 0 \tag{24.115}$$

(ہم یہاں جزوی تفرق لکھتے ہیں چونکہ l متغیرات $x_1, \cdots, x_n$ کا بھی تابع ہے۔) مساوات 24.115 کا حل جو $x_1, \cdots, x_n$ کا تابع ہے θ کے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ کہلاتا ہے۔چونکہ $f(x) \ge 0$ اور $f(x)$

[133] method of moments
[134] maximum likelihood method
[135] likelihood function

کی زیادہ سے زیادہ قیمت عموماً مثبت ہوتی ہے اور $\ln l$ یک سر بڑھتا تفاعل ہے لہٰذا مساوات 24.115 کی جگہ درج ذیل بھی استعمال کیا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \theta} = 0 \tag{24.116}$$

جس سے عموماً حساب میں آسانی پیدا ہوتی ہے۔

اگر X کی تقسیم میں r مقدار معلوم $\theta_1, \cdots, \theta_r$ پائے جاتے ہوں تب مساوات 24.115 کی جگہ r لازمی شرائط $\frac{\partial l}{\partial \theta_1} = 0, \cdots, \frac{\partial l}{\partial \theta_r} = 0$ ہوں گے اور مساوات 24.116 کی جگہ درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \theta_1} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \theta_r} = 0 \tag{24.117}$$

مثال 24.17: عمومی تقسیم

عمومی تقسیم کی صورت میں μ اور σ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ تلاش کریں۔

حل: مساوات 24.68 اور مساوات 24.113 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$l = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n e^{-h} \qquad h = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

دونوں ہاتھ لوگارتھم لیتے ہیں۔

$$\ln l = -n \ln \sqrt{2\pi} - n \ln \sigma - h$$

مساوات 24.117 میں پہلی شرط $\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = 0$ ہے جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = -\frac{\partial h}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \qquad \implies \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0$$

جس کا حل μ کا درکار اندازہ $\widehat{\mu}$ ہے، یعنی:

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

مساوات 24.117 میں دوسری شرط $\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = 0$ ہے جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} - \frac{\partial h}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0$$

μ کی جگہ $\widehat{\mu}$ پر کرتے ہوئے σ^2 کے لئے حل کر کے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x - \overline{x})^2$$

دھیان رہے کہ یہ نتیجہ مساوات 24.111 سے مختلف ہے۔ہم اندازوں کی عمدگی کی قواعد پر بحث نہیں کر سکتے ہیں لیکن اتنا جاننا ضروری ہے کہ چھوٹی n کے لئے مساوات 24.111 بہتر نتائج دیتی ہے۔ □

سوالات

سوال 24.171: $x \geq 0$ کے لئے کثافت $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ اور $x < 0$ کے لئے $f(x) = 0$ ہے۔ θ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\widehat{\theta} = \frac{n}{\sum x_j} = \frac{1}{\overline{x}}$

سوال 24.172: سوال 24.171 میں اوسط μ تلاش کر کے $f(x)$ میں پر کریں۔ μ کے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کرتے ہوئے دکھائیں کہ یہ وہی ہے جو سوال 24.171 کے θ کے اندازے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.173: معلوم تغیریت $\sigma^2 = \sigma_0^2$ کی عمومی تقسیم کے μ کی زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\widehat{\mu} = \overline{x}$

سوال 24.174: $\mu = 0$ کی صورت میں عمومی تقسیم پر زیادہ سے زیادہ امکان کے اندازے کی ترکیب لاگو کریں۔

سوال 24.175: **(پوئسن تقسیم)** زیادہ سے زیادہ امکان کے اندازہ کی ترکیب کا اطلاق تقسیم پوئسن پر کریں۔
جواب: $\widehat{\mu} = \overline{x}$

سوال 24.176: **(یکساں تقسیم)** حصہ 24.8 میں دیے گئے یکساں تقسیم کی صورت میں دکھائیں کہ مقدار معلوم a اور b کو زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ استعمال کرتے ہوئے پہلی جزوی تفرق کو صفر کے برابر پر نہیں کیا جا سکتا ہے۔اس صورت میں زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ کس طرح لگایا جا سکتا ہے؟

سوال 24.177: **(ثنائی تقسیم)** p کے لئے زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: n کوششوں میں کامیابی کی تعداد $l = p^k(1-p)^{n-k}, \widehat{p} = \frac{k}{n}, k =$

سوال 24.178: وقوعہ A واقع ہونے تک کوششوں کی تعداد X ہے۔دکھائیں کہ X کا تفاعل احتمال $f(x) = pq^{x-1},\ x = 1, 2, \cdots$ ہے جہاں واحد کوشش میں A واقع ہونے کا احتمال p ہے اور $q = 1 - p$ ہے۔ X کی واحد قیمت x کے مشاہدے میں p کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ تلاش کریں۔

سوال 24.179: سوال 24.178 میں نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے p کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔
جواب: $\widehat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$

سوال 24.180: سوال 24.177 کو وسعت دیتے ہیں۔فرض کریں کہ n کوششوں کو m مرتبہ دہرایا جاتا ہے۔پہلی n کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد k_1 ہے، دوسری n کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد k_2 ہے، ...، m ویں n کوششوں میں A واقع ہونے کی تعداد k_m ہے۔ان معلومات سے p کا زیادہ سے زیادہ امکان کا اندازہ حاصل کریں۔

24.14 وقفہ اعتماد

گزشتہ حصہ میں مقدار معلوم کی نقطی اندازہ پر غور کیا گیا۔اب ہم وقفی اندازہ[136] پر غور کریں گے۔

حسابی تخمینی کلیات استعمال کرتے ہوئے ضروری ہے کہ ہم جاننے کی کوشش کریں کہ تخمینی قیمت اور اصل درست قیمت میں کتنا فرق ہے۔مثال کے طور پر اعدادی تکملی تراکیب میں زیادہ سے زیادہ خلل کے کلیات پائے جاتے ہیں جس سے ہم جان سکتے ہیں کہ تخمینی قیمت اور اصل قیمت میں کتنا فرق پایا جا سکتا ہے۔فرض کریں کہ ہم کسی تکمل کا

[136] interval estimate

اعدادی تخمینی قیمت 2.47 اور اصل قیمت سے زیادہ سے زیادہ ممکنہ خلل ∓ 0.02 حاصل کریں۔تب ہم پوری یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ تکمل کی اصل قیمت $2.47 - 0.02 = 2.45$ تا $2.47 + 0.02 = 2.49$ قیمتوں میں شامل ہے، یعنی اصل قیمت $2.47 - 0.02 = 2.45$ یا اس سے زیادہ اور $2.47 + 0.02 = 2.49$ یا اس سے کم ہو گی۔

مقدار معلوم θ کا اندازہ لگاتے ہوئے ہم نمونی قیمتوں پر منحصر ایسے دو مقدار جاننا چاہیں گے جن میں یقینی طور پر اصل قیمت شامل ہو۔البتہ ہم جانتے ہیں کہ نمونی قیمتوں سے $100\,\%$ درست نتائج حاصل کرنا ممکن نہیں ہے۔یوں حقیقت پسندی سے کام لیتے ہوئے ہم اس مسئلے کو درج ذیل بیان کرتے ہیں۔

احتمال γ کی قیمت کو 1 کے قریب منتخب کریں (مثلاً، $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$ ، وغیرہ)۔اس کے بعد ایسے دو مقدار Θ_1 اور Θ_2 منتخب کریں جن میں مقدار معلوم θ کی اصل قیمت کے شامل ہونے کا احتمال γ ہو۔

ہم سو فی صد یقین کے ساتھ جاننے کی "ناممکن شرط" کی بجائے تقریباً 1 احتمال کی "ممکن شرط" پیش کرتے ہیں۔

دیے گئے نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے ان دو مقداروں کی قیمتوں کا حساب لگایا جائے گا۔ان n قیمتوں کو مشاہدے سے حاصل n بلا منصوبہ متغیرات $X_1, \cdots, X_n$ کی قیمتیں تصور کریں۔تب Θ_1 اور Θ_2 ان بلا منصوبہ متغیرات کے تفاعل ہوں گے اور یوں خود بھی بلا منصوبہ متغیرات ہوں گے۔اس طرح ہماری شرط درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$P(\Theta_1 \le \theta \le \Theta_2) = \gamma$$

اگر ہمیں تفاعل Θ_1 اور Θ_2 معلوم ہوں، تب دیے گئے نمونہ سے ہم Θ_1 کی اعدادی قیمت θ_1 اور Θ_2 کی اعدادی قیمت θ_2 کا حساب لگا سکتے ہیں۔وہ وقفہ جس کے سر θ_1 اور θ_2 ہوں، نامعلوم مقدار معلوم θ کا **وقفہ اعتماد**[137] یا **وقفی اندازہ**[138] کہلاتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\text{اعتماد}\{\theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$$

θ_1 کو θ کی **نچلی حد اعتماد**[139] اور θ_2 کو اس کی **بالائی حد اعتماد**[140] کہتے ہیں۔عدد γ کو **سطح اعتماد**[141] کہتے ہیں۔ہم عموماً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$ اور کبھی کبھار $\gamma = 99.9\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔

---

[137] confidence interval
[138] interval estimate
[139] lower confidence limit
[140] upper confidence limit
[141] confidence level

ظاہر ہے کہ اگر ہم ایک نمونہ حاصل کر کے مطابقتی وقفہ اعتماد تعین کرنا چاہیں، تب مقدار معلوم کی اصل قیمت شامل کرنے والے وقفہ کے حصول کا احتمال γ ہو گا۔

مثال کے طور پر اگر ہم $\gamma = 95\%$ منتخب کریں، تب ہم توقع کر سکتے ہیں کہ 95% نمونے جو ہم حاصل کریں ایسے اعتمادی وقفے دیں گے جن میں θ کی قیمت شامل ہو گی اور باقی 5% میں ایسا نہیں ہو گا۔یوں 20 میں سے تقریباً 19 صورتوں میں یہ فقرہ کہ "اعتمادی وقفہ میں θ شامل ہے" درست ہو گا جبکہ باقی صورتوں میں یہ فقرہ غلط ہو گا۔

$\gamma = 95\%$ کی بجائے $\gamma = 99\%$ منتخب کرنے سے ہم توقع کریں گے کہ 100 میں سے 99 صورتوں میں یہ فقرہ درست ہو گا۔البتہ ہم دیکھیں گے کہ $\gamma = 99\%$ کے مطابقتی وقفے $\gamma = 95\%$ کے مطابقتی وقفوں سے لمبے ہوں گے۔ γ بڑھانے کا یہ ایک نقصان ہے۔

کسی حقیقی صورت میں γ کی کیا قیمت منتخب کرنی چاہیے؟ یہ محض حسابی دلچسپی کی بات نہیں ہے بلکہ عملی استعمال میں، غلط قیمت منتخب کرنے کی صورت میں نقصان کو مد نظر رکھتے ہوئے، اس کا جواب ہمیں ہر صورت دینا ہو گا۔

صاف ظاہر ہے کہ موجودہ ترکیب اور آنے والے دیگر تراکیب میں غیر یقینی صورت حال کی وجہ نمونہ بندی کا طریقہ کار ہے۔یوں ماہر شماریات کو اپنی غلطیوں کے بارے میں جواب دینے کے لئے تیار ہونا چاہیے۔تاہم کسی بھی روزگار میں ایسا ہی ہو گا مثلاً قاضی اور ساہو کار بھی امکان کے قواعد سے نہیں بچ پاتے۔ ماہر شماریات غلطی کرنے کا احتمال تو جانتا ہے جبکہ قاضی اور ساہو کار کو یہ سہولت میسر نہیں ہے۔

اعتمادی وقفے برائے عمومی تقسیم کے μ اور σ^2

ہم اب عمومی تقسیم کی اوسط μ (جدول 24.8، جدول 24.9) اور تغیریت σ^2 (جدول 24.10) کے اعتمادی وقفے حاصل کرنا سیکھتے ہیں جس کا مطابقتی نظریہ اس حصے کے آخر میں پیش کیا جائے گا۔

مثال 24.18: معلوم تغیریت کی صورت میں عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد

$n = 100$ کا نمونہ جس کی اوسط $\bar{x} = 5$ ہو استعمال کرتے ہوئے تغیریت $\sigma^2 = 9$ والی عمومی تقسیم کے لئے 95% وقفہ اعتماد تعین کریں۔

حل: پہلا قدم: $\gamma = 0.95$ درکار ہے۔

جدول 24.8: معلوم تغیریت σ^2 والی عمومی تقسیم کے اوسط μ کے وقفہ اعتماد کا تعین

پہلا قدم: وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$، وغیرہ۔

دوسرا قدم: مطابقتی c تلاش کریں۔

γ	0.90	0.95	0.99	0.999
c	1.645	1.960	2.576	3.291

تیسرا قدم: نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے اوسط $\overline{x}$ حاصل کریں۔

چوتھا قدم: $k = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$ کا حساب لگائیں۔ μ کا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{\overline{x} - k \le \mu \le \overline{x} + k\} \tag{24.118}$$

دوسرا قدم: اس کا مطابقتی $c = 1.960$ ہے۔

تیسرا قدم: $\overline{x} = 5$ دیا گیا ہے۔

چوتھا قدم: ہمیں $k = \frac{1.960 \cdot 3}{\sqrt{100}} = 0.588$ درکار ہے لہٰذا $\overline{x} - k = 4.412$ ، $\overline{x} + k = 5.588$ ہو گا جن سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{4.412 \le \mu \le 5.588\}$$

□

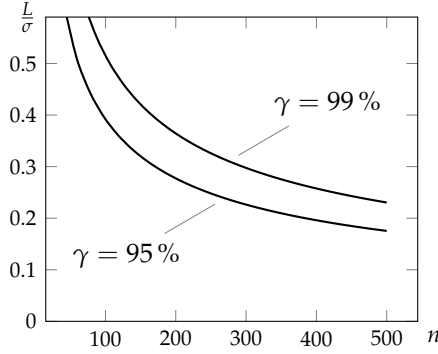
مثال 24.19: مخصوص لمبائی کا اعتمادی وقفہ حاصل کرنے کے لئے درکار نمونی جسامت

گزشتہ مثال میں 95 % اعتمادی وقفہ جس کی لمبائی $L = 0.4$ ہو حاصل کرنے کے لئے n کتنا ہو گا؟

حل: وقفے کی لمبائی مساوات 24.118 کے تحت $L = 2k = \frac{2c\sigma}{\sqrt{n}}$ ہے جس کو n کے لئے حل کرتے ہوئے

$$n = \left(\frac{2c\sigma}{L}\right)^2$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہاں $n = (\frac{2 \cdot 1.960 \cdot 3}{0.4})^2 \approx 870$ ہے۔

شکل 24.20 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ اعتماد کی لمبائی L جتنی کم ہو، نمونے کی جسامت n اتنی زیادہ منتخب کرنی ہو گی۔ □

شکل 24.20: وقفہ اعتماد کی لمبائی بالمقابل نمونی جسامت n

نا معلوم تغیریت σ^2 والی عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد تعین کرنا جدول 24.9 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ تقریباً جدول 24.8 کی طرح ہے ماسوائے k کی قیمتوں کے۔ مزید c کی قیمت n پر منحصر ہے اور اس اس کو ضمیمہ ج میں t تقسیم کے تفاعل کی جدول ج.10 سے حاصل کرنا لازمی ہے جہاں t تقسیم[142] کے تفاعل

$$F(z) = K_m \int_{-\infty}^{z} \left(1 + \frac{u^2}{m}\right)^{-(m+1)/2} \mathrm{d}u \tag{24.119}$$

کی قیمتوں کے مطابقتی z قیمتیں دی گئی ہیں۔ یہاں $K_m = \Gamma(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}) / [\sqrt{m\pi}\Gamma(\frac{1}{2}m)]$ ایک مستقل ہے اور $\Gamma(\alpha)$ گیما تفاعل (ضمیمہ ب مساوات ب.22) ہے۔ $m\ (1, 2, \cdots)$ مقدار معلوم ہے جس کو تقسیم کی درجہ آزادی کی تعداد[143] کہتے ہیں۔

مثال 24.20: نا معلوم تغیریت والی عمومی تقسیم کی اوسط کا وقفہ اعتماد

جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے مطابقتی آبادی کے لئے اوسط μ کا 99 % وقفہ اعتماد تعین کریں۔ فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے۔ (اس مفروضے کا جواز حصہ 24.18 میں دیا جائے گا۔)

حل: **پہلا قدم:** $\gamma = 0.99$ درکار ہے۔

دوسرا قدم: چونکہ $n = 100$ ہے لہٰذا $F(c) = \frac{1}{2}(1 + 0.99) = 0.995$ کا حل $c = 2.63$ حاصل ہوتا ہے۔ (چونکہ اس کتاب میں 99 درجہ آزادی کا t تقسیم نہیں دیا گیا ہے لہٰذا 100 درجہ آزادی کی قطار سے c حاصل کیا گیا ہے۔)

---

[142] t تقسیم کو انگلستانی ماہر شماریات ولیم سیلی گوسٹ [1876-1937] نے دریافت کیا۔
[143] number of degrees of freedom

جدول 24.9: نامعلوم تغیریت σ^2 والی عمومی تقسیم کے اوسط μ کے وقفہ اعتماد کا تعین

پہلا قدم: وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$ ، وغیرہ۔

دوسرا قدم: درج ذیل مساوات کا حل c ،

$$F(c) = \frac{1}{2}(1+\gamma) \tag{24.120}$$

$n-1$ درجہ آزادی کے t تقسیم کی جدول (ضمیمہ ج، جدول ج.10 میں نمونی جسامت n لیتے ہوئے) سے حاصل کریں۔

تیسرا قدم: نمونہ $x_n, \cdots, x_1$ سے اوسط $\overline{x}$ اور تغیریت s^2 حاصل کریں۔

چوتھا قدم: $k = \frac{sc}{\sqrt{n}}$ کا حساب لگائیں۔ μ کا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{\overline{x} - k \le \mu \le \overline{x} + k\} \tag{24.121}$$

تیسرا قدم: حساب سے $\overline{x} = 364.70$ اور $s = \sqrt{720.1} = 26.83$ ملتے ہیں۔

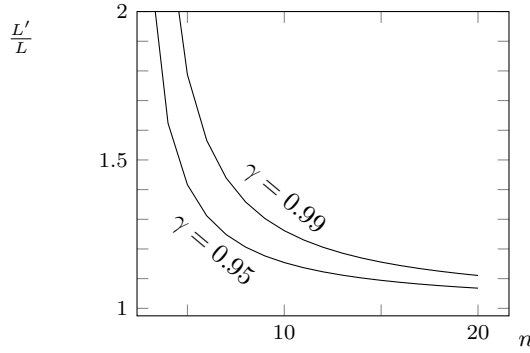
چوتھا قدم: ہم $k = \frac{26.83 \cdot 2.63}{10} = 7.06$ حاصل کرتے ہیں لہٰذا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{357.64 \le \mu \le 371.76\}$$

موازنے کی خاطر فرض کریں کہ ہمیں $\sigma = 26.83$ معلوم ہے۔ تب جدول 24.8 سے $k = \frac{2.576 \cdot 26.83}{\sqrt{100}} = 6.91$ حاصل ہوتا جس کے تحت $\{357.79 \le \mu \le 371.61\}$ اعتماد حاصل ہوتا ہے۔ دونوں نتائج میں معمولی فرق پایا جاتا ہے۔ بڑی n کی صورت میں نتائج میں فرق بہت کم ہوتا ہے لیکن کم n کی صورت میں دونوں نتائج میں واضح فرق پایا جائے گا (شکل 24.21)۔ □

جدول 24.10 میں عمومی تقسیم کی تغیریت کا وقفہ اعتماد تعین کرنے کے قدم دیے گئے ہیں۔ جو جدول 24.8 اور جدول 24.9 کی طرح ہیں، پس، یہاں دو مستقل c_1 اور c_2 حاصل کرنے ہوں گے۔ دونوں مستقل کو ضمیمہ ج میں جدول ج.11 سے حاصل کیا جاتا ہے جس میں تفاعل تقسیم

$$F(z) = \begin{cases} C_m \int_0^z e^{-u/2}\, u^{(m-2)/2}\,\mathrm{d}u & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \tag{24.122}$$

کی قیمتوں کے لئے z کے مطابقتی قیمتیں دی گئی ہیں۔ اس تقسیم کو χ^2 تقسیم (مربع خا تقسیم) کہتے ہیں۔ یہاں $C_m = \frac{1}{[2^{m/2}\Gamma(m/2)]}$ اور $m = 1, 2, \cdots$ مقدار معلوم ہے جس کو تقسیم کی درجہ آزادی کی تعداد کہتے ہیں۔

شکل 24.21: $\gamma = 0.95$ اور $\gamma = 0.99$ لیتے ہوئے وقفہ اعتماد کی لمبائی L' (مساوات 24.121) اور L (مساوات 24.118) کی نسبت بالمقابل نمونی جسامت n، جہاں s اور σ ایک جیسے ہیں۔

جدول 24.10: عمومی تقسیم کی تغیریت σ^2 کے وقفہ اعتماد کا تعین جہاں اوسط جاننا ضروری نہیں ہے

پہلا قدم: وقفہ اعتماد منتخب کریں مثلاً $\gamma = 95\,\%$ یا $\gamma = 99\,\%$، وغیرہ۔

دوسرا قدم: درج ذیل مساوات کے حل c_1 اور c_2

$$F(c_1) = \frac{1}{2}(1-\gamma), \quad F(c_2) = \frac{1}{2}(1+\gamma) \tag{24.123}$$

کو مربع خا تقسیم کی جدول (ضمیمہ ج، جدول ج.11، جسامت نمونہ $= n$) سے $n-1$ درجہ آزادی کے لئے حاصل کریں۔ **تیسرا قدم:** نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ کی تغیریت s^2 سے $(n-1)s^2$ حاصل کریں۔

چوتھا قدم: $k_1 = \frac{(n-1)s^2}{c_1}$ اور $k_2 = \frac{(n-1)s^2}{c_2}$ کا حساب لگائیں۔ وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{k_2 \le \sigma^2 \le k_1\} \tag{24.124}$$

مثال 24.21: عمومی تقسیم کے تغیریت کا وقفہ اعتماد

جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے مطابقتی آبادی کے تغیریت کا وقفہ اعتماد تلاش کریں۔
حل: پہلا قدم: $\gamma = 0.95$ درکار ہے۔
دوسرا قدم: چونکہ $n = 100$ ہے لہٰذا ہم $c_1 = 73.4$ اور $c_2 = 128$ حاصل کرتے ہیں۔
تیسرا قدم: جدول 24.2 سے $99s^2 = 71291$ حاصل ہوتا ہے۔
چوتھا قدم: وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{556 \le \sigma^2 \le 972\}$$

□

دیگر تقسیمات

کافی بڑے نمونے لیتے ہوئے دیگر تقسیمات کی اوسط اور تغیریت کے وقفہ اعتماد گزشتہ تراکیب سے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ عملاً، اگر نا معلوم تقسیم کا ترچھاپن کم ہو تب μ کا وقفہ اعتماد حاصل کرنے کے لئے نمونی جسامت کم سے کم $n = 20$ لینی چاہیے اور σ^2 کا وقفہ اعتماد کے لئے کم سے کم $n = 50$ لینا چاہیے۔ اس کی تفصیل اس حصے کے آخر میں پیش کی جائے گی۔

جدول 24.8، جدول 24.9 اور جدول 24.10 میں دیے گئے تراکیب کا نظریہ

ہم اب درج ذیل سادہ تصور استعمال کرتے ہوئے اس نظریہ پر غور کرتے ہیں جو وقفہ اعتماد حاصل کرنے کی ان تراکیب کو ممکن بناتی ہے۔

اب تک ہم نمونی قیمتوں $x_1, \dots, x_n$ کو واحد بلا منصوبہ متغیر X کی مشاہدے سے حاصل n قیمتیں تصور کرتے رہے ہیں۔ ہم ان n قیمتوں کو n بلا منصوبہ متغیرات $X_1, \dots, X_n$ ، جن کی تقسیم ایک جیسی ہے (جو X کی تقسیم ہے)، کی ایک مشاہدے کی قیمتیں بھی تصور کر سکتے ہیں جنہیں غیر تابع اس لئے تصور کیا جا سکتا ہے کہ نمونی قیمتیں کو غیر تابع تصور کیا گیا ہے۔

جدول 24.8 میں مساوات 24.118 اخذ کرنے کے لئے درج ذیل درکار ہو گا۔

مسئلہ 24.19: (بلا منصوبہ عمومی متغیرات کا مجموعہ)
فرض کریں کہ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ بلا منصوبہ غیر تابع عمومی متغیرات ہیں جن کے اوسط بالترتیب $\mu_1, \cdots, \mu_n$ اور تغیریت بالترتیب $\sigma_1^2, \cdots, \sigma_n^2$ ہیں۔ تب بلا منصوبہ متغیر

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$$

اور تغیریت

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$$

ہو گی۔ μ اور σ^2 کے فقرے مسئلہ 24.16 اور مسئلہ 24.18 دیتے ہیں جبکہ X عمومی ہونے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

اس مسئلے سے اور مسئلہ 24.14 اور مسئلہ 24.13 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 24.20: اگر $X_1, \cdots, X_n$ غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن میں سے ہر ایک کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہو، تب بلا منصوبہ متغیر

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \tag{24.125}$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط μ اور تغیریت $\frac{\sigma^2}{n}$ ہو گی، اور بلا منصوبہ متغیر

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \tag{24.126}$$

عمومی ہو گا جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو گی۔

آئیں مساوات 24.118 اخذ کرتے ہیں۔اس حصے کی شروع میں ہم نے چاہا کہ ہم ایسے دو بلا منصوبہ متغیرات Θ_1 اور Θ_2 حاصل کریں جو درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں

$$P(\Theta_1 \le \mu \le \Theta_2) = \gamma \tag{24.127}$$

جہاں γ منتخب کردہ ہے، اور نمونہ سے مشاہدے کے ذریعہ Θ_1 کی قیمت θ_1 اور Θ_2 کی قیمت θ_2 حاصل کرتے ہوئے درج ذیل وقفہ اعتماد حاصل کیا جاتا ہے۔

$$\text{اعتماد}\{\theta_1 \leq \mu \leq \theta_2\}$$

موجودہ صورت میں ایسا کرنے کی خاطر ہم γ کی قیمت 0 اور 1 کے بیچ منتخب کرتے ہیں اور ضمیمہ ج کی جدول ج.8 سے ایسا c حاصل کرتے ہیں جو $P(-c \leq Z \leq z) = \gamma$ کو مطمئن کرتا ہو۔ (جدول 24.8 میں γ کی مختلف قیمتوں کے لئے c کی قیمتیں اسی طرح حاصل کی گئی ہیں۔) مساوات 24.125 میں دیا گیا Z استعمال کرتے ہوئے عدم مساوات $-c \leq Z \leq c$ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$-c \leq \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \leq c$$

جس کو μ کی عدم مساوات میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔اس کو $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ سے ضرب کر $k = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$ لکھتے ہوئے $-k \leq \overline{X} - \mu \leq k$ ملتا ہے۔اس کو -1 سے ضرب دے کر $\overline{X}$ جمع کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\overline{X} + k \geq \mu \geq \overline{X} - k \tag{24.128}$$

یوں $P(-c \leq Z \leq c) = \gamma$ سے مراد $P(\overline{X} - k \leq \mu \leq \overline{X} + k) = \gamma$ ہے جو مساوات 24.127 کی طرز کا ہے جہاں $\Theta_1 = \overline{X} - k$ اور $\Theta_2 = \overline{X} + k$ ہوں گے۔یوں ہمارے مفروضوں کے تحت بلا منصوبہ متغیرات $\overline{X} - k$ اور $\overline{X} + k$ وہ قیمتیں اختیار کریں گے جن میں نا معلوم اوسط μ شامل ہو گا۔ جہاں تک n غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات $X_1, \cdots, X_n$ کی مشاہدہ سے حاصل، جدول 24.8 میں دی گئی، نمونی قیمتیں $x_1, \cdots, x_n$ ہیں، ہم دیکھتے ہیں کہ نمونی اوسط $\overline{x}$ مساوات 24.125 کی مشاہدہ سے حاصل قیمت ہے جس کو مساوات 24.128 میں پر کرتے ہوئے مساوات 24.118 حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 24.121 اخذ کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل درکار ہو گا۔

مسئلہ 24.21: فرض کریں کہ $X_1, \cdots, X_n$ غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہیں جن میں ہر ایک کی اوسط μ اور تغیریت σ^2 ہے۔تب بلا منصوبہ متغیر

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S} \tag{24.129}$$

کی تقسیم $n-1$ درجہ آزادی کی t تقسیم (صفحہ 1611) ہو گی؛ یہاں $\overline{X}$ کو مساوات 24.125 اور

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \overline{X}\right)^2 \tag{24.130}$$

دیتے ہیں۔ اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات 24.121 کا ثبوت مساوات 24.118 کی ثبوت کی طرح کا ہے۔ہم γ کی قیمت 0 اور 1 کے بیچ منتخب کرتے ہوئے ضمیمہ ج کی جدول ج.10 سے $n-1$ درجہ آزادی کا ایسا c حاصل کرتے ہیں جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$P(-c \le T \le c) = F(c) - F(-c) = \gamma \tag{24.131}$$

چونکہ t تقسیم تشاکلی ہے لہٰذا $F(-c) = 1 - F(c)$ ہو گا اور یوں مساوات 24.131 سے مساوات 24.120 حاصل ہو گا۔مساوات 24.131 میں پہلے کی طرح $-c \le T \le c$ کے تبادلہ سے

$$\overline{X} - K \le \mu \le \overline{X} + K \qquad K = \frac{cS}{\sqrt{n}} \tag{24.132}$$

حاصل ہو گا اور یوں مساوات 24.131 سے $P(\overline{X} - K \le \mu \le \overline{X} + K) = \gamma$ حاصل ہو گا۔مساوات 24.132 میں مشاہدے سے حاصل $\overline{X}$ کی قیمت $\overline{x}$ اور S^2 کی قیمت s^2 پر کرتے ہوئے مساوات 24.121 حاصل ہو گا۔

مساوات 24.124 ثابت کرنے کی خاطر ہمیں درج ذیل کی ضرورت ہو گی۔

مسئلہ 24.22: مسئلہ 24.21 کے مفروضوں کے تحت بلا منصوبہ متغیر

$$Y = (n-1)\,\frac{S^2}{\sigma^2} \tag{24.133}$$

کا تقسیم $n-1$ درجہ آزادی کا مربع خا تقسیم (صفحہ 1612) ہو گا؛ یہاں S^2 کو مساوات 24.130 میں پیش کیا گیا ہے۔

اس مسئلے کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات 24.124 کا ثبوت مساوات 24.118 اور مساوات 24.121 کی ثبوتوں کی طرح ہے۔ہم 0 اور 1 کے بیچ عدد γ منتخب کرتے ہیں۔ضمیمہ ج میں جدول سے ایسے c_1 اور c_2 کی حاصل کریں جو درج ذیل (مساوات 24.123) کو مطمئن کرتے ہوں۔

$$P(Y \le c_1) = F(c_1) = \frac{1}{2}(1-\gamma), \quad P(Y \le c_2) = F(c_2) = \frac{1}{2}(1+\gamma)$$

تفریق سے

$$P(c_1 \le Y \le c_2) = P(Y \le c_2) - P(Y \le c_1) = \gamma$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 24.133 میں دیے Y سے $c_1 \le Y \le c_2$ کے تبادلہ سے σ^2 کی عدم مساوات حاصل کرتے ہوئے ہم

$$\frac{n-1}{c_2}S^2 \le \sigma^2 \le \frac{n-1}{c_1}S^2$$

حاصل کرتے ہیں۔مشاہدے سے حاصل S^2 کی قیمت s^2 کرتے ہوئے مساوات 24.124 حاصل ہو گا۔

دیگر تقسیمات کی اوسط اور تغیریت کے وقفہ اعتماد

دیگر تقسیمات کے لئے بھی ہم وقفہ اعتماد کو جدول 24.8، جدول 24.9 اور جدول 24.10 سے حاصل کر سکتے ہیں، پس نمونوں کی جسامت بڑی رکھنی ہو گی۔یہ درج ذیل مسئلہ کہتا ہے۔

مسئلہ 24.23: (مسئلہ وسطی حد)
فرض کریں کہ $X_1, \cdots, X_m, \cdots$ غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات ہیں جن کی تقسیم ایک جیسی ہے لہٰذا ان کی اوسط μ ایک جیسی ہو گی اور ان کی تغیریت σ^2 ایک جیسی ہو گی۔فرض کریں کہ $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ ہے تب بلا منصوبہ متغیر

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \tag{24.134}$$

متقاربی عمومی[144] ہو گا جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہو گی، یعنی، Z_n کا تفاعل تقسیم $F_n(x)$ درج ذیل کو مطمئن کرے گا

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$$

جس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر $X_1, \cdots, X_n$ غیر تابع بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن کی ایک جیسی اوسط μ اور ایک جیسی تغیریت σ^2 ہو، تب ان کے مجموعہ $X = X_1 + \cdots + X_n$ کے درج ذیل خواص ہوں گے۔

---
[144] asymptotically normal

- (الف) X کی اوسط $n\mu$ اور تغیریت $n\sigma^2$ ہو گی (مسئلہ 24.16 اور مسئلہ 24.18)۔
- (ب) اگر یہ متغیرات عمومی ہوں تب X بھی عمومی ہو گا (مسئلہ 24.19)۔

اگر یہ متغیرات عمومی نہ ہوں تب مذکورہ بالا شق-ب درست نہیں ہو گا، البتہ بڑی n کی صورت میں X تخمیناً عمومی (مسئلہ 24.23) ہو گا اور یہی وجہ ہے کہ n کی قیمت بڑی لیتے ہوئے ان تراکیب کو دیگر تقسیمات کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 24.181: عمومی صورتوں میں نقطی اندازہ سے وقفی اندازہ کیوں زیادہ کار آمد ہوتے ہیں؟

سوال 24.182: 100 جسامت کا نمونہ جس کی اوسط 38.25 ہو استعمال کرتے ہوئے عمومی آبادی جس کی تغیریت $\sigma^2 = 9$ ہے کی اوسط μ کے لئے 95% وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.183: نمونی جسامت کو گھٹا کر 25 کرنے سے سوال 24.182 میں وقفہ اعتماد پر کیا اثر ہو گا؟
جواب: وقفہ اعتماد دگنا ہو جائے گا۔

سوال 24.184: نمونہ $28, 24, 31, 27, 22$ استعمال کرتے ہوئے معیاری انحراف $\sigma = 2.2$ والی عمومی آبادی کی اوسط کے لئے 99% وقفی اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.185: اوسط 16.30 اور جسامت 290 والا نمونہ استعمال کرتے ہوئے شکل 24.20 کی مدد سے تغیریت $\sigma^2 = 0.36$ والی عمومی آبادی کی اوسط کے لئے 99% وقفی اعتماد تعین کریں۔
جواب: اعتماد$\{16.21 \le \mu \le 16.39\}$

سوال 24.186: مساوات 24.118 میں 95% وقفہ اعتماد کی لمبائی (الف) 2σ (ب) σ حاصل کرنے کے لئے درکار نمونی جسامت n تلاش کریں۔

سوال 24.187 تا سوال 24.191 میں فرض کریں کہ دیا گیا نمونہ عمومی آبادی سے حاصل کیا گیا ہے۔آبادی کی اوسط μ کے لئے 99% وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.187: 325, 320, 325, 335
جواب: $\{307 \le \mu \le 345\}$اعتماد

سوال 24.188: 20 قابلوں کا نمونہ جس کی اوسط 10.20 cm اور تغیریت $\sigma^2 = 0.04\,\text{cm}^2$ ہو۔

سوال 24.189: سلاخ کی ملی میٹروں میں لمبائی 124, 122, 126, 127, 124
جواب: $\{120.6 \le \mu \le 128.6\}$اعتماد

سوال 24.190: پشاور تا لاہور موٹروے پر بلا منصوبہ 500 گاڑیوں کو روک کر ان کے بریک پرکھے جاتے ہیں جن میں سے 87 گاڑیوں کے بریک کمزور ثابت ہوتے ہیں۔اس نمونہ کو استعمال کرتے ہوئے موٹروے پر کمزور بریک والی گاڑیوں کی فی صد کے لئے 95 % وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.191: ثنائی تقسیم کی مقدار معلوم p کے لئے 99 % وقفہ اعتماد تعین کریں۔صفحہ 1539 پر جدول 24.6 کی آخری صف میں مشرف کے نتائج استعمال کریں۔
جواب: $\{0.492 \le p \le 0.509\}$اعتماد

سوال 24.192 تا سوال 24.192 میں عمومی آبادی سے نمونے حاصل کیے گیے ہیں۔آبادی کی تغیریت σ^2 کی 95 % وقفہ اعتماد تعین کریں۔

سوال 24.192: 145.3, 145.1, 145.4, 146.2

سوال 24.193: نمونی جسامت 30 اور تغیریت 0.0007 ہے۔
جواب: $\{0.00044 \le \sigma^2 \le 0.00127\}$اعتماد

سوال 24.194: درجہ حرارت کمرہ پر ایک مخصوص قسم کی دھات کی مطلق تنشی مضبوطی ($\text{kg}\,\text{cm}^{-2}$): 17.6, 19.7, 18.1, 17.8, 17.8, 17.7, 17.6, 17.7, 17.9, 18

سوال 24.195: یورینیم U^{35} کی انشقاق سے پیدا تاخیری نیوٹران گروہ (تیسرا گروہ جس کی نصف زندگی 6.2 سیکنڈ ہے) کی اوسط توانائی (keV): 435, 451, 430, 444, 438
جواب: $\{23 \le \sigma^2 \le 553\}$اعتماد

سوال 24.196: $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے سفر کرتے ہوئے ایک گاڑی کی فی کلومیٹر خارج کردہ CO (گرام): $10.8, 11.1, 11.2, 11, 11.3, 10.8, 10.9, 11.2$

سوال 24.197: اگر X عمومی ہو جس کی اوسط 27 اور تغیریت 16 ہو تب $-X$ ، $3X$ اور $5X-2$ کے تقسیم، اوسط اور تغیریت کیا ہوں گے؟
جواب: تینوں عمومی، اوسط $-27, 81, 133$ اور تغیریت $16, 144, 400$ ہوں گے۔

سوال 24.198: اگر X_1 اور X_2 غیر تابع عمومی بلا منصوبہ متغیرات ہوں جن کی اوسط بالترتیب 23 ، 4 اور تغیریت بالترتیب 3 ، 1 ہوں تب $4X_1 - X_2$ کی تقسیم، اوسط اور تغیریت کیا ہوں گے؟

سوال 24.199: ایک مشین Y کلوگرام کمیت کے ڈبوں میں X کلوگرام نمک بھرتی ہے جہاں X اور Y کی اوسط بالترتیب 100 کلوگرام، 5 کلوگرام اور تغیریت بالترتیب 1 کلوگرام، 0.5 کلوگرام ہیں۔ کتنے فی صد بھرے گیے ڈبوں کی کمیت 104 کلوگرام اور 106 کلوگرام کے بیچ ہو گی؟
جواب: $P(104 \leq Z \leq 106) = 63\,\%$

سوال 24.200: اگر سیمنٹ کی بوری کی کمیت X عمومی متغیر ہو جس کی اوسط $40\,\mathrm{kg}$ اور تغیریت $2\,\mathrm{kg}$ ہو تب ایک ٹرک میں کتنی بوریاں رکھی جا سکتی ہیں تا کہ بوریوں کی کل کمیت کا $2000\,\mathrm{kg}$ سے تجاوز کرنے کا احتمال $5\,\%$ ہو۔

24.15 قیاس کی پرکھ۔ فیصلے

بلا منصوبہ متغیر کی تقسیم کے بارے میں کچھ فرض کرنے کو شماریاتی قیاس[145] کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر کسی تقسیم کے بارے میں یہ فرض کرنا کہ اس کی اوسط 20.3 ہے شماریات قیاس ہو گا۔ ایسا عمل جس سے ہم معلوم کر سکیں کہ آیا ہمارا قیاس ٹھیک ہے اور ہم اس کو منظور[146] کریں یا کہ یہ غلط ہے اور ہم اس کو نا منظور[147] کریں شماریاتی پرکھ[148] کہلاتا ہے۔

[145] hypothesis
[146] accept, not reject
[147] reject
[148] test

یہ پرکھ عموماً استعمال کیسے جاتے ہیں اور ہم جاننا چاہیں گے کہ یہ کیوں اہم ہیں۔ہمیں عموماً ایسی صورتوں میں فیصلہ کرنا ہوتا ہے جہاں امکانی تبدیلیاں عمل پیرا ہوتی ہیں۔مثال کے طور پر اگر ہمیں دو ممکنات میں سے ایک کو چننا ہو، ہمارا فیصلہ کسی شماریاتی پرکھ پر منحصر ہو سکتا ہے۔

مثال کے طور پر اگر ہمیں ایک خراد کی مشین پر قابلے بنانا ہو جن کی قطر مخصوص حدود میں رہنا ضروری ہو اور ہم چاہتے ہیں کہ زیادہ سے زیادہ $2\,\%$ قابلے عیب دار ہوں تب ہم اس خراد پر بنائے گئے قابلوں سے 100 قابلوں کا نمونہ حاصل کرتے ہوئے قیاس $\sigma_0^2 = \sigma^2$ کو پرکھ کر دیکھیں گے کہ آیا مطابقتی آبادی کی تغیریت σ^2 کسی مخصوص قیمت σ_0^2 کے برابر ہے۔ σ_0^2 کو یوں منتخب کیا جاتا ہے کہ زیادہ سے زیادہ $2\,\%$ قابلے عیب دار حاصل ہوں۔اس کا متبادل پرکھ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ہے۔ہم پرکھ کے نتیجہ کو دیکھ کر قیاس $\sigma_0^2 = \sigma^2$ کو منظور کرتے ہوئے اسی خراد کو استعمال کرتے ہیں یا ہم اس کو نامنظور کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ہے اور اس سے بہتر خراد استعمال کرتے ہیں۔نامنظوری کی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ σ_0^2 سے σ^2 کا معنی خیز انحراف[149] پایا جاتا ہے، یعنی انحراف ناگزیر امکانی وجوہات کی بنا نہیں ہے بلکہ خراد کی ناقص پن کی وجہ سے ہے۔

ہو سکتا ہے کہ کسی دوسری جگہ پر ہمیں دو چیزوں کا آپس میں موازنہ کرنا ہو، مثلاً، دو ادویات، ایک کام سرانجام دینے کے دو تراکیب، ناپنے کے دو طریقے، دو مشینوں پر بنائے گئے چیزوں کی معیار، وغیرہ وغیرہ۔ موزوں پرکھ کے نتیجہ کے تحت ہم ایک دوائی کو منتخب کریں گے، کام کرنے کی بہتر ترکیب منتخب کریں گے، وغیرہ۔

قیاس عمومی درج ذیل سے حاصل ہو گا۔

- ضرورت معیاری پیداوار سے قیاس پیش کیا جا سکتا ہے۔(سخت نگرانی اور احتیاط کے ساتھ زیادہ تعداد کی چیزیں پیدا کرنے سے قابل حصول معیار کے بارے میں تجربہ حاصل ہوتا ہے۔)

- گزشتہ تجربہ سے حاصل معلوم قیمتوں پر قیاس منحصر ہو سکتا ہے۔

- قیاس ایک نظریہ پر مبنی ہو سکتا ہے جس کو آپ پرکھنا چاہتے ہیں۔

- بعض اوقات اتفاقی مشاہدے پر قیاس مبنی ہو سکتا ہے۔

---

[149] significant deviation

آئیں ایک تعارفی مثال سے شروع کرتے ہیں۔

مثال 24.22: قیاس کا پرکھ
ایک بچہ پیدا ہونے کو بلا منصوبہ تجربہ تصور کیا جا سکتا ہے جس کے دو ممکنہ انجام ہیں، یعنی لڑکا B اور لڑکی G۔ وجدانی طور پر ہم قیاس کر سکتے ہیں کہ دونوں کا احتمال ایک جیسا ہو گا البتہ کچھ لوگوں کا متبادل قیاس ہے کہ نو زائدہ بچوں میں لڑکوں کی تعداد زیادہ ہوتی ہے۔ہم قیاس کو پرکھنا چاہتے ہیں۔اگر ہم انجام B کے احتمال کو p سے ظاہر کریں تب ہم قیاس $p = 50\,\% = 0.5$ کو پرکھا جا سکتا ہے۔متبادل قیاس $p > 0.5$ کو بھی پرکھا جا سکتا ہے۔ہم ایسا ہی کرتے ہیں۔

اس پرکھ کے لئے ایک شہر میں ایک سال میں پیدا بچوں سے ہم $n = 3000$ نمونہ منتخب کرتے ہیں جن میں سے 1578 لڑکے ہیں۔

اگر قیاس درست ہو تب $n = 3000$ کی نمونہ میں اوسطاً تقریباً 1500 نو زائدہ لڑکے متوقع ہوں گے۔اگر متبادل درست ہو تب 1500 سے اوسطاً زائد لڑکے متوقع ہوں گے۔یوں اگر حقیقتاً نو زائدہ لڑکوں کی تعداد 1500 سے بہت زیادہ ہو تب ہم اس کو قیاس غلط ہونے کی نشانی تصور کرتے ہوئے قیاس کو نا منظور کریں گے۔

ہم سب سے پہلے ایک فاصل قیمت c متعین کرتے ہیں۔ متبادل کی بنا c کی قیمت 1500 سے زیادہ ہو گی۔(c تعین کرنے کا ایک طریقہ نیچے پیش کیا گیا ہے۔)تب نو زائد لڑکوں کی تعداد c سے زیادہ ہونے کی صورت میں ہم قیاس کو نا منظور کریں گے اور اگر نو زائد لڑکوں کی تعداد c سے زیادہ نہ ہو تب ہم قیاس کو منظور کریں گے۔

اب ہمیں c کی ایسی قیمت منتخب کرنی ہو گی جو معمولی بلا منصوبہ انحراف اور زیادہ معنی خیز انحراف میں تمیز کرے۔ہر شخص کی اپنی ایک منفرد رائے ہو سکتی ہے لیکن ہمیں حسابی دلائل کے تحت چلنا ہو گا جو موجودہ صورت میں بہت سادہ ہیں (جیسے آپ اب دیکھیں گے)۔

ہم c یوں تعین کرتے ہیں کہ قیاس درست ہونے کی صورت میں c سے زیادہ لڑکوں کا احتمال بہت کم ہو مثلاً α۔ روایتی طور پر $\alpha = 1\,\%$ یا $\alpha = 5\,\%$ منتخب کیا جاتا ہے۔ $\alpha = 1\,\%$ (یا $\alpha = 5\,\%$) منتخب کرتے ہوئے ہم 100 میں (یا 20 میں) 1 زیادہ لڑکوں کی صورت میں بھی قیاس کو نا منظور کرتے ہیں اگرچہ قیاس درست ہے۔اس نقطے پر ہم بعد میں غور کریں گے۔آئیں ہم $\alpha = 1\,\%$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل بلا منصوبہ متغیر پر غور کرتے ہیں۔

$$X = \text{بچوں کی 3000 پیدائشوں میں لڑکوں کی تعداد}$$

یہ فرض کرتے ہوئے قیاس درست ہے ہم c کی فاصل قیمت کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کرتے ہیں

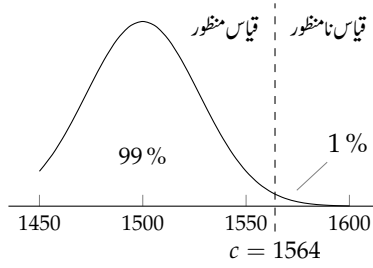
$$P(X > c)_{p=0.5} = \alpha = 0.01 \tag{24.135}$$

جہاں مفروضے کو زیر نوشت میں $p = 0.5$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔اگر لڑکوں کی حقیقی تعداد 1578 منتخب c سے زیادہ ہو تب ہم قیاس کو نا منظور کریں گے۔اگر $c \leq 1578$ ہو تب ہم قیاس کو منظور کریں گے۔

مساوات 24.135 سے c حاصل کرنے کی خاطر ہمیں X کی تقسیم معلوم ہونی چاہیے۔موجودہ مثال کے لئے ثنائی تقسیم کافی درست ہے۔یوں اگر قیاس درست ہو تب ثنائی تقسیم میں X کی $p = 0.5$ اور $n = 300$ ہوں گے۔اس تقسیم کو تخمینی طور پر ایسی عمومی تقسیم سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جس کی اوسط $\mu = np$ اور تغیریت $\sigma^2 = npq = 750$ ہو (حصہ 24.10)۔ (ہم اپنی آسانی کی خاطر مساوات 24.78 میں جزو 0.5 کو رد کرتے ہیں۔) تقسیم کی منحنی کو شکل 24.22 میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 24.135 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$P(X > c) = 1 - P(X \leq c) \approx 1 - \Theta\Big(\frac{c - 1500}{\sqrt{750}}\Big) = 0.01$$

ضمیمہ ج کی جدول ج.8 سے $\frac{c-1500}{\sqrt{750}} = 2.326$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $c = 1564$ ہو گا۔چونکہ $c < 1578$ ہے لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہوئے فیصلہ کرتے ہیں کہ $p > 0.5$ ہے۔یوں پرکھ مکمل ہوتا ہے۔

300 کے نمونہ کے لئے مساوات 24.135 میں X کو 300 پیدائشوں میں لڑکوں کی تعداد لیتے ہوئے فاصل قیمت $c = 170$ حاصل ہو گی اور نمونہ میں 158 (جو وہی فی صد ہے جو بڑی جسامت کے نمونہ میں تھی) لڑکے ہونے کی صورت میں $c > 158$ حاصل ہو گا اور ہم قیاس کو منظور کریں گے۔یہ ایک دلچسپ صورت حال ہے جس سے یہ حقیقت اجاگر ہوتی ہے کہ پرکھ کی افادیت نمونی جسامت n بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ہمیں n اتنا بڑا لینا ہو گا کہ عملی صورت میں زیر غور متغیر کے بارے میں درست نتائج حاصل ہوں۔ساتھ ہی ساتھ n زیادہ بڑا بھی نہیں ہونا چاہیے تاکہ وقت اور سرمایہ کا ضیاع نہ ہو۔عموماً صورتوں میں پہلے چھوٹا تجربہ کرتے ہوئے بہتر n کو تعین کرنا ممکن ہو گا۔ □

شکل 24.22: درست قیاس کی صورت میں X کی تخمینی تقسیم (مثال 24.22)۔فاصل قیمت $c = 1564$ ہے

متبادل کا تصور۔متبادل کی قسمیں

جس قیاس کو پرکھا جا رہا ہو اس کو **پسندیدہ قیاس**[150] کہتے ہیں اور اس کا مخالفانہ قیاس (مثلاً مثال 24.22 میں $p > 0.5$) کو متبادل قیاس[151] یا مختصراً متبادل کہتے ہیں۔عدد α (یا $100\alpha\%$) کو پرکھ کی **معنی خیز سطح**[152] کہتے ہیں جبکہ c **فاصل قیمت**[153] کہلاتا ہے۔جس خطے میں وہ قیمتیں پائی جاتی ہوں جن کے لئے قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے، اس خطے کو **خطہ نا منظوری**[154] یا **خطہ فاصل**[155] کہتے ہیں۔وہ خطہ جس میں پائے جانے والی قیمتوں کے لئے قیاس کو منظور کیا جاتا ہے **خطہ منظوری**[156] کہلاتا ہے۔ α کو عموماً $\alpha = 5\,\%$ منتخب کیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ ایک تقسیم میں مقدار معلوم θ کی قیمت نا معلوم ہے۔فرض کریں کہ ہم قیاس $\theta = \theta_0$ کو پرکھنا چاہتے ہیں۔اس کے درج ذیل تین متبادل قیاس پائے جاتے ہیں۔

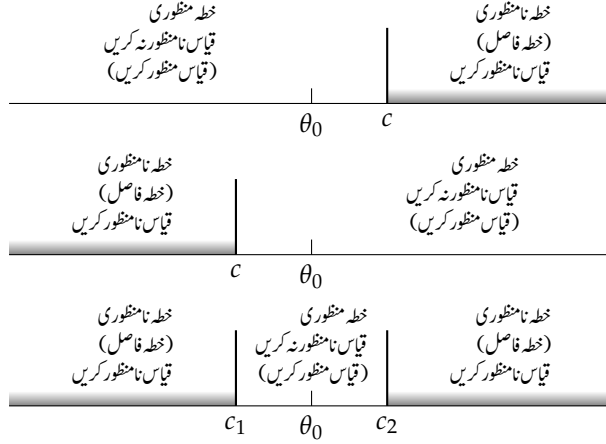
$$\theta > \theta_0 \tag{24.136}$$
$$\theta < \theta_0 \tag{24.137}$$
$$\theta \neq \theta_0 \tag{24.138}$$

مساوات 24.136 اور مساوات 24.137 کو **یک طرفہ متبادل**[157] جبکہ مساوات 24.138 کو **دو طرفہ متبادل**[158] کہتے ہیں۔مثال 24.22 میں دو طرفہ متبادل پر غور کیا گیا (جہاں $\theta_0 = p = 0.5$ اور $\theta_0 = p > 0.5$

default hypothesis[150]
alternative hypothesis[151]
significant level[152]
critical value[153]
rejection region[154]
critical region[155]
acceptance region[156]
one-sided alternatives[157]
two-sided alternative[158]

خطہ منظوری
قیاس نامنظور نہ کریں
(قیاس منظور کریں)
خطہ نامنظوری
(خطہ فاصل)
قیاس نامنظور کریں
θ_0 c

خطہ نامنظوری
(خطہ فاصل)
قیاس نامنظور کریں
خطہ منظوری
قیاس نامنظور نہ کریں
(قیاس منظور کریں)
c θ_0

خطہ نامنظوری
(خطہ فاصل)
قیاس نامنظور کریں
خطہ منظوری
قیاس نامنظور نہ کریں
(قیاس منظور کریں)
خطہ نامنظوری
(خطہ فاصل)
قیاس نامنظور کریں
c_1 θ_0 c_2

شکل 24.23: مساوات 24.136 کی متبادل (بالائی شکل)، مساوات 24.137 کی متبادل (درمیانی شکل) اور مساوات 24.138 کی متبادل (نچلی شکل) کی صورت میں پرکھ

تھے)؛ θ_0 کی دائیں جانب c پایا جاتا ہے اور خطہ نامنظور c سے لے کر ∞ ہو گا اور اس پرکھ کو **دایاں طرفہ پرکھ**[159] کہتے ہیں۔ مساوات 24.137 میں θ_0 کی بائیں جانب c پایا جاتا ہے، اور خطہ نامنظوری c سے $-\infty$ تک ہو گا (شکل 24.23) اور اس پرکھ کو **بایاں طرفہ پرکھ** کہیں گے۔ ان دونوں قسم کے پرکھ کو یک طرفہ پرکھ کہتے ہیں۔ مساوات 24.138 کی صورت میں ہمارے پاس دو فاصل قیمتیں c_1 اور $c_2\,(>c_1)$ ہوں گی اور خطہ نامنظوری c_1 تا $-\infty$ اور c_2 تا ∞ ہو گا، اور پرکھ کو **دوطرفہ پرکھ** کہیں گے۔

تینوں اقسام کے متبادل عملاً اہم ہیں۔ مثال کے طور پر مساوات 24.137 مادہ کی مضبوطی کی پرکھ میں ہمیں پیش آ سکتا ہے جہاں θ_0 درکار مضبوطی ہو سکتی ہے جبکہ متبادل غیر پسندیدہ کمزوری کو ظاہر کرے گا۔ درکار قیمت سے زیادہ مضبوطی کی صورت میں مادہ منظور کیا جائے گا لہٰذا اس کو علیحدہ سے پرکھنے کی ضرورت نہیں ہو گی۔ مساوات 24.138 ایسی صورت میں اہم ہو گا جیسے دھرا کی قطر جہاں θ_0 درکار قطر کو ظاہر کرے گا جبکہ اس سے کم یا زیادہ موٹائی دونوں برابر مسئلہ خیز ہوں گے لہٰذا درکار موٹائی کے دونوں جانب انحراف پر نظر رکھنا ضروری ہو گا۔

پرکھ میں غلطیوں کے اقسام

ہم اب متبادل، جس کو ہم اپنی آسانی کی خاطر واحد عدد θ_1 تصور کرتے ہیں، کے لحاظ سے قیاس $\theta=\theta_0$ کے پرکھ سے غلط فاصلوں کے خطرات پر غور کرتے ہیں۔ فرض کریں $\theta_1>\theta_0$ ہے لہٰذا ہمارے پاس دایاں طرفہ

[159] right-sided test

جدول 24.11: متبادل $\theta = \theta_1$ کے لحاظ سے قیاس $\theta = \theta_0$ کی پرکھ میں پہلی اور دوسری قسم کا خلل

		نا معلوم حقیقت	
		$\theta = \theta_0$	$\theta = \theta_1$
منظور	$\theta = \theta_0$	ٹھیک فیصلہ $P = 1 - \alpha$	دوسری قسم کا خلل $P = \beta$
	$\theta = \theta_1$	پہلی قسم کا خلل $P = \alpha$	ٹھیک فیصلہ $P = a - \beta$

پرکھ ہو گا۔ (بایاں طرفہ یا دو طرفہ پرکھ کے لئے بھی صورت حال ایسا ہی ہو گا۔) دیے گیے نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ سے ہم قیمت $\widehat{\theta} = g(x_1, \cdots, x_n)$ کا حساب لگاتے ہیں۔اگر $\widehat{\theta} > c$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے (جیسا مثال 24.22 میں کیا گیا)۔ اگر $\widehat{\theta} \leq c$ ہو تب قیاس کو منظور کیا جاتا ہے۔ $\widehat{\theta}$ کی قیمت کو بلا منصوبہ متغیر

$$\widehat{\Theta} = g(X_1, \cdots, X_n)$$

کی مشاہدے سے حاصل قیمت تصور کیا جا سکتا ہے چونکہ x_j کو X_j کی مشاہدے سے حاصل قیمت تصور کیا جا سکتا ہے، جہاں $j = 1, \cdots, n$ ہے۔ان پرکھ میں غلطی کرنے کے درج ذیل دو امکانات پائے جاتے ہیں۔

غلطی قسم اول

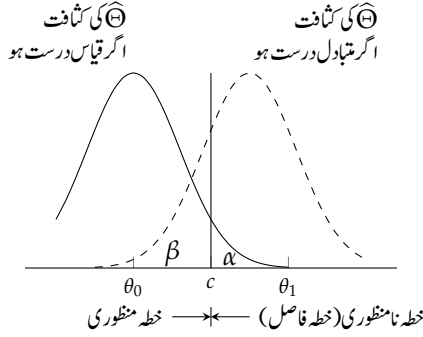
جدول 24.11 میں پرکھ درست ہے لیکن Θ قیمت $\widehat{\theta} > c$ اختیار کرتا ہے جس کی بنا اس پرکھ کو نا منظور کیا جاتا ہے (لہٰذا متبادل کو منظور کیا جاتا ہے) ظاہر ہے کہ ایسی غلطی کا احتمال

$$P(\widehat{\Theta} > c)_{\theta=\theta_0} = \alpha \tag{24.139}$$

ہو گا جو معنی خیز سطح کے برابر ہے۔

غلطی قسم دوم

جدول 24.11 پر نظر رکھیں۔قیاس غلط ہے لیکن اس کو منظور کیا جاتا ہے، چونکہ $\widehat{\Theta}$ قیمت $\widehat{\theta} \leq c$ اختیار کرتا ہے۔ایسی غلطی کرنے کے احتمال کو β سے ظاہر کیا جاتا ہے؛ لہٰذا

$$P(\widehat{\Theta} \leq c)_{\theta=\theta_1} = \beta \tag{24.140}$$

شکل 24.24: قیاس $\theta = \theta_0$ بالمقابل متبادل $\theta = \theta_1 \; (> \theta_0)$ کی پرکھ میں قسم اول اور دوم غلطیوں کی وضاحت

ہو گا۔ $\eta = 1 - \beta$ کو پرکھ کی **طاقت**[160] کہتے ہیں جو غلطی کی قسم دوم سے بچنے کا احتمال ہے۔

مساوات 24.139 اور مساوات 24.140 سے ظاہر ہے کہ α اور β دونوں c پر منحصر ہیں اور ہم چاہیں گے کہ ہم ایسا c منتخب کریں کہ غلطیاں کرنے کے احتمال کم سے کم ہوں۔البتہ شکل 24.24 سے ظاہر ہوتا ہے کہ یہ متصادم ضروریات ہیں۔ α گھٹانے کی خاطر c کو دائیں منتقل کرنا ہو گا جس سے β بڑھتا ہے۔ حقیقت میں ہم α (5% یا 1%) منتخب کر کے c تعین کرتے ہیں اور آخر میں β کا حساب کرتے ہیں۔ اگر β بڑی ہو جس سے طاقت $\eta = 1 - \beta$ چھوٹی حاصل ہو گی تب ہمیں زیادہ بڑا نمونہ (جس کی وجہ جلد سامنے آئے گی) لے کر پرکھ دہرانا چاہیے۔

اگر متبادل واحد عدد نہ ہو بلکہ مساوات 24.136 تا مساوات 24.138 کی طرح ہو تب β تفاعل ہو گا جو θ کا تابع ہو گا۔تفاعل $\beta(\theta)$ کو پرکھ کی **خاصیت کارکردگی**[161] کہتے ہیں اور اس کی منحنی کو **منحنی خاصیت کارکردگی** کہتے ہیں۔ظاہر ہے کہ ایسی صورت میں $\eta = 1 - \beta$ بھی θ کے تابع ہو گا اور تفاعل $\eta(\theta)$ کو پرکھ کا **تفاعل طاقت**[162] کہتے ہیں۔

ظاہر ہے کہ ایسی پرکھ جس کی بنا کوئی قیاس θ_0 منظور ہو سے یہ ظاہر نہیں ہوتا کہ یہی سب سے بہتر یا واحد قیاس ہے۔یوں لفظ "منظور" کی جگہ "نا منظور نہ کرنا" کہنا زیادہ بہتر ہو گا۔

---

[160] power
[161] operating characteristic
[162] power function

عمومی تقسیم کی صورت میں پرکھ

درج ذیل مثال عملاً اہم قیاس کے پرکھ کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 24.23: (معلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ)

فرض کریں کہ X بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی تغیریت $\sigma^2 = 9$ ہے۔ نمونی جسامت $n = 10$ لیتے ہوئے قیاس $\mu = \mu_0 = 24$ کو درج ذیل تین متبادل کے بالمقابل پرکھیں۔

$$\text{(الف)}\ \mu > \mu_0 \quad \text{(ب)}\ \mu < \mu_0 \quad \text{(پ)}\ \mu \neq \mu_0$$

حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 0.05$ منتخب کرتے ہیں۔ اوسط کی اندازاً قیمت درج ذیل سے حاصل ہو گی۔

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots , X_n)$$

اگر قیاس درست ہو تب X عمومی ہو گا جس کی اوسط $\mu = 24$ اور تغیریت $\frac{\sigma^2}{n} = 0.9$ ہو گی (مسئلہ 24.20)۔ لہٰذا ہم فاصل قیمت c کو ضمیمہ ج کی جدول ج.8 سے حاصل کر سکتے ہیں۔

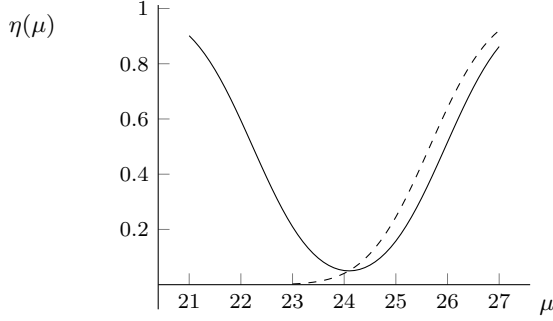
صورت الف: ہم $P(\overline{X} \le c)_{\mu=24} = \alpha = 0.05$ سے c تعین کرتے ہیں۔

$$P(\overline{X} \le c)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول ج.8 سے $\frac{c-24}{\sqrt{0.9}} = 1.645$ یعنی $c = 25.56$ حاصل ہوتا ہے جو μ_0 سے بڑی قیمت ہے (اور جو شکل 24.23 میں سب سے اوپر دکھائی گئی صورت ہے)۔ اگر $\overline{x} \le 25.56$ ہو تب قیاس کو منظور کیا جائے گا۔ اگر $\overline{x} > 25.56$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جائے گا۔ پرکھ کی طاقت درج ذیل ہو گی (شکل 24.25 الف)۔

$$\begin{aligned}\eta(\mu) &= P(\overline{X} > 25.56)_\mu = 1 - P(\overline{X} \le 25.56)_\mu \\ &= 1 - \Phi\Big(\frac{25.56-\mu}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \Phi(26.94 - 1.05\mu)\end{aligned} \tag{24.141}$$

صورت ب: فاصل قیمت c کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$P(\overline{X} \le c)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\Big) = \alpha = 0.05$$

شکل 24.25: طاقت $\eta(\mu)$؛ مثال 24.23 الف (نقطہ دار خط) اور پ (ٹھوس خط)

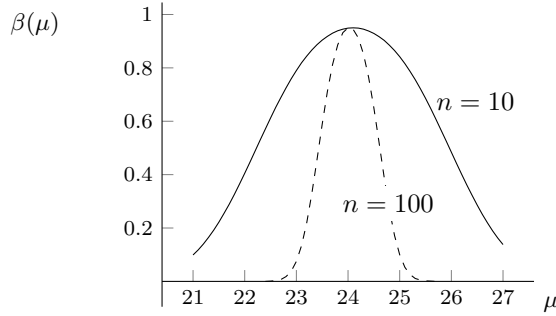
ضمیمہ ج کی جدول ج.8 سے $c = 24 - 1.56 = 22.24$ ملتا ہے۔ اگر $\overline{x} \geq 22.44$ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔ اگر $\overline{x} < 22.44$ ہو تب ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔ پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے۔

$$\eta(\mu) = P(\overline{X} \leq 22.44)_{\mu} = \Phi\Big(\frac{22.44 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) = \Phi(23.65 - 1.05\mu) \tag{24.142}$$

صورت پ: چونکہ عمومی تقسیم تشاکلی ہے، ہم $\mu = 24$ سے c_1 اور c_2 کو ایک جیسے فاصلے پر چن کر، مثلاً $c_1 = 24 - k$ اور $c_2 = 24 + k$ ، مستقل k کو درج ذیل سے تعین کرتے ہیں۔

$$P(24 - k \leq \overline{X} \leq 24 + k)_{\mu=24} = \Phi\Big(\frac{k}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(-\frac{k}{\sqrt{0.9}}\Big) = 1 - \alpha = 0.95$$

ضمیمہ ج کی جدول ج.8 سے $\frac{k}{\sqrt{0.9}} = 1.960$ یعنی $k = 1.86$ حاصل ہو گا۔ یوں $c_1 = 24 - 1.86 = 22.14$ اور $c_2 = 24 + 1.86 = 25.86$ ہوں گے۔ اگر $\overline{x}$ کی قیمت c_1 سے چھوٹی نہ ہو اور c_2 سے بڑی نہ ہو تب ہم قیاس کو منظور کرتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں۔ پرکھ کی طاقت درج ذیل ہے (شکل 24.25 پ)۔

$$\begin{aligned}
\eta(\mu) &= P(\overline{X} < 22.14)_{\mu} + P(\overline{X} > 25.86)_{\mu} \\
&= P(\overline{X} < 22.14)_{\mu} + 1 - P(\overline{X} \leq 25.86)_{\mu} \\
&= 1 + \Phi\Big(\frac{22.14 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(\frac{25.86 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) \\
&= 1 + \Phi(23.34 - 1.05\mu) - \Phi(27.26 - 1.05\mu)
\end{aligned} \tag{24.143}$$

شکل 24.26: دو مختلف جسامت n کے لئے خاصیت کارکردگی کے منحنیات۔ (مثال 24.23-پ)

نتیجتاً خاصیت کارکردگی $\beta(\mu) = 1 - \eta(\mu)$ درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= \Phi\Big(\frac{24.59 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big) - \Phi\Big(\frac{23.41 - \mu}{\sqrt{0.9}}\Big)\\ &= \Phi(81.97 - 3.33\mu) - \Phi(78.03 - 3.33\mu)\end{aligned}$$

شکل 24.26 سے ظاہر ہے کہ $n = 10$ کی خاصیت کارکردگی کی مطابقتی منحنی کی ڈھلوان زیادہ ہے۔اس کا مطلب ہے کہ n بڑھانے سے بہتر پرکھ حاصل ہوتا ہے۔کسی بھی عملی استعمال میں n کو کم سے کم لیکن اتنا زیادہ رکھا جاتا ہے کہ پرکھ μ اور μ_0 میں انحراف، جس میں ہم دلچسپی رکھتے ہیں، کو واضح کرے۔ مثال کے طور پر اگر انحراف ہماری دلچسپی ∓ 2 اکائی ہو، ہم شکل سے دیکھتے ہیں کہ $n = 10$ بہت کم ہو گا چونکہ جب $\mu = 24 - 2 = 22$ یا $\mu = 24 + 2 = 26$ ہو تب β تقریباً $50\,\%$ ہو گا۔اس کے برعکس، $n = 100$ اس صورت کافی ہو گا۔ □

مثال 24.24: نامعلوم تغیریت کی عمومی تقسیم کی اوسط کا پرکھ

رسی کی تنشی مضبوطی $n = 16$ کا نمونہ لے کر ناپی گئی۔نمونی اوسط $\bar{x} = 4482\,\text{kg}$ اور نمونی معیاری انحراف $s = 115\,\text{kg}$ حاصل ہوئے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ تنشی مضبوطی عمومی بلا منصوبہ متغیر ہے۔ قیاس $\mu_0 = 4500\,\text{kg}$ کو متبادل $\mu_1 = 4400\,\text{kg}$ کے مقابلے میں پرکھیں۔یہاں μ_0 وہ قیمت ہو سکتی ہے جو پیداکار نے فراہم کی ہو جبکہ μ_1 سابقہ تجربات کا نتیجہ ہو سکتا ہے۔

حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔اگر قیاس درست ہو تب مسئلہ 24.21 کے تحت بلا

منصوبہ متغیر

$$T=\sqrt{n}\ \frac{\overline{X}-\mu_0}{S}=4\ \frac{\overline{X}-4500}{S}$$

کا t تقسیم $n-1=15$ درجہ آزادی کا ہو گا۔ فاصل قیمت c کو درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے گا۔

$$P(T<c)_{\mu_0}=\alpha=0.05$$

ضمیمہ ج کی جدول ج.10 سے $c=-1.75$ حاصل ہو گا۔نمونہ سے T کی مشاہدہ سے حاصل قیمت $t=\frac{4(4482-4500)}{115}=-0.626$ ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $t>c$ ہے لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔پرکھ کی طاقت کی اعدادی قیمتیں حاصل کرنے کی خاطر ہمیں مزید جدول بند قیمتیں درکار ہوں گی جن پر اس کتاب میں غور نہیں کیا جائے گا۔ □

مثال 24.25: **(عمومی تقسیم کی تغیریت کی پرکھ)**
عمومی آبادی کے $n=15$ جسامت اور نمونی تغیریت $s^2=13$ کے نمونہ سے قیاس $\sigma^2=\sigma_0^2=10$ کو متبادل $\sigma^2=\sigma_1^2=20$ میں مقابلے میں پرکھیں۔
حل: ہم معنی خیز سطح $\alpha=5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔اگر قیاس درست ہو تب

$$Y=(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}=14\frac{S^2}{10}=1.4S^2$$

کا مربع خا تقسیم $n-1=14$ درجہ آزادی کا ہو گا (مسئلہ 24.22)۔ضمیمہ ج کی جدول ج.11 اور درج ذیل سے 14 درجہ آزادی کے لئے $c=23.68$ حاصل ہو گا

$$P(Y>c)=\alpha=0.05\qquad\Longrightarrow\qquad P(Y\leq c)=0.95$$

جو Y کی فاصل قیمت ہے۔یوں $S^2=\frac{\sigma_0^2Y}{n-1}=0.714Y$ کا مطابقتی فاصل قیمت $c^*=0.714\cdot 23.68=16.91$ ہو گا۔چونکہ $s^2<c^*$ ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں،

اگر متبادل درست ہو تب متغیر

$$Y_1=14\frac{S^2}{\sigma_1^2}=0.7S^2$$

کے مربع خا تقسیم کا درجہ آزادی 14 ہو گا۔یوں ہمارے پرکھ کی طاقت

$$\eta = P(S^2 > c^*)_{\sigma^2=20} = P(Y_1 > 0.7c^*)_{\sigma^2=20} = 1 - P(Y_1 \leq 11.84)_{\sigma^2 0} \approx 62\,\%$$

ہو گی اور ہم دیکھتے ہیں قسم دوم غلطی کا امکان (جو $38\,\%$ ہے) بہت زیادہ ہے جس کو کم کرنے کے لئے نمونی جسامت بڑھانی ضروری ہے۔ □

مثال 24.26: **دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا آپس میں موازنہ**

نا معلوم اوسط μ_1 کی عمومی تقسیم کا نمونہ $x_1, \cdots, x_{n1}$ اور دوسری عمومی تقسیم جس کی اوسط μ_2 نا معلوم ہو کا نمونہ $y_1, \cdots, y_{n2}$ استعمال کرتے ہوئے ہم قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو متبادل مثلاً $\mu_1 > \mu_2$ کے مقابلے میں پرکھنا چاہتے ہیں۔تغیرات جاننا ضروری نہیں ہے لیکن انہیں ایک جیسا[163] تصور کیا جاتا ہے۔دو صورتیں عملاً اہم ہیں۔

پہلی صورت: نمونوں کی جسامت ایک جیسی ہے۔مزید پہلے نمونہ کی ہر قیمت کا دوسرے نمونہ میں مطابقتی ٹھیک ایک قیمت پایا جاتا ہے، چونکہ مطابقتی قیمتیں ایک ہی انسان یا چیز کی بدولت پائی جاتی ہیں (جوڑی دار موازنہ[164])؛مثال کے طور پر ایک ہی چیز کی دو مختلف طریقوں سے ناپ، یا ایک ہی جانور کی دو آنکھوں کی ناپ، یا زیادہ عمومی طور پر جہاں ہم کہہ سکتے ہیں کہ نمونوں کی جوڑی قیمتیں ایک جیسے انسانوں یا چیزوں (مثلاً جڑواں بھائی، گاڑھی کے اگلے ٹائر، وغیرہ) سے حاصل کی گئی ہوں۔تب ہم مطابقتی قیمتوں کا فرق لے کر، مثال 24.24 میں دی ترکیب استعمال کرتے ہوئے، اس قیاس کو پرکھیں گے کہ ان فرق کی مطابقتی آبادی کی اوسط 0 ہے۔اگر ممکن ہو تب ہم اسی ترکیب کو استعمال کریں گے ورنہ ہمیں درج ذیل ترکیب استعمال کرنی ہو گی۔

دوسری صورت: دونوں نمونے غیر تابع ہیں اور ان کی جسامت مختلف ہو سکتی ہے۔تب ہم درج ذیل طریقے سے بڑھتے ہیں۔فرض کریں کہ متبادل $\mu_1 > \mu_2$ ہے۔ہم معنی خیز سطح α منتخب کرتے ہیں۔ہم نمونی اوسط $\overline{x}$ ، $\overline{y}$ اور $(n_1-1)s_1^2$ ، $(n-1)s_2^2$ کا حساب کرتے ہیں جہاں s_1^2 اور s_2^2 نمونی تغیریت ہیں۔ضمیمہ ج کی جدول ج.10 میں $n_1 + n_2 - 2$ درجہ آزادی لیتے ہوئے ہم c کو

$$P(T \leq c) = 1 - \alpha \tag{24.144}$$

سے تعین کرتے ہیں۔آخر میں ہم درج ذیل کا حساب کرتے ہیں۔

$$t_0 = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \; \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}} \tag{24.145}$$

---

[163] اگر اگلے مثال کا پرکھ واضح کرے کہ تغیرات میں واضح فرق پایا جاتا ہے تب ایک جیسے $n_1 = n_2 = n$ ، مثلاً 30 $n > 30$ منتخب کرتے ہوئے اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ مساوات تخمیناً عمومی بلا منصوبہ متغیر، جس کی اوسط 0 اور تغیریت 1 ہے، کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے، اور مثال 24.23 کی طرز پر حل کریں۔

[164] paired comparison

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اگر قیاس درست ہو تب یہ t تقسیم کے $n_1 + n_2 - 2$ درجہ آزادی کے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے۔اگر $t_0 \leq c$ ہو تب قیاس کو نا منظور نہیں کیا جاتا ہے۔اگر $t_0 > c$ ہو تب قیاس کو نا منظور کیا جاتا ہے۔

اگر متبادل $\mu_1 \neq \mu_2$ ہو تب مساوات 24.144 کی جگہ درج ذیل استعمال کیا جائے گا۔

$$P(T \leq c_1) = 0.5\alpha, \quad P(T \leq c_2) = 1 - 0.5\alpha \tag{24.144*}$$

دھیان رہے کہ ایک جیسی نمونی جسامت $n_1 = n_2 = n$ کے لئے مساوات 24.145 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$t_0 = \sqrt{n} \; \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{s_1^2 - s_2^2}} \tag{24.146}$$

اس کی وضاحت کے لئے آئیں درج ذیل دو نمونوں پر غور کرتے ہیں جو دو مختلف حالات میں ایک ہی کام پر مزدور کی کارکردگی ہے۔

105	108	86	103	103	107	124	105
89	92	84	97	103	107	111	97

فرض کریں کہ مطابقتی آبادی عمومی ہے اور ان کی تغیریت ایک جیسی ہے۔آئیں قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو متبادل $\mu_1 \neq \mu_2$ کے مقابلے میں پرکھیں۔(تغیریت کی ایک جیسا ہونے کو اگلی مثال میں استعمال کیا جائے گا۔)
حل: ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\overline{x} = 105.125, \quad \overline{y} = 97.500, \quad s_1^2 = 106.125, \quad s_2^2 = 84.000$$

ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔مساوات 24.144* میں $0.5\alpha = 2.5\,\%$ ، $1 - 0.5\alpha = 97.5\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول ج.10 میں 14 درجہ آزادی سے $c_1 = -2.15$ اور $c_2 = 2.15$ حاصل ہوتے ہیں۔مساوات 24.146 میں $n = 8$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$t_0 = \frac{\sqrt{8} \cdot 7.625}{\sqrt{190.125}} = 1.56$$

چونکہ $c_1 \leq t_0 \leq c_2$ ہے ہم دونوں صورتوں میں ایک جیسی اوسط کے قیاس $\mu_1 = \mu_2$ کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔

پہلی صورت اس مثال پر لاگو ہوتی ہے چونکہ پہلی دونوں نمونوں کی پہلی نمونی قیمت ایک قسم کے کام کے لئے حاصل کی گئی۔اسی طرح دونوں نمونوں کی دوسری نمونی قیمت کسی دوسرے کام کے لئے حاصل کی گئی، وغیرہ۔یوں ہم ان نمونی قیمتوں کا مطابقتی فرق

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8$$

اور مثال 24.24 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے قیاس $\mu = 0$ پرکھ سکتے ہیں جہاں μ اس فرق کی اوسط ہے۔ہم اس کا منطقی متبادل $\mu \neq 0$ لیتے ہیں۔نمونی اوسط $\bar{d} = 7.625$ اور نمونی تغیریت $s^2 = 45.696$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$t = \frac{\sqrt{8}(7.625 - 0)}{\sqrt{45.696}} = 3.19$$

$P(T \leq c_1) = 2.5\,\%$ ، $P(T \leq c_2) = 97.5\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول ج.10 میں $n - 1 = 7$ درجہ آزادی سے $c_1 = -2.37$ اور $c_2 = 2.37$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہیں چونکہ $t = 3.19$ معلوم شدہ c_1 اور c_2 کے بیچ نہیں پایا جاتا ہے۔اس طرح ہمارا موجودہ پرکھ، جو اسی نمونوں پر مبنی ہے لیکن زیادہ معلومات کو استعمال کرتا ہے، دکھاتا ہے کہ نتائج میں فرق کافی ہے۔ □

مثال 24.27: (دو عمومی تقسیمات کی تغیریت کا موازنہ)

گزشتہ مثال کے دو نمونے استعمال کرتے ہوئے قیاس $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ کو پرکھیں۔فرض کریں کہ مطابقتی آبادیاں عمومی ہیں اور تجربہ کی نوعیت سے متبادل $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ہو گا۔

حل: ہم $s_1^2 = 106.125$ اور $s_2^2 = 84.000$ حاصل کرتے ہیں۔ہم معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔ $P(V \leq c) = 1 - \alpha = 95\,\%$ اور ضمیمہ ج کی جدول ج.12 میں $(n_1 - 1, n_2 - 1) = (7, 7)$ درجہ آزادی سے $c = 3.79$ تعین ہوتا ہے۔ہم آخر میں $v_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.26$ حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $v_0 \leq c$ ہے ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔اگر $v_0 > c$ ہوتا ہم اس کو نا منظور کرتے۔

قیاس درست ہونے کی صورت میں v_0 ایسے بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہے جس کی تقسیم درجہ آزادی $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ کی F تقسیم[165] ہے۔ (m, n) درجہ آزادی کے F تقسیم[166] کا تفاعل تقسیم

---

[165] F-distribution

[166] انگلستانی ماہر جینیات رونلڈ ایلمر فشر [1890-1962]

درج ذیل ہے

$$F(z)=\begin{cases}K_{mn}\int_0^z t^{\frac{m-2}{2}}(mt+n)^{-\frac{m+n}{2}}\,\mathrm{d}t & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases} \tag{24.147}$$

جہاں $K_{mn}=m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}$ ہے۔اس کو ضمیمہ ج کی جدول ج.12 میں پیش کیا گیا ہے۔ □

سوالات

سوال 24.201: صفحہ 1539 پر جدول 24.6 میں امجد کے مواد کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھیں کہ سکہ منصفانہ ہے، یعنی خط اور شیر کا احتمال ایک جیسا ہے۔ $\alpha=5\%$ منتخب کریں۔
جواب: اگر قیاس $p=0.5$ درست ہو تب " 4040 کوششوں میں خط کی تعداد $=X$ " تقریباً عمومی ہو گی جس کی اوسط $\mu=2020$ اور تغیریت $\sigma^2=1010$ ہو گی (حصہ 24.10)۔
$P(X\le c)=\Phi(\frac{c-2020}{\sqrt{1010}})=0.95,\ \ c=2072>2048$ ہے لہٰذا قیاس نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.202: مشرف کا مواد استعمال کرتے ہوئے سوال 24.201 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.203: عمومیت تصور کرتے ہوئے اور $\sigma^2=4$ لیتے ہوئے قیاس $\mu=15.0$ کو متبادل (الف) $\mu=12.0$ اور (ب) $\mu=15.8$ کے بالمقابل پرکھیں۔نمونی جسامت 10 اور نمونی اوسط $\overline{x}=14$ لیں جبکہ $\alpha=5\%$ منتخب کریں۔
جواب: (الف) $c=13.96>12.00$ ہے۔ قیاس کو نامنظور کریں۔
(ب) $c=16.04>15.80$ ہے۔قیاس کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.204: اگر بڑی نمونی جسامت، مثلاً 100 ، استعمال کی جائے تب سوال 24.203 میں باقی مواد ($\overline{x}=14$ ، $\alpha=5\%$ ، وغیرہ) تبدیل کیے بغیر نتیجے میں کیا تبدیلی پیدا ہو گی؟

سوال 24.205: دو طرفہ پرکھ، 5% سطح پر استعمال کرتے ہوئے سوال 24.203 میں خطہ نامنظوری تلاش کریں؟
جواب: $\mu<13.76$ یا $\mu>16.24$

سوال 24.206: سوال 24.203-الف میں پرکھ کی طاقت تلاش کریں۔

سوال 24.207: مثال 24.23-الف اور ب کی خاصیت کارکردگی کو ترسیم کریں۔

سوال 24.208: دکھائیں کہ عمومی تقسیم میں قیاس $H_0: \mu = \mu_0$ اور متبادل $H_1: \mu = \mu_1$ کی پرکھ میں دو اقسام کی غلطیوں کو نمونی جسامت کافی بڑھا کر جتنا چاہیں کم (ما سوائے صفر کرنے کے) کیا جا سکتا ہے۔

سوال 24.209: $\mu = 0$ کو $\mu > 0$ کے بالمقابل سطح $\alpha = 5\,\%$ پر پرکھیں۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے نمونہ $1, -1, 1, 3, -8, 6, 0$ لیں جو مصنوعی سیارہ ٹلسٹار کی 143 ویں گردش میں مدار سے مضرب 0.01 ریڈیئن انحراف ہے۔

جواب: $t = \sqrt{7}\frac{0.286-0}{4.31} = 0.18 < c = 1.94$ ہے لہٰذا قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.210: مثال 24.1 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے قیاس $\mu = 0.80\,\text{cm}$ (ڈبے پر درج لمبائی) کو متبادل $\mu \neq 0.80\,\text{cm}$ کے مقابل پرکھیں۔ (عمومیت تصور کرتے ہوئے $\alpha = 5\,\%$ لیں۔)

سوال 24.211: ایک مشین ڈبوں میں فی ڈبہ $1000\,\text{g}$ تیل بھرتی ہے۔آپ جاننا چاہتے ہیں کہ آیا $\alpha = 5\,\%$ سطح پر اوسط کی درکار کمیت $1000\,\text{g}$ سے تجاوز زیادہ ہے۔اگر ایسا ہو تب مشین میں مطابقت پیدا کرنی ہو گی۔ایک قیاس اور متبادل بنائیں اور انہیں پرکھیں۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے نمونی جسامت 20 جس کی اوسط $996\,\text{g}$ اور معیاری انحراف $5\,\text{g}$ ہو استعمال کریں۔

جواب: متبادل $\mu \neq 1000$، $t = \sqrt{20}\frac{996-1000}{5} = -3.58 < c = -2.09$ (ضمیمہ ج جدول ج.10 درجہ آزادی 19)۔ قیاس $\mu = 1000\,\text{g}$ کو نا منظور کریں۔

سوال 24.212: ایک مخصوص ٹائر کی اوسط زندگی $32\,000\,\text{km}$ اور معیاری انحراف $4000\,\text{km}$ ہے۔کیا ٹائر کا پیداکار یہ دعویٰ کر سکتا ہے کہ اس کے بنائے ہوئے ٹائروں کی اوسط زندگی $30\,000\,\text{km}$ سے زیادہ ہے۔متبادل قیاس بناتے ہوئے اس کو $5\,\%$ سطح پر پرکھیں۔

سوال 24.213: برقی دباو کو بیک وقت دو عدد وولٹ پیما سے ناپا جاتا ہے۔ ان کے نتائج میں فرق

$$0.8, 0.2, -0.3, 0.1, 0.0, 0.5, 0.2$$

وولٹ ہے۔ عمومیت فرض کرتے ہوئے کیا ہم $5\,\%$ سطح کے لحاظ سے وثوق سے کہہ سکتے ہیں کہ دونوں وولٹ پیما کی پیمانہ بندی[167] میں کوئی معنی خیز فرق نہیں پایا جاتا ہے۔

---

[167] calibration

جواب: $\mu = 0$ کو متبادل $\mu \neq 0$ کے مقابلے میں پرکھیں۔ $t = 2.11 < c = 2.37$ (درجہ آزادی 7)۔ قیاس کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.214: ایک معیاری دوائی ایک مخصوص مرض میں مبتلا 70% مریضوں کو صحتیاب کرتی ہے اور ایک نئی دوائی پہلے 200 مریضوں میں سے 148 کو صحتیاب کرتی ہے۔ کیا $\alpha = 5\%$ لیتے ہوئے ہم وثوق سے کہہ سکتے ہیں کہ نئی دوائی زیادہ بہتر ہے؟

سوال 24.215: ماضی میں ایک مشین جو فی ڈبہ 25 kg چینی بھرتی تھی کا معیاری انحراف 0.4 kg تھا۔ قیاس $H_0 : \sigma = 0.4$ کو متبادل $H_1 : \sigma > 0.4$ کے بالمقابل پرکھیں۔ عمومیت تصور کرتے ہوئے نمونی جسامت 10 جس کی معیاری انحراف $\sigma = 0.4$ ہو لیں اور $\alpha = 5\%$ منتخب کریں۔
جواب: $14.06 = \frac{9 \cdot 0.5^2}{0.4^2} < \alpha = 5\%, c = 16.92$ ہے۔ قیاس کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.216: فرض کریں کہ معیاری انحراف کسی مخصوص حد سے کم، مثلاً، 5 گھنٹوں سے کم، ہونے کی صورت میں بیٹری سے چلنے والی مشینوں میں تمام بیٹریوں کو مخصوص مدت کے بعد بیک وقت تبدیل کرنا کم مہنگا پڑتا ہے بہ نسبت ہر بیٹری کو اس وقت تبدیل کرنے کے جب وہ خراب ہو جائے۔ ایک موزوں پرکھ بنا کر اس قیاس کو پرکھیں۔ عرصہ زندگی کے 28 قیمتیں جن کا معیاری انحراف $s = 3.5$ گھنٹے ہو استعمال کرتے ہوئے $\alpha = 5\%$ لیں۔ عمومیت تصور کریں۔

سوال 24.217: تیل کی قسم A کو 9 ایک جیسی گاڑیوں میں ایک جیسے حالات میں استعمال کیا گیا جنہوں نے اوسط 20.2 کلومیٹر فی لٹر اور معیاری انحراف 0.5 دیا۔ انہیں حالات میں تیل کی بہتر قسم B کو اس جیسی 10 گاڑیوں میں استعمال کیا گیا جن سے اوسط 21.8 اور معیاری انحراف 0.6 حاصل ہوا۔ کیا B بہت بہتر نتائج دیتا ہے؟ اس قیاس کو $\alpha = 5\%$ پر پرکھیں۔ عمومیت فرض کریں۔
جواب: $t_0 = \sqrt{\frac{10 \cdot 9 \cdot 17}{19}} \frac{21.8 - 20.2}{\sqrt{9 \cdot 0.6^2 + 8 \cdot 0.5^2}} = 6.3 > c = 1.74$ (درجہ آزادی 17 ہے۔)

سوال 24.218: ماسوائے عرصہ زندگی، بلب A اور B ایک جیسے ہیں۔ ایک خریدار دونوں قسم کے 100 بلب کو پرکھتا ہے۔ قسم A کی اوسط عرصہ زندگی 1120 h اور معیاری انحراف 75 h جبکہ B کی اوسط 1064 h اور معیاری انحراف 82 h حاصل ہوتے ہیں۔ کیا عرصہ زندگی میں معنی خیز فرق پایا جاتا ہے؟ (عمومیت فرض کرتے ہوئے $\alpha = 5\%$ سطح پر پرکھیں۔)

سوال 24.219: نمونی جسامت 10 اور 16 اور تغیریت $s_1^2 = 50$ اور $s_2^2 = 30$ لیں۔ عمومیت تصور کرتے ہوئے $\alpha = 5\%$ سطح پر قیاس $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ کو متبادل $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ کے بالمقابل

پر کھیں۔
جواب: $c = 2.59 \quad v_0 = \frac{50}{30} = 1.67 < c = 2.59$ [درجہ آزادی $(9, 15)$ ہے۔] قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.220: دو نمونے $50, 90, 100, 90, 110, 80$ اور $110, 110, 120, 110, 130, 110, 120$ لوہے کی ڈھلائی کے دوران دو مختلف بالٹیوں میں دو مختلف وقتوں پر درجہ حرارت $(^\circ\mathrm{C})$ میں فرق دیتی ہیں۔ کیا پہلے نمونہ کی تغیریت دوسرے سے زیادہ ہے؟ عمومیت فرض کریں اور $\alpha = 5\,\%$ لیں۔

24.16 ضبط معیار

پیداوار کا کوئی بھی عمل اتنا ٹھیک نہیں ہوتا ہے کہ تمام پیداوار مکمل طور پر ایک جیسی ہو۔ بہت ساری معمولی، غیر قابو وجوہات کی بنا ان میں ہر صورت معمولی فرق پایا جاتا ہے جس کو امکانی فرق تصور کیا جا سکتا ہے۔ یہ ضروری ہے کہ پیداوار کی درکار خاصیت کی قیمت درست ہو (مثلاً لمبائی، مضبوطی، یا جو بھی خاصیت کسی مخصوص صورت میں درکار ہو)۔ اس مقصد کے لئے اس قیاس کو پرکھا جاتا ہے کہ پیداوار درکار خاصیت، مثلاً $\mu = \mu_0$ ، رکھتے ہیں جہاں μ_0 درکار قیمت ہے۔ اگر ایسا پوری کھیپ کی پیداوار (مثلاً، 100000 پیچوں کی کھیپ) کے بعد کیا جائے تب پرکھ ہمیں بتائے گا کہ پیداوار کتنی اچھی یا کتنی خراب ہے لیکن ظاہر ہے کہ اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کوئی بہتری نہیں لا سکتے ہیں۔ بہتری لانے کے لئے ضروری ہے کہ پرکھ دوران پیداوار کیا جائے۔ ایسا عموماً مقررہ دورانیہ (مثلاً ہر 30 منٹ یا ہر گھنٹہ) بعد جاتا ہے اور اس کو ضبط معیار[168] کہتے ہیں۔ ہر مرتبہ ایک جیسی جسامت (عملاً 3 یا 10 اجزاء) کا نمونہ لیا جاتا ہے۔ قیاس نا منظور ہونے کی صورت میں عمل پیداوار روک کر اس وجہ کو تلاش کیا جاتا ہے جس کی بنا انحراف پیدا ہوا ہے۔

اگر ہم عمل پیدا وار کو روک دیں اگرچہ سب ٹھیک چل رہا ہو تب ہم غلطی قسم اول کر رہے ہوں گے۔ اگر خرابی کے باوجود ہم عمل پیداوار کو نا روکیں تب ہم غلطی قسم دوم کر رہے ہوں گے (حصہ 24.15)۔

ہر پرکھ کا نتیجہ کو ترسیمی صورت میں نقشہ ضبط[169] پر ظاہر[170] کیا جاتا ہے۔

---

[168] quality control
[169] control chart
[170] امریکی ماہر شماریات والٹر انڈرو شوہارٹ [1891-1967] نے یہ نقشہ 1924 میں تجویز کیا جو معیار کو قابو کرنے میں انتہائی موثر ثابت ہوا ہے۔

اوسط کا نقشہ ضبط

شکل 24.27 میں نقشہ ضبط کی مثال دکھائی گئی ہے۔اوسط کے نقشہ ضبط پر **نچلی حد ضبط**[171] LCL ، **وسطی خط ضبط**[172] CL اور **بالائی حد ضبط**[173] UCL دکھائے گئے ہیں۔ یہ حدود مثال 24.23-پ میں فاصل قیمتوں c_1 اور c_2 کے مطابقتی ہیں۔جیسے ہم نمونی اوسط نچلی حد ضبط یا بالائی حد ضبط سے تجاوز کر جائے ہم قیاس کو نا منظور کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ عمل پیداوار "بے قابو" ہے، یعنی، ہم کہتے ہیں کہ عمل پیداوار میں تبدیلی رو نما ہوئی ہے۔جب بھی کوئی نقطہ حدود ضبط سے تجاوز کرے عمل پیداوار میں مداخلت کی ضرورت ہو گی۔

اگر ہم حدود ضبط ڈھیلے رکھیں تب ہم عمل پیداوار میں نا پسندیدہ تبدیلی کو پکڑ نہیں پائیں گے۔اس کے بر عکس حدود ضبط بہت سخت رکھنے سے ہم بار بار عمل پیداوار کو روک کر نا پسندیدہ تبدیلی کی غیر موجود وجہ تلاش کرتے رہیں گے جس سے پیداوار بری طرح متاثر ہو گی۔عموماً معنی خیز سطح $\alpha = 1\%$ منتخب کی جاتی ہے۔صفحہ 1615 پر مسئلہ 24.20 اور ضمیمہ ج کی جدول ج.8 سے ہم دیکھتے ہیں کہ عمومی تقسیم کی صورت میں اوسط کے مطابقتی حد ضبط

$$\text{LCL} = \mu_0 - 2.58\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{اور} \quad \text{UCL} = \mu_0 + 2.58\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{24.148}$$

ہوں گے۔یہاں فرض کیا گیا ہے کہ ہمیں σ معلوم ہے۔اگر σ نا معلوم ہو تب پہلی 20 یا 30 نمونوں کی معیاری انحراف حاصل کر کے ان کی اوسط کو σ کی تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔شکل 24.27 میں اوسط کو لکیر سے جوڑا جاتا ہے جو محض نتائج کو واضح کرنے میں مدد دیتی ہے۔

تغیریت کا نقشہ ضبط

اوسط کے ساتھ ساتھ عموماً تغیریت، معیاری انحراف یا سعت کو بھی قابو رکھا جاتا ہے۔عمومی تقسیم کی صورت میں معیاری انحراف کا نقشہ ضبط بناتے ہوئے مثال 24.25 میں استعمال ترکیب بروئے کار لاتے ہوئے حدود ضبط تعین کیے جا سکتے ہیں۔روایتی طور پر صرف بالائی حد ضبط استعمال کیا جاتا ہے۔مثال 24.25 سے یہ حد

$$\text{UCL} = \frac{\sigma^{\ 2} c}{n-1} \tag{24.149}$$

ہو گا جہاں c کو مساوات

$$P(Y > c) = \alpha \quad \implies \quad P(Y \le c) = 1 - \alpha$$

---

[171] lower control limit (LCL)
[172] central control line (CL)
[173] upper control limit (UCL)

اور ضمیمہ ج کی جدول ج.11 (مربع خا تقسیم) سے $n-1$ درجہ آزادی کے لئے حاصل کیا جاتا ہے؛ یہاں نمونہ سے مشاہدے کے ذریعہ S^2 کی حاصل قیمت s^2 کا بالائی حد ضبط سے تجاوز کا احتمال α (5% یا 1%) ہے۔

اگر ہم تغیریت کے نقشہ ضبط میں نچلی حد ضبط اور بالائی حد ضبط استعمال کرنا چاہیں تب یہ حدود

$$\text{LCL} = \frac{\sigma^2 c_1}{n-1}, \quad \text{UCL} = \frac{\sigma^2 c_2}{n-1} \tag{24.150}$$

ہوں گے جہاں c_1 اور c_2 کو $n-1$ درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول ج.11 اور درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جائے گا۔

$$P(Y \le c_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(Y \le c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2} \tag{24.151}$$

معیاری انحراف کا نقشہ ضبط

تغیریت کے نقشہ ضبط کی طرح ہمیں بالائی حد ضبط

$$\text{UCL} = \frac{\sigma\sqrt{c}}{\sqrt{n-1}} \tag{24.152}$$

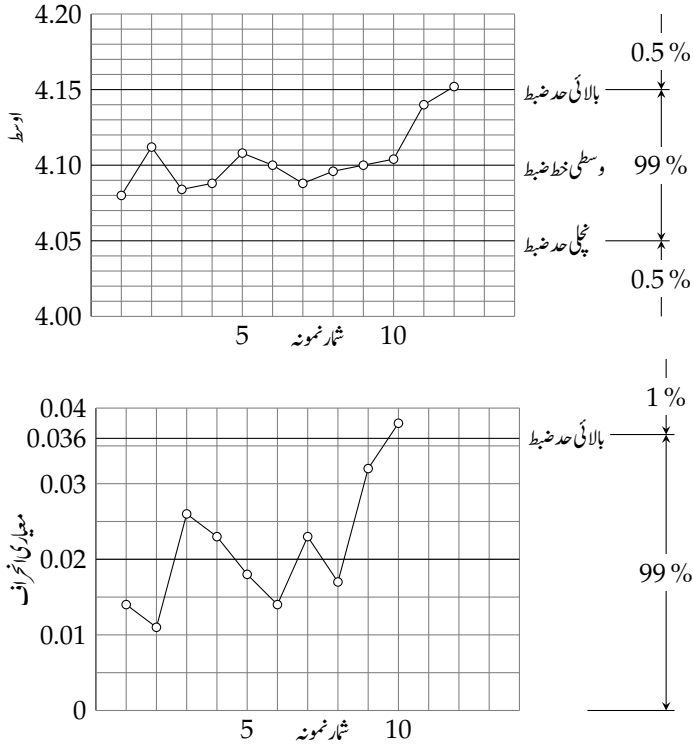
درکار ہو گا جس کو مساوات 24.149 سے حاصل کیا گیا ہے۔مثال کے طور پر جدول 24.12 میں $n=5$ ہے۔مطابقتی آبادی کو عمومی تصور کرتے ہوئے جس کی معیاری انحراف $\sigma = 0.02$ ہو، $\alpha = 1\%$ منتخب کرتے ہوئے 4 درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول ج.11 اور مساوات

$$P(Y \le c) = 1 - \alpha = 99\,\%$$

سے فاصل قیمت $c = 13.28$ حاصل ہوتی ہے۔یوں مساوات 24.152 سے

$$\text{UCL} = \frac{0.02\sqrt{13.28}}{\sqrt{4}} = 0.0365$$

حاصل ہو گا جس کو شکل 24.27 کے نچلے حصے میں دکھایا گیا ہے۔

معیاری انحراف کا نقشہ ضبط جس میں بالائی حد ضبط اور نچلا حد ضبط پائے جاتے ہوں کو مساوات 24.150 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

شکل 24.27: اوسط اور معیاری انحراف کے نقشہ ضبط برائے جدول 24.12

جدول 24.12: بارہ نمونے جہاں ہر نمونہ 5 قیمتوں (چھوٹی نلکیوں کے ملی میٹروں میں قطر) پر مشتمل ہے

نمونی شمار	نمونی قیمتیں					$\overline{x}$	s	R
1	4.06	4.08	4.08	4.08	4.10	4.080	0.014	0.04
2	4.10	4.10	4.12	4.12	4.12	4.112	0.011	0.02
3	4.06	4.06	4.08	4.10	4.12	4.084	0.026	0.06
4	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
5	4.08	4.10	4.12	4.12	4.12	4.108	0.018	0.04
6	4.08	4.10	4.10	4.10	4.12	4.100	0.014	0.04
7	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
8	4.08	4.08	4.10	4.10	4.12	4.096	0.017	0.04
9	4.06	4.08	4.10	4.12	4.14	4.100	0.032	0.08
10	4.06	4.08	4.10	4.12	4.16	4.104	0.038	0.10
11	4.12	4.14	4.14	4.14	4.16	4.140	0.014	0.04
12	4.14	4.14	4.16	4.16	4.16	4.152	0.011	0.02

سعت کا نقشہ ضبط

اگر ہم σ^2 یا σ کو قابو رکھتے ہوں تب ہمیں بالترتیب s^2 یا s کا حساب کرنا ہو گا۔ایسا کرنا غیر تربیت یافتہ شخص کے لئے مشکل ہوتا ہے لہٰذا ہم تغیریت یا معیاری انحراف کی حد ضبط کی جگہ سعت $R=$ (نمونہ کی زیادہ سے زیادہ قیمت منفی نمونہ کی کم سے کم قیمت) استعمال کرنا چاہیں گے۔عمومی تقسیم کی صورت میں یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ معیاری انحراف σ کی قیمت بلا منصوبہ متغیر R^* کی توقع کے راست متناسب ہے جس کی مشاہدے سے حاصل قیمت R ہو، یعنی $\sigma=\lambda_n E(R^*)$ ، جہاں جزو λ_n کی قیمت نمونی جسامت پر منحصر ہے اور اس کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_n=\sigma/E(R^*)$	0.89	0.59	0.49	0.43	0.40	0.37	0.35	0.34	0.32

n	12	14	16	18	20	30	40	50
$\lambda_n=\sigma/E(R^*)$	0.31	0.29	0.28	0.28	0.27	0.25	0.23	0.22

چونکہ R صرف دو نمونی قیمتوں پر منحصر ہے لہٰذا یہ نمونے کے بارے میں s کے لحاظ سے کم معلومات فراہم کرتا ہے۔ظاہر ہے کہ نمونی جسامت n جتنی بڑی ہو گی، s کی جگہ R استعمال کرنے سے، اتنی زیادہ معلومات ہم ضائع کریں گے۔عملاً اگر n کی قیمت 10 سے زائد ہو تب s استعمال کیا جاتا ہے۔

دھیان رہے کہ سعت سے معیاری انحراف کا جلدی سے اندازہ لگانا عملی استعمال میں کار آمد ثابت ہوتا ہے۔

سوالات

سوال 24.221: ایک مشین چکنا تیل کو ٹین کی بوتل میں یوں بھرتی ہے کہ عمومی آبادی حاصل ہو جس کی اوسط 1 لٹر اور معیاری انحراف 0.03 لٹر ہو۔ اوسط کے لئے شکل 24.27 کی طرح نقشہ درکار ہے۔ نمونی جسامت 6 فرض کرتے ہوئے نچلی حد ضبط اور بالائی حد ضبط تلاش کریں۔
جواب: نچلی حد ضبط $\text{LCL} = 1 - \frac{2.58 \cdot 0.03}{\sqrt{6}} = 0.968$ جبکہ بالائی حد ضبط $\text{UCL} = 1.032$

سوال 24.222: سوال 24.221 میں دکھائیں کہ $\alpha = 0.3\,\%$ سطح سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔ان کی اعدادی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\text{LCL} = \mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \text{UCL} = \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

سوال 24.223: معنی خیز سطح تبدیل کیے بغیر ہمیں سوال 24.221 میں نمونی جسامت کتنی رکھنی ہو گی تا کہ بالائی اور نچلی حد ضبط قریب قریب ہوں، مثلاً $\text{UCL} - \text{LCL} = 0.05$
جواب: $n = 10$

سوال 24.224: اگر ہم غیر عمومی آبادی کے لئے مساوات 24.148 کے حدود ضبط والا نقشہ ضبط استعمال کریں تب ان حدود کا کیا مطلب ہو گا؟

سوال 24.225: عمومی آبادی کی اوسط قابو کرتے ہوئے $\text{UCL} - \text{LCL}$ کو نصف کرنے کی خاطر نمونی جسامت کو کس طرح تبدیل کرنا ہو گا؟
جواب: نمونی جسامت کو 4 گنا بڑھانا ہو گا۔

سوال 24.226: قابلوں کی پیداوار میں سے 2 جسامت کے 10 نمونے لئے گئے۔ان کی لمبائی ملی میٹروں میں درج ذیل ہے۔

نمونی شمار	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لمبائی	27.4	27.4	27.5	27.3	27.9	27.6	27.6	27.8	27.5	27.3
	27.6	27.4	27.7	27.4	27.5	27.5	27.4	27.3	27.4	27.7

فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے جس کی اوسط 27.5 اور تغیریت 0.024 ہے۔مساوات 24.148 استعمال کرتے ہوئے اوسط کے لئے نقش ضبط بنائیں اور نمونی اوسط اس پر ترسیم کریں۔
جواب: $\frac{2.58\sqrt{0.024}}{\sqrt{2}} = 0.283, \text{UCL} = 27.783, \text{LCL} = 27.217$

سوال 24.227: لوہے کی چادر موٹائی کے درج ذیل نمونے 30 منٹ کے وقفوں پر حاصل کیے گئے۔ان کی اوسط کو نقش ضبط پر ترسیم کریں۔فرض کریں کہ آبادی عمومی ہے جس کی اوسط 5 اور معیاری انحراف 1.55 ہے۔

نمونی شمار	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
نمونی قیمتیں	3	3	5	7	7	4	5	6	5	5
	4	6	2	5	3	4	6	4	5	2
	8	6	5	4	6	3	4	6	6	5
	4	8	6	4	5	6	6	4	4	3

سوال 24.228: سعت کے نقشہ ضبط پر سوال 24.227 کے نمونی سعت کو ترسیم کریں۔

سوال 24.229: $\lambda_n = \frac{\sigma}{E(R^*)}$ بالمقابل n ترسیم کریں۔ λ_n متغیر n کا یک سر گھٹتا تفاعل ہے۔اس کی وجہ بیان کریں۔

سوال 24.230: حدود ضبط کے باہر اوسط کا نقطہ نظام میں خرابی کو ظاہر کرتی ہے۔اگر ہم (الف) 1σ حد، (ب) 2σ حد، منتخب کریں تب ہم کتنی بار نظام میں غیر موجود خرابی کو تلاش کرنے کی کوشش کریں گے۔(عمومیت فرض کریں۔)
جواب: تقریباً (5%) 30% صورتوں میں

سوال 24.231: ایک خود کار خراد کی مشین پر قابلے بنائے جاتے ہیں۔ مسلسل رگڑ سے پیدا تبدیلی، اوسط کی نقش ضبط پر کس طرح رونما ہو گی؟ خراد کی مشین میں یک دم تبدیلی کس طرح نقش ضبط پر نظر آئے گی؟

سوال 24.232: (عیب داروں کی تعداد) 3σ حدود ضبط کے لحاظ سے UCL ، CL اور LCL کے کلیات عیب دار کے نقشہ ضبط کے لئے تلاش کریں۔(فرض کریں کہ شماریاتی ضبط میں p عیب دار کو ظاہر کرتا ہے۔)

$$\text{UCL} = np + 3\sqrt{np(1-p)}, \text{CL} = np, \text{LCL} = np - 3\sqrt{np(1-p)}$$

سوال 24.233: **خاصیت کی نقش ضبط** برتنوں کی پیداوار سے جسامت 100 کے نمونے حاصل کیے گئے۔ عیب دار (رستا برتنوں) کی تعداد (اسی ترتیب سے) درج ذیل تھی۔

$$3\ 7\ 6\ 1\ 4\ 5\ 4\ 9\ 7\ 0\ 5\ 6\ 13\ 4\ 9\ 0\ 2\ 1\ 12\ 8$$

گزشتہ تجربہ سے ہم جانتے ہیں کہ اگر عمل پیداوار میں خرابی نہ ہو تب عیب دار کی اوسط تعداد $p\%$ ہوتی ہے۔ ثنائی تقسیم استعمال کرتے ہوئے عیب دار نقشہ ضبط (جس کو p نقشہ بھی کہتے ہیں) بنائیں، یعنی، $\text{LCL} = 0$ لیں اور 3σ حدود کے لئے حاصل عیب دار (فی صد) کو UCL لیں، جہاں بلا منصوبہ متغیر $\overline{X} =$ نمونہ میں فی صد عیب دار کی تغیریت σ^2 ہے۔ کیا عمل پیداوار قابو میں ہے؟

سوال 24.234: **فی اکائی عیب دار کی تعداد** فی اکائی عیب دار کے نقشہ (جس کو c نقشہ بھی کہتے ہیں) کو فی اکائی عیب دار X (مثلاً 10 میٹر کاغذ میں عیبوں کی تعداد، جہاز کے ایک پر میں غیر موجود کیلوں کی تعداد، وغیرہ) کو قابو کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ (الف) X کی تقسیم کو پوئسن تقسیم تصور کرتے ہوئے $\mu \mp 3\sigma$ کے لحاظ سے CL ، LCL اور UCL کے کلیات بنائیں۔ (ب) شیشے کی چادر میں عیب کے لئے **عمل قابو**[174] کے لئے CL ، LCL اور UCL تلاش کریں؛ فرض کریں کہ جب عمل پیداوار شماریاتی قابو میں ہو تب اوسطاً یہ عدد 2.5 فی چادر ہے۔

24.17 قبولیت نمونہ

بڑے پیمانہ پر پیداوار میں، جہاں پیداکار خریدار کو N اشیاء کی کھیپ مہیا کرتا ہے، قبولیت نمونہ لاگو کیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں ہر کھیپ کو قبول یا مسترد کرنے کا فیصلہ کرنا ہو گا۔ کھیپ سے n جسامت کے نمونے کا معائنہ کرتے ہوئے **عیب دار اشیاء** ، جنہیں مختصراً **عیب دار**[175] کہتے ہیں، کی تعداد کو مد نظر رکھ کر عموماً فیصلہ کیا جاتا ہے۔ جو اشیاء درکار تخصیص (بیان کردہ خواص، مثلاً جسامت، رنگ، مضبوطی، یا جو بھی اہمیت رکھتا ہو) پر پورا نہیں اترتے ہیں، انہیں عیب دار تصور کیا جاتا ہے۔ اگر نمونہ میں عیب دار اشیاء کی تعداد x طے شدہ عدد $c\,(< n)$ سے زیادہ نہ ہو تب کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔ اگر $x > c$ ہو تب کھیپ کو مسترد کیا جاتا ہے۔ c کو عیب دار کی قابل قبول تعداد یا **تعداد قبولیت**[176] کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ پیداکار اور خریدار کو **نمونی منصوبہ**[177] پر اتفاق کرنا ہو گا، یعنی، نمونی جسامت

control process[174]
defectives[175]
acceptance number[176]
sampling plan[177]

n کی قیمت اور تعداد قبولیت c کی قیمت۔چونکہ یہ ایک نمونہ پر منحصر ہے لہٰذا اس کو واحد نمونی منصوبہ[178] کہتے ہیں۔ دوہرا نمونی منصوبہ پر بعد میں غور کیا جائے گا۔

فرض کریں کہ کھیپ قبول ہونے کا وقوعہ A ہے۔ظاہر ہے کہ مطابقتی احتمال $P(A)$ نا صرف n اور c بلکہ کھیپ میں عیب داروں کی تعداد M پر بھی منحصر ہے۔فرض کریں کہ نمونہ میں عیب داروں کی تعداد بلا منصوبہ متغیر X ہے اور ہم بغیر واپس رکھے نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ تب (حصہ 24.9)

$$P(A) = P(X \leq c) = \sum_{x=0}^{c} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{24.153}$$

ہو گا۔اگر $M = 0$ (کھیپ میں کوئی عیب دار نہیں ہے) ہو تب X کی قیمت لازماً 0 ہو گی اور

$$P(A) = \frac{\binom{0}{0}\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} = 1$$

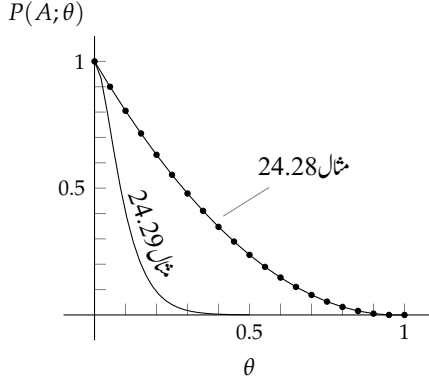
ہو گا۔مقررہ n اور c اور بڑھتے M کی صورت میں احتمال $P(M)$ گھٹتا ہے۔اگر $M = N$ (کھیپ میں تمام اشیاء عیب دار) ہو، تب X کی قیمت لازماً n ہو گی اور $P(A) = P(X \leq c) = 0$ ہو گا چونکہ $c < n$ ہے۔

نسبت $\theta = \frac{M}{N}$ کو کھیپ میں نسبتِ عیب دار[179] کہتے ہیں۔دھیان رہے کہ $M = N\theta$ ہے اور مساوات 24.153 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P(A;\theta) = \sum_{x=0}^{c} \frac{\binom{N\theta}{x}\binom{N-N\theta}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{24.154}$$

چونکہ θ کی قیمت $N+1$ قیمتوں $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \cdots, \frac{N}{N}$ میں سے ایک ہو سکتی ہے، احتمال $P(A)$ صرف ان قیمتوں کے لئے معین ہو گا۔مقررہ n اور c کے لئے ہم $P(A)$ بالمقابل θ ترسیم کر سکتے ہیں۔یہ $N+1$ نقطے ہوں گے۔ان نقطوں سے ہموار منحنی گزاری جا سکتی ہے جس کو مد نظر نمونی منصوبہ کی منحنی خاصیت کارکردگی[180] (OC منحنی) کہتے ہیں۔

مثال 24.28: لکڑی میں سوراخ کرنے والی ایک مخصوص قسم کے ورموں کو 20 فی ڈبیا بند کیا جاتا ہے اور مذکورہ زیر نمونی منصوبہ استعمال کیا جاتا ہے۔ 2 ورموں کا نمونہ حاصل کیا جاتا ہے اور دونوں ورمے غیر عیب

[178] single sampling plan
[179] fraction defective
[180] operating characteristic curve

شکل 24.28: منحنیات خاصیت کارکردگی برائے مثال 24.28 اور مثال 24.29

دار ہونے کی صورت میں ڈبے کو قبول کیا جاتا ہے۔یہاں $N=20$ ، $n=2$ ، $c=0$ ہیں لہٰذا مساوات 24.154 درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$P(A;\theta)=\frac{\binom{20\theta}{0}\binom{20-20\theta}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{(20-20\theta)(19-20\theta)}{380}$$

اعدادی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

θ	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	$\cdots$
$P(A;\theta)$	1.00	0.90	0.81	0.72	0.63	$\cdots$

منحنی خاصیت کارکردگی کو شکل 24.28 میں دکھایا گیا ہے۔ □

عملی صورتوں میں عموماً θ چھوٹا ہو گا ($10\,\%$ سے کم)۔ عموماً صورتوں میں جسامت کھیپ N بہت بڑا (1000 ، 10000 ، وغیرہ) ہو گا لہٰذا ہم مساوات 24.153 اور مساوات 24.154 میں بیش ہندسی تقسیم کو تخمیناً ثنائی تقسیم سے ظاہر کر سکتے ہیں جس میں $p=\theta$ لیا جائے گا۔اب اگر n ایسا ہو کہ $n\theta$ معتدل (مثلاً 20 سے کم) ہو، تب ہم اس تقسیم کو $\mu=np$ اوسط کی پوئسن تقسیم سے ظاہر کر سکتے ہیں۔یوں مساوات 24.154 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$P(A;\theta)\sim e^{-\mu}\sum_{x=0}^{c}\frac{\mu^x}{x!}\qquad(\mu=n\theta)\tag{24.155}$$

مثال 24.29: فرض کریں کہ بڑی کھیپ کے لئے مذکورہ ذیل واحد نمونی منصوبہ استعمال کیا جاتا ہے۔ $n = 20$ نمونہ لیا جاتا ہے۔اگر اس میں 1 سے زیادہ عیب دار نہ ہوں تب کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔اگر نمونہ میں 2 یا اس سے زیادہ عیب دار ہوں تب کھیپ کو مسترد کیا جاتا ہے۔اس منصوبہ میں مساوات 24.155 درج ذیل دیتا ہے

$$P(A;\theta) \sim e^{-20\theta}(1+20\theta)$$

جس کی مطابقتی منحنی شکل 24.28 میں دکھائی گئی ہے۔ □

ہم اب قبولیت نمونہ میں دو اقسام کے غلطیوں پر غور کرتے ہیں اور n اور c منتخب کرنے کی تفصیل پیش کرتے ہیں۔قبولیت نمونہ میں پیداکار اور خریدار کے غرض مختلف ہوں گے۔پیداکار چاہے گا کہ "اچھی" یا "قابل قبول" کھیپ کی مسترد ہونے کا احتمال، جس کو ہم α سے ظاہر کرتے ہیں، کم سے کم عدد ہو۔ خریدار چاہے گا کہ "خراب" یا "نا قابل قبول" کھیپ کے قبول ہونے کا احتمال، جس کو ہم β سے ظاہر کرتے ہیں، کم سے کم عدد ہو۔ یہ کہنا زیادہ درست ہو گا کہ دونوں اس پر اتفاق کرتے ہیں کہ جس کھیپ کے لئے θ کی قیمت ایک مخصوص عدد θ_0 سے تجاوز نہ کرے تب کھیپ "قابل قبول" ہو گا جبکہ وہ کھیپ جس کے لئے θ کی قیمت ایک مخصوص عدد θ_1 کے برابر یا اس سے زیادہ ہو تب کھیپ "نا قابل قبول" ہو گا۔تب وہ کھیپ جس کے لئے $\theta \le \theta_0$ ہو کے مسترد ہونے کا احتمال α ہو گا جس کو خطرِ پیداکار[181] کہتے ہیں۔یہ قیاس کی پرکھ کی قسم اول غلطی کے مترادف ہے (حصہ 24.15)۔ وہ کھیپ جس کے لئے $\theta \ge \theta_1$ ہو کے قبول ہونے کا احتمال β ہو گا جس کو خطرِ خریدار[182] کہتے ہیں۔یہ حصہ 24.15 میں قسم دوم غلطی کے مترادف ہے۔شکل 24.29 میں ان کی وضاحت کی گئی ہے۔ θ_0 کو سطح قابلِ قبول معیار[183] اور θ_1 کو سطح قابلِ مسترد معیار[184] کہتے ہیں جبکہ کھیپ $\theta_0 < \theta < \theta_1$ کو لا تعلق کھیپ[185] کہتے ہیں۔

شکل 24.29 سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ $(\theta_0, 1-\alpha)$ اور نقطہ (θ_1, β) منحنی خاصیت کارکردگی پر پائے جاتے ہیں۔یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ بڑی کھیپ کے لئے ہم θ_0 ، $\theta_1 (> \theta_0)$ ، α ، β منتخب کرتے ہوئے n اور c یوں تعین کر سکتے ہیں کہ منحنی خاصیت کارکردگی ان نقطوں کے قریب سے گزرتی ہو۔متعین α ، β ، θ_0 اور θ_1 کے لئے نمونی منصوبے شائع کیے گئے ہیں۔

پرکھ قیاس اور معائنہ نمونہ میں قریبی تعلق پایا جاتا ہے جس کو جدول 24.13 میں دکھایا گیا ہے۔

---

producer's risk[181]
consumer's risk[182]
acceptable quality level[183]
rejectable quality level[184]
indifferent lot[185]

$P(A;\theta)$

95 %

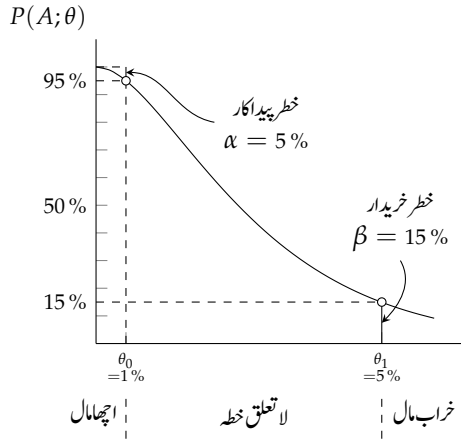
50 %

15 %

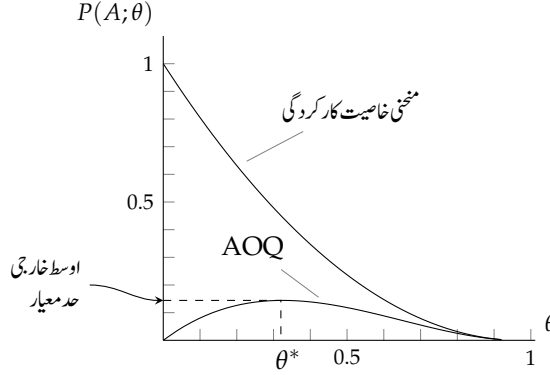
خطر پیداکار
$\alpha = 5\,\%$

خطر خریدار
$\beta = 15\,\%$

$\theta_0 = 1\,\%$ $\theta_1 = 5\,\%$

اچھا مال لاتعلق خطہ خراب مال

شکل 24.29: منحنی خاصیت کارکردگی، خطر پیداکار اور خطر خریدار

جدول 24.13: پرکھ قیاس اور معائنہ نمونہ کا تعلق

معائنہ نمونہ	پرکھ قیاس
سطح قابل قبول معیار $\theta = \theta_0$	قیاس $\theta = \theta_0$
سطح قابل مسترد معیار $\theta = \theta_1$	متبادل $\theta = \theta_1$
عیب دار کی قابل قبول تعداد c	فاصل قیمت c
$\theta_0 \leq \theta$ کھیپ مسترد ہونے کا احتمال α (خطر پیداکار)	قسم اول غلطی کا احتمال α (معنی خیز سطح)
$\theta_1 \geq \theta$ کھیپ قبول ہونے کا احتمال β (خطر خریدار)	قسم دوم غلطی کا احتمال β

شکل 24.30: منحنی خاصیت کارکردگی اور اوسط خارجی حد معیار کی منحنی برائے شکل 24.28 میں مثال 24.28 کا دیا گیا نمونی منصوبہ

نمونی عمل ازخود خریدار کو مکمل تحفظ فراہم نہیں کرتا ہے۔ درحقیقت اگر پیداکار کو اجازت ہو کہ وہ خراب کھیپ کو دوبارہ قبول ہونے کے لئے پیش کرے تب آخر کار خراب کھیپ بھی قبول ہو جائیں گے۔ خریدار کو اس صورت حال سے بچانے کی خاطر پیداکار اس بات سے اتفاق کر سکتا ہے کہ مسترد کھیپ کو سدھارا[186] جائے گا یعنی اس کا 100 % معائنہ کرتے ہوئے ہر جزو کو پرکھا جائے گا اور کھیپ میں تمام عیب دار اشیاء کی جگہ بے عیب اشیاء رکھے جائیں گے[187]۔ فرض کریں ایک کارخانہ $100\theta\%$ عیب دار اشیاء بناتا ہے اور مسترد کھیپ کو سدھارا جاتا ہے۔ تب N جسامت کے K کھیپ میں KN اشیاء ہوں گے جن میں سے $KN\theta$ عیب دار ہوں گے۔ کھیپوں میں سے $KP(A;\theta)$ قبول کیے جائیں گے؛ ان میں کل $KPN\theta$ عیب دار اجزاء ہوں گے۔ مسترد اور سدھارے گئے کھیپ میں کوئی عیب دار جزو نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں سدھارنے کے بعد K کھیپ میں عیب دار کا تناسب $\frac{KPN\theta}{KN} = \theta P(A;\theta)$ ہو گا۔ θ کی اس تفاعل کو **اوسط خارجی معیار**[188] کہتے ہیں جس کو $\text{AOQ}(\theta)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، یعنی:

$$\text{AOQ}(\theta) = \theta P(A;\theta) \tag{24.156}$$

اگر نمونی منصوبہ دیا گیا ہو تب یہ تفاعل اور منحنی اوسط خارجی معیار کو $P(A;\theta)$ اور منحنی خاصیت کارکردگی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کی مثال شکل 24.30 میں دکھائی گئی ہے۔

ظاہر ہے کہ $\text{AOQ}(0) = 0$ ہو گا۔ چونکہ $P(A;1) = 0$ ہے لہٰذا $\text{AOQ}(1) = 0$ ہو گا۔ اس سے اور $\text{AOQ}(\theta) \geq 0$ سے ہم یہ نتیجہ حاصل کرتے ہیں کہ کسی $\theta = \theta^*$ پر اس تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت

---

[186] rectified

[187] ظاہر ہے کہ اگر معائنہ سے اشیاء تباہ ہوتے ہوں یا ہر جزو کا معائنہ کرنا اشیاء کی قیمت سے زیادہ مہنگا پڑتا ہو تب ہر جزو کے معائنے کی بجائے مسترد کھیپ کو کم دام فروخت کیا جائے گا۔

[188] average outgoing quality

پائی جائے گی جس کی مطابقتی قیمت $\mathrm{AOQ}(\theta^*)$ کو اوسط خارجی حد معیار[189] کہتے ہیں۔ یہ خراب ترین معیار ہے جو سدھارنے کے عمل کے ساتھ قابل قبول ہو گا۔

کئی نمونی منصوبے ایک ہی اوسط خارجی حد معیار دے سکتے ہیں۔یوں اگر خریدار صرف اوسط خارجی حد معیار میں دلچسپ ہو تب پیداکار وہ نمونی منصوبہ منتخب کر سکتا ہے جس میں نمونے کا حصول کم سے کم ہو، یعنی نمونی معائنے کی تعداد کم سے کم ہو۔یہ تعداد درج ذیل ہے

$$nP(A;\theta) + N(1 - P(A;\theta))$$

جہاں پہلا جزو قبول شدہ کھیپوں اور دوسرا جزو مسترد اور سدھارے گئے کھیپ کے مطابقتی اجزاء ہیں؛ حقیقت میں سدھارنے کے عمل میں کھیپ کے تمام N اجزاء کو پرکھا جاتا ہے، اور کھیپ مسترد ہونے کا احتمال $1 - P(A;\theta)$ ہے۔

ہم بتانا چاہتے ہیں کہ معائنے کے عمل کو دوہرا نمونی منصوبہ[190] استعمال کرتے ہوئے کم کیا جا سکتا ہے جس میں جسامت n کے نمونے کو جسامت n_1 اور n_2 (جہاں $n_1 + n_2 = n$) کے دو نمونوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔اگر کھیپ بہت اچھی یا بہت خراب ہو تب کھیپ قبول یا مسترد کرنے کا فیصلہ ایک نمونے کو دیکھ کر کیا جا سکتا ہے چونکہ توقع کی جا سکتی ہے کہ دوسرے نمونے کا معیار درمیانہ ہو گا۔ہم دوہرا نمونی منصوبہ اور سدھارنے کا عمل استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قسم کے منصوبے استعمال کر سکتے ہیں جہاں نمونوں میں عیب دار کی تعداد بالترتیب x_1 اور x_2 ہے۔

- اگر $x_1 \le c_1$ ہو، کھیپ قبول کریں۔اگر $x_1 > c_2$ ہو، کھیپ مسترد کریں۔
- اگر $c_1 < x_1 \le c_2$ ہو، دوسرا نمونہ بھی استعمال کریں۔اگر $x_1 + x_2 \le c_2$ ہو، کھیپ قبول کریں۔اگر $x_1 + x_2 > c_2$ ہو، کھیپ مسترد کریں۔

سوالات

سوال 24.235: ایک صارف قلم پرکھنے کے لئے واحد نمونی منصوبہ استعمال کرتا ہے جس میں نمونی جسامت 40 اور تعداد قبولیت 1 ہے۔ضمیمہ ج کی جدول ج.6 استعمال کرتے ہوئے % 10, % 5, % 2, % 1, % 0.5, % 0.25 عیب دار کھیپ کے قبول ہونے کا احتمال تلاش کریں۔ منحنی OC کو ترسیم کریں۔
جواب: $0.9953, 0.9825, 0.9384, \cdots$

[189] average outgoing quality limit
[190] double sampling plan

سوال 24.236: حسابی کیلکولیٹر کی بیٹریوں کی بڑی کھیپوں کو مذکورہ ذیل منصوبہ کے تحت پرکھا جاتا ہے۔ کھیپ سے بلا منصوبہ 30 بیٹریاں منتخب کر کے پرکھی جاتی ہیں۔ اگر اس نمونہ میں زیادہ سے زیادہ 1 عیب دار بیٹری ہو تب اس کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے ورنہ اس کو مسترد کیا جاتا ہے۔ پوئسن تقسیم استعمال کرتے ہوئے اس منصوبے کی OC منحنی کو ترسیم کریں۔

سوال 24.237: سوال 24.236 میں AOQ منحنی ترسیم کریں۔ سدھارنے کے عمل کے ساتھ اوسط خارجی حد معیار تعین کریں۔
جواب: $\theta = 0.054$ پر 0.028

سوال 24.238: $n = 50$ اور $c = 0$ کی صورت میں سوال 24.236 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.239: مثال 24.28 میں بیش ہندسی تقسیم کی تخمینی ثنائی تقسیم تلاش کرتے ہوئے تخمینی اور اصل قیمت کا موازنہ کریں۔
جواب: $(1-\theta)^2$

سوال 24.240: مثال 24.28 میں سطح قابل قبول معیار 0.1 اور سطح قابل مسترد معیار 0.6 ہونے کی صورت میں خطر پیداکار اور خطر خریدار کیا ہوں گے؟

سوال 24.241: پیچوں کی کھیپ میں θ تناسب عیب دار ہیں۔ اس کھیپ سے 5 کا نمونہ حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے اگر نمونہ میں (الف) کوئی بھی عیب دار نہ ہو، (ب) زیادہ سے زیادہ ایک عیب دار ہو۔ ثنائی تقسیم استعمال کرتے ہوئے OC منحنیات تلاش کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں اور ان کا آپس میں موازنہ کریں۔
جواب: $(1-\theta)^5, (1-\theta)^5 + 5\theta(1-\theta)^4$

سوال 24.242: برقی فتیلہ کی کھیپ سے 3 کا نمونہ حاصل کیا جاتا ہے۔ اگر نمونہ میں ایک سے زیادہ عیب دار نہ ہوں تب اس کھیپ کو قبول کیا جاتا ہے۔ اس نمونی منصوبہ پر تنقید کریں۔ بالخصوص 50% عیب دار کی کھیپ قبول ہونے کا احتمال حاصل کریں۔ (ثنائی تقسیم استعمال کریں۔)

سوال 24.243: $c = 0$ اور n کی بڑھتی قیمت (مثلاً $n = 2, 3, 4, \cdots$) کی نمونی منصوبوں کا موازنہ کریں اور ان کو ترسیم کریں۔ (ثنائی تقسیم استعمال کریں۔)
جواب: $P(A;\theta) = (1-\theta)^n$

سوال 24.244: $c = 1$ لیتے ہوئے سوال 24.243 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.245: OC منحنی میں اچھی معیار اور خراب معیار کو علیحدہ کرنے کا انتصابی حصہ کیوں نہیں پایا جاتا ہے؟
جواب: چونکہ n متناہی ہے۔

سوال 24.246: $n = 5$ اور $c = 10$ لیتے ہوئے بڑی کھیپ کے لئے واحد نمونی منصوبہ کے OC اور AOQ منحنیات ترسیم کریں۔

سوال 24.247: خطر خریدار $5\,\%$ کے لئے سوال 24.246 کی منحنی سے θ_0 تلاش کریں۔ خطر پیداکار $10\,\%$ کے لئے سوال 24.246 کی منحنی سے θ_1 تلاش کریں۔
جواب: $\theta_0 \approx 0.01, \theta_1 \approx 0.37$

سوال 24.248: $n = 4$ اور $c = 1$ لیتے ہوئے سوال 24.246 کو دوبارہ حل کریں۔

سوال 24.249: ہم گھڑیوں کی بڑی کھیپوں سے 100 جسامت کے نمونے لیتے ہیں۔ ہم چاہتے ہیں کہ سطح قابل قبول معیار $5\,\%$ اور خطر پیدا کار $2\,\%$ ہو۔ ہمیں تعداد قبولیت c کی کیا قیمت منتخب کرنی ہو گی؟ (عمومی تقسیم استعمال کریں۔)
جواب: 9

سوال 24.250: اگر سطح قابل مسترد معیار $12\,\%$ ہو تب سوال 24.249 میں خطر خریدار کیا ہو گا؟

سوال 24.251: $n = 5$ اور $c = 0$ کی صورت میں سطح قابل قبول معیار $\theta_0 = 1\,\%$ اور سطح قابل مسترد معیار $\theta_1 = 15\,\%$ فرض کرتے ہوئے واحد نمونی منصوبہ میں خطر تلاش کریں۔
جواب: $\alpha = 5\,\%, \beta = 44\,\%$

سوال 24.252: $n = 5$ اور $c = 0$ لیتے ہوئے بڑی کھیپ کے لئے واحد نمونی منصوبہ استعمال کرتے ہوئے OC منحنی اور AOQ منحنی تلاش کرتے ہوئے ترسیم کریں۔ اوسط خارجی سطح معیار بھی تلاش کریں۔

24.18 عمدگی موافقت

ہم نمونہ $x_1, \dots, x_n$ استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھنا چاہتے ہیں کہ جس آبادی سے نمونہ لیا گیا ہو اس کا تفاعل تقسیم $F(x)$ ہے۔ظاہر ہے کہ نمونے کا تفاعل تقسیم $\tilde{F}(x)$ اصل تفاعل تقسیم $F(x)$ کا تخمین ہو گا اور اگر یہ $F(x)$ کی "اچھی تخمین" دیتا ہو تب ہم اس قیاس کو نا منظور نہیں کریں گے کہ تفاعل $F(x)$ اس آبادی کا تفاعل تقسیم ہے۔اگر $\tilde{F}(x)$ تفاعل $F(x)$ سے بہت زیادہ انحراف کرتا ہو تب ہم اس قیاس کو نا منظور کریں گے۔

اس طرح فیصلہ کرنے کے لئے ضروری ہے ہم جانتے ہوں کہ قیاس درست ہونے کی صورت میں $F(x)$ سے $\tilde{F}(x)$ کتنا انحراف کر سکتا ہے۔اس خاطر ہم ایک مقدار متعارف کرتے ہیں جو $F(x)$ سے $\tilde{F}(x)$ کا انحراف ناپتا ہے اور ہمیں اس مفروضہ کے تحت، کہ قیاس درست ہے، اس مقدار کا تفاعل احتمال درکار ہو گا۔آئیں اس کو حاصل کرتے ہیں۔ ہم عدد c یوں تعین کرتے ہیں کہ، قیاس درست ہونے کی صورت میں، c سے زائد انحراف کا ایک چھوٹا پیشگی مختص احتمال ہو۔بہر حال، اگر c سے زیادہ انحراف پایا جاتا ہو تب ہمیں قیاس درست ہونے پر شک و شبہ ہو گا اور ہم قیاس کو نا منظور کریں گے۔اس کے برعکس اگر انحراف c سے تجاوز نہ کرتا ہو، تا کہ $\tilde{F}(x)$ تفاعل $F(x)$ کی اچھی تخمین ہو، ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔ظاہر ہے کہ قیاس نا منظور نہ کرنے کی صورت میں ہمارے پاس قیاس نا منظور کرنے کا ناکافی ثبوت ہے اور یہ اس امکان کو خارج نہیں کرتی ہے کہ پرکھ میں دیگر تفاعل بھی نا منظور نہیں ہوں گے۔یوں صورت حال کافی حد تک حصہ 24.15 کی طرح ہے۔

جدول 24.14 میں اس طرز کی پرکھ دکھائی گئی ہے[191]۔اس پرکھ کا جواز کچھ یوں ہے کہ اگر قیاس درست ہو، تب χ_0^2 اس بلا منصوبہ متغیر کی مشاہدے سے حاصل قیمت ہو گی جس کی تفاعل تقسیم $K-1$ درجہ آزادی (یا $K-r-1$ درجہ آزادی اگر r مقدار معلوم کا اندازہ لگایا گیا ہو) کی مربع خا تقسیم تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے جیسے جیسے n لامتناہی تک پہنچے کی کوشش کرتا ہے۔کم سے کم 5 نمونی قیمتوں کا جدول 24.14 کے ہر وقفہ میں پائے جانے کی شرط کی وجہ متناہی بلا منصوبہ n کی صورت میں اس بلا منصوبہ متغیر کی تقسیم کا صرف تخمینی طور پر مربع خا تقسیم ہونا ہے۔ (اس کا ثبوت اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا۔) اگر نمونہ اتنا چھوٹا ہو کہ اس شرط کو مطمئن کرنا ممکن نہ ہو تب پرکھ سے حاصل نتیجہ کو بہت احتیاط کے ساتھ استعمال کریں۔

مثال 24.30: عمومیت کا پرکھ
کیا صفحہ 1519 پر جدول 24.2 میں دیا گیا نمونہ عمومی آبادی سے لیا گیا ہے؟

---

[191] اس پرکھ کو رونلڈ ایلمر فشر نے متعارف کیا۔

جدول 24.14: جس آبادی سے نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ حاصل کیا گیا ہو اس آبادی کا تفاعل تقسیم $F(x)$ ہونے کی قیاس کا مربع خاپرکھ

پہلا قدم: x محور کو K وقفوں $I_1, I_2, \cdots, I_K$ میں یوں تقسیم کریں کہ ہر وقفہ میں دیے گئے نمونہ $x_1, \cdots, x_n$ کے کم سے کم 5 قیمتیں پائی جاتی ہوں۔ وقفہ I_j میں نمونی قیمتوں کی شمار b_j تعین کریں جہاں $j = 1, \cdots, K$ ہے۔ اگر نمونی قیمت دو وقفوں کی مشترک سرحد پر پائی جاتی ہو تب دونوں مطابقتی b_j میں 0.5 جمع کریں۔

دوسرا قدم: $F(x)$ استعمال کرتے ہوئے زیر غور بلا منصوبہ متغیر X کا وقفہ I_j میں کوئی بھی قیمت اختیار کرنے کا احتمال p_j بذریعہ حساب تلاش کریں، جہاں $j = 1, \cdots, K$ ہے۔ درج ذیل بذریعہ حساب حاصل کریں (جو قیاس درست ہونے کی صورت میں وقفہ I_j میں نمونی قیمتوں کا نظیری متوقع شمار ہے)۔

$$e_j = np_j$$

تیسرا قدم: درج ذیل انحراف کا حساب کریں۔

$$\chi_0^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j} \tag{24.157}$$

چوتھا قدم: معنی خیز سطح (5 %، 1 %، وغیرہ) منتخب کریں۔

پانچواں قدم: درج ذیل مساوات کا حل c، ضمیمہ ج کی جدول ج.11 میں $K - 1$ درجہ آزادی لیتے ہوئے، تلاش کریں۔

$$P(\chi^2 \leq c) = 1 - \alpha$$

اگر $F(x)$ کے r مقدار معلوم ہمیں معلوم نہ ہوں اور ان کی زیادہ سے زیادہ امکانی اندازے (حصہ 24.13) استعمال کیے جا رہے ہوں تب ($K - 1$ کی بجائے) $K - r - 1$ درجہ آزادی استعمال کریں۔ اگر $c \leq \chi_0^2$ ہو، قیاس کو نامنظور نہ کریں۔ اگر $c > \chi_0^2$ ہو، قیاس کو نامنظور کریں۔

جدول 24.15: حساب برائے مثال 24.30

x_j	$\frac{x_j-364.7}{26.7}$	$\Phi\left(\frac{x_j-364.7}{26.7}\right)$	$e_j = 100p_j$	b_j	اجزاء مساوات 24.157
$-\infty \cdots 325$	$-\infty \cdots -1.49$	$0.0000 \cdots 0.0681$	6.81	6	0.096
$325 \cdots 335$	$-1.49 \cdots -1.11$	$0.0681 \cdots 0.1335$	6.54	6	0.045
$335 \cdots 345$	$-1.11 \cdots -0.74$	$0.1335 \cdots 0.2296$	9.61	11	0.201
$345 \cdots 355$	$-0.74 \cdots -0.36$	$0.2296 \cdots 0.3594$	12.98	14	0.080
$355 \cdots 365$	$-0.36 \ldots 0.00$	$0.3594 \cdots 0.5000$	14.06	16	0.268
$365 \cdots 375$	$0.00 \cdots 0.39$	$0.5000 \cdots 0.6517$	15.17	15	0.002
$375 \cdots 385$	$0.39 \cdots 0.76$	$0.6517 \cdots 0.7764$	12.47	8	1.602
$385 \cdots 395$	$0.76 \cdots 1.13$	$0.7764 \cdots 0.8708$	9.44	10	0.033
$395 \cdots 405$	$1.13 \cdots 1.51$	$0.8708 \cdots 0.9345$	6.37	8	0.417
$405 \cdots \infty$	$1.51 \cdots \infty$	$0.9345 \cdots 1.0000$	6.55	6	0.046
					$\chi_0^2 = 2.790$

حل: μ اور σ^2 کی زیادہ سے زیادہ امکانی اندازے $\hat{\mu} = \bar{x} = 364.7$ اور $\tilde{\sigma}^2 = 712.9$ ہیں۔جدول 24.15 میں کیا گیا حساب $\chi_0^2 = 2.790$ دیتا ہے۔ہم $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہیں۔چونکہ $K = 10$ ہے اور ہم مقدار معلوم کا اندازہ $r = 2$ لگاتے ہیں، ہم $K - r - 1 = 7$ درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول ج.11 سے $P(\chi^2 \leq c) = 95\,\%$ کا حل $c = 14.07$ حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $\chi^2 < c$ ہے لہٰذا ہم آبادی کا عمومی ہونے کا قیاس نامنظور نہیں کرتے ہیں۔ □

سوالات

سوال 24.253: تین مشینوں میں سے ہر ایک مشین پر بنائے جانے والے کیلوں سے 200 جسامت کے نمونے حاصل کیے گئے۔ ان نمونوں میں عیب دار کیلوں کی تعداد 7, 8, 12 تھی۔کیا یہ فرق معنی خیز ہے؟ ($\alpha = 5\,\%$ استعمال کریں۔)

جواب: تینوں مشینوں میں عیب دار کیلوں کی تعداد ایک جیسا کو قیاس H_0 لے کر $p = \frac{27}{600} = 4.5\,\%$ اندازہ حاصل ہو گا۔یوں $\chi_0^2 = \frac{1}{9}(2^2 + 1^2 + 3^2) = 1.56 < 5.99$ ہو گا ($\alpha = 5\,\%$ ، اور درجہ آزادی 2 ہے)۔ نتیجہ: نہیں

سوال 24.254: دوپہر ایک بجے سے دو بجے تک ایک دکان پر متواتر پانچ دنوں میں بالترتیب 92, 60, 66, 62, 90 صارفین آئے۔اس قیاس کو پرکھیں کہ ان دنوں میں صارفین کی تعداد ایک جیسی ہے۔ ($\alpha = 5\,\%$ لیں۔)

سوال 24.255: گرگر یوہان مینڈل کے ایک کلاسیکی تجربہ کے نتیجہ میں 355 پیلے مٹر اور 123 سبز مٹر کے دانے حاصل ہوئے۔ کیا یہ نظریہ مینڈل کے مطابق ہے جس کے تحت نسبت پیلے مٹر:سبز مٹر کی قیمت 1 : 3 ہونی چاہیے۔
جواب: $K = 2, n = 355 + 123 = 478, e_1 = 478 \cdot \frac{3}{4} = 358.5, e_2 = 478 \cdot \frac{1}{4} = 119.5,$ $\chi_0^2 = \frac{(355-358.5)^2}{358.5} + \frac{(123.0-119.5)^2}{119.5} = 0.137 < c,$ ہے جہاں $c = 3.84$ (درجہ آزادی 1 ، $\alpha = 5\,\%$) ہے۔ لہٰذا ہم وثوق سے کہتے ہیں کہ نظریی قیمتوں سے انحراف محض بلا منصوبہ اثرات ہیں۔

سوال 24.256: ایک پیداکار دعویٰ کرتا ہے کہ عمل پیداوار میں صرف $2.5\,\%$ استرے تیز دھار نہیں ہوتے ہیں۔ اس قیاس کو متبادل: $2.5\,\%$ سے زیادہ تعداد تیز دھار نہیں ہوتے، پر کھیں۔ 400 استروں کا نمونہ استعمال کریں جن میں 17 تیز دھار نہیں ہیں۔ ($\alpha = 5\,\%$ استعمال کریں۔)

سوال 24.257: بلا منصوبہ اعداد کی جدول میں طاق اور جفت اعداد کی تعداد تقریباً ایک جیسی ہونی چاہیے۔ ضمیمہ ج کی جدول ج.9 کے صف 0 میں دیے گئے 50 اعداد کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پر کھیں۔ ($\alpha = 5\,\%$ استعمال کریں۔)
جواب: 20 طاق اور 30 جفت اعداد، $K = 2$ جماعتیں، $\chi_0^2 = 2 < 3.84$ لہٰذا قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.258: ایک سکہ کو 50 بار اچھالا جاتا ہے۔ خط کی کم سے کم تعداد (25 سے زیادہ) کیا ہو گی جس پر سکہ منصفانہ ہونے کی قیاس کو $5\,\%$ کی سطح پر نا منظور کیا جائے گا۔

سوال 24.259: ایک معیاری طریقہ پر پیدا کردہ لوہے کی ایک مخصوص قسم کی سلاخوں میں سے $25\,\%$ سلاخ $900\,\mathrm{kg}$ کی بوجھ ڈالنے سے ٹوٹ جاتے ہیں۔ ایک نئے طریقہ سے پیدا 80 سلاخوں پر اتنا ہی بوجھ ڈالنے سے 27 سلاخ ٹوٹ جاتے ہیں۔ کیا نیے طریقہ سے پیدا سلاخوں کے ٹوٹ جانے کی شرح وہی ہے؟
جواب: $\chi_0^2 = \frac{49}{20} + \frac{49}{60} = 3.27 < c = 3.84$ جہاں $\alpha = 5\,\%$ اور درجہ آزادی 1 ہے۔ نتیجہ: جی ہاں۔

سوال 24.260: موٹروے کی تین لینوں میں ایک مخصوص دورانیہ کے دوران، ایک ہی رخ چلتی گاڑیوں کی تعداد بالترتیب 910 ، 850 اور 720 گاڑیاں گنی گئیں۔ کیا ہم وثوق کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ تینوں لینوں پر سے ایک جتنی گاڑیاں گزریں؟

سوال 24.261: ایک کلاسیکی تجربہ میں پانسہ 20000 مرتبہ پھینکا گیا جس میں $1, \cdots, 6$ ہندسوں کی مطلق تعدد $3407, 3631, 3176, 2916, 3448, 3422$ حاصل ہوئی۔ $\alpha = 5\,\%$ استعمال کرتے ہوئے

پانسہ کے منصفانہ ہونے کی قیاس کو پرکھیں۔
جواب: $K = 6, \chi_0^2 = 94.19, c = 11.07$ قیاس نا منظور کیا جاتا ہے۔

سوال 24.262: کیا صفحہ 1524 پر جدول 24.4 میں دیا گیا نمونہ عمومی آبادی سے لیا گیا؟
جواب: $\overline{x} = 99.4, \widetilde{\sigma} = 15.8, K = 5$ (حدود $-\infty, 95, 95, 105, 115, \infty$ ہیں۔) $\chi_0^2 = 0.7 <$ $c = 5.99$ $(\alpha = 5\,\%)$ قیاس کو نا منظور نہیں کیا جاتا ہے۔

سوال 24.263: درج ذیل نمونہ جس آبادی سے لیا گیا اس آبادی کو عمومیت کے لئے پرکھیں جہاں $0.3\,\text{mm}$ موٹی فولادی چادروں کی تنشی مضبوطی x $[\ \text{kg}\,\text{mm}^{-2}\ ]$ ہے۔

x	مطلق تعدد	x	مطلق تعدد
< 42.0	15	$43.5 - 44.0$	22.5
$42.0 - 42.5$	11	$44.0 - 44.5$	19.5
$42.5 - 43.0$	15	$44.5 - 45.0$	12
$43.0 - 43.5$	14	> 45.0	19

سوال 24.264: درج ذیل مواد استعمال کرتے ہوئے آبادی کو پوئسن تقسیم کے لئے پرکھیں۔ 7.5 سیکنڈ میں الفا ذرات کی تعداد x اور $a(x)$ ان کی مطلق تعدد (=وقفوں کی تعداد جن میں ٹھیک x ذرے دیکھے گئے) ہے۔ یہ کلاسیکی تجربہ ارنسٹ ردرفورڈ اور ہانس گائیگر نے 1910 میں سرانجام دیا۔

x	$a(x)$	x	$a(x)$	x	$a(x)$
0	57	5	408	10	10
1	203	6	273	11	4
2	383	7	139	12	2
3	525	8	45	≥ 13	0
4	532	9	27		

جواب: آخری تینوں صفوں کو ایک ساتھ لیتے ہوئے $K - r - 1 = 7$ ہو گا جہاں $r = 1$ ہے چونکہ اوسط کا اندازہ حاصل کیا گیا ہے۔ $\chi_0^2 = 12.8 < c = 16.92$ ہے جہاں $\alpha = 5\,\%$ لیا گیا ہے۔ قیاس کو نا منظور نہ کریں۔

سوال 24.265: پوئسن تقسیم کی آبادی سے 1000 کاغذ لئے گئے۔ اس قیاس کو پرکھیں۔ درج ذیل ایک کاغذ پر دھبوں کی تعداد x ہے اور $a(x)$ مطلق تعدد (x دھبوں والے کاغذوں کی تعداد) ہے۔

x	0	1	2	3	4	≥ 5
$a(x)$	419	352	154	56	19	0

سوال 24.266: کیا یہ ممکن ہے کہ ہم $\chi_0^2 = 0$ حاصل کریں اگرچہ نمونی تفاعل تقسیم پرکھے جانے والے تفاعل تقسیم $F(x)$ سے مختلف ہو؟

24.19 غیر مقدار معلوم پرکھ

حصہ 24.15 کے پرکھ عمومی آبادی کے لئے تھے۔ کئی بار آبادی کی تقسیم غیر عمومی یا نا معلوم تقسیم رکھتی ہے۔ایسی صورت میں ہم **غیر مقدار معلوم پرکھ**[192] یا **تقسیم پاک پرکھ**[193] استعمال کر سکتے ہیں جس کی بنیاد شماریات رجحان[194] ہے لہٰذا اس کو کسی بھی استمراری تقسیم کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ البتہ عمومی تقسیم کے لئے حصہ 24.15 کے پرکھ بہتر نتائج دیتے ہیں۔ تقسیم پاک پرکھ کو سمجھنے کی خاطر ایک مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال 24.31: پرکھ برائے علامت وسطانیہ

مساوات $F(x) = 0.5$ کے حل $x = \tilde{\mu}$ کو وسطانیہ کہتے ہیں، جہاں F تفاعل تقسیم ہے۔ مثال 24.26 کا نمونی فرق، یعنی،

$$16 \quad 16 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 13 \quad 8$$

استعمال کرتے ہوئے ہم قیاس $\tilde{\mu} = 0$ کو پرکھتے ہیں جو کہتا ہے کہ کام کرنے کے دو مختلف حالات میں مزدور کی کارکردگی تقریباً ایک جیسی ہے۔

حل: ہم متبادل $\tilde{\mu} > 0$ اور معنی خیز سطح $\alpha = 5\,\%$ منتخب کرتے ہوئے۔اگر قیاس درست ہو تب مثبت فرق کا احتمال p اور منفی فرق کا احتمال ایک جیسے ہوں گے۔ یوں $p = 0.5$ ہو گا اور بلا منصوبہ متغیر

$$X = n \text{ قیمتوں میں مثبت قیمتوں کا مجموعہ}$$

کا تقسیم ثنائی ہو گا جس کا $p = 0.5$ ہو گا۔ہمارے نمونے میں 8 قیمتیں ہیں۔ہم 0 قیمتوں کو خارج کرتے ہیں چونکہ ان کا فیصلہ پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔تب 6 قیمتیں رہ جاتی ہیں۔یہ تمام قیمتیں مثبت ہیں۔۔چونکہ

$$P(X = 6) = \binom{6}{6}(0.5)^6(0.5)^0 = 0.0156 = 1.56\,\% < \alpha$$

---

nonparametric test[192]
distribution-free test[193]
order statistics[194]

ہے لہٰذا ہم قیاس نا منظور کرتے ہیں۔

اگر ان 6 قیمتوں میں صرف 1 قیمت منفی ہوتی تب

$$P(X \geq 5) = \binom{6}{5}(0.5)^5 \cdot 0.5 + \binom{6}{6}(0.5)^6 = 10.9\,\%$$

ہوتا اور ہم قیاس کو نا منظور نہ کرتے۔ □

مثال 24.32: **بلا منصوبہ رجحان کے لئے پرکھ**
تار کو کاٹنے کے لئے ایک مشین استعمال کی جاتی ہے۔لگاتار کٹی لمبائیاں درج ذیل ہیں۔

$$29 \quad 31 \quad 28 \quad 30 \quad 32$$

اس نمونہ کو استعمال کرتے ہوئے اس قیاس کو پرکھیں کہ مشین تار کو بغیر کسی رجحان کاٹتی ہے، یعنی مشین مسلسل بڑھتی یا مسلسل گھٹتی لمبائی کی تار نہیں کاٹتی ہے۔فرض کریں کہ مشین کی قسم سے ایسا ظاہر ہوتا ہے کہ یہ مسلسل بڑھتی لمبائی کی تار کاٹے گی (مثبت رجحان)۔
حل: جتنی بار کوئی بڑی قیمت کسی چھوٹی قیمت سے پہلے رونما ہو، ہم ان تبدیلیوں کی تعداد گنتے ہیں۔

29 قیمت 28 قیمت سے پہلے آتی ہے: (1 تبدیلی)

31 کی قیمت 28 اور 30 سے پہلے آتی ہے: (2 تبدیلیاں)

باقی تین قیمتیں بڑھتی رجحان رکھتی ہیں۔یوں نمونہ میں $3 = 2 + 1$ تبدیلیاں پائی جاتی ہیں۔ہم اب بلا منصوبہ متغیر

$$T = \text{تعداد تبدیلیاں}$$

پر غور کرتے ہیں۔اگر قیاس درست ہو (غیر رجحانی)، تب پانچ اجزاء $5\ 4\ 3\ 2\ 1$ کے $120 = 5!$ ترتیبی اجتماعات

میں ہر ایک کا احتمال $\frac{1}{120}$ ہو گا۔ ہم ان ترتیبی اجتماعات کو ان کی تبدیلیوں کے لحاظ سے لکھتے ہیں:

$T=3$	$T=2$	$T=1$	$T=0$
1 2 5 4 3	1 2 4 5 3	1 2 3 5 4	1 2 3 4 5
1 3 4 5 2	1 2 5 3 4	1 2 4 3 5	
1 3 5 2 4	1 3 2 5 4	1 3 2 4 5	
1 4 2 5 3	1 3 4 2 5	2 1 3 4 5	
1 4 3 2 5	1 4 2 3 5		
1 5 2 3 4	2 1 3 5 4		
2 1 4 5 3	2 1 4 3 5		
2 1 5 3 4	2 3 1 4 5		
2 3 1 5 4	3 1 2 4 5		
2 3 4 1 5			
2 4 1 3 5			
3 1 2 5 4			
3 1 4 2 5			
3 2 1 4 5			
4 1 2 3 5			
وغیرہ			

ان سے ہم درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$P(T \leq 3) = \frac{1}{120} + \frac{4}{120} + \frac{9}{120} + \frac{15}{120} = \frac{29}{120} = 24\,\%$$

لہٰذا ہم قیاس کو نا منظور نہیں کرتے ہیں۔

ضمیمہ ج کی جدول ج.13 میں بلا رجحان صورت میں بلا منصوبہ متغیر T کی تقسیم دی گئی ہے۔ ہمارے تراکیب اور اس جدول کی قیمتیں استمراری تقسیمات کے کئے ہیں۔یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ نمونہ کی تمام قیمتیں ایک دوسرے سے مختلف ہوں گی۔پور و پور کی بنا عملاً چند نمونی قیمتیں ایک جیسی ہو سکتی ہیں۔اگر m قیمتیں ایک جیسی ہوں تب $\frac{m(m-1)}{4}$ (m اجزاء کی ترتیبی اجتماعات میں تبدیلیوں کے تعداد کی اوسط) جمع کریں، یعنی، ایک جیسی قیمتوں کے ہر جوڑی کے لئے $\frac{1}{2}$ ، ایک جیسی تین قیمتوں کے لئے $\frac{3}{2}$ ، وغیرہ۔ □

سوالات

سوال 24.267: 10 کوششوں میں سے 7 کوششوں میں قسم الف ہوئی چھلنی نے قسم ب ہوائی چھلنی سے زیادہ صاف ہوا پیدا کی، 1 کوشش میں چھلنی ب نے زیادہ صاف ہوا پیدا کی جبکہ 2 کوششوں میں دونوں

کے نتائج ایک جیسے تھے۔کیا چھلنی الف زیادہ بہتر ہے؟
جواب: قیاس: الف اور ب ایک جیسی معیار رکھتی ہیں۔تب 8 کوششوں میں 7 یا 8 بار الف کے حق میں وقوعہ کا احتمال $3.5\,\%$ ہے۔قیاس کو نامنظور کریں۔

سوال 24.268: کن صورتوں میں ہم پرکھ علامت کو استمراری تقسیم کی اوسط پرکھنے کے لئے استعمال کر سکتے ہیں۔

سوال 24.269: پرکھ علامت کو سوال 24.209 کے نمونہ پر لاگو کریں۔
جواب: $P(X \leq 2) = 0.5^6(1+6+15) = 34\,\%$ قیاس $\tilde{\mu} = 0$ کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.270: اگر $\tilde{\mu} = 0$ کی بجائے قیاس $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$ ہو تب آپ پرکھ علامت کو کس طرح استعمال کریں گے۔(μ_0 کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔)

سوال 24.271: 16 جسامت کے نمونہ میں 10 مثبت، 4 منفی اور 2 قیمتیں صفر ہیں۔(ضمیمہ ج کی جدول ج.5 میں درکار قیمتیں نہیں دی گئی ہیں۔آپ کو یہ قیمتیں حاصل کرنی ہوں گی۔)
جواب: اگر $\tilde{\mu} = 0$ ہو، 14 میں سے 4 یا 4 سے کم عدد قیمتیں منفی ہونے کا احتمال $9\,\%$ ہے۔قیاس $\tilde{\mu} = 0$ کو نامنظور نہ کریں۔

سوال 24.272: $\tilde{\mu} = 5$ میٹر لمبائی سلاخ پیدا کرنے کے عمل کے ایک نمونہ میں 4 سلاخوں کی لمبائی ٹھیک ہے، 15 کی لمبائی کم اور 3 کی لمبائی زیادہ ہے۔کیا اس عمل کو درست کرنے کی ضرورت ہے؟ (عمومی تقسیم کو ثنائی تقسیم کا تخمین لیں۔ حصہ 24.10)

سوال 24.273: مسئلہ 24.15 استعمال کیے بغیر سوال 24.272 کو حل کریں۔
جواب: 3 یا اس سے کم سلاخوں کی لمبائی 5 میٹر سے زیادہ ہونے کا ٹھیک احتمال $0.38\,\%$ ہے۔یہ سوال 24.272 میں حاصل تخمینی احتمال سے کچھ کم ہے۔

سوال 24.274: 10 مریضوں میں سے ہر ایک کو دو مختلف نیند کی دوائیاں دی گئی۔درج ذیل جدول ان کے اثرات (سونے کے دورانیے میں گھنٹوں میں اضافہ) پیش کرتا ہے۔پرکھ علامت کی مدد سے دیکھیں کہ آیا ان میں فرق معنی خیز ہے۔

A	1.9	0.8	1.1	0.1	−0.1	4.4	5.5	1.6	4.6	3.4
B	0.7	−1.6	−0.2	−1.2	−0.1	3.4	3.7	0.8	0.0	2.0
فرق	1.2	2.4	1.3	1.3	0.0	1.0	1.8	0.8	4.6	1.4

سوال 24.275: مثال 24.24 میں سمجھائے گئے پرکھ کو سوال 24.274 پر لاگو کریں۔(سوال میں دیے گئے نمونہ کی آبادی کو عمومی تصور کریں۔)
جواب: قیاس $\mu = 0$ ؛ متبادل $\mu > 0$ ، $\bar{x} = 1.58$ ،
$t = \sqrt{10} \cdot \frac{1.58}{1.23} = 4.06 > c = 1.83 \, (\alpha = 5\,\%)$ ؛ قیاس نا منظور۔

سوال 24.276: نچلی چوتھائی q_{25} (جس کی تعریف $F(q_{25}) = 0.25$ ہے) کے لئے پرکھ علامت بنائیں۔

سوال 24.277: 8 قیمتوں کا نمونہ جس میں 7 کی قیمت $20\,^\circ\mathrm{C}$ سے کم اور 1 کی قیمت $20\,^\circ\mathrm{C}$ سے زیادہ ہو استعمال کرتے ہوئے خود کار حراری سوئچ ٹھیک $20\,^\circ\mathrm{C}$ پر مقرر ہونے کے قیاس کو بالمقابل کہ سوئچ کم درجہ حرارت پر مقرر ہے، پرکھیں۔
جواب: $P(X \geq 1) = 0.5^8(1+8) = 3.5\,\% < \alpha = 5\,\%$ ؛ اس قیاس کو نا منظور کریں کہ سوئچ ٹھیک درجہ حرارت پر مقرر ہے۔

سوال 24.278: وولٹ پیما کی پیمائش درجہ حرارت $T[^\circ\mathrm{C}]$ سے آزاد ہے کے قیاس کو بالمقابل کہ اس کی پیمائش بڑھتے T کے ساتھ بڑھتی ہے پرکھیں۔ مستقل برقی دباو مہیا کرتے ہوئے حاصل درج ذیل پیمائشوں کا نمونہ استعمال کریں۔

درجہ حرارت $T[^\circ\mathrm{C}]$	10	20	30	40	50
پیمائش $V[\mathrm{V}]$	99.8	101.0	100.4	100.8	101.5

سوال 24.279: $n = 4$ لیتے ہوئے مثال 24.32 میں دی گئی جدول کی طرح جدول بنائیں۔

سوال 24.280: کیا کھاد سے گندم کی استعمال سے پیداوار $X\,[\mathrm{kg}/$رقبہ$]$ بڑھتی ہے؟ کھاد کی بڑھتی مقدار کے لحاظ سے مرتب درج ذیل نمونہ استعمال کریں۔

15.2 16.8 13.2 16.6 17.2 17.5 17.3 18.1

سوال 24.281: مثال 24.32 کے پرکھ کو درج ذیل نمونہ پر لاگو کریں۔(اون میں ڈائی سلفائڈ کی مقدار x جس کو کیمیائی عمل سے نا گزاری گئی اوون میں مقدار کے فی صد میں ناپا گیا ہے۔اون میں پانی کی فی صد مقدار y ہے۔)

x	10	15	30	40	50	55	80	100
y	50	46	43	42	36	39	37	33

24.20 پیمائشوں کی جوڑیاں۔سیدھے خطوط کو موافق بنانا

ہم اب ایسی تجربات پر غور کرتے ہیں جن میں ہم جوڑی مقدار ناپتے یا ان کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ہم تجربات کو درج ذیل دو اقسام میں تقسیم کر سکتے ہیں۔

- تجزیہ باہمی رشتہ[195] میں دونوں متغیرات بلا منصوبہ ہوں گے اور ہم ان کے درمیان رشتہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔(اس کتاب میں شماریات کی اس شاخ پر غور نہیں کی جائے گی۔)
- رجعی تجزیہ[196] میں دو میں سے ایک متغیر، مثلاً x ، کو عام متغیر تصور کیا جاتا ہے، یعنی، اس کی ناپ میں خاطر خواہ خلل نہیں پایا جاتا ہے۔دوسرا متغیر، Y ، بلا منصوبہ متغیر ہے۔ x کو غیر تابع متغیر کہتے ہیں اور ہم جاننا چاہتے ہیں کہ Y ، متغیر x کا کتنا تابع ہے؟اس کی ایک اچھی مثال فشار خون Y ہے جو انسان کے عمر x کی تابع ہے، جس کو ہم اب سے x پر Y کی رجعت کہیں گے۔

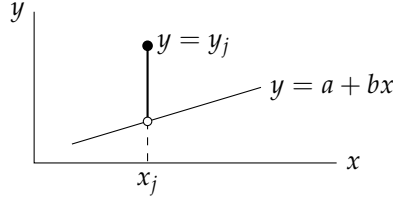
تجربہ کرنے والا پہلے x کی n قیمتیں $x_1, \cdots, x_n$ منتخب کرتا ہے اور اس کے بعد ان x پر Y کی قیمتیں مشاہدے سے حاصل کرتا ہے۔یوں اس کو درج ذیل صورت کا نمونہ ملتا ہے۔

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$$

رجعی تجزیہ میں فرض کیا جاتا ہے کہ Y کی اوسط μ ، متغیر x کے تابع ہے، یعنی، ان کے مابین عام تعلق $\mu = \mu(x)$ پایا جاتا ہے۔ $\mu(x)$ کی منحنی کو Y کی x پر رجعی منحنی کہتے ہیں۔اس حصہ میں ہم سادہ ترین صورت پر غور کرتے ہیں جہاں $\mu(x)$ خطی تفاعل $\mu(x) = \alpha + \beta x$ ہے۔ہم نمونی قیمتوں کو xY مستوی پر ترسیم کر کے، ان پر سیدھی خط بٹھا کر، اس خط کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی x کے لحاظ سے $\mu(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کرنا چاہیں گے تا کہ کسی بھی x سے حاصل Y کی متوقع قیمت ہم جان سکیں۔اگر نقطے بکھرے ہوں تب، خط کو آنکھ کی مدد سے ٹھیک بٹھانا غیر یقینی ہو گا لہٰذا ہمیں حسابی طریقہ درکار ہو گا جو صرف نقطوں پر منحصر یکتا نتیجہ دے۔ایک بہت زیادہ استعمال ہونے والی ترکیب، جس کو گاوس نے بنایا، کمتر مربعوں کی ترکیب[197] کہلاتی ہے۔ہمارے موجودہ ضرورت کو مد نظر رکھتے ہوئے اس کو درج ذیل بیان کیا جا سکتا ہے۔

نقطوں پر سیدھا خط یوں بٹھایا جائے کہ نقطوں کا سیدھی لکیر سے فاصلوں کا مربع کم سے کم ہو، جہاں نقطہ اور سیدھی لکیر کے مابین فاصلہ انتصابی رخ (y محور کے متوازی) ناپا جاتا ہے۔

---

correlation analysis[195]
regression analysis[196]
method of least squares[197]

شکل 24.31: نقطہ (x_j, y_j) سے سیدھے خط $y = a + bx$ کا انتصابی فاصلہ

مفروضہ (الف)
نمونہ $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ میں تمام x قیمتیں $x_1, \cdots, x_n$ ایک جیسی نہیں ہیں۔

جسامت n کے نمونہ $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ پر غور کریں۔ نمونی قیمت (x_j, y_j) کی سیدھی لکیر $y = a + bx$ سے انتصابی رخ فاصلہ (y محور کے متوازی ناپا گیا فاصلہ) $\left|y_j - a - bx_j\right|$ ہو گا (شکل 24.31)۔ یوں ان فاصلوں کے مربع کا مجموعہ

$$q = \sum_{j=1}^{n} (y_j - a - bx_j)^2 \tag{24.158}$$

ہو گا۔ کمتر مربعوں کی ترکیب میں ہم a اور b یوں منتخب کرتے ہیں کہ q کی قیمت کم سے کم حاصل ہو۔ q کی قیمت a اور b پر منحصر ہے اور اس کی کم سے کم قیمت درج ذیل لازمی شرائط سے حاصل ہو گی۔

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\partial q}{\partial b} = 0 \tag{24.159}$$

ہم دیکھیں گے کہ ان شرائط سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے

$$y - \overline{y} = b(x - \overline{x}) \tag{24.160}$$

جہاں

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \quad \text{اور} \quad \overline{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n) \tag{24.161}$$

ہیں۔مساوات 24.159 کو نمونے کی y قیمتوں کا نمونے کی x قیمتوں پر رجعی خط[198] کہتے ہیں۔اس کی ڈھلوان b کو x پر y کا تجزی عددی سر[199] کہتے ہیں۔ہم دیکھیں گے کہ

$$b = \frac{s_{xy}}{s_1^2} \tag{24.162}$$

ہو گا جہاں

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\Big[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)^2\Big] \tag{24.163}$$

اور

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y}) = \frac{1}{n-1}\Big[\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j\Big)\Big] \tag{24.164}$$

ہوں گے۔ s_{xy} کو نمونے کی باہمی تغیریت[200] کہتے ہیں۔ظاہر ہے کہ مساوات 24.160 میں دیا گیا رجعی خط نقطہ $(\overline{x}, \overline{y})$ سے گزرے گا۔

مساوات 24.160 کو حاصل کرنے کی خاطر ہم مساوات 24.158 اور مساوات 24.159 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial a} &= -2\sum(y_j - a - bx_j) = 0\\
\frac{\partial q}{\partial b} &= -2\sum x_j(y_j - a - bx_j) = 0
\end{aligned}$$

لکھتے ہوئے (جہاں j پر 1 تا n مجموعے لیے جاتے ہیں)۔یوں

$$\begin{aligned}
na + b\sum x_j &= \sum y_j\\
a\sum x_j + b\sum x_j^2 &= \sum x_j y_j
\end{aligned}$$

حاصل ہو گا۔مفروضہ-الف کے تحت خطی مساوات کے نظام (مساوات 24.163)

$$n\sum x_j^2 - \Big(\sum x_j\Big)^2 = n(n-1)s_1^2$$

---

[198] regression line
[199] regression coefficient
[200] covariance

جدول 24.16: چمڑے کی حجم میں کمی y [%] کا دباو x پر رجعت

دی گئی قیمتیں		معاون قیمتیں	
x_j	y_j	x_j^2	$x_j y_j$
4000	2.3	16 000 000	9200
6000	4.1	36 000 000	24 600
8000	5.7	64 000 000	45 600
10 000	6.9	100 000 000	69 000
28 000	19.0	216 000 000	148 400

کا مقطع غیر صفر ہو گا اور اس نظام کا یکتا حل (مساوات 24.161، مساوات 24.163، مساوات 24.164)

$$a = \overline{y} - b\overline{x}, \quad b = \frac{n\sum x_j y_j - \sum x_j \sum y_j}{n(n-1)s_1^2} \tag{24.165}$$

پایا جائے گا۔اس سے مساوات 24.160 حاصل ہوتا ہے جس میں b کی قیمت مساوات 24.162 تا مساوات 24.164 دیتے ہیں۔(s_1^2 کے دو تعلقات کا ایک جیسا ہونے کو آپ ثابت کر سکتے ہیں (سوال 24.294)؛اسی طرح s_{xy} کے لئے بھی آپ کر سکتے ہیں)

ہاتھ سے نتائج حاصل کرنے کو آسان بنانے کی خاطر ہم

$$x_j = c_1 x_j^* + l_1, \quad y_j = c_2 y_j^* + l_2 \tag{24.166}$$

استعمال کرتے ہیں جن میں c_1 ، c_2 ، l_1 ، l_2 یوں منتخب کیے جاتے ہیں کہ متبادل قیمتیں x_j^* ، y_j^* سادہ ترین ہوں۔ہم متبادل قیمتیں استعمال کرتے ہوئے $\overline{x}^*$ ، $\overline{y}^*$ ، x_1^{*2} ، s_{xy}^* بذریعہ حساب تلاش کرنے کے بعد درج ذیل تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \overline{x} &= c_1\overline{x}^* + l_1, \qquad \overline{y} = c_2\overline{y}^* + l_2 \\ s_1^2 &= c_1^2 s_1^{*2}, \qquad s_{xy} = c_1 c_2 s_{xy}^* \end{aligned} \tag{24.167}$$

مثال 24.33: رجعی خط

ایک مخصوص چمڑے کی حجم میں فی صد کمی y بالمقابل مقررہ دباو x ناپے گیے۔کرہ ہوائی کے دباو کو دباو کی اکائی لی گئی ہے۔نتائج جدول 24.16 میں پیش کیے گئے ہیں۔ y کا x پر رجعی خط تلاش کریں۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ $n=4$ ہے اور $\overline{x}=\frac{28000}{4}=7000$ ، $\overline{y}=\frac{19.0}{4}=4.75$ ،

$$s_1^2=\frac{1}{3}\Big(216\,000\,000-\frac{28\,000^2}{4}\Big)=\frac{20\,000\,000}{3}$$
$$s_{xy}=\frac{1}{3}\Big(148\,400-\frac{28\,000\cdot 19}{4}\Big)=\frac{15\,400}{3}$$

حاصل کرتے ہیں۔یوں $b=\frac{15\,400}{20\,000\,000}=0.000\,777$ ہو گا اور رجعی خط درج ذیل ہو گا۔

$$y-4.75=0.000\,77(x-7000)\quad\implies\quad y=0.000\,77x-0.64$$

□

ہم درج ذیل دو مفروضے فرض کرتے ہیں۔

مفروضہ (ب)
ہر مقررہ x کے لئے بلا منصوبہ متغیر Y عمومی ہے جس کی اوسط

$$\mu(x)=\alpha+\beta x \tag{24.168}$$

اور تغیریت σ^2 ہے جہاں تغیریت x کا تابع نہیں ہے۔

مفروضہ (پ)
نمونہ $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ لینے کے لئے n مرتبہ تجربات غیر تابع طریقے سے سرانجام دیے گئے۔

زیر مفروضہ الف تا پ دکھایا جا سکتا ہے کہ β کا زیادہ سے زیادہ امکانی اندازہ مساوات 24.162 میں دیا گیا رجعی عددی سر b ہو گا۔اسی لئے β کو آبادی کا **رجعی عددی سر**[201] کہتے ہیں۔

زیر مفروضہ الف تا پ، جیسا جدول 24.17 میں دکھایا گیا ہے، ہم β کا وقفہ اعتماد حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 24.34: **رجعی عددی سر کا وقفہ اعتماد**
جدول 24.16 میں دی گئی نمونی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے جدول 24.17 میں دی گئی ترکیب سے β کا وقفہ

[201] regression coefficient

جدول 24.17: زیر مفروضہ الف تاپ مساوات 24.168 میں دیے گئے β کا وقفہ اعتماد

پہلا قدم: سطح اعتماد γ (95 %، 99 %، وغیرہ) منتخب کریں۔

دوسرا قدم: $n-2$ درجہ آزادی کے لئے ضمیمہ ج کی جدول ج.10 سے درج ذیل مساوات کا حل c تلاش کریں۔ (نمونی جسامت $=n$)

$$F(c)=\frac{1}{2}(1+\gamma) \tag{24.169}$$

تیسرا قدم: نمونہ $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 24.163 سے $(n-1)s_1^2$، مساوات 24.164 سے $(n-1)s_{xy}$، مساوات 24.162 سے b،

$$(n-1)s_2^2=\sum_{j=1}^{n}y_j^2-\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}y_j\Big)^2 \tag{24.170}$$

اور

$$q_0=(n-1)(s_2^2-b^2s_1^2) \tag{24.171}$$

حاصل کریں۔

چوتھا قدم: $k=c\sqrt{\frac{q_0}{(n-2)(n-1)s_1^2}}$ کو بذریعہ حساب حاصل کریں۔ وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\text{اعتماد}\{b-k\leq\beta\leq b+k\} \tag{24.172}$$

اعتماد تلاش کریں۔

حل: **پہلا قدم:** ہم $\gamma = 0.95$ منتخب کرتے ہیں۔

دوسرا قدم: مساوات 24.169 کو $F(c) = 0.975$ لکھ سکتے ہیں۔ ضمیمہ ج کی جدول ج.10 سے $n - 2 = 2$ درجہ آزادی کے لئے $c = 4.30$ حاصل ہوتا ہے۔

تیسرا قدم: مثال 24.33 ہمیں $3s_1^2 = 20\,000\,000$ اور $b = 0.000\,77$ دیتی ہے۔ جدول 24.16 سے ہم درج ذیل بذریعہ حساب حاصل کرتے ہیں۔

$$3s_2^2 = 102.2 - \frac{19^2}{4} = 11.95, \quad q_0 = 11.95 - 20\,000\,000 \cdot 0.000\,77^2 = 0.092$$

چوتھا قدم: یوں $k = 4.30\sqrt{\frac{0.092}{2\cdot 20\,000\,000}} = 0.000\,206$ حاصل ہو گا لہٰذا وقفہ اعتماد درج ذیل ہو گا۔

$$\{0.000\,56 \le \beta \le 0.000\,98\}$$

□

سوالات

سوال 24.282: آنکھ سے سیدھا خط تلاش کریں۔ایک گاڑی $35\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے چل رہی ہے جبکہ گاڑی کی (کلو میٹر فی گھنٹہ) رفتار x بالمقابل (میٹروں میں) رکنے کے لئے درکار فاصلہ y درج ذیل ہے۔

x	20	30	40	50
y	50	95	150	210

جواب: تقریباً $120\,\mathrm{m}$

سوال 24.283: $x_j = 2000x_j^* + 4000$ اور $y_j = 0.1y_j^* + 5$ لیتے ہوئے مثال 24.33 کے نتائج حاصل کریں۔

سوال 24.284: ایسا نمونہ حاصل کریں جس کے لئے $b = 0$ ہو۔

سوال 24.285 تا سوال 24.289 میں x پر y کی نمونی رجعی خط ترسیم کریں۔

سوال 24.285: سوال 24.281 کا نمونہ استعمال کریں۔

سوال 24.286: $(1,1), (2,1.7), (3,3)$
جواب: $y = x - 0.1$

سوال 24.287: ڈیزل انجن کی درج ذیل زاویائی رفتار x (فی منٹ چکر) بالمقابل طاقت y (کلو واٹ)

x	400	500	600	700	750
y	580	1030	1420	1880	2100

سوال 24.288: ایک مخصوص فولاد کی بد شکلی $x\,[\mathrm{mm}]$ اور برینل سختی[202] $y\,[\mathrm{kg\,mm^{-2}}]$

x	6	9	11	13	22	26	28	33	35
y	68	67	65	53	44	40	37	34	32

جواب: $y - 48.89 = -1.32(x - 20.33)$

سوال 24.289: کلورانیفتھالین کا گاڑھاپن $x\,[\%]$ اور دیکم کی اموات $y\,[\%]$

x	0.04	0.15	0.30	1.00	2.00
y	3	16	13	70	90

زیر مفروضہ ب اور پ، سوال 24.290 تا سوال 24.295 میں دیا گیا نمونہ استعمال کرتے ہوئے، رجعی عددی سر β کا $95\,\%$ وقفہ اعتماد تلاش کریں۔

سوال 24.290: $(1,1), (2,2+a), (3,3)$ جہاں a مستقل ہے۔
جواب: $2s_1^2 = 2, 2s_{xy} = 2, b = 1, 2s_2^2 = 2 + \frac{2}{3}p^2, q_0 = \frac{2}{3}p^2,$
$k = \frac{12.7a}{\sqrt{3}} = 7.3a\ (\gamma = 95\,\%),$ اعتماد $\{1 - 7.3a \le \beta \le 1 + 7.3a\}$

سوال 24.291: سوال 24.287 کا نمونہ۔

سوال 24.292: سوال 24.288 کا نمونہ۔
جواب: $q_0 = 76, k = 2.37\sqrt{\frac{76}{7\cdot 944}} = 0.254,$ اعتماد $= \{-1.58 \le \beta \le -1.06\}$

---

[202] Brinell hardness

سوال 24.293: ہوا میں نمی کا تناسب x [%] بالمقابل جیلی نما مادہ کا پھیل y [%]

x	10	20	30	40
y	0.8	1.6	2.3	2.8

سوال 24.294: مساوات 24.163 میں ایک ہاتھ سے دوسرا ہاتھ حاصل کریں۔ اشارہ۔ مربع لے کر $\bar{x}$ کی تعریف پر کرتے ہوئے سادہ صورت حاصل کریں۔

سوال 24.295: مساوات 24.164 میں دائیں ہاتھ کو بائیں ہاتھ سے حاصل کریں۔

ضمیمہ ا

اضافی ثبوت

صفحہ 131 پر مسئلہ 2.2 بیان کیا گیا جس کا ثبوت یہاں پیش کرتے ہیں۔

ثبوت: یکتائی (مسئلہ 2.2)
تصور کریں کہ کھلے وقفے I پر ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \quad y(x_0)=K_0, \quad y'(x_0)=K_1 \tag{1.ا}$$

کے دو عدد حل $y_1(x)$ اور $y_2(x)$ پائے جاتے ہیں۔ہم ثابت کرتے ہیں کہ I پر ان کا فرق

$$y(x)=y_1(x)-y_2(x)$$

مکمل صفر کے برابر ہے۔یوں $y_1(x)\equiv y_2(x)$ ہو گا جو یکتائی کا ثبوت ہے۔

چونکہ مساوات ا.1 خطی اور متجانس ہے لہٰذا I پر $y(x)$ بھی اس کا حل ہو گا اور چونکہ y_1 اور y_2 دونوں یکساں ابتدائی معلومات پر پورا اترتے ہیں لہٰذا y درج ذیل ابتدائی معلومات پر پورا اترے گا۔

$$y(x_0)=0, \quad y'(x_0)=0 \tag{2.ا}$$

ہم تفاعل

$$z=y^2+y'^2 \tag{3.ا}$$

اور اس کے تفرق

$$z' = 2yy' + 2y'y'' \tag{ا.4}$$

پر غور کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات ا.1 کو

$$y'' = -py' - qy$$

لکھتے ہوئے اس کو z' میں پر کرتے ہیں۔

$$z' = 2yy' + 2y'(-py' - qy) = 2yy' - 2py'^2 - 2qyy' \tag{ا.5}$$

اب چونکہ y اور y' حقیقی تفاعل ہیں لہٰذا ہم

$$(y \mp y')^2 = y^2 \mp 2yy' + y'^2 \geq 0 \tag{ا.6}$$

یعنی

$$\text{(الف)} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \quad \text{(ب)} \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z, \tag{ا.7}$$

لکھ سکتے ہیں جہاں مساوات ا.3 کا استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات ا.7-ب کو $2yy' \geq -z$ لکھتے ہوئے مساوات ا.7 کے دونوں حصوں کو $|2yy'| \leq z$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ا.5 کے آخری جزو کے لئے

$$-2qyy' \leq \left|-2qyy'\right| = |q|\left|2yy'\right| \leq |q|\, z$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس نتیجے کے ساتھ ساتھ $-p \leq |p|$ استعمال کرتے ہوئے اور مساوات ا.7-الف کو مساوات ا.5 کے $2yy'$ جزو میں استعمال کرتے ہوئے

$$z' \leq z + 2|p|\, y'^2 + |q|\, z$$

ملتا ہے۔ اب چونکہ $y'^2 \leq y^2 + y'^2 = z$ ہے لہٰذا اس سے

$$z' \leq (1 + |p| + |q|)z$$

ملتا ہے۔ اس میں $1 + |q| + |p| = h$ لکھتے ہوئے

$$z' \leq hz \qquad I \text{ پر تمام } x \tag{ا.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح مساوات ا.5 اور مساوات ا.7 سے درج ذیل بھی حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} -z' &= -2yy' + 2py'^2 + 2qyy' \\ &\leq z + 2|p|\, z + |q|\, z = hz \end{aligned} \tag{ا.9}$$

مساوات ا.8 اور مساوات ا.9 کے غیر مساوات درج ذیل غیر مساوات کے مترادف ہیں

$$z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0 \tag{ا.10}$$

جن کے بائیں ہاتھ کے جزو تکمل درج ذیل ہیں۔

$$F_1 = e^{-\int h(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad F_2 = e^{\int h(x)\,\mathrm{d}x}$$

چونکہ $h(x)$ استمراری ہے لہٰذا اس کا تکمل پایا جاتا ہے۔چونکہ F_1 اور F_2 مثبت ہیں لہٰذا انہیں مساوات ا.10 کے ساتھ ضرب کرنے سے

$$(z' - hz)F_1 = (zF_1)' \leq 0, \quad (z' + hz)F_2 = (zF_2)' \geq 0$$

حاصل ہوتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ I پر zF_1 بڑھ نہیں رہا اور zF_2 گھٹ نہیں رہا۔مساوات ا.2 کے تحت $z(x_0) = 0$ ہے لہٰذا $x \leq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \geq (zF_1)_{x_0} = 0, \qquad zF_2 \leq (zF_2)_{x_0} \tag{ا.11}$$

ہو گا اور اسی طرح $x \geq x_0$ کی صورت میں

$$zF_1 \leq 0, \qquad zF_2 \geq 0 \tag{ا.12}$$

ہو گا۔اب انہیں مثبت قیمتوں F_1 اور F_2 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$z \leq 0, \qquad z \geq 0 \qquad \text{پر تمام } x \text{ کے لئے } I \tag{ا.13}$$

ملتا ہے جس کا مطلب ہے کہ I پر $z = y^2 + y'^2 \equiv 0$ ہے۔یوں I پر $y \equiv 0$ یعنی $y_1 \equiv y_2$ ہے جو درکار ثبوت ہے۔

□

ضمیمہ ب

مفید معلومات

ب.1 اعلیٰ تفاعل کے مساوات

قوت نمائی تفاعل e^x (شکل ب.1-الف)

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$$

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{ب.1}$$

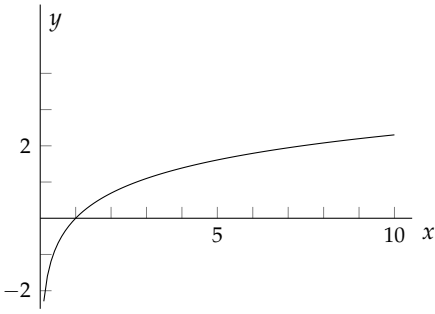
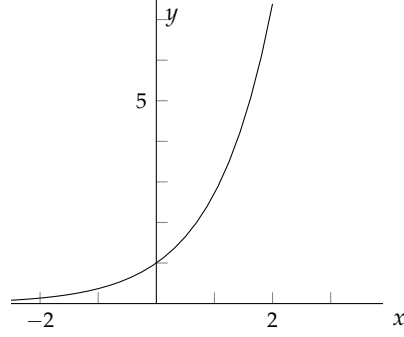
قدرتی لوگارتھم (شکل ب.1-ب)

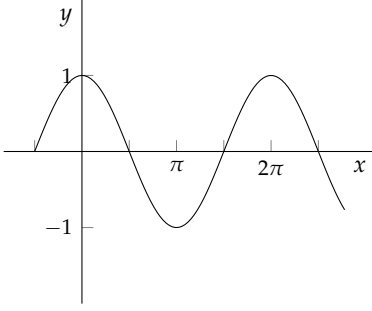
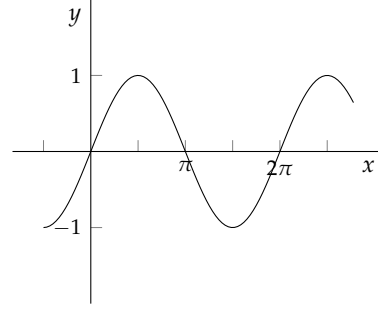
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a\ln x \tag{ب.2}$$

e^x کا الٹ $\ln x$ ہے۔اس کے علاوہ $e^{\ln x} = x$ اور $e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

اساس دس کا لوگارتھم $\log_{10} x$ یا $\log x$

$$\log x = M\ln x, \quad M = \log e = 0.434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\,918\,917 \tag{ب.3}$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\log x, \quad \frac{1}{M} = 2.302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,454\,684 \tag{ب.4}$$

(ب)قدرتی لوگار تھم $\ln x$

(الف)قوت نمائی تفاعل e^x

شکل ب.1: قوت نمائی تفاعل اور قدرتی لوگار تھم تفاعل

(ب) $\cos x$

(الف) $\sin x$

شکل ب.2: سائن نما تفاعل

10^x کا الٹ $\log x$ ہے۔اس کے علاوہ $10^{\log x} = x$ اور $10^{-\log x} = 10^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ ہیں۔

سائن اور کوسائن تفاعل (شکل ب.2-الف اور ب)۔ احصائے تکملات میں زاویہ کو ریڈئیں میں ناپا جاتا ہے۔یوں $\sin x$ اور $\cos x$ کا دوری عرصہ 2π ہو گا۔ $\sin x$ طاق ہے یعنی $\sin(-x) = -\sin x$ ہو گا جبکہ $\cos x$ جفت ہے یعنی $\cos(-x) = \cos x$ ہو گا۔

$$1^\circ = 0.017\,453\,292\,519\,943\,\text{rad}$$
$$1\,\text{radian} = 57^\circ\,17'\,44.80625'' = 57.2957795131^\circ$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{ب.5}$$

(ب.6)
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \sin(x-y) \quad = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

(ب.7)
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(ب.8)
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(ب.9)
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(ب.10)
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(ب.11)
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

(ب.12)
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

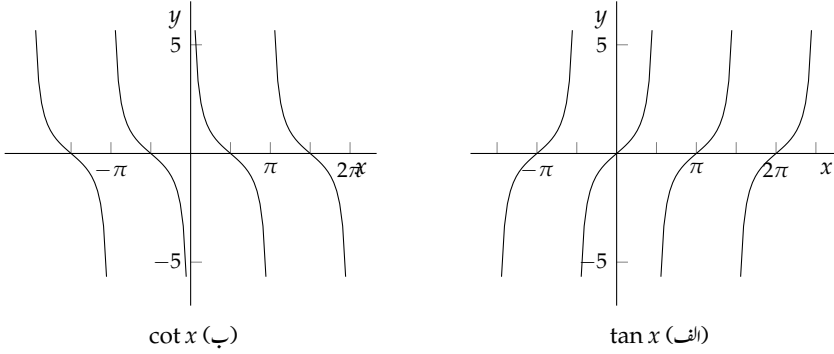
(ب.13)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \pm\frac{B}{A}$$

(ب.14)
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x \mp \delta), \quad \tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \mp\frac{A}{B}$$

ٹینجنٹ، کوٹینجنٹ، سیکنٹ، کوسیکنٹ (شکل ب.3-الف، ب)

(ب.15)
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc = \frac{1}{\sin x}$$

(ب.16)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$\cot x$ (ب) $\tan x$ (الف)

شکل ب.3: ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ

ہذلولی تفاعل (ہذلولی سائن $\sin hx$ وغیرہ۔ شکل ب.4-الف، ب)

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \cosh x + \sinh x &= e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x} \end{aligned} \tag{ب.17}$$

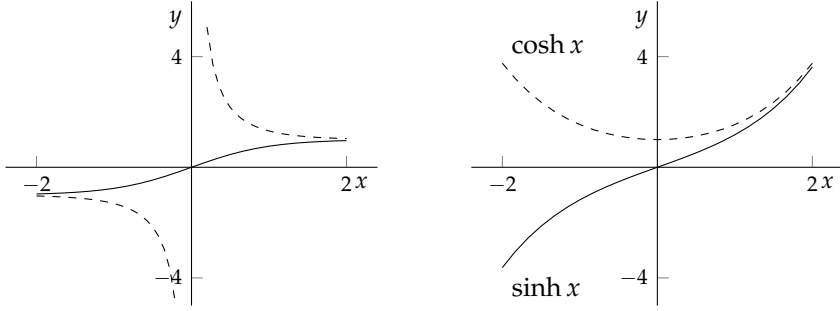
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{ب.18}$$

$$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{ب.19}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \end{aligned} \tag{ب.20}$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y} \tag{ب.21}$$

گیما تفاعل (شکل ب.5 اور ضمیمہ ج کی جدول ج.3) $\Gamma(\alpha)$ کی تعریف درج ذیل تکمل ہے

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0) \tag{ب.22}$$

(الف) ٹھوس خط $\sinh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\cosh x$ ہے۔

(ب) ٹھوس خط $\tanh x$ ہے جبکہ نقطہ دار خط $\coth x$ ہے۔

شکل ب.4: ہذلولی سائن، ہذلولی تفاعل۔

جو صرف مثبت ($\alpha > 0$) کے لئے معنی رکھتا ہے (یا اگر ہم مخلوط α کی بات کریں تب یہ α کی ان قیمتوں کے لئے معنی رکھتا ہے جن کا حقیقی جزو مثبت ہو)۔ تکمل بالحصص سے درج ذیل اہم تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{ب.23}$$

مساوات ب.22 سے $\Gamma(1) = 1$ ملتا ہے۔ یوں مساوات ب.23 استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(2) = 1$ حاصل ہو گا جسے دوبارہ مساوات ب.23 میں استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(3) = 2 \times 1$ ملتا ہے۔اسی طرح بار بار مساوات ب.23 استعمال کرتے ہوئے α کی کسی بھی عدد صحیح مثبت قیمت k کے لئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

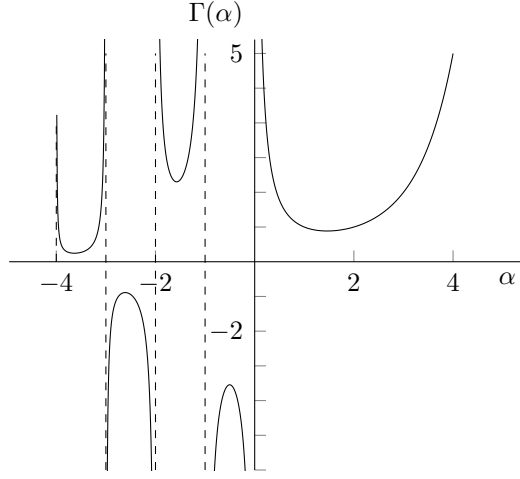
$$\Gamma(k+1) = k! \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{ب.24}$$

مساوات ب.23 کے بار بار استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}$$

جس کو استعمال کرتے ہوئے ہم α کی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل کی درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots) \tag{ب.25}$$

جہاں k کی ایسی کم سے کم قیمت چنی جاتی ہے کہ $\alpha + k + 1 > 0$ ہو۔ مساوات ب.22 اور مساوات ب.25 مل کر α کی تمام مثبت قیمتوں اور غیر عددی صحیحی منفی قیمتوں کے لئے گیما تفاعل دیتے ہیں۔

شکل ب.5: گیما تفاعل

گیما تفاعل کو حاصل ضرب کی حد بھی فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots) \tag{ب.26}$$

مساوات ب.25 اور مساوات ب.26 سے ظاہر ہے کہ مخلوط α کی صورت میں $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ پر گیما تفاعل کے قطب پائے جاتے ہیں۔

α کی بڑی قیمت کے لئے گیما تفاعل کی قیمت کو درج ذیل کلیہ سٹرلنگ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں e قدرتی لوگارتھم کی اساس ہے۔

$$\Gamma(\alpha+1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \tag{ب.27}$$

آخر میں گیما تفاعل کی ایک اہم اور مخصوص (درج ذیل) قیمت کا ذکر کرتے ہیں۔

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{ب.28}$$

نا مکمل گیما تفاعل

$$P(\alpha,x)=\int_0^x e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t,\quad Q(\alpha,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha>0) \tag{ب.29}$$

$$\Gamma(\alpha)=P(\alpha,x)+Q(\alpha,x) \tag{ب.30}$$

بیٹا تفاعل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0,\ y>0) \tag{ب.31}$$

بیٹا تفاعل کو گیما تفاعل کی صورت میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{ب.32}$$

تفاعل خلل (شکل ب.6 اور ضمیمہ ج کی جدول ج.14)

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.33}$$

مساوات ب.33 کے تفرق $\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ کی مکلارن تسلسل

$$\operatorname{erf}' x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right)$$

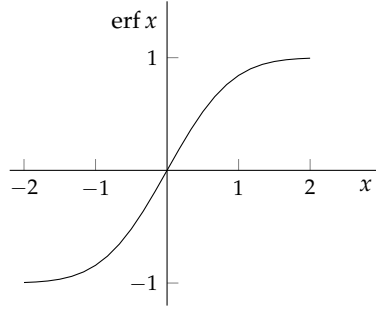
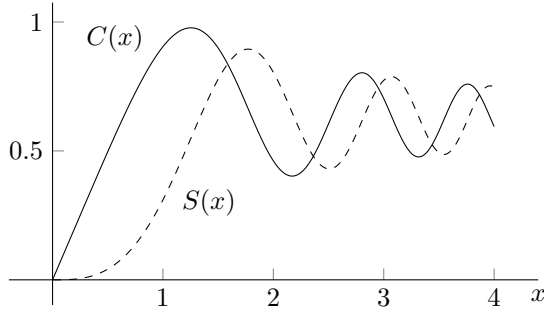
کا تکمل لینے سے تفاعل خلل کی تسلسل صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+-\cdots\right) \tag{ب.34}$$

$\operatorname{erf}\infty=1$ ہے۔ **مکملہ تفاعل خلل**

$$\operatorname{erfc} x=1-\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{ب.35}$$

فرسنل تکملات (شکل ب.7)

$$\mathrm{C}(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{S}(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \tag{ب.36}$$

شکل ب.6: تفاعل خلل۔

شکل ب.7: فرسنل تکملات

$C(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ اور $S(\infty)=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ ہیں۔ **مکملہ تفاعل**[1]

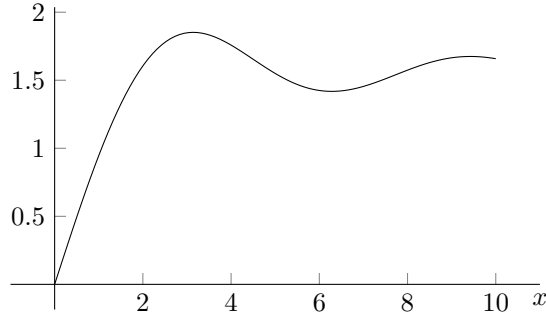
$$c(x)=\frac{\pi}{8}-C(x)=\int_x^\infty \cos(t^2)\,dt \tag{ب.37}$$

$$s(x)=\frac{\pi}{8}-S(x)=\int_x^\infty \sin(t^2)\,dt \tag{ب.38}$$

تکمل سائن (شکل ب.8 اور ضمیمہ ج کی جدول ج.14)

$$\text{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{ب.39}$$

---

[1] complementary functions

شکل ب.8: تکمل سائن

$\operatorname{Si}\infty = \frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے۔ تکملہ تفاعل

$$\operatorname{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t \tag{ب.40}$$

تکمل کوسائن (ضمیمہ ج کی جدول ج.14)

$$\operatorname{ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.41}$$

تکمل قوت نمائی

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t \qquad (x > 0) \tag{ب.42}$$

تکمل لوگارتھمی

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{ب.43}$$

ضمیمہ ج

جدول

جدول ج.1: بیسل تفاعل (قسم اول)

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0	1.0000	0.0000	3.4	−0.3643	0.1792	6.8	0.2931	−0.0652
0.1	0.9975	0.0499	3.5	−0.3801	0.1374	6.9	0.2981	−0.0349
0.2	0.9900	0.0995	3.6	−0.3918	0.0955	7	0.3001	−0.0047
0.3	0.9776	0.1483	3.7	−0.3992	0.0538	7.1	0.2991	0.0252
0.4	0.9604	0.1960	3.8	−0.4026	0.0128	7.2	0.2951	0.0543
0.5	0.9385	0.2423	3.9	−0.4018	−0.0272	7.3	0.2882	0.0826
0.6	0.9120	0.2867	4	−0.3971	−0.0660	7.4	0.2786	0.1096
0.7	0.8812	0.3290	4.1	−0.3887	−0.1033	7.5	0.2663	0.1352
0.8	0.8463	0.3688	4.2	−0.3766	−0.1386	7.6	0.2516	0.1592
0.9	0.8075	0.4059	4.3	−0.3610	−0.1719	7.7	0.2346	0.1813
1.0	0.7652	0.4401	4.4	−0.3423	−0.2028	7.8	0.2154	0.2014
1.1	0.7196	0.4709	4.5	−0.3205	−0.2311	7.9	0.1944	0.2192
1.2	0.6711	0.4983	4.6	−0.2961	−0.2566	8	0.1717	0.2346
1.3	0.6201	0.5220	4.7	−0.2693	−0.2791	8.1	0.1475	0.2476
1.4	0.5669	0.5419	4.8	−0.2404	−0.2985	8.2	0.1222	0.2580
1.5	0.5118	0.5579	4.9	−0.2097	−0.3147	8.3	0.0960	0.2657
1.6	0.4554	0.5699	5	−0.1776	−0.3276	8.4	0.0692	0.2708
1.7	0.3980	0.5778	5.1	−0.1443	−0.3371	8.5	0.0419	0.2731
1.8	0.3400	0.5815	5.2	−0.1103	−0.3432	8.6	0.0146	0.2728
1.9	0.2818	0.5812	5.3	−0.0758	−0.3460	8.7	−0.0125	0.2697
2	0.2239	0.5767	5.4	−0.0412	−0.3453	8.8	−0.0392	0.2641
2.1	0.1666	0.5683	5.5	−0.0068	−0.3414	8.9	−0.0653	0.2559
2.2	0.1104	0.5560	5.6	0.0270	−0.3343	9	−0.0903	0.2453
2.3	0.0555	0.5399	5.7	0.0599	−0.3241	9.1	−0.1142	0.2324
2.4	0.0025	0.5202	5.8	0.0917	−0.3110	9.2	−0.1367	0.2174
2.5	−0.0484	0.4971	5.9	0.1220	−0.2951	9.3	−0.1577	0.2004
2.6	−0.0968	0.4708	6	0.1506	−0.2767	9.4	−0.1768	0.1816
2.7	−0.1424	0.4416	6.1	0.1773	−0.2559	9.5	−0.1939	0.1613
2.8	−0.1850	0.4097	6.2	0.2017	−0.2329	9.6	−0.2090	0.1395
2.9	−0.2243	0.3754	6.3	0.2238	−0.2081	9.7	−0.2218	0.1166
3	−0.2601	0.3391	6.4	0.2433	−0.1816	9.8	−0.2323	0.0928
3.1	−0.2921	0.3009	6.5	0.2601	−0.1538	10.8	−0.2032	−0.1422
3.2	−0.3202	0.2613	6.6	0.2740	−0.1250	11.8	0.0020	−0.2323
3.3	−0.3443	0.2207	6.7	0.2851	−0.0953	12.8	0.1887	−0.1114

$J_0(x)$ کے صفر $x = 2.405, 5.520, 8.654, 11.792, 14.931, \cdots$ پر پائے جاتے ہیں۔
$J_1(x)$ کے صفر $x = 0, 3.832, 7.016, 10.173, 13.324, \cdots$ پر پائے جاتے ہیں۔

جدول ج.2: بیسل تفاعل (قسم دوم)

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0	$(-\infty)$	$(-\infty)$	2.5	0.498	0.146	5	−0.309	0.148
0.5	−0.445	−1.471	3	0.377	0.325	5.5	−0.339	−0.024
1	0.088	−0.781	3.5	0.189	0.410	6	−0.288	−0.175
1.5	0.382	−0.412	4	−0.017	0.398	6.5	−0.173	−0.274
2	0.510	−0.107	4.5	−0.195	0.301	7	−0.026	−0.303

جدول ج.3: گیما تفاعل (ضمیمہ ب میں مساوات ب.22)

α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$	α	$\gamma(\alpha)$
1	1.000 000	1.22	0.913 106	1.44	0.885 805	1.66	0.901 668	1.88	0.955 071
1.02	0.988 844	1.24	0.908 521	1.46	0.885 604	1.68	0.905 001	1.9	0.961 766
1.04	0.978 438	1.26	0.904 397	1.48	0.885 747	1.7	0.908 639	1.92	0.968 774
1.06	0.968 744	1.28	0.900 718	1.5	0.886 227	1.72	0.912 581	1.94	0.976 099
1.08	0.959 725	1.3	0.897 471	1.52	0.887 039	1.74	0.916 826	1.96	0.983 743
1.10	0.951 351	1.32	0.894 640	1.54	0.888 178	1.76	0.921 375	1.98	0.991 708
1.12	0.943 590	1.34	0.892 216	1.56	0.889 639	1.78	0.926 227	2	1.000 000
1.14	0.936 416	1.36	0.890 185	1.58	0.891 420	1.8	0.931 384	2.02	1.008 621
1.16	0.929 803	1.38	0.888 537	1.6	0.893 515	1.82	0.936 845	2.04	1.017 576
1.18	0.923 728	1.4	0.887 264	1.62	0.895 924	1.84	0.942 612	2.06	1.026 868
1.2	0.918 169	1.42	0.886 356	1.64	0.898 642	1.86	0.948 687	2.08	1.036 503

جدول ج.4: فیکٹوریل تفاعل

n	$n!$	$\log(n!)$	n	$n!$	$\log(n!)$	n	$n!$	$\log(n!)$
1	1	0.000 000	6	720	2.857 332	11	39 916 800	7.601 156
2	2	0.301 030	7	5040	3.702 431	12	479 001 600	8.680 337
3	6	0.778 151	8	40 320	4.605 521	13	6 227 020 800	9.794 280
4	24	1.380 211	9	362 880	5.559 763	14	87 178 291 200	10.940 408
5	120	2.079 181	10	3 628 800	6.559 763	15	1 307 674 368 000	12.116 500

جدول ج.5: ثنائی تقسیم۔ تفاعل احتمال $f(x)$ (مساوات 24.59) اور تفاعل تقسیم $F(x)$

n	x	$p = 0.1$		$p = 0.2$		$p = 0.3$		$p = 0.4$		$p = 0.5$	
		$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
1	0	0.9000	0.9000	0.8000	0.8000	0.7000	0.7000	0.6000	0.6000	0.5000	0.5000
	1	0.1000	1.0000	0.2000	1.0000	0.3000	1.0000	0.4000	1.0000	0.5000	1.0000
2	0	0.8100	0.8100	0.6400	0.6400	0.4900	0.4900	0.3600	0.3600	0.2500	0.2500
	1	0.1800	0.9900	0.3200	0.9600	0.4200	0.9100	0.4800	0.8400	0.5000	0.7500
	2	0.0100	1.0000	0.0400	1.0000	0.0900	1.0000	0.1600	1.0000	0.2500	1.0000
3	0	0.7290	0.7290	0.5120	0.5120	0.3430	0.3430	0.2160	0.2160	0.1250	0.1250
	1	0.2430	0.9720	0.3840	0.8960	0.4410	0.7840	0.4320	0.6480	0.3750	0.5000
	2	0.0270	0.9990	0.0960	0.9920	0.1890	0.9730	0.2880	0.9360	0.3750	0.8750
	3	0.0010	1.0000	0.0080	1.0000	0.0270	1.0000	0.0640	1.0000	0.1250	1.0000
4	0	0.6561	0.6561	0.4096	0.4096	0.2401	0.2401	0.1296	0.1296	0.0625	0.0625
	1	0.2916	0.9477	0.4096	0.8192	0.4116	0.6517	0.3456	0.4752	0.2500	0.3125
	2	0.0486	0.9963	0.1536	0.9728	0.2646	0.9163	0.3456	0.8208	0.3750	0.6875
	3	0.0036	0.9999	0.0256	0.9984	0.0756	0.9919	0.1536	0.9744	0.2500	0.9375
	4	0.0001	1.0000	0.0016	1.0000	0.0081	1.0000	0.0256	1.0000	0.0625	1.0000
5	0	0.5905	0.5905	0.3277	0.3277	0.1681	0.1681	0.0778	0.0778	0.0313	0.0313
	1	0.3281	0.9185	0.4096	0.7373	0.3602	0.5282	0.2592	0.3370	0.1563	0.1875
	2	0.0729	0.9914	0.2048	0.9421	0.3087	0.8369	0.3456	0.6826	0.3125	0.5000
	3	0.0081	0.9995	0.0512	0.9933	0.1323	0.9692	0.2304	0.9130	0.3125	0.8125
	4	0.0005	1.0000	0.0064	0.9997	0.0284	0.9976	0.0768	0.9898	0.1563	0.9688
	5	0.0000	1.0000	0.0003	1.0000	0.0024	1.0000	0.0102	1.0000	0.0313	1.0000
6	0	0.5314	0.5314	0.2621	0.2621	0.1176	0.1176	0.0467	0.0467	0.0156	0.0156
	1	0.3543	0.8857	0.3932	0.6554	0.3025	0.4202	0.1866	0.2333	0.0938	0.1094
	2	0.0984	0.9842	0.2458	0.9011	0.3241	0.7443	0.3110	0.5443	0.2344	0.3438
	3	0.0146	0.9987	0.0819	0.9830	0.1852	0.9295	0.2765	0.8208	0.3125	0.6563
	4	0.0012	0.9999	0.0154	0.9984	0.0595	0.9891	0.1382	0.9590	0.2344	0.8906
	5	0.0001	1.0000	0.0015	0.9999	0.0102	0.9993	0.0369	0.9959	0.0938	0.9844
	6	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0007	1.0000	0.0041	1.0000	0.0156	1.0000
7	0	0.4783	0.4783	0.2097	0.2097	0.0824	0.0824	0.0280	0.0280	0.0078	0.0078
	1	0.3720	0.8503	0.3670	0.5767	0.2471	0.3294	0.1306	0.1586	0.0547	0.0625
	2	0.1240	0.9743	0.2753	0.8520	0.3177	0.6471	0.2613	0.4199	0.1641	0.2266
	3	0.0230	0.9973	0.1147	0.9667	0.2269	0.8740	0.2903	0.7102	0.2734	0.5000
	4	0.0026	0.9998	0.0287	0.9953	0.0972	0.9712	0.1935	0.9037	0.2734	0.7734
	5	0.0002	1.0000	0.0043	0.9996	0.0250	0.9962	0.0774	0.9812	0.1641	0.9375
	6	0.0000	1.0000	0.0004	1.0000	0.0036	0.9998	0.0172	0.9984	0.0547	0.9922
	7	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0002	1.0000	0.0016	1.0000	0.0078	1.0000
8	0	0.4305	0.4305	0.1678	0.1678	0.0576	0.0576	0.0168	0.0168	0.0039	0.0039
	1	0.3826	0.8131	0.3355	0.5033	0.1977	0.2553	0.0896	0.1064	0.0313	0.0352
	2	0.1488	0.9619	0.2936	0.7969	0.2965	0.5518	0.2090	0.3154	0.1094	0.1445
	3	0.0331	0.9950	0.1468	0.9437	0.2541	0.8059	0.2787	0.5941	0.2188	0.3633
	4	0.0046	0.9996	0.0459	0.9896	0.1361	0.9420	0.2322	0.8263	0.2734	0.6367
	5	0.0004	1.0000	0.0092	0.9988	0.0467	0.9887	0.1239	0.9502	0.2188	0.8555
	6	0.0000	1.0000	0.0011	0.9999	0.0100	0.9987	0.0413	0.9915	0.1094	0.9648
	7	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0012	0.9999	0.0079	0.9993	0.0313	0.9961
	8	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0007	1.0000	0.0039	1.0000

جدول ج.6: پوئسن تقسیم

تفاعل احتمال $f(x)$ (مساوات 24.62) اور تفاعل تقسیم $F(x)$

x	$\mu=0.1$		$\mu=0.2$		$\mu=0.3$		$\mu=0.4$		$\mu=0.5$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	0.9048	0.9048	0.8187	0.8187	0.7408	0.7408	0.6703	0.6703	0.6065	0.6065
1	0.0905	0.9953	0.1637	0.9825	0.2222	0.9631	0.2681	0.9384	0.3033	0.9098
2	0.0045	0.9998	0.0164	0.9989	0.0333	0.9964	0.0536	0.9921	0.0758	0.9856
3	0.0002	1.0000	0.0011	0.9999	0.0033	0.9997	0.0072	0.9992	0.0126	0.9982
4	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0003	1.0000	0.0007	0.9999	0.0016	0.9998
5							0.0001	1.0000	0.0002	1.0000

x	$\mu=0.6$		$\mu=0.7$		$\mu=0.8$		$\mu=0.9$		$\mu=1$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	0.5488	0.5488	0.4966	0.4966	0.4493	0.4493	0.4066	0.4066	0.3679	0.3679
1	0.3293	0.8781	0.3476	0.8442	0.3595	0.8088	0.3659	0.7725	0.3679	0.7358
2	0.0988	0.9769	0.1217	0.9659	0.1438	0.9526	0.1647	0.9371	0.1839	0.9197
3	0.0198	0.9966	0.0284	0.9942	0.0383	0.9909	0.0494	0.9865	0.0613	0.9810
4	0.0030	0.9996	0.0050	0.9992	0.0077	0.9986	0.0111	0.9977	0.0153	0.9963
5	0.0004	1.0000	0.0007	0.9999	0.0012	0.9998	0.0020	0.9997	0.0031	0.9994
6			0.0001	1.0000	0.0002	1.0000	0.0003	1.0000	0.0005	0.9999
7									0.0001	1.0000

x	$\mu=1.5$		$\mu=2$		$\mu=3$		$\mu=4$		$\mu=5$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	0.2231	0.2231	0.1353	0.1353	0.0498	0.0498	0.0183	0.0183	0.0067	0.0067
1	0.3347	0.5578	0.2707	0.4060	0.1494	0.1991	0.0733	0.0916	0.0337	0.0404
2	0.2510	0.8088	0.2707	0.6767	0.2240	0.4232	0.1465	0.2381	0.0842	0.1247
3	0.1255	0.9344	0.1804	0.8571	0.2240	0.6472	0.1954	0.4335	0.1404	0.2650
4	0.0471	0.9814	0.0902	0.9473	0.1680	0.8153	0.1954	0.6288	0.1755	0.4405
5	0.0141	0.9955	0.0361	0.9834	0.1008	0.9161	0.1563	0.7851	0.1755	0.6160
6	0.0035	0.9991	0.0120	0.9955	0.0504	0.9665	0.1042	0.8893	0.1462	0.7622
7	0.0008	0.9998	0.0034	0.9989	0.0216	0.9881	0.0595	0.9489	0.1044	0.8666
8	0.0001	1.0000	0.0009	0.9998	0.0081	0.9962	0.0298	0.9786	0.0653	0.9319
9			0.0002	1.0000	0.0027	0.9989	0.0132	0.9919	0.0363	0.9682
10					0.0008	0.9997	0.0053	0.9972	0.0181	0.9863
11					0.0002	0.9999	0.0019	0.9991	0.0082	0.9945
12					0.0001	1.0000	0.0006	0.9997	0.0034	0.9980
13							0.0002	0.9999	0.0013	0.9993
14							0.0001	1.0000	0.0005	0.9998
15									0.0002	0.9999
16									0.0000	1.0000

جدول ج.7: عمومی تقسیم۔تفاعل تقسیم $\Phi(z)$ (مساوات 24.71)

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ ، $\Phi(0) = 0.5000$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.01	0.5040	0.51	0.6950	1.01	0.8438	1.51	0.9345	2.01	0.9778	2.51	0.9940
0.02	0.5080	0.52	0.6985	1.02	0.8461	1.52	0.9357	2.02	0.9783	2.52	0.9941
0.03	0.5120	0.53	0.7019	1.03	0.8485	1.53	0.9370	2.03	0.9788	2.53	0.9943
0.04	0.5160	0.54	0.7054	1.04	0.8508	1.54	0.9382	2.04	0.9793	2.54	0.9945
0.05	0.5199	0.55	0.7088	1.05	0.8531	1.55	0.9394	2.05	0.9798	2.55	0.9946
0.06	0.5239	0.56	0.7123	1.06	0.8554	1.56	0.9406	2.06	0.9803	2.56	0.9948
0.07	0.5279	0.57	0.7157	1.07	0.8577	1.57	0.9418	2.07	0.9808	2.57	0.9949
0.08	0.5319	0.58	0.7190	1.08	0.8599	1.58	0.9429	2.08	0.9812	2.58	0.9951
0.09	0.5359	0.59	0.7224	1.09	0.8621	1.59	0.9441	2.09	0.9817	2.59	0.9952
0.10	0.5398	0.6	0.7257	1.10	0.8643	1.60	0.9452	2.1	0.9821	2.60	0.9953
0.11	0.5438	0.61	0.7291	1.11	0.8665	1.61	0.9463	2.11	0.9826	2.61	0.9955
0.12	0.5478	0.62	0.7324	1.12	0.8686	1.62	0.9474	2.12	0.9830	2.62	0.9956
0.13	0.5517	0.63	0.7357	1.13	0.8708	1.63	0.9484	2.13	0.9834	2.63	0.9957
0.14	0.5557	0.64	0.7389	1.14	0.8729	1.64	0.9495	2.14	0.9838	2.64	0.9959
0.15	0.5596	0.65	0.7422	1.15	0.8749	1.65	0.9505	2.15	0.9842	2.65	0.9960
0.16	0.5636	0.66	0.7454	1.16	0.8770	1.66	0.9515	2.16	0.9846	2.66	0.9961
0.17	0.5675	0.67	0.7486	1.17	0.8790	1.67	0.9525	2.17	0.9850	2.67	0.9962
0.18	0.5714	0.68	0.7517	1.18	0.8810	1.68	0.9535	2.18	0.9854	2.68	0.9963
0.19	0.5753	0.69	0.7549	1.19	0.8830	1.69	0.9545	2.19	0.9857	2.69	0.9964
0.20	0.5793	0.70	0.7580	1.20	0.8849	1.7	0.9554	2.20	0.9861	2.70	0.9965
0.21	0.5832	0.71	0.7611	1.21	0.8869	1.71	0.9564	2.21	0.9864	2.71	0.9966
0.22	0.5871	0.72	0.7642	1.22	0.8888	1.72	0.9573	2.22	0.9868	2.72	0.9967
0.23	0.5910	0.73	0.7673	1.23	0.8907	1.73	0.9582	2.23	0.9871	2.73	0.9968
0.24	0.5948	0.74	0.7704	1.24	0.8925	1.74	0.9591	2.24	0.9875	2.74	0.9969
0.25	0.5987	0.75	0.7734	1.25	0.8944	1.75	0.9599	2.25	0.9878	2.75	0.9970
0.26	0.6026	0.76	0.7764	1.26	0.8962	1.76	0.9608	2.26	0.9881	2.76	0.9971
0.27	0.6064	0.77	0.7794	1.27	0.8980	1.77	0.9616	2.27	0.9884	2.77	0.9972
0.28	0.6103	0.78	0.7823	1.28	0.8997	1.78	0.9625	2.28	0.9887	2.78	0.9973
0.29	0.6141	0.79	0.7852	1.29	0.9015	1.79	0.9633	2.29	0.9890	2.79	0.9974
0.30	0.6179	0.80	0.7881	1.30	0.9032	1.80	0.9641	2.30	0.9893	2.80	0.9974
0.31	0.6217	0.81	0.7910	1.31	0.9049	1.81	0.9649	2.31	0.9896	2.81	0.9975
0.32	0.6255	0.82	0.7939	1.32	0.9066	1.82	0.9656	2.32	0.9898	2.82	0.9976
0.33	0.6293	0.83	0.7967	1.33	0.9082	1.83	0.9664	2.33	0.9901	2.83	0.9977
0.34	0.6331	0.84	0.7995	1.34	0.9099	1.84	0.9671	2.34	0.9904	2.84	0.9977
0.35	0.6368	0.85	0.8023	1.35	0.9115	1.85	0.9678	2.35	0.9906	2.85	0.9978
0.36	0.6406	0.86	0.8051	1.36	0.9131	1.86	0.9686	2.36	0.9909	2.86	0.9979
0.37	0.6443	0.87	0.8078	1.37	0.9147	1.87	0.9693	2.37	0.9911	2.87	0.9979
0.38	0.6480	0.88	0.8106	1.38	0.9162	1.88	0.9699	2.38	0.9913	2.88	0.9980
0.39	0.6517	0.89	0.8133	1.39	0.9177	1.89	0.9706	2.39	0.9916	2.89	0.9981
0.40	0.6554	0.90	0.8159	1.40	0.9192	1.90	0.9713	2.4	0.9918	2.90	0.9981
0.41	0.6591	0.91	0.8186	1.41	0.9207	1.91	0.9719	2.41	0.9920	2.91	0.9982
0.42	0.6628	0.92	0.8212	1.42	0.9222	1.92	0.9726	2.42	0.9922	2.92	0.9982
0.43	0.6664	0.93	0.8238	1.43	0.9236	1.93	0.9732	2.43	0.9925	2.93	0.9983
0.44	0.6700	0.94	0.8264	1.44	0.9251	1.94	0.9738	2.44	0.9927	2.94	0.9984
0.45	0.6736	0.95	0.8289	1.45	0.9265	1.95	0.9744	2.45	0.9929	2.95	0.9984
0.46	0.6772	0.96	0.8315	1.46	0.9279	1.96	0.9750	2.46	0.9931	2.96	0.9985
0.47	0.6808	0.97	0.8340	1.47	0.9292	1.97	0.9756	2.47	0.9932	2.97	0.9985
0.48	0.6844	0.98	0.8365	1.48	0.9306	1.98	0.9761	2.48	0.9934	2.98	0.9986
0.49	0.6879	0.99	0.8389	1.49	0.9319	1.99	0.9767	2.49	0.9936	2.99	0.9986
0.50	0.6915	1.00	0.8413	1.50	0.9332	2.00	0.9772	2.50	0.9938	3.00	0.9987

جدول ج.8: عمومی تقسیم

$\Phi(z)$ (مساوات 24.71) اور $D(z) = \Phi(z) - \Phi(-z)$ کے لئے z کی قیمتیں۔
مثال کے طور پر $\Phi(z) = 61\,\%$ پر $z = 0.279$ ہو گا اور $D(z) = 61\,\%$ پر $z = 0.860$ ہو گا۔

%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$
1	−2.326	0.013	41	−0.228	0.539	81	0.878	1.311
2	−2.054	0.025	42	−0.202	0.553	82	0.915	1.341
3	−1.881	0.038	43	−0.176	0.568	83	0.954	1.372
4	−1.751	0.050	44	−0.151	0.583	84	0.994	1.405
5	−1.645	0.063	45	−0.126	0.598	85	1.036	1.440
6	−1.555	0.075	46	−0.100	0.613	86	1.080	1.476
7	−1.476	0.088	47	−0.075	0.628	87	1.126	1.514
8	−1.405	0.100	48	−0.050	0.643	88	1.175	1.555
9	−1.341	0.113	49	−0.025	0.659	89	1.227	1.598
10	−1.282	0.126	50	0.000	0.674	90	1.282	1.645
11	−1.227	0.138	51	0.025	0.690	91	1.341	1.695
12	−1.175	0.151	52	0.050	0.706	92	1.405	1.751
13	−1.126	0.164	53	0.075	0.722	93	1.476	1.812
14	−1.080	0.176	54	0.100	0.739	94	1.555	1.881
15	−1.036	0.189	55	0.126	0.755	95	1.645	1.960
16	−0.994	0.202	56	0.151	0.772	96	1.751	2.054
17	−0.954	0.215	57	0.176	0.789	97	1.881	2.170
18	−0.915	0.228	58	0.202	0.806	97.5	1.960	2.241
19	−0.878	0.240	59	0.228	0.824	98	2.054	2.326
20	−0.842	0.253	60	0.253	0.842	99	2.326	2.576
21	−0.806	0.266	61	0.279	0.860	99.1	2.366	2.612
22	−0.772	0.279	62	0.305	0.878	99.2	2.409	2.652
23	−0.739	0.292	63	0.332	0.896	99.3	2.457	2.697
24	−0.706	0.305	64	0.358	0.915	99.4	2.512	2.748
25	−0.674	0.319	65	0.385	0.935	99.5	2.576	2.807
26	−0.643	0.332	66	0.412	0.954	99.6	2.652	2.878
27	−0.613	0.345	67	0.440	0.974	99.7	2.748	2.968
28	−0.583	0.358	68	0.468	0.994	99.8	2.878	3.090
29	−0.553	0.372	69	0.496	1.015	99.9	3.090	3.291
30	−0.524	0.385	70	0.524	1.036			
31	−0.496	0.399	71	0.553	1.058	99.91	3.121	3.320
32	−0.468	0.412	72	0.583	1.080	99.92	3.156	3.353
33	−0.440	0.426	73	0.613	1.103	99.93	3.195	3.390
34	−0.412	0.440	74	0.643	1.126	99.94	3.239	3.432
35	−0.385	0.454	75	0.674	1.150	99.95	3.291	3.481
36	−0.358	0.468	76	0.706	1.175	99.96	3.353	3.540
37	−0.332	0.482	77	0.739	1.200	99.97	3.432	3.615
38	−0.305	0.496	78	0.772	1.227	99.98	3.540	3.719
39	−0.279	0.510	79	0.806	1.254	99.99	3.719	3.891
40	−0.253	0.524	80	0.842	1.282			

جدول ج.9: بلا منصوبہ اعداد

شمار صف	شمار قطار 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	87331	82442	28104	26432	83640	17323	68764	84728	37995	96106
1	33628	17364	01409	87803	65641	33433	48944	64299	79066	31777
2	54680	13427	72496	16967	16195	96593	55040	53729	62035	66717
3	51199	49794	49407	10774	98140	83891	37195	24066	61140	65144
4	78702	98067	61313	91661	59861	54437	77739	19892	54817	88645
5	55672	16014	24892	13089	00410	81458	76156	28189	40595	21500
6	18880	58497	03862	32368	59320	24807	63392	79793	63043	09425
7	10242	62548	62330	05703	33535	49128	66298	16193	55301	01306
8	54993	17182	94618	23228	83895	73251	68199	64639	83178	70521
9	22686	50885	16006	04041	08077	33065	35237	05502	94755	72062
10	42349	03145	15770	70665	53291	32288	41568	66079	98705	31029
11	18093	09553	39428	75464	71329	86344	80729	40916	18860	51780
12	11535	03924	84252	74795	40193	84597	42497	21918	91384	84721
13	35066	73848	65351	53270	63341	70177	92373	17604	42204	60476
14	57477	22809	73558	96182	96779	01604	25748	59553	64876	94611
15	48647	33850	52956	45410	88212	05120	99391	32276	55961	41775
16	86857	81154	22223	74950	53296	67767	55866	49361	66937	81818
17	20182	36907	94644	99122	09774	29189	27212	79000	50217	71077
18	83687	31231	01133	41432	54542	60204	81618	09586	34481	87683
19	81315	12390	46074	47810	90171	36313	95440	77583	28506	38808
20	87026	52826	58341	76549	04105	66191	12914	55348	07907	06978
21	34301	76733	07251	90524	21931	83695	41340	53581	64582	60210
22	70734	24337	32674	49508	49751	90489	63202	24380	77943	09942
23	94710	31527	73445	32839	68176	53580	85250	53243	03350	00128
24	76462	16987	07775	43162	11777	16810	75158	13894	88945	15539
25	14348	28403	79245	69023	64196	46398	05964	64715	11330	17515
26	74618	89317	30146	25606	94507	98104	04239	44973	37636	88866
27	99442	19200	85406	45358	86253	60638	38858	44964	54103	57287
28	26869	44399	89452	06652	31271	00647	46551	83050	92058	83814
29	80988	08149	50499	98584	28385	63680	44638	91864	96002	87802
30	07511	79047	89289	17774	67194	37362	85684	55505	97809	67056
31	49779	12138	05048	03535	27502	63308	10218	53296	48687	61340
32	47938	55945	24003	19635	17471	65997	85906	98694	56420	78357
33	15604	06626	14360	79442	13512	87595	08542	03800	35443	52823
34	12307	27726	21864	00045	16075	03770	86978	52718	02693	09096
35	02450	28053	66134	99445	91316	25727	89399	85272	67148	78358
36	57623	54382	35236	89244	27245	90500	75430	96762	71968	65838
37	91762	78849	93105	40481	99431	03304	21079	86459	21287	76566
38	87373	31137	31428	67050	64309	44914	80711	61738	61498	24288
39	67094	41485	54149	86088	10192	21174	39948	67286	29938	32476
40	94456	66767	76922	87627	71834	57688	04878	78348	68970	60048
41	68359	75292	27710	86889	81678	79798	58360	39175	75667	65782
42	52393	31404	32584	06837	79762	13168	76055	54833	22841	98889
43	59565	91254	11847	20672	37625	41454	86861	55824	79793	74575
44	48185	11066	20162	38230	16043	48409	47421	21195	98008	57305
45	19230	12187	86659	12971	52204	76546	63272	19312	81662	96557
46	84327	21942	81727	68735	89190	58491	55329	96875	19465	89687
47	77430	71210	00591	50124	12030	50280	12358	76174	48353	09862
48	12462	19108	70512	53926	25595	97085	03833	59806	12351	64253
49	11684	06644	57816	10078	45021	47751	38285	773520	08434	65627

بلا منصوبہ اعداد (جدول ج.9)

شمار صف	شمار قطار 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	12896	36576	68686	08462	65652	76571	70891	09007	04581	01684
51	59090	05111	27587	90349	30789	50304	70650	06646	70126	15284
52	42486	67483	65282	19037	80588	73076	41820	46651	40442	40718
53	88662	03928	03249	85910	97533	88643	29829	21557	47328	36724
54	69403	03626	92678	59460	15465	83516	54012	80509	55976	46115
55	56434	70543	38696	98502	32092	95505	62091	39549	30117	98209
56	58227	62694	42837	29183	11393	68463	25150	86338	95620	39836
57	41272	94927	15413	40505	33123	63218	72940	98349	57249	40170
58	36819	01162	30425	15546	16065	68459	35776	64276	92868	07372
59	31700	66711	26115	55755	33584	18091	38709	57276	74660	90392
60	69855	63699	36839	90531	97125	87875	62824	03889	12538	24740
61	44322	17569	45439	41455	34324	90902	07978	26268	04279	76816
62	62226	36661	87011	66267	78777	78044	40819	49496	39814	73867
63	27284	19737	98741	72531	52741	26699	98755	19657	08665	16818
64	88341	21652	94743	77268	79525	44769	66583	30621	90534	62050
65	53266	18783	51903	56711	38060	69513	61963	80470	88018	86510
66	50527	49330	24839	42529	03944	95219	88724	37247	84116	23023
67	15655	07852	77206	35944	71446	30573	19405	57824	23576	23301
68	62057	22206	03314	83465	57466	10465	19891	32308	01900	67484
69	41769	56091	19892	96253	92808	45785	52774	49674	68103	65032
70	25993	72416	44473	41299	93095	17338	69802	98548	02429	85238
71	22842	57871	04470	37373	34516	04042	04078	35336	34393	97573
72	55704	31982	05234	22664	22181	40358	28089	15790	33340	18852
73	94258	18706	09437	96041	90052	80862	20420	24323	11635	91677
74	74145	20453	29657	98868	56695	53483	87449	35060	98942	62697
75	88881	12673	73961	89884	73247	97670	69570	88888	58560	72580
76	01508	56780	52223	35632	73347	71317	46541	88023	36656	76332
77	92069	43000	23233	06058	82527	25250	27555	20426	60361	63525
78	53366	35249	02117	68620	39388	69795	73215	01846	16983	78560
79	88057	54097	49511	74867	32192	90071	04147	46094	63519	07199
80	85492	82238	02668	91854	86149	28590	77853	81035	45561	16032
81	39453	62123	69611	53017	34964	09786	24614	49514	01056	18700
82	82627	98111	93870	56969	69566	62662	07353	84838	14570	14508
83	61142	51743	38209	31474	96095	15163	54380	77849	20465	03142
84	12031	32528	61311	53730	89032	16124	58844	35386	45521	59368
85	31313	59838	29147	76882	74328	09955	63673	96651	53264	29871
86	50767	41056	97409	44376	62219	35439	70102	99248	71179	26052
87	30522	95699	84966	26554	24768	72247	84993	85375	92518	16334
88	74176	19870	89874	64799	03792	57006	57225	36677	46825	14087
89	17114	93248	37065	91346	04657	93763	92210	43676	44944	75798
90	53005	11825	64608	87587	05742	31914	55044	41818	29667	77424
91	31985	81539	79942	49471	46200	27639	94099	42085	79231	03932
92	63499	60508	77522	15624	15088	78519	52279	79214	43623	69166
93	30506	42444	99047	66010	91657	37160	37408	85714	21420	80996
94	78248	16841	92357	10130	68990	38307	61022	56806	81016	38511
95	64996	84789	50185	32200	64382	29752	11876	00664	54547	62597
96	11963	13157	09136	01769	30117	71486	80111	09161	08371	71749
97	44335	91450	43456	90449	18338	19787	31339	60473	06606	89788
98	42277	11868	44520	01113	11341	11743	97949	49718	99176	42006
99	77562	18863	58515	90166	78508	14864	19111	57183	85808	59385

جدول ج.10: t تقسیم

تفاعل تقسیم $F(z)$ (مساوات 24.119) کے لئے z کی قیمتیں۔
مثال کے طور پر 9 درجہ آزادی کے لئے $F(z) = 0.95$ تب ہو گا جب $z = 1.83$ ہو۔

F(z)	درجہ آزادی									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.32	0.29	0.28	0.27	0.27	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.73	0.62	0.58	0.57	0.56	0.55	0.55	0.55	0.54	0.54
0.8	1.38	1.06	0.98	0.94	0.92	0.91	0.90	0.89	0.88	0.88
0.9	3.08	1.89	1.64	1.53	1.48	1.44	1.41	1.40	1.38	1.37
0.95	6.31	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.89	1.86	1.83	1.81
0.975	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23
0.99	31.82	6.96	4.54	3.75	3.36	3.14	3.00	2.90	2.82	2.76
0.995	63.66	9.92	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	3.17
0.999	318.31	22.33	10.21	7.17	5.89	5.21	4.79	4.50	4.30	4.14

F(z)	درجہ آزادی									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.53	0.53	0.53	0.53
0.8	0.88	0.87	0.87	0.87	0.87	0.86	0.86	0.86	0.86	0.86
0.9	1.36	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	1.33	1.33	1.33	1.33
0.95	1.80	1.78	1.77	1.76	1.75	1.75	1.74	1.73	1.73	1.72
0.975	2.20	2.18	2.16	2.14	2.13	2.12	2.11	2.10	2.09	2.09
0.99	2.72	2.68	2.65	2.62	2.60	2.58	2.57	2.55	2.54	2.53
0.995	3.11	3.05	3.01	2.98	2.95	2.92	2.90	2.88	2.86	2.85
0.999	4.02	3.93	3.85	3.79	3.73	3.69	3.65	3.61	3.58	3.55

F(z)	درجہ آزادی									
	22	24	26	28	30	40	50	100	200	∞
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.25	0.25	0.25	0.25
0.7	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.52
0.8	0.86	0.86	0.86	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	0.84	0.84
0.9	1.32	1.32	1.31	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	1.29	1.28
0.95	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.68	1.68	1.66	1.65	1.64
0.975	2.07	2.06	2.06	2.05	2.04	2.02	2.01	1.98	1.97	1.96
0.99	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.33
0.995	2.82	2.80	2.78	2.76	2.75	2.70	2.68	2.63	2.60	2.58
0.999	3.50	3.47	3.43	3.41	3.39	3.31	3.26	3.17	3.13	3.09

جدول ج.11: مربع خا تقسیم

تفاعل تقسیم $F(z)$ (مساوات 24.122) کے لئے z کی قیمتیں۔
مثال کی طور پر 3 درجہ آزادی کے لئے $F(z) = 0.99$ تب ہو گا جب $z = 11.34$ ہو۔

F(z)	آزادی درجہ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.95	23.59	25.19

F(z)	آزادی درجہ									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.005	2.60	3.07	3.57	4.07	4.60	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43
0.01	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26
0.025	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59
0.05	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85
0.95	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41
0.975	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17
0.99	24.72	26.22	27.69	29.14	30.58	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57
0.995	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00

F(z)	آزادی درجہ									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.005	8.03	8.64	9.26	9.89	10.52	11.16	11.81	12.46	13.12	13.79
0.01	8.90	9.54	10.20	10.86	11.52	12.20	12.88	13.56	14.26	14.95
0.025	10.28	10.98	11.69	12.40	13.12	13.84	14.57	15.31	16.05	16.79
0.05	11.59	12.34	13.09	13.85	14.61	15.38	16.15	16.93	17.71	18.49
0.95	32.67	33.92	35.17	36.42	37.65	38.89	40.11	41.34	42.56	43.77
0.975	35.48	36.78	38.08	39.36	40.65	41.92	43.19	44.46	45.72	46.98
0.99	38.93	40.29	41.64	42.98	44.31	45.64	46.96	48.28	49.59	50.89
0.995	41.40	42.80	44.18	45.56	46.93	48.29	49.64	50.99	52.34	53.67

F(z)	آزادی درجہ							
	40	50	60	70	80	90	100	> 100(تخمین)
0.005	20.71	27.99	35.53	43.28	51.17	59.20	67.33	$\frac{1}{2}(h-2.58)^2$
0.01	22.16	29.71	37.48	45.44	53.54	61.75	70.06	$\frac{1}{2}(h-2.33)^2$
0.025	24.43	32.36	40.48	48.76	57.15	65.65	74.22	$\frac{1}{2}(h-1.96)^2$
0.05	26.51	34.76	43.19	51.74	60.39	69.13	77.93	$\frac{1}{2}(h-1.64)^2$
0.95	55.76	67.50	79.08	90.53	101.88	113.15	124.34	$\frac{1}{2}(h+1.64)^2$
0.975	59.34	71.42	83.30	95.02	106.63	118.14	129.56	$\frac{1}{2}(h+1.96)^2$
0.99	63.69	76.15	88.38	100.43	112.33	124.12	135.81	$\frac{1}{2}(h+2.33)^2$
0.995	66.77	79.49	91.95	104.21	116.32	128.30	140.17	$\frac{1}{2}(h+2.58)^2$

آخری قطار میں $h=\sqrt{2m-1}$ ہے جہاں m درجہ آزادی ہے۔

جدول ج.12: (m, n) درجہ آزادی کے F تقسیم

z کی وہ قیمتیں جن پر تفاعل تقسیم $F(z)$ (مساوات 24.147) کی قیمت 0.95 ہو گی۔
مثال کے طور پر $(7, 4)$ درجہ آزادی کے لئے $F(z) = 0.95$ تب ہو گا جب $z = 6.09$ ہو۔

n	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

(m, n) درجہ آزادی کی F تقسیم (جدول ج.12)
z کی وہ قیمتیں جن پر $F(z) = 0.95$ ہے۔

n	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 30$	$m = 40$	$m = 50$	$m = 100$	$m = \infty$
1	241.88	245.95	248.01	250.10	251.14	251.77	253.04	254.31
2	19.40	19.43	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.79	8.70	8.66	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	5.96	5.86	5.80	5.75	5.72	5.70	5.66	5.63
5	4.74	4.62	4.56	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	4.06	3.94	3.87	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	3.64	3.51	3.44	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	3.35	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	3.14	3.01	2.94	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	2.98	2.85	2.77	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.46	2.40
12	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	2.60	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.19	2.13
15	2.54	2.40	2.33	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.07	2.01
17	2.45	2.31	2.23	2.15	2.10	2.08	2.02	1.96
18	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	2.38	2.23	2.16	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	2.35	2.20	2.12	2.04	1.99	1.97	1.91	1.84
22	2.30	2.15	2.07	1.98	1.94	1.91	1.85	1.78
24	2.25	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.80	1.73
26	2.22	2.07	1.99	1.90	1.85	1.82	1.76	1.69
28	2.19	2.04	1.96	1.87	1.82	1.79	1.73	1.65
30	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79	1.76	1.70	1.62
32	2.14	1.99	1.91	1.82	1.77	1.74	1.67	1.59
34	2.12	1.97	1.89	1.80	1.75	1.71	1.65	1.57
36	2.11	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.62	1.55
38	2.09	1.94	1.85	1.76	1.71	1.68	1.61	1.53
40	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69	1.66	1.59	1.51
50	2.03	1.87	1.78	1.69	1.63	1.60	1.52	1.44
60	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59	1.56	1.48	1.39
70	1.97	1.81	1.72	1.62	1.57	1.53	1.45	1.35
80	1.95	1.79	1.70	1.60	1.54	1.51	1.43	1.32
90	1.94	1.78	1.69	1.59	1.53	1.49	1.41	1.30
100	1.93	1.77	1.68	1.57	1.52	1.48	1.39	1.28
150	1.89	1.73	1.64	1.54	1.48	1.44	1.34	1.22
200	1.88	1.72	1.62	1.52	1.46	1.41	1.32	1.19
1000	1.84	1.68	1.58	1.47	1.41	1.36	1.26	1.08
∞	1.83	1.67	1.57	1.46	1.39	1.35	1.24	1.01

(m,n) درجہ آزادی کی F تقسیم (جدول ج.12)

z کی وہ قیمتیں جن پر $F(z) = 0.99$ ہے۔

n	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$
1	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95
38	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
150	6.81	4.75	3.91	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

(جدول ج.12) تقسیم F کی آزادی درجہ (m,n)
z کی وہ قیمتیں جن پر $F(z)=0.99$ ہے۔

n	$m=10$	$m=15$	$m=20$	$m=30$	$m=40$	$m=50$	$m=100$	$m=\infty$
1	6055.85	6157.28	6208.73	6260.65	6286.78	6302.52	6334.11	6365.85
2	99.40	99.43	99.45	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	27.23	26.87	26.69	26.50	26.41	26.35	26.24	26.13
4	14.55	14.20	14.02	13.84	13.75	13.69	13.58	13.46
5	10.05	9.72	9.55	9.38	9.29	9.24	9.13	9.02
6	7.87	7.56	7.40	7.23	7.14	7.09	6.99	6.88
7	6.62	6.31	6.16	5.99	5.91	5.86	5.75	5.65
8	5.81	5.52	5.36	5.20	5.12	5.07	4.96	4.86
9	5.26	4.96	4.81	4.65	4.57	4.52	4.41	4.31
10	4.85	4.56	4.41	4.25	4.17	4.12	4.01	3.91
11	4.54	4.25	4.10	3.94	3.86	3.81	3.71	3.60
12	4.30	4.01	3.86	3.70	3.62	3.57	3.47	3.36
13	4.10	3.82	3.66	3.51	3.43	3.38	3.27	3.17
14	3.94	3.66	3.51	3.35	3.27	3.22	3.11	3.00
15	3.80	3.52	3.37	3.21	3.13	3.08	2.98	2.87
16	3.69	3.41	3.26	3.10	3.02	2.97	2.86	2.75
17	3.59	3.31	3.16	3.00	2.92	2.87	2.76	2.65
18	3.51	3.23	3.08	2.92	2.84	2.78	2.68	2.57
19	3.43	3.15	3.00	2.84	2.76	2.71	2.60	2.49
20	3.37	3.09	2.94	2.78	2.69	2.64	2.54	2.42
22	3.26	2.98	2.83	2.67	2.58	2.53	2.42	2.31
24	3.17	2.89	2.74	2.58	2.49	2.44	2.33	2.21
26	3.09	2.81	2.66	2.50	2.42	2.36	2.25	2.13
28	3.03	2.75	2.60	2.44	2.35	2.30	2.19	2.06
30	2.98	2.70	2.55	2.39	2.30	2.25	2.13	2.01
32	2.93	2.65	2.50	2.34	2.25	2.20	2.08	1.96
34	2.89	2.61	2.46	2.30	2.21	2.16	2.04	1.91
36	2.86	2.58	2.43	2.26	2.18	2.12	2.00	1.87
38	2.83	2.55	2.40	2.23	2.14	2.09	1.97	1.84
40	2.80	2.52	2.37	2.20	2.11	2.06	1.94	1.80
50	2.70	2.42	2.27	2.10	2.01	1.95	1.82	1.68
60	2.63	2.35	2.20	2.03	1.94	1.88	1.75	1.60
70	2.59	2.31	2.15	1.98	1.89	1.83	1.70	1.54
80	2.55	2.27	2.12	1.94	1.85	1.79	1.65	1.49
90	2.52	2.24	2.09	1.92	1.82	1.76	1.62	1.46
100	2.50	2.22	2.07	1.89	1.80	1.74	1.60	1.43
150	2.44	2.16	2.00	1.83	1.73	1.66	1.52	1.33
200	2.41	2.13	1.97	1.79	1.69	1.63	1.48	1.28
1000	2.34	2.06	1.90	1.72	1.61	1.54	1.38	1.11
∞	2.32	2.04	1.88	1.70	1.59	1.52	1.36	1.01

جدول ج.13: بلا منصوبہ متغیر T کا تفاعل تقسیم $F(x) = P(T \leq x)$ (برائے حصہ 24.19)

مثال کے طور پر $n = 3$ پر $F(2) = 1 - 0.167 = 0.833$ ہو گا۔
$n = 4$ پر $F(3) = 1 - 0.375 = 0.625$ اور $F(4) = 1 - 0.167 = 0.833$ ہوں گے۔

x	$n = 3$
	0.
0	167
1	500

x	$n = 4$
	0.
0	042
1	167
2	375

x	$n = 5$
	0.
0	008
1	042
2	117
3	242
4	408

x	$n = 6$
	0.
0	001
1	008
2	028
3	068
4	136
5	235
6	360
7	500

x	$n = 7$
	0.
1	001
2	005
3	015
4	035
5	068
6	119
7	191
8	281
9	386
10	500

x	$n = 8$
	0.
2	001
3	003
4	007
5	016
6	031
7	054
8	089
9	138
10	199
11	274
12	360
13	452

x	$n = 9$
	0.
4	001
5	003
6	006
7	012
8	022
9	038
10	060
11	090
12	130
13	179
14	238
15	306
16	381
17	460

x	$n = 10$
	0.
6	001
7	002
8	005
9	008
10	014
11	023
12	036
13	054
14	078
15	108
16	146
17	190
18	242
19	300
20	364
21	431
22	500

x	$n = 11$
	0.
8	001
9	002
10	003
11	005
12	008
13	013
14	020
15	030
16	043
17	060
18	082
19	109
20	141
21	179
22	223
23	271
24	324
25	381
26	440
27	500

(جدول ج.13)

x	$n = 20$
	0.
50	001
51	002
52	002
53	003
54	004
55	005
56	006
57	007
58	008
59	010
60	012
61	014
62	017
63	020
64	023
65	027
66	032
67	037
68	043
69	049
70	056
71	064
72	073
73	082
74	093
75	104
76	117
77	130
78	144
79	159
80	176
81	193
82	211
83	230
84	250
85	271
86	293
87	315
88	339
89	362
90	387
91	411
92	436
93	462
94	487

x	$n = 19$
	0.
43	001
44	002
45	002
46	003
47	003
48	004
49	005
50	006
51	008
52	010
53	012
54	014
55	017
56	021
57	025
58	029
59	034
60	040
61	047
62	054
63	062
64	072
65	082
66	093
67	105
68	119
69	133
70	149
71	166
72	184
73	203
74	223
75	245
76	267
77	290
78	314
79	339
80	365
81	391
82	418
83	445
84	473
85	500

x	$n = 18$
	0.
38	001
39	002
40	003
41	003
42	004
43	005
44	007
45	009
46	011
47	013
48	016
49	020
50	024
51	029
52	034
53	041
54	048
55	056
56	066
57	076
58	088
59	100
60	115
61	130
62	147
63	165
64	184
65	205
66	227
67	250
68	275
69	300
70	327
71	354
72	383
73	411
74	441
75	470
76	500

x	$n = 17$
	0.
32	001
33	002
34	002
35	003
36	004
37	005
38	007
39	009
40	011
41	014
42	017
43	021
44	026
45	032
46	038
47	046
48	054
49	064
50	076
51	088
52	102
53	118
54	135
55	154
56	174
57	196
58	220
59	245
60	271
61	299
62	328
63	358
64	388
65	420
66	452
67	484

x	$n = 16$
	0.
27	001
28	002
29	002
30	003
31	004
32	006
33	008
34	010
35	013
36	016
37	021
38	026
39	032
40	039
41	048
42	058
43	070
44	083
45	097
46	114
47	133
48	153
49	175
50	199
51	225
52	253
53	282
54	313
55	345
56	378
57	412
58	447
59	482

x	$n = 15$
	0.
23	001
24	002
25	003
26	004
27	006
28	008
29	010
30	014
31	018
32	023
33	029
34	037
35	046
36	057
37	070
38	084
39	101
40	120
41	141
42	164
43	190
44	218
45	248
46	279
47	313
48	349
49	385
50	423
51	461
52	500

x	$n = 14$
	0.
18	001
19	002
20	002
21	003
22	005
23	007
24	010
25	013
26	018
27	024
28	031
29	040
30	051
31	063
32	079
33	096
34	117
35	140
36	165
37	194
38	225
39	259
40	295
41	334
42	374
43	415
44	457
45	500

x	$n = 13$
	0.
14	001
15	001
16	002
17	003
18	005
19	007
20	011
21	015
22	021
23	029
24	038
25	050
26	064
27	082
28	102
29	126
30	153
31	184
32	218
33	255
34	295
35	338
36	383
37	429
38	476

x	$n = 12$
	0.
11	001
12	002
13	003
14	004
15	007
16	010
17	016
18	022
19	031
20	043
21	058
22	076
23	098
24	125
25	155
26	190
27	230
28	273
29	319
30	369
31	420
32	473

جدول ج.14: تفاعل خلل، سائن اور کوسائن تکملات

تفاعل خلل، سائن اور کوسائن تکملات (بالترتیب ضمیمہ ب میں مساوات ب.33، مساوات ب.39 اور مساوات ب.41)

x	$\operatorname{erf} x$	$\operatorname{Si}(x)$	$\operatorname{ci}(x)$	x	$\operatorname{erf} x$	$\operatorname{Si}(x)$	$\operatorname{ci}(x)$
0.0	0.0000	0.0000	∞	2.0	0.9953	1.6054	-0.4230
0.2	0.2227	0.1996	1.0422	2.2	0.9981	1.6876	-0.3751
0.4	0.4284	0.3965	0.3788	2.4	0.9993	1.7525	-0.3173
0.6	0.6039	0.5881	0.0223	2.6	0.9998	1.8004	-0.2533
0.8	0.7421	0.7721	-0.1983	2.8	0.9999	1.8321	-0.1865
1.0	0.8427	0.9461	-0.3374	3.0	1.0000	1.8487	-0.1196
1.2	0.9103	1.1080	-0.4205	3.2	1.0000	1.8514	-0.0553
1.4	0.9523	1.2562	-0.4620	3.4	1.0000	1.8419	0.0045
1.6	0.9763	1.3892	-0.4717	3.6	1.0000	1.8219	0.0580
1.8	0.9891	1.5058	-0.4568	3.8	1.0000	1.7934	0.1038
2.0	0.9953	1.6054	-0.4230	4.0	1.0000	1.7582	0.1410

فرہنگ